



**HAL**  
open science

## Entropies et ensembles flous intuitionnistes

Christophe Marsala, Bernadette Bouchon-Meunier

► **To cite this version:**

Christophe Marsala, Bernadette Bouchon-Meunier. Entropies et ensembles flous intuitionnistes. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2019), Nov 2019, Alès, France. pp.143-148. hal-02407655

**HAL Id: hal-02407655**

**<https://hal.science/hal-02407655v1>**

Submitted on 12 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Entropies et ensembles flous intuitionnistes

## Entropies of intuitionistic fuzzy sets

C. Marsala<sup>1</sup>

B. Bouchon-Meunier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sorbonne Université, CNRS, LIP6, F-75005 Paris, France.

Christophe.Marsala@lip6.fr

<sup>2</sup> Sorbonne Université, CNRS, LIP6, F-75005 Paris, France.

Bernadette.Bouchon-Meunier@lip6.fr

### Résumé :

Dans cet article, nous proposons une approche pour comparer des mesures d'entropie dans le cadre des sous-ensembles flous intuitionnistes (SFI) d'Atanassov. Dans cette approche, un SFI est représenté sous la forme d'un nombre complexe qui est ensuite utilisé pour réécrire les mesures d'entropie. Ainsi, grâce à cette nouvelle forme, une comparaison des comportements des différentes mesures peut être réalisée de façon plus aisée.

### Mots-clés :

Entropie, mesure d'information, ensemble flou intuitionniste d'Atanassov, monotonie

### Abstract:

In this paper, an approach to compare measures of entropy in the setting of Atanassov's intuitionistic fuzzy sets (IFS) is introduced. This approach considers IFS as complex numbers in order to enable a rewriting of the measures of entropy that could make easier their comparison.

### Keywords:

Entropy, measure of information, Atanassov's intuitionistic fuzzy set, monotonicity

## 1 Introduction

Mesurer l'information est une tâche cruciale en intelligence artificielle. Un des défis majeurs dans ce domaine est d'arriver à définir ce qu'est l'*information*. Lotfi Zadeh [18] a proposé de considérer deux aspects de l'information : probabiliste et possibiliste, ainsi que leur combinaison. Dans la littérature, on peut citer les travaux fondamentaux de Joseph Kampé de Fériet qui a introduit une nouvelle approche pour considérer l'information et son agrégation de façon globale [11, 12].

Dans des travaux précédents, nous avons étudié la monotonie des mesures d'entropie et montré l'importance de cette propriété. Nous avons

pu mettre en évidence le fait qu'il existe plusieurs catégories de monotonie pour ces mesures [4, 5]. Cependant, mettre en évidence le fait que deux mesures d'entropies partagent la même propriété est généralement insuffisant d'un point de vue applicatif : pour choisir entre deux mesures (selon le cadre d'utilisation souhaité), il est plus informatif de s'intéresser à leurs différences de comportement.

Dans ce travail, nous nous attachons à comparer des mesures d'information. Nous nous plaçons plus précisément dans le cadre des sous-ensembles flous intuitionnistes d'Atanassov [2] et des mesures d'entropie qui leur sont associées pour mesurer l'information qu'ils transmettent. Comme la comparaison pour ce type d'ensembles définis par 2 degrés, nous introduisons une représentation complexe afin de faciliter la comparaison de mesures dans un tel cadre d'ensembles bi-polaires.

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2, un rapide rappel de l'information et de ses vues permet de décrire le contexte de cette recherche. Dans la section 3, nous rappelons les bases des sous-ensembles flous intuitionnistes d'Atanassov, ainsi que quelques mesures d'entropie qui leur ont été associées. Dans la section 4, nous présentons notre approche pour comparer des mesures d'entropie de sous-ensembles flous intuitionnistes, basée sur une représentation complexe de leurs degrés d'appartenance. La dernière section conclut le papier et présente quelques perspectives de recherche.

## 2 L'information et ses vues

Soit  $U$  un ensemble d'objets (par exemple des cas ou des événements) associés à une représentation du monde réel, et  $\mathcal{B}$  une  $\sigma$ -algèbre définie sur  $U$ . Afin de manipuler formellement ou d'évaluer un ensemble  $X$  de  $\mathcal{B}$ , une représentation formelle de  $X$ , une *mesure*, est généralement utilisée pour identifier des objets  $x \in X$  à travers une *vue* donnée. Poursuivant l'approche introduite dans [4], nous considérons qu'une vue est *une mesure qui rend compte de l'information sur les objets de  $X$* . Une telle vue dépend de l'objectif poursuivi par l'utilisateur.

Par exemple, pour faire une prédiction dans un environnement classique, la probabilité de l'occurrence de chaque objet  $x$  de  $X$  constitue une vue courante qui apporte de la connaissance sur les objets. Un autre exemple correspond au cas où il est nécessaire de définir une catégorie vague d'objets, dans lequel une vue intéressante est la fonction d'appartenance qui définit la catégorie comme un sous-ensemble flou de  $X$ .

Dans d'autres cas, une vue sur  $X$  peut être définie comme l'association d'un poids à chaque élément de  $X$ . En théorie de l'évidence, l'attribution de masses de croyance est un exemple d'une telle association [13]. Mais les poids peuvent être d'une tout autre nature (l'âge de chaque élément  $x_i$ , un prix, une durée, etc.).

Les sous-ensembles flous intuitionnistes d'Atanassov<sup>1</sup> (SFI) constituent une vue particulière composée de deux éléments : le degré en faveur de la caractérisation de  $X$  et le degré en sa défaveur [2, 17].

Généralement, une vue permet d'ordonner des éléments de  $X$  afin d'en sélectionner un, par exemple l'événement le plus probable ou le sous-ensemble flou le plus représentatif de  $X$ .

Une *mesure d'information* permet l'agrégation

1. Dans ce qui suit, nous parlerons simplement de "sous-ensembles flous intuitionnistes".

de toutes les valeurs d'une vue pour produire de la connaissance. Elle doit être choisie en fonction de l'information à manipuler à travers la vue, et posséder des propriétés spécifiques [4] telles que la monotonie, la maximalité ou la minimalité.

Par exemple, dans le cas probabiliste, il existe différentes mesures d'information pour évaluer l'information globale apportée par la vue que constitue une distribution de probabilités  $p$  sur  $X$ . Dans ce cas, la mesure d'information d'un ensemble d'événements (et par conséquent de la vue que constitue une distribution de probabilité  $p$ ) est l'agrégation de la mesure d'information de chaque événement pris individuellement. Une telle agrégation est souvent une moyenne pondérée, comme c'est le cas dans l'entropie bien connue de Shannon [14], généralement considérée comme une mesure du désordre probabiliste de l'ensemble  $X$ .

Quand la vue n'est pas une distribution de probabilité, une autre mesure d'information doit être définie. Par exemple, dans un contexte flou, De Luca and Termini [7] ont proposé de définir la *mesure d'entropie d'un sous-ensemble flou* défini sur  $X$  de fonction d'appartenance  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ .

Comme dit précédemment, l'entropie de Shannon est généralement considérée comme une mesure du désordre existant lorsqu'on doit prédire l'occurrence d'un élément de  $X$ . Plus l'entropie est élevée, moins l'occurrence de l'événement  $x$  de  $X$  peut être prédite.

Cependant, une autre interprétation fait référence à l'interprétation physique de l'entropie de Boltzmann. En physique et en thermodynamique, l'entropie d'un système augmente avec le temps et est maximale quand toutes les particules étudiées ont la même température.

En fait, l'entropie peut être considérée comme une *mesure de l'homogénéité* de l'ensemble  $X$  perçue par l'intermédiaire de la vue considérée. Il est clair que les mesures existantes, dans le

cas probabiliste aussi bien que dans le cas flou, tendent à évaluer l'homogénéité de  $X$ .

- L'entropie de Shannon est maximale quand toutes les probabilités sont égales ;
- L'entropie de De Luca & Termini est maximale quand tous les éléments de  $X$  ont le même degré d'appartenance  $\frac{1}{2}$ , ce qui fait référence à une appartenance incomplète au sous-ensemble flou.

Une étude a été faite dans [5] pour mettre en lumière la propriété de monotonie qui est sous-jacente à la propriété d'homogénéité. Différentes conceptions de la monotonie y sont présentées, ainsi que des mesures existantes les satisfaisant.

Nous mettons ici un éclairage particulier sur le cas des sous-ensembles flous intuitionnistes, pour lesquels diverses mesures d'information et entropies ont été proposées.

### 3 Sous-ensembles flous intuitionnistes

Nous rappelons d'abord quelques concepts de base des sous-ensembles flous intuitionnistes<sup>2</sup>.

#### 3.1 Rappel de notions de base

Soit  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$  un univers, un *sous-ensemble flou intuitionniste* (SFI)  $A$  de  $U$  est défini comme [2] :

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in U\}$$

avec  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ , et  $\nu_A : U \rightarrow [0, 1]$  telles que  $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in U$ . Ici,  $\mu_A(x)$  and  $\nu_A(x)$  représentent respectivement le degré d'appartenance et le degré de non-appartenance de  $x$  à  $A$ .

Étant donné un sous-ensemble flou intuitionniste  $A$  de  $U$ , l'*index intuitionniste* de  $x$  à  $A$  est défini pour tout  $x \in U$  comme

$$\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \nu_A(x)).$$

<sup>2</sup>. L'utilisation de la terminologie "intuitionniste" reste controversée et doit être rapprochée des "interval-valued fuzzy sets", voir à ce propos [9].

Cet index représente la marge d'hésitation existant dans l'appartenance de  $x$  à  $A$  ou le manque de connaissance sur  $A$ .

#### 3.2 Entropies de SFI

**Principales entropies existantes.** Il existe dans la littérature diverses définitions d'entropie pour les sous-ensembles flous intuitionnistes.

Dans [15], l'entropie d'un SFI  $A$  est définie comme :

$$E_1(A) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|.$$

D'autres définitions de l'entropie d'un SFI sont introduites dans [6], à partir d'extensions à des SFI de la distance de Hamming et de la distance euclidienne. L'entropie suivante est par exemple proposée :

$$E_2(A) = \sum_{i=1}^n \pi_A(x_i) = 1 - \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i)).$$

Dans [10], l'entropie suivante est introduite :

$$E_3(A) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|)(1 + \pi_A(x_i)).$$

**Définitions de monotonie.** Toutes les entropies de SFI satisfont une propriété de monotonie, mais les concepts de monotonie varient selon les auteurs.

En général, la monotonie est définie en fonction d'un ordre partiel  $\leq$  sur les SFI. Cet ordre partiel diffère selon les auteurs. Dans ce qui suit, nous présentons des définitions de tels ordres, interprétés comme *moins flou*, utilisés par [6, 10, 15].

Soit  $E(A)$  l'entropie du SFI  $A$ . On peut identifier les ordres partiels suivants :

(M1)  $E(A) \leq E(B)$ , si  $A$  est *moins flou* que  $B$ ,

c'est-à-dire que  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  et  $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$  quand  $\mu_B(x) \leq \nu_B(x)$ ,  $\forall x \in U$ , ou  $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$  et  $\nu_A(x) \leq \nu_B(x)$  quand  $\mu_B(x) \geq \nu_B(x)$ ,  $\forall x \in U$ .

(M2)  $E(A) \leq E(B)$  si  $A \leq B$

c'est-à-dire que  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  et  $\nu_A(x) \leq \nu_B(x)$ ,  $\forall x \in U$ ,

Chaque définition de la monotonie engendre une forme particulière d'entropie  $E$  :

- il peut être montré que  $E_1$  satisfait (M1);
- $E_2$  a été introduit dans [6] pour satisfaire la propriété (M2);
- $E_3$  a été définie dans [10] à partir de la définition de monotonie (M1).

#### 4 Comparaison de mesures pour les SFI

L'étude de mesures d'information ou d'entropies est généralement fondée sur des propriétés requises. Dans la section précédente, nous avons mis l'accent sur la propriété de monotonie, dont il existe diverses versions. Afin de faciliter la comparaison des mesures associées, nous proposons d'utiliser la représentation de SFI par des nombres complexes présentée dans [4].

**Représentation d'un SFI par un nombre complexe.** Représenter un SFI par un nombre complexe est très naturel. Dans [3], une telle représentation est introduite comme une représentation géométrique d'un SFI. De plus, une telle représentation peut aussi servir à représenter des opérations de base sur les SFI, telles que l'intersection ou l'union [1, 16], ou encore à décrire les sous-ensembles flous pythagoriciens [8].

Chaque  $x \in U$  étant associé à deux valeurs  $\mu_A(x)$  et  $\nu_A(x)$ , l'appartenance de  $x$  à  $A$  peut être représentée par un point dans un espace à deux dimensions. Ainsi,  $\mu_A(x)$  et  $\nu_A(x)$  représentent les coordonnées cartésiennes de

ce point. Utiliser un nombre complexe est équivalent à représenter un tel point par des coordonnées polaires. Nous montrerons qu'une telle représentation facilite certaines analyses des mesures que nous étudions.

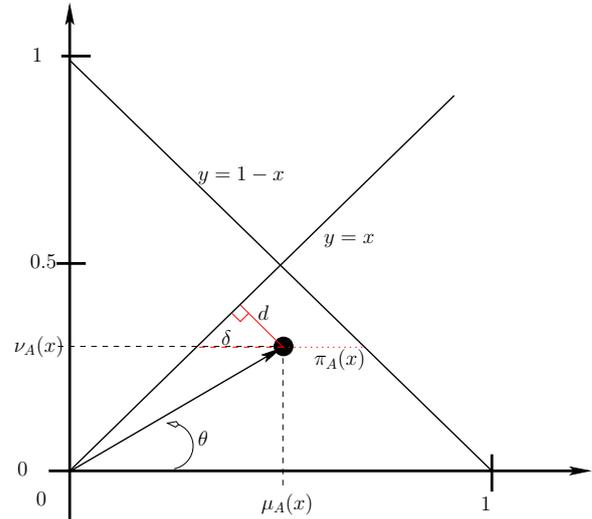


Figure 1 – Représentation géométrique d'un sous-ensemble flou intuitionniste.

Pour chaque  $x \in U$ , le SFI  $A$  défini par  $\mu_A(x)$  et  $\nu_A(x)$  est représenté par le nombre complexe  $z_A(x) = \mu_A(x) + i\nu_A(x)$  (voir la Figure 1). Un SFI est donc un point sous (ou sur) la droite  $y = 1 - x$ . Quand il est sur la droite, il correspond au cas particulier d'un sous-ensemble flou.

Dans ce qui suit, nous concentrons notre étude sur le cas des SFI qui sont aussi sous la droite  $y = x$  (c'est-à-dire tels que  $\mu_A(x) \geq \nu_A(x)$ ), les autres cas pouvant être déduits aisément par symétrie par rapport à la droite  $y = x$ .

Utilisant la notation classique des nombres complexes, pour chaque  $z_A(x)$ , nous notons  $\theta_A(x) = \arg(z_A(x))$  and  $|z_A(x)| = \sqrt{\mu_A(x)^2 + \nu_A(x)^2}$  (voir Figure 1).

Il est facile de voir que nous avons  $\mu_A(x) = |z_A(x)| \cos \theta_A(x)$ ,  $\nu_A(x) = |z_A(x)| \sin \theta_A(x)$ . pour tout  $z_A(x)$ .

Pour simplifier, nous noterons dans ce qui suit  $z_A(x)$  et  $\theta_A(x)$  par  $z$  and  $\theta$ .

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mu_A(x) + \nu_A(x) &= |z|(\cos \theta + \sin \theta) \\
&= |z|\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \right) \\
&= |z|\sqrt{2} \\
&\quad \left( \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta \right) \\
&= |z|\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

(considérant que  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$  pour tout  $a, b$  dans  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ).

Et par conséquent :

$$\pi_A(x) = 1 - \sqrt{2} |z| \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

D'autre part, soit  $d$  la distance entre  $(\mu_A(x), \nu_A(x))$  et la droite  $y = x$ , et  $\delta$  la projection par rapport à l'axe  $U$  de  $(\mu_A(x), \nu_A(x))$  sur  $y = x$  (ie.  $\delta = |\mu_A(x) - \nu_A(x)|$ ).

Il est immédiat de voir que :

$$d = |z_A(x)| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \text{ et } \delta = \frac{d}{\sin \frac{\pi}{4}}.$$

Nous avons donc  $\delta = \sqrt{2} |z_A(x)| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ .

Dans un souci de simplicité quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons dans toute la suite  $\mu_A(x_i), \nu_A(x_i), z_A(x_i)$  et  $\theta_A(x_i)$  par  $\mu_i, \nu_i, z_i$  and  $\theta_i$ .

**Réécriture des entropies de SFI.** Avec les notations que nous venons d'introduire, l'entropie  $E_1$  peut-être réécrite comme suit :

$$E_1(A) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2n} \sum_{i=1}^n |z_i| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_i\right)$$

avec  $z_i = \mu_i + i \nu_i$ ,  $\theta_i = \arg(z_i)$  et  $|z_i| = \sqrt{\mu_i^2 + \nu_i^2}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

Avec cette nouvelle représentation des SFI, il est facile de voir que :

- pour  $\theta_i$  donné,  $E_1$  décroît quand  $|z_i|$  croît (c'est-à-dire quand le SFI se rapproche de la droite  $y = 1 - x$  et donc qu'il tend à être un sous-ensemble flous classique) : plus un SFI est près de la droite  $y = 1 - x$ , plus son entropie est faible.
- pour  $|z_i|$  donné,  $E_1$  croît quand  $\theta_i$  décroît (c'est-à-dire quand la connaissance sur la non-appartenance faiblit) :

plus un SFI est près de la droite  $y = x$ , plus son entropie est élevée.

Une étude similaire peut être faite avec  $E_2$ . Avec notre représentation des SFI, elle peut être réécrite comme :

$$E_2(A) = 1 - \sqrt{2} \sum_{i=1}^n |z_i| \sin\left(\theta_i + \frac{\pi}{4}\right).$$

et nous pouvons voir que :

- pour  $\theta_i$  donné,  $E_2$  décroît quand  $|z_i|$  croît : plus un SFI est près de l'origine  $(0, 0)$ , plus son entropie est faible.
- pour  $|z_i|$  donné,  $E_2$  décroît quand  $\theta_i$  croît : plus un SFI est loin de la droite  $y = x$ , plus son entropie est élevée.

Il est intéressant de noter ici une différence de comportement entre  $E_2$  et  $E_1$  : si elles varient de façon similaire par rapport à  $|z_i|$ , leurs variations par rapport à  $\theta_i$  sont opposées. Il est intéressant de noter que ce type d'observation de la différence de comportements entre ces deux mesures est grandement facilité par l'utilisation de la représentation complexe.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous introduisons une nouvelle approche permettant de comparer des mesures d'entropie dans le cadre des sous-ensembles flous intuitionnistes d'Atanassov (SFI). Un SFI est représenté par un nombre complexe, ce qui conduit à réécrire les entropies habituelles de façon simple. Cette approche est prometteuse car elle permet de mettre en lumière les principales différences de comportement qui existent entre les mesures, qu'il n'est pas aisé de mettre en évidence à partir de leur représentation classique.

Dans un futur travail, d'autres mesures moins couramment utilisées seront étudiées afin d'obtenir une meilleure cartographie des entropies existant dans cet environnement.

De plus, comme un sous-ensemble flou est un cas particulier de SFI, une telle approche pourra

être utilisée pour mieux comprendre les mesures d'information de sous-ensembles flous.

## Références

- [1] M. Ali, D. E. Tamir, N. D. Rishe, and A. Kandel. Complex intuitionistic fuzzy classes. In *Proc. of the IEEE Conf. on Fuzzy Systems*, pages 2027–2034, 2016.
- [2] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20 :87–96, 1986.
- [3] K. T. Atanassov. *On intuitionistic fuzzy sets theory*, volume 283. Springer, 2012.
- [4] B. Bouchon-Meunier and C. Marsala. Entropy measures and views of information. In J. Kacprzyk, D. Filev, and G. Beliakov, editors, *Granular, Soft and Fuzzy Approaches for Intelligent Systems*, pages 47–63. Springer Int. Publishing, 2017.
- [5] B. Bouchon-Meunier and C. Marsala. Entropy and monotonicity. In J. Medina, M. Ojeda-Aciego, J. L. Verdegay, D. A. Pelta, I. P. Cabrera, B. Bouchon-Meunier, and R. R. Yager, editors, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Theory and Foundations*, pages 332–343. Springer Int. Publishing, 2018.
- [6] P. Burillo and H. Bustince. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 78 :305–316, 1996.
- [7] A. de Luca and S. Termini. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control*, 20 :301–312, 1972.
- [8] S. Dick, R. R. Yager, and O. Yazdanbakhsh. On pythagorean and complex fuzzy set operations. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 24(5) :1009–1021, Oct. 2016.
- [9] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, and H. Prade. Terminological difficulties in fuzzy set theory—the case of “intuitionistic fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3) :485 – 491, 2005.
- [10] K. Guo and Q. Song. On the entropy for Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets : an interpretation from the perspective of amount of knowledge. *Applied Soft Computing*, 24 :328–340, 2014.
- [11] J. Kampé de Fériet. Mesures de l’information par un ensemble d’observateurs. In Gauthier-Villars, editor, *Comptes Rendus des Scéances de l’Acad. des Sciences*, volume 269 of *série A*, pages 1081–1085, Paris, Déc. 1969.
- [12] J. Kampé de Fériet. Mesure de l’information fournie par un événement. Séminaire sur les questionnaires, 1971.
- [13] G. A. Shafer. *Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, New Jersey, 1976.
- [14] C. E. Shannon. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana, USA, 1948. C. E. Shannon and W. Weaver Eds.
- [15] E. Szmidt and J. Kacprzyk. New measures of entropy for intuitionistic fuzzy sets. In *Proceedings of the Ninth Int. Conf. on Intuitionistic Fuzzy Sets (NIFS)*, volume 11, pages 12–20, Sofia, Bulgaria, May 2005.
- [16] D. E. Tamir, M. Ali, N. D. Rishe, and A. Kandel. Complex number representation of intuitionistic fuzzy sets. In *Proc. of the Worl Conf. on Soft Computing*, Berkeley, CA, USA, 2016.
- [17] R. R. Yager. Some aspects of intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Optimisation and Decision Making*, 8 :67–90, 2009.
- [18] L. A. Zadeh. The information principle. *Information Sciences*, 294 :540–549, February 2015.