HAL
open science

Données endoscopiques d'un groupe déductif connexe: applications d'une construction de Langlands

Bertrand Lemaire, Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Bertrand Lemaire, Jean-Loup Waldspurger. Données endoscopiques d'un groupe déductif connexe: applications d'une construction de Langlands. Canadian Journal of Mathematics, 2020, 10.4153/S0008414X20000334 . hal-02398344

HAL Id: hal-02398344

https://hal.science/hal-02398344v1

Submitted on 7 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

arXiv:1911.03309v1 [math.RT] 8 Nov 2019

DONNÉES ENDOSCOPIQUES D'UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE : APPLICATIONS D'UNE CONSTRUCTION DE LANGLANDS

par

Bertrand Lemaire & Jean-Loup Waldspurger

Résumé. — Soient F un corps global, et G un groupe réductif connexe défini sur F. On prouve que si deux données endoscopiques de G sont équivalentes en presque toute place de F, alors elles sont équivalentes. Le résultat est encore vrai pour l'endoscopie (ordinaire) avec caractère. On donne aussi, pour F global ou local et G quasi-simple simplement connexe, une description des données endoscopiques elliptiques de G.

Abstract. — Let F be a global field, and G a connected reductive group defined over F. We prove that two endoscopic data of G which are equivalent almost everywhere, are equivalent. The result remains true for (non-twisted) endoscopy with character. We also give, for F global or local and G quasi-simple simply connected, a description of the elliptic endoscopic data of G.

Introduction

Soit F un corps global, et soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On fixe une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F. On note Γ_F le groupe de Galois de $\overline{F}/F$, et W_F son groupe de Weil. Pour v une place de F, on note F_v le complété de F en v, et on pose $G_v = G \times_F F_v$. Fixons un élément $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))/\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$ — cf. 1.1. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G. Pour chaque place v de F, cette donnée définit par localisation une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$ de $(G_v, \boldsymbol{a}_v)$. Le premier résultat prouvé ici est :

Proposition 1. — *Si $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont deux données endoscopiques de $(G, \boldsymbol{a})$ telles que les données locales $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ soient équivalentes pour presque tout v, alors les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes.*

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22E50, 22E55.
Mots clefs. — endoscopie ordinaire, donnée endoscopique elliptique, localisation.

L'élément $\boldsymbol{a}$ ne joue en fait aucun rôle puisqu'on se ramène facilement au cas où G est F-quasi-simple et simplement connexe et (forcément) $\boldsymbol{a} = 1$. Par restriction des scalaires à la Weil, on se ramène ensuite au cas où G est (absolument) quasi-simple et simplement connexe. On peut donc supposer, et l'on suppose, que le groupe dual $\hat{G}$ est adjoint et simple. Comme les constructions que nous allons faire sont valables aussi bien dans le cas global que dans le cas local, la lettre F désigne maintenant un corps commutatif qui est soit un corps global soit un corps local. Enfin pour alléger l'écriture, on considère plutôt la forme « galoisienne » des L-groupes. L'adaptation des constructions ci-dessous à leur forme « groupes de Weil » ne pose aucun problème.

Le groupe dual $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est muni d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$. On fixe une paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ conservée par cette action galoisienne. On note Δ l'ensemble de racines simples déterminé par $\hat{B}$, et α_0 l'opposée de la plus grande racine positive. On pose $\Delta_{\mathrm{a}} = \{\alpha_0\} \cup \Delta$. On note $\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$, le diagramme de Dynkin dont l'ensemble des sommets est Δ, resp. Δ_{a}. L'ensemble Ω des éléments de $W = N_{\hat{G}}(\hat{T})/\hat{T}$ qui conservent Δ_{a} s'identifie à un sous-groupe abélien distingué du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ de $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$, et on a la décomposition

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}}) = \Omega \rtimes \mathrm{Aut}(\mathcal{D}).$$

Puisque l'action galoisienne conserve la paire $(\hat{B}, \hat{T})$, elle induit une action sur $\mathcal{D}$. On note E l'extension galoisienne finie de F telle que $\Gamma_E = \ker(\Gamma_F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D}))$.

Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G (on a donc $\mathcal{G}' \subset {}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$). On suppose que s est d'ordre fini d. À équivalence près, on peut supposer $s \in \hat{T}$. On fixe un sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on peut choisir un élément $(g(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'$ dont l'action par conjugaison conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$. Il détermine un élément $w_{G'}(\sigma) \in W$, ainsi qu'une action galoisienne sur $\hat{T}$

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G.$$

Son image est contenue dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$ qui fixent s et conservent $\hat{B}'$. Le point-clé de la construction est une conséquence des résultats de Langlands [**L**]. À s et $\hat{B}'$, Langlands associe un ensemble de racines $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=0,\dots,d-1} \mathfrak{X}_k$. Il démontre qu'à conjugaison près par un élément de W, cet ensemble est soit Δ soit Δ_{a}. Quitte à conjuguer $\hat{G}'$ par un élément $u \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ et à remplacer $\hat{B}'$ par $u(\hat{B}')$, on peut supposer que $\mathfrak{X} = \Delta$ ou $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Alors l'application $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$ est à valeurs dans Ω, et $w_{G'}(\sigma)$ conserve $\mathfrak{X}$. Notons K l'extension galoisienne finie de F telle que Γ_K soit le noyau de l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. On distingue deux cas :

- **Cas 1** : si $\mathfrak{X} = \Delta$, alors $w_{G'}(\sigma) = 1$ et $\mathcal{G}' = \hat{G}' \rtimes \Gamma_F$.
- **Cas 2** : si $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, alors $E \subset K$ et la restriction de l'application $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$ à Γ_E se quotiente en une injection de $\Gamma_{K/E} = \mathrm{Gal}(K/E)$ dans Ω.

Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s)$ de G, avec le même s d'ordre fini d. On note encore $\hat{G}'$ le groupe $Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. On applique les constructions ci-dessus à ces deux données, en choisissant le même sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}'$ pour les deux constructions. On obtient les mêmes ensembles $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_k$

pour les deux données, seules diffèrent (éventuellement) les actions galoisiennes $\sigma_{G'_1}$ et $\sigma_{G'_2}$. On obtient :

— **Cas 1** : si $\mathfrak{X} = \Delta$, les deux données sont équivalentes.

— **Cas 2** : si $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \ldots, d-1$ et $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Grâce à ce résultat, on démontre la proposition 1 dans le cas où les éléments s_1 et s_2 sont d'ordre fini. Notons qu'il suffit de traiter le cas $s_1 = s_2 = s$. On supprime ensuite la restriction sur s grâce aux constructions de Langlands [**L**] pp. 704-705 : elles permettent de construire des données endoscopiques $\boldsymbol{G}''_1 = (G''_1, \mathcal{G}''_1, t)$ et $\boldsymbol{G}''_2 = (G''_2, \mathcal{G}''_2, t)$ de G avec t d'ordre fini, telles que les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes si et seulement si les données $\boldsymbol{G}''_1$ et $\boldsymbol{G}''_2$ le sont (idem pour les données locales $\boldsymbol{G}'_{i,v}$ et $\boldsymbol{G}''_{i,v}$).

Les constructions ci-dessus permettent aussi de décrire les données endoscopiques elliptiques de G. Les hypothèses sont les mêmes qu'avant : F est global ou local ; $\hat{G}$ est adjoint et simple ; et on considère la forme « galoisienne » des L-groupes. Notons $\underline{\mathcal{E}}(G)$ l'ensemble des couples $(\omega_{G'}, \mathcal{O})$ où $\omega_{G'} : \Gamma_F \to \Omega$ est une application telle que l'application

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} \overset{\text{déf}}{=} \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$$

soit un homomorphisme de Γ_F dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, et $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble non vide de Δ_{a} qui est conservé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et qui forme une unique orbite pour cette action. Deux tels couples $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont dits équivalents s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$ et $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Notons $\underline{E}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\underline{\mathcal{E}}(G)$.

Considérons un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$. Posons

$$d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha).$$

Fixons $\zeta_d \in \mathbb{C}^\times$ une racine primitive de 1 d'ordre d. Soit s l'unique élément de $\hat{T}$ tel que $\alpha(s) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)$ et $\alpha(s) = \zeta_d$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$. Il est fixe par l'action galoisienne $\sigma_{G'}$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. Notons $\mathcal{G}'$ le sous-ensemble de ${}^L G$ formé des éléments $(g\tilde{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$ pour $g \in \hat{G}'$ et $\sigma \in \Gamma_F$, où $\tilde{\omega}_{G'}(\sigma)$ est un représentant quelconque de $\omega_{G'}(\sigma)$ dans $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'ensemble $\mathcal{G}'$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit de la façon habituelle une L-action de Γ_F sur $\hat{G}'$. Soit G' un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de G. L'hypothèse que $\mathcal{O}$ est une seule orbite sous l'action de Γ_F implique que cette donnée est elliptique. Le second résultat prouvé ici est :

Proposition 2. — *L'application qui, à un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$, associe la donnée $\boldsymbol{G}'$, se quotiente en une bijection de $\underline{E}(G)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G.*

L'article comporte deux sections, la première est dédiée à la preuve de la proposition 1, la seconde à celle de la proposition 2. À partir de 1.3, le groupe G est (absolument) quasi-simple et simplement connexe, et on utilise la forme « galoisienne » des L-groupes.

1. Équivalence presque partout de données endoscopiques

1.1. Le résultat. — On considère un corps commutatif F qui est soit un corps global (corps de nombres ou corps de fonctions) soit un corps local ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p((t))$). On fixe une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F. On note Γ_F le groupe de Galois de $\overline{F}/F$, et W_F son groupe de Weil. Via l'homomorphisme naturel $W_F \to \Gamma_F$, le groupe W_F agit sur tout ensemble sur lequel agit Γ_F. Toutes les extensions séparables finies de F seront supposées incluses dans $\overline{F}$. Pour une extension séparable finie K de F, on note Γ_K le groupe de Galois de $\overline{F}/K$, et W_K son groupe de Weil. Si de plus K/F est galoisienne, on note $\Gamma_{K/F}$ $(= \Gamma_F/\Gamma_K)$ le groupe de Galois de K/F.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On note $\hat{G}$ le groupe dual de G. Il est muni d'une action galoisienne notée $\sigma \mapsto \sigma_G$. On note ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$ le L-groupe de G, et $Z(\hat{G})$ le centre de $\hat{G}$. Dans le cas local on fixe un élément $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))$, et dans le cas global on fixe $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))/\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$, où $\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$ est le noyau de l'homomorphisme de localisation

$$\mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G})) \to \prod_v \mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(\hat{G})).$$

D'après un théorème de Langlands, à cet élément $\boldsymbol{a}$ correspond un caractère (i.e. un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$) $\boldsymbol{\omega}$ de $G(F)$ — cf. [**LL, W**]. On peut supposer, mais ce n'est pas nécessaire, que $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $Z(G;F)$; sinon la théorie est vide. Ici $Z(G;F)$ est le groupe des points F–rationnels du centre de G. Nous utilisons la notion de *donnée endoscopique de* $(G, \boldsymbol{a})$ telle qu'elle est définie dans [**MW**, I.1.5, VI.3.1] (1). Il s'agit donc d'endoscopie ordinaire (i.e. non tordue) avec caractère. Une telle donnée est notée $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$. On définit la notion d'équivalence, ou d'isomorphisme, entre deux telles données, et en particulier, le groupe $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{G}')$ des automorphismes de $\boldsymbol{G}'$. Ce groupe contient $\hat{G}' = \mathcal{G}' \cap \hat{G}$. Rappelons que $\hat{G}'$ est la composante neutre $Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ du centralisateur de s dans $\hat{G}$ (munie d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ qui en fait un groupe dual de G').

On suppose maintenant que F est un corps global. Pour chaque place v de F, on fixe un prolongement $\overline{v}$ de v à $\overline{F}$. Le fixateur Γ_v de $\overline{v}$ dans Γ_F s'identifie à Γ_{F_v} où F_v est le complété de F en v. On a aussi une identification $W_{F_v} \subset W_F$. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $(G, \boldsymbol{a})$. Pour chaque place v de F, on en déduit par localisation une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$ de $(G_v, \boldsymbol{a}_v)$, où $G_v = G \times_F F_v$ et $\boldsymbol{a}_v \in \mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(\hat{G}))$. En particulier, le caractère $\boldsymbol{\omega}_v$ de $G(F_v)$ correspondant à $\boldsymbol{a}_v$

1. Le peu que nous utilisons de loc. cit. est valable en toute caractéristique.

est le prolongement (par continuité) de $\boldsymbol{\omega}$, et $\mathcal{G}'_v$ est le sous-groupe des $(g,w) \in \mathcal{G}'$ tels que $w \in W_{F_v}$.

La proposition suivante est le résultat principal de cette section 1.

Proposition. — *Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ de $(G, \boldsymbol{a})$. On suppose que pour presque toute place v de F, les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes. Alors les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes.*

Remarque. — On a besoin en fait que les données locales soient équivalentes en un ensemble de places auquel s'applique le théorème de Tchebotarev, c'est-à-dire qui soit analytiquement dense. Sinon, il est possible de produire un groupe G et deux données endoscopiques elliptiques $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ de G (avec $\boldsymbol{a} = 1$) qui vérifient les conditions suivantes :

— les données locales $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont simultanément elliptiques ou non elliptiques, et l'ensemble des places v de F où elles sont elliptiques est infini ;

— les données locales $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes en toute place v de F où elles sont elliptiques ;

— les données $\boldsymbol{G}_1$ et $\boldsymbol{G}_2$ sont non équivalentes.

1.2. Réduction au cas où $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est simple. — Revenons à F global ou local. Soit G_{SC} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G. Son groupe dual est le groupe adjoint $\hat{G}_{\mathrm{AD}} = \hat{G}/Z(\hat{G})$, et toute donnée endoscopique $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $(G, \boldsymbol{a})$ définit une donnée endoscopique $\overline{\boldsymbol{G}}' = (\overline{G}, \overline{\mathcal{G}}', \bar{s})$ de G_{SC}. L'élément $\bar{s}$ est l'image de s dans $\hat{G}_{\mathrm{AD}}$, la composante neutre de son centralisateur $Z_{\hat{G}_{\mathrm{AD}}}(\bar{s})^\circ = \hat{G}'/Z(\hat{G})$ est munie de l'action galoisienne déduite de $\sigma_{G'}$, $\overline{G}'$ est un F-groupe réductif connexe quasi-déployé dont $\hat{G}'/Z(\hat{G})$ est le groupe dual, et $\overline{\mathcal{G}}' = \mathcal{G}'/Z(\hat{G})$.

Soient $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ deux données endoscopiques de $(G, \boldsymbol{a})$. Elles définissent comme ci-dessus des données endoscopiques $\overline{\boldsymbol{G}}'_1$ et $\overline{\boldsymbol{G}}'_2$ de G_{SC}. Par définition, un élément x de $\hat{G}$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ si et seulement si l'image $\bar{x}$ de x dans $\hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est une équivalence entre $\overline{\boldsymbol{G}}'_1$ et $\overline{\boldsymbol{G}}'_2$. Si F est global, l'application $\boldsymbol{G}' \mapsto \overline{\boldsymbol{G}}'$ commute à la localisation. On en déduit qu'il suffit de prouver la proposition de 1.1 dans le cas où G est semisimple simplement connexe et (forcément) $\boldsymbol{a} = 1$.

On suppose désormais $G = G_{\mathrm{SC}}$ (et toujours F global ou local). On fixe une paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ conservée par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$. On note Σ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et Σ^+, resp. Δ, le sous-ensemble de racines positives, resp. simples, déterminé par $\hat{B}$. Notons $\mathcal{D}$ le diagramme de Dynkin dont l'ensemble de sommets est Δ. Puisque la paire $(\hat{B}, \hat{T})$ est stable par l'action galoisienne, cette dernière induit une action sur $\mathcal{D}$ et peut-être considérée comme un homomorphisme $\Gamma_F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. On a la décomposition

$$\hat{G} = \hat{G}_1 \times \cdots \times \hat{G}_d$$

où $\hat{G}_i$ est simple et adjoint. On note

$$G = G_1 \times \cdots \times G_d$$

la décomposition duale : G_i est un groupe semisimple simplement connexe, défini sur $\overline{F}$ et (absolument) quasi-simple. Pour $i = 1, \dots, d$, on note $\mathcal{D}_i$ la composante connexe de $\mathcal{D}$ correspondant à $\hat{G}_i$. On a la décomposition

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_d.$$

Le groupe G est un produit direct de F-groupes semisimples simplement connexes et F-quasi-simples, chacun d'eux correspondant à une orbite de Γ_F dans l'ensemble $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d\}$.

On suppose dans un premier temps que G est F-quasi-simple, c'est-à-dire que Γ_F agit transitivement sur l'ensemble $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d\}$. Soit F_1/F l'extension séparable finie (de degré d) telle que Γ_{F_1} soit le stabilisateur de $\mathcal{D}_1$ dans Γ_F. Alors [**BT**, 6.21] G_1 est défini sur F_1 et $G \simeq R_{F_1/F}(G_1)$ où $R_{F_1/F}$ est le foncteur restriction des scalaires à la Weil. Reprenons brièvement la description de ${}^LG$ telle qu'elle est donnée dans [**Bor**, 5.1]. Pour un groupe A, un sous-groupe d'indice fini $A_1 \subset A$, et un groupe V_1 muni d'une structure de A_1-module (à gauche), on note $V = I_{A_1}^A(V_1)$ l'ensemble des fonctions $v : A \to V_1$ telles $v(a_1 a) = a_1 \cdot a(v)$ pour tout $(a_1, a) \in A_1 \times A$. On munit V de la structure de groupe donnée par $(vv')(a) = v(a)v'(a)$, et de la structure de A-module donnée par $(a \cdot v)(a') = v(a'a)$. Pour $a \in A$, on note V_a le sous-groupe de V formé des fonctions v à support dans $A_1 a$. On a la décomposition $V = \prod_{a \in A_1 \backslash A} V_a$ et les groupes V_a sont permutés par A. Notons e l'élément neutre de A. Le groupe V_e est un sous-A_1-module de V, et l'application $V \to V_1$, $v \mapsto v(e)$ est un homomorphisme de A_1-modules qui induit un isomorphisme de V_e sur V_1. Appliquons cela à $A = \Gamma_F$ et $A_1 = \Gamma_{F_1}$, et à $V_1 = \hat{G}_1$ muni de l'action galoisienne $\tau \mapsto \tau_{G_1}$ de Γ_{F_1}. Le groupe $\hat{G}$ s'identifie à $I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1)$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ_F donnée par

$$\sigma_G(g)(\sigma') = g(\sigma'\sigma), \quad \sigma' \in \Gamma_F.$$

La paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ est égale à $(I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{B}_1), I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{T}_1))$ pour une paire de Borel $(\hat{B}_1, \hat{T}_1)$ de $\hat{G}_1$ bien déterminée, et la paire $(\hat{B}, \hat{T})$ est conservée par l'action de Γ_F si et seulement si la paire $(\hat{B}_1, \hat{T}_1)$ est conservée par l'action de Γ_{F_1}, ce que l'on suppose. Enfin puisque l'homomorphisme naturel $W_F \to \Gamma_F$ induit une bijection $W_{F_1} \backslash W_F \to \Gamma_{F_1} \backslash \Gamma_F$, l'application $g \mapsto g \circ (W_F \to \Gamma_F)$ induit un isomorphisme $I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1) \xrightarrow{\simeq} I_{W_{F_1}}^{W_F}(\hat{G}_1)$ dont l'inverse est W_F-équivariant. On pose

$${}^LG = I_{W_{F_1}}^{W_F}(\hat{G}_1) \rtimes W_F = I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1) \rtimes W_F.$$

Posons $W = N_{\hat{G}}(\hat{T})/\hat{T}$ et $W_1 = N_{\hat{G}_1}(\hat{T}_1)/\hat{T}_1$. On a l'égalité $W = I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(W_1)$.

Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G, avec $s \in \hat{T}$. On lui associe comme suit une donnée endoscopique

$$\boldsymbol{G}'_{F_1} = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$$

de G_1. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ et $\hat{B}' = \hat{B} \cap \hat{G}'$. Pour chaque $w \in W_F$ d'image σ dans Γ_F, choisissons un élément $(g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que $\mathrm{Int}_{g(w)} \circ \sigma_G$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$. La classe $\hat{T}g(w)$ est uniquement déterminée. Il existe donc un élément

bien déterminé $\eta_{G'}(\sigma)$ de W tel que l'action par conjugaison de $(g(w), w)$ sur $\hat{T}$ soit égale à

$$\sigma_{G'} = \eta_{G'}(\sigma)\sigma_G;$$

où l'on identifie $\eta_{G'}(\sigma)$ à l'automorphisme $\mathrm{Int}_{\eta_{G'}(\sigma)}$ de $\hat{T}$. L'élément s est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. L'application $\sigma \mapsto \eta_{G'}(\sigma)$ est un 1-cocycle de Γ_F à valeurs dans W. Pour $\tau \in \Gamma_{F_1}$, posons [2] $\eta_{G',1}(\tau) = \eta_{G'}(\tau)(1)$. L'application $\tau \mapsto \eta_{G',1}(\tau)$ est un 1-cocycle de Γ_{F_1} à valeurs dans W_1. Notons $\tau \mapsto \tau_{G',1}$ l'action de Γ_{F_1} sur $\hat{T}_1$ donnée par

$$\tau_{G',1} = \eta_{G',1}(\tau)\tau_{G_1}.$$

On prend pour s_1 l'élément $s(1) \in \hat{T}_1$. Il est fixé par l'action galoisienne $\tau \mapsto \tau_{G',1}$ sur $\hat{T}_1$. Posons $\hat{G}'_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$ et $\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 \cap \hat{G}'_1$. Pour chaque $w_1 \in W_{F_1}$ d'image τ dans Γ_{F_1}, choisissons un représentant $\tilde{\eta}_{G',1}(w_1) = \tilde{\eta}_{G',1}(\tau)$ de $\eta_{G',1}(\tau)$ dans $N_{\hat{G}_1}(\hat{T}_1)$. L'automorphisme $\mathrm{Int}_{\tilde{\eta}_{G',1}(\tau)} \circ \tau_{G_1}$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}'_1, \hat{T}_1)$ de $\hat{G}'_1$. Soit

$$\mathcal{G}'_1 = \{(g'_1\tilde{\eta}_{G',1}(w_1), w_1) : g'_1 \in \hat{G}'_1,\ w_1 \in W_{F_1}\} \subset {}^L(G_1).$$

L'ensemble $\mathcal{G}'_1$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'_1$. On en déduit de la manière habituelle une L-action de Γ_{F_1} sur $\hat{G}'_1$. Soit G'_1 un F_1-groupe réductif connexe quasi-déployé dont $\hat{G}'_1$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet $\boldsymbol{G}'_{F_1} = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ est une donnée endoscopique de G_1.

Lemme. — *L'application $\boldsymbol{G}' \mapsto \boldsymbol{G}'_{F_1}$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de G sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de G_1.*

Démonstration. — Réciproquement, soit $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ une donnée endoscopique de G_1, avec $s_1 \in \hat{T}_1$. On lui associe comme suit une donnée endoscopique

$$\mathrm{Res}_{F_1/F}(\boldsymbol{G}'_1) = (G', \mathcal{G}', s)$$

de G. Posons $\hat{G}'_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$ et $\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 \cap \hat{G}'_1$. Pour chaque $w_1 \in W_{F_1}$ d'image τ dans Γ_{F_1}, choisissons un élément $(g_1(w_1), w_1) \in \mathcal{G}'_1$ tel que l'automorphisme $\mathrm{Int}_{g_1(w_1)\circ\tau_{G_1}}$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}'_1, \hat{T}_1)$ de $\hat{G}'_1$. La classe $\hat{T}_1 g_1(w_1)$ est bien déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé $\eta_{G'_1}(\tau)$ de W_1 tel que l'action par conjugaison de $(g_1(w_1), w_1)$ sur $\hat{T}_1$ soit donnée par

$$\tau_{G'_1} = \eta_{G'_1}(\tau)\tau_{G_1}.$$

L'application $\tau \mapsto \eta_{G'_1}(\tau)$ est un 1-cocycle. Notons $\alpha_1 \in \mathrm{H}^1(\Gamma_{F_1}, W_1)$ sa classe de cohomologie, et soit $\alpha \in \mathrm{H}^1(\Gamma_F, W)$ l'image de α_1 par l'inverse de l'isomorphisme de Shapiro

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_F, I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(W_1)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^1(\Gamma_{F_1}, W_1),\ \beta \mapsto (\tau \mapsto \beta(\tau)(1)).$$

Choisissons un 1-cocycle $\sigma \mapsto \eta_{G'_1,G}(\sigma)$ de Γ_F à valeurs dans W qui soit dans la classe de cohomologie α. Quitte à remplacer $\eta_{G'_1,G}$ par un 1-cocycle cohomologue, on

2. La notation n'est pas très heureuse : rappelons que pour $\sigma \in \Gamma_F$, $\eta_{G'}(\sigma)$ est un élément de $W = \prod_{\sigma' \in \Gamma_{F_1}\backslash\Gamma_F} W_{\sigma'}$, et que pour $\sigma' \in \Gamma_F$, $\eta_{G'}(\sigma)(\sigma')$ est la composante de $\eta_{G'}(\sigma)$ sur $W_{\sigma'}$.

peut supposer, et on suppose, que $\eta_{G'_1,G}(\tau)(1) = \eta_{G'_1}(\tau)$ pour tout $\tau \in \Gamma_{F_1}$. Notons $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1,G}$ l'action de Γ_F sur $\hat{T}$ donnée par

$$\sigma_{G'_1,G} = \eta_{G'_1,G}(\sigma)\sigma_G.$$

Soit $\Gamma_F \to \hat{T}_1$, $\sigma \mapsto s(\sigma)$ l'application définie par

$$s(\sigma) = \eta_{G'_1,G}(\sigma)(1)^{-1}(s_1).$$

Pour $\tau \in \Gamma_{F_1}$ et $\sigma \in \Gamma_F$, on a

$$\begin{aligned} s(\tau\sigma) &= [\eta_{G'_1,G}(\tau)\tau_G(\eta_{G'_1,G}(\sigma))](1)^{-1}(s_1) \\ &= \tau_G(\eta_{G'_1,G}(\sigma))(1)^{-1}\eta_{G'_1,G}(\tau)(1)^{-1}(s_1). \end{aligned}$$

Or

$$\tau_G(\eta_{G'_1,G}(\sigma))(1) = \eta_{G'_1,G}(\sigma)(\tau) = \tau_{G_1}(\eta_{G'_1,G}(\sigma)(1)),$$

d'où

$$\begin{aligned} s(\tau\sigma) &= \tau_{G_1}[\eta_{G'_1,G}(\sigma)(1)^{-1}(\eta_{G'_1}(\tau)\tau_{G_1})^{-1}(s_1)] \\ &= \tau_{G_1}(s(\sigma)) \end{aligned}$$

car s_1 est fixé par l'action $\tau \mapsto \tau_{G'_1} = \eta_{G'_1}(\tau)\tau_{G_1}$ de Γ_{F_1}. Par conséquent l'application

$$\Gamma_F \to \hat{T},\ \sigma \mapsto s(\sigma)$$

est un élément de $\hat{T}$, qui vérifie $s(1) = s_1$. On vérifie facilement que s est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1,G}(\sigma)$ de Γ_F. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ et $\hat{B}' = \hat{G}' \cap \hat{B}$. Pour chaque $w \in W_F$ d'image σ dans Γ_F, choisissons un représentant $\tilde{\eta}_{G'_1,G}(w) = \tilde{\eta}_{G'_1,G}(\sigma)$ de $\eta_{G'_1,G}(\sigma)$ dans $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'automorphisme $\mathrm{Int}_{\tilde{\eta}_{G'_1,G}(\sigma)} \circ \sigma_G$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$. Soit

$$\mathcal{G}' = \{(g'\tilde{\eta}_{G'_1,G}(w), w) : g' \in \hat{G}',\ w \in W_F\} \subset {}^L G.$$

L'ensemble $\mathcal{G}'$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit une L-action de Γ_F sur $\hat{G}'$. Soit G' un F-groupe réductif connexe quasi-déployé dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet $\mathrm{Res}_{F/F_1}(\boldsymbol{G}'_1) = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de G, bien déterminée à équivalence près par un élément x de $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ tel que $x(1) \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{G}'_1)$ et $\mathrm{Int}_{\eta_{G'_1}(\tau)} \circ \tau_{G_1}(\bar{x}(1)) = \bar{x}(1)$ pour tout $\tau \in W_{F_1}$; où $\bar{x}$ est l'image de x dans W. Par construction, on a

$$(\mathrm{Res}_{F/F_1}(\boldsymbol{G}'_1))_{F_1} = \boldsymbol{G}'_1.$$

Cela prouve le lemme. □

Soit $\boldsymbol{G}''$ une autre donnée endoscopique de G. Si $x \in \hat{G}$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'$ et $\boldsymbol{G}''$, alors $x(1)$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'_{F_1}$ et $\boldsymbol{G}''_{F_1}$. Réciproquement, si $x_1 \in \hat{G}_1$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'_{F_1}$ et $\boldsymbol{G}''_{F_1}$, alors on peut construire un $x \in \hat{G}$ qui est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'$ et $\boldsymbol{G}''$ et tel que $x(1) = x_1$.

Comme la propriété d'être F-quasi-simple n'est pas conservée par localisation, il nous faut maintenant revenir au cas général. Écrivons $\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^r (\mathcal{D}_{k,1} \cup \cdots \cup \mathcal{D}_{k,d_k})$ où, pour chaque k, $\mathcal{D}_{k,1} \cup \cdots \cup \mathcal{D}_{k,d_k}$ est une orbite dans l'ensemble des composantes

connexes de $\mathcal{D}$. Pour $k = 1, \ldots, r$, soit F_k/F l'extension séparable finie telle que Γ_{F_k} soit le stabilisateur de $\mathcal{D}_{k,1}$ dans Γ_F. Le groupe G_k correspondant à $\mathcal{D}_{k,1}$ est défini sur F_k, et l'on a $G \simeq \prod_{k=1}^r H_k$ où $H_k = \mathrm{Res}_{F_k/F}(G_k)$. Pour $k = 1, \ldots, r$, soit $\boldsymbol{H}'_k = (H'_k, \mathcal{H}'_k, s_k)$ une donnée endoscopique de H_k. La famille des $\boldsymbol{H}'_k$ définit une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de G : on prend $s = (s_1, \ldots, s_r)$, $G' = H'_1 \times \cdots \times H'_r$, et $\mathcal{G}'$ est l'ensemble des $((h_1, \ldots, h_r), \sigma) \in {}^L G$ tels que pour chaque k, (h_k, σ) appartient à $\mathcal{H}'_k$. Toute donnée endoscopique de $\boldsymbol{G}$ est obtenue de cette manière. Par abus d'écriture, on note $\boldsymbol{G}' = \prod_{k=1}^r \boldsymbol{H}'_k$. À chaque donnée $\boldsymbol{H}'_k$ est associée comme ci-dessus une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_k = (\boldsymbol{H}'_k)_{F_k}$ de G_k. L'application qui à $\boldsymbol{G}'$ associe la famille $\{\boldsymbol{G}'_1, \ldots, \boldsymbol{G}'_k\}$ est compatible à la relation d'équivalence entre données endoscopiques en un sens évident (déduit par produit du cas $r = 1$).

Si F est global, pour chaque place v de F, chaque k, et chaque place w de F_k au-dessus de v, le complété $F_{k,w}$ de F_k en w est une extension séparable finie de F_v. Le groupe $G_v = G \times_F F_v$ est isomorphe à $\prod_{k=1}^r H_{k,v}$ avec

$$H_{k,v} = \mathrm{Res}_{F_k/F}(G_k) \times_F F_v \simeq \prod_{w_k|v} \mathrm{Res}_{F_{k,w_k}/F_v}(G_{k,w_k})$$

où w_k parcourt les places de F_k au-dessus de v, et $G_{k,w_k} = G_k \times_{F_k} F_{k,w_k}$. C'est donc encore un groupe du même type, c'est-à-dire un produit fini de groupes F_v-quasi-simples simplement connexes. L'application qui à une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'$ de G associe la famille $\{\boldsymbol{G}'_1, \ldots, \boldsymbol{G}'_r\}$ est compatible à la localisation au sens suivant. Écrivons $\boldsymbol{G}' = \prod_{k=1}^r \boldsymbol{H}'_k$. Pour chaque place v de F, et pour chaque k, la donnée endoscopique $\boldsymbol{H}'_{k,v}$ de $H_{k,v}$ obtenue par localisation de $\boldsymbol{H}'_k$ en v se décompose (avec le même abus d'écriture que plus haut) en

$$\boldsymbol{H}'_{k,v} = \prod_{w_k|v} \boldsymbol{H}'_{k,w_k}$$

pour des données endoscopiques $\boldsymbol{H}'_{k,w_k}$ de $H_{k,w_k} = \mathrm{Res}_{F_{k,w_k}/F_v}(G_{k,w_k})$. D'autre part pour chaque place w_k de F_k au-dessus de v, la donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_k = (\boldsymbol{H}'_k)_{F_k}$ de G_k donne par localisation une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_{k,w_k}$ de G_{k,w_k}. La compatibilté en question est (pour tout v, tout k, et tout $w_k|v$)

$$(\boldsymbol{H}'_{k,w_k})_{F_{k,w_k}} = \boldsymbol{G}'_{k,w_k}.$$

On en déduit qu'il suffit de prouver la proposition de 1.1 dans le cas $r = 1$ et $d_1 = 1$, c'est-à-dire le cas où $\hat{G}$ $(= \hat{G}_{\mathrm{AD}})$ est simple.

1.3. Hypothèses et définitions. — Continuons avec les notations de 1.1 et 1.2. Sauf précision, le corps F est global ou local. On suppose jusqu'à la fin de l'article que G est quasi-simple et simplement connexe, c'est-à-dire que $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ et $\mathcal{D}$ est connexe. Pour alléger l'écriture, nous utilisons désormais la forme « galoisienne » des L-groupes : ${}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$. L'adaptation de ce qui suit à la forme « groupes de Weil » ne pose aucun problème.

Notons α_0 l'opposée de la plus grande racine dans Σ^+ et $\Delta_{\mathrm{a}} = \{\alpha_0\} \cup \Delta$. En écrivant $-\alpha_0$ dans la base Δ, on obtient une relation

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}} d(\alpha)\alpha = 0 \tag{1}$$

où $d(\alpha_0) = 1$ et, pour $\alpha \in \Delta$, $d(\alpha)$ appartient à l'ensemble $\mathbb{N}_{>0}$ des entiers strictement positifs. On sait que l'espace des relations entre les éléments de Δ_{a} est la droite portée par la relation (1). Cela implique que

(2) la relation (1) est la seule relation linéaire entre les éléments de Δ_{a} dont les coefficients sont entiers relatifs et dont au moins un coefficient vaut 1.

Rappelons aussi la propriété suivante. Pour $\beta \in \Sigma^+$, écrivons $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$ avec $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Alors

(3) $m(\alpha) \leq d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

Notons $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$ le diagramme de Dynkin complété dont l'ensemble de sommets est Δ_{a}. Notons $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ les groupes d'automorphismes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$. Remarquons que, puisque $\hat{G}$ est adjoint, $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ se plonge naturellement dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$. Puisque la paire $(\hat{B}, \hat{T})$ est conservée par l'action galoisienne, l'action galoisienne se restreint en une action sur Δ et Δ_{a}, et peut être considérée comme un homomorphisme $\Gamma_F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. D'ailleurs comme on le sait, la donnée de l'action galoisienne est équivalente à celle de cet homomorphisme. On note E l'extension galoisienne finie de F telle que Γ_E soit le noyau de cet homomorphisme.

Rappelons qu'on a noté W le groupe de Weyl de $\hat{G}$ relatif à $\hat{T}$. Soit Ω le sous-groupe des éléments de W qui conservent Δ_{a}. L'application qui à un élément de Ω associe son action sur $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$ identifie Ω à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$. On sait [**Bou**][VI.4.3] que c'est un sous-groupe abélien distingué de $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, et que

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}}) = \Omega \rtimes \mathrm{Aut}(\mathcal{D}).$$

Signalons que, pour $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, on a $d(\tau(\alpha)) = d(\alpha)$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}$: en appliquant τ^{-1} à (1), on obtient $\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}} d(\tau(\alpha))\alpha = 0$; c'est une relation entre les éléments de Δ_{a} qui vérifie les conditions de (2), donc c'est la relation (1). On voit en inspectant chaque système de racines que :

(4) l'application $\omega \mapsto \omega(\alpha_0)$ est une bijection de Ω sur l'ensemble des racines $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}$ telles que $d(\alpha) = 1$.

1.4. La construction de Langlands. — On fixe pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ un élément $\zeta_n \in \mathbb{C}^\times$ qui est une racine primitive de 1 d'ordre n. Soit $\boldsymbol{G'} = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G (rappelons que $\mathcal{G}' \subset {}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$). À équivalence près, on peut supposer, et on suppose, $s \in \hat{T}$. Dans ce paragraphe 1.4, on impose la condition :

(1) s est d'ordre fini.

On note d cet ordre.

Nous allons rappeler les résultats de Langlands [**L**, pp. 708-709]. Commençons par reprendre la construction habituelle (cf. 1.2). On pose $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ \supset \hat{T}$, et on fixe un sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}'$ contenant $\hat{T}$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on peut choisir

un élément $(g(\sigma),\sigma)\in\mathcal{G}'$ dont l'action par conjugaison conserve la paire $(\hat{B}',\hat{T})$. La classe $\hat{T}g(\sigma)$ est uniquement déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé $w_{G'}(\sigma)\in W$ tel que l'action par conjugaison de $(g(\sigma),\sigma)$ sur $\hat{T}$ soit égale à $w_{G'}(\sigma)\sigma_G$. L'application

$$\sigma\mapsto\sigma_{G'}=w_{G'}(\sigma)\sigma_G$$

est un homomorphisme de Γ_F dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$ qui fixent s.

Pour $k\in\{0,\dots,d-1\}$, posons $\mathfrak{Y}_k=\{\alpha\in\Sigma;\alpha(s)=\zeta_d^k\}$. L'ensemble $\mathfrak{Y}_0$ est celui des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}'$. On note $\mathfrak{X}_0$ l'ensemble de racines simples relatif à $\hat{B}'$. On introduit dans Σ la relation d'ordre partiel $\leq_{\hat{B}'}$ suivante : pour α, $\beta\in\Sigma$, $\alpha\leq_{\hat{B}'}\beta$ si et seulement si $\beta-\alpha$ est égal à une combinaison linéaire des éléments de $\mathfrak{X}_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Pour $k\in\{1,\dots,d-1\}$, notons $\mathfrak{Z}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{Y}_k$ qui ne sont pas combinaisons linéaires d'éléments de $\bigcup_{j=0,\dots,k-1}\mathfrak{Y}_j$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En particulier $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{Y}_1$. On note $\mathfrak{X}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{Z}_k$ qui sont minimaux pour l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$. On pose $\mathfrak{X}=\bigcup_{k=0,\dots,d-1}\mathfrak{X}_k$. Le résultat de Langlands est :

(2) il existe $u\in W$ tel que $u(\mathfrak{X})=\Delta$ ou $u(\mathfrak{X})=\Delta_{\mathrm{a}}$.

Quitte à remplacer $\boldsymbol{G}'$ par la donnée équivalente conjuguée par un relèvement de u dans le normalisateur $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et à remplacer $\hat{B}'$ par $u(\hat{B}')$, on peut supposer $u=1$; donc $\mathfrak{X}=\Delta$ ou $\mathfrak{X}=\Delta_{\mathrm{a}}$. Remarquons que, jusque-là, les constructions ne dépendent que de s et d'un choix de $\hat{B}'$ mais pas de $\mathcal{G}'$.

Justement, puisque les constructions ne dépendent que de s et de $\hat{B}'$, elles sont conservées par le groupe des automorphismes de $\hat{T}$ qui fixent s et conservent $\hat{B}'$ (conserver $\hat{B}'$ revient à conserver l'ensemble $\mathfrak{X}_0$ de racines simples relatif à $\hat{B}'$). En particulier, pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, l'automorphisme $\sigma_{G'}=w_{G'}(\sigma)\sigma_G$ de $\hat{T}$ conserve chaque $\mathfrak{X}_k$ et $\mathfrak{X}$ tout entier. L'automorphisme σ_G conservant Δ et Δ_a, donc $\mathfrak{X}$, $w_{G'}(\sigma)$ conserve aussi $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord $\mathfrak{X}=\Delta$. Le seul élément de W qui conserve Δ est l'identité. Donc $w_{G'}(\sigma)=1$. Il en résulte que

(3) si $\mathfrak{X}=\Delta$, alors $\mathcal{G}'=\hat{G}'\rtimes\Gamma_F$.

Supposons maintenant $\mathfrak{X}=\Delta_a$. Puisque $w_{G'}(\sigma)$ conserve Δ_a, on a $w_{G'}(\sigma)\in\Omega$. Dans la suite, $w_{G'}(\sigma)$ et $\sigma_{G'}$ seront la plupart du temps considérés comme des automorphismes de $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$. Notons K l'extension galoisienne finie de F telle que Γ_K soit le noyau de l'homomorphisme $\sigma\mapsto\sigma_{G'}$. On a

(4) $E\subset K$ et la restriction à Γ_E de l'application $\sigma\mapsto w_{G'}(\sigma)$ se quotiente en une injection de $\Gamma_{K/E}$ dans Ω.

En effet, pour $\sigma\in\Gamma_K$, on a $w_{G'}(\sigma)\sigma_G=1$. Puisque $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ est produit semi-direct de Ω et $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$, cette égalité entraîne $w_{G'}(\sigma)=1$ et $\sigma_G=1$. L'assertion (4) s'en déduit.

1.5. Equivalences de données endoscopiques. — On considère maintenant deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1=(G'_1,\mathcal{G}'_1,s)$ et $\boldsymbol{G}'_2=(G'_2,\mathcal{G}'_2,s)$ de G, dont l'élément s est le même. Les groupes $\hat{G}'_1$ et $\hat{G}'_2$ sont donc les mêmes et on note simplement $\hat{G}'$ ce groupe. On suppose comme dans le paragraphe précédent que s est d'ordre fini d.

On applique les constructions précédentes aux deux données, en affectant d'indices 1 et 2 les objets associés à nos deux données. On peut choisir le même groupe de Borel $\hat{B}'$ pour les deux constructions. Puisque celles-ci ne dépendent que de s et de ce choix de Borel, on obtient les mêmes ensembles $\mathfrak{X}_k$ et $\mathfrak{X}$ pour les deux données. Les seules différences entre nos données sont les actions galoisiennes $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$. L'assertion 1.4.(3) entraîne que

(1) si $\mathfrak{X} = \Delta$, les deux données sont équivalentes.

Supposons $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Montrons que

(2) les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \dots, d-1$ et $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Si un tel ω existe, on le relève en un élément quelconque $x \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ et on vérifie que x est une équivalence entre les deux données. Inversement, soit x une telle équivalence qui conjugue $\boldsymbol{G}'_1$ en $\boldsymbol{G}'_2$. On peut multiplier x à gauche ou à droite par un élément de $\hat{G}'$ et supposer que la conjugaison Int_x conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$. Par définition, Int_x fixe s. Notons ω l'image de Int_x dans W. Comme on l'a déjà dit, un automorphisme de $\hat{T}$ qui fixe s et conserve $\hat{B}'$ conserve tous les objets définis au paragraphe précédent. Donc ω conserve $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, c'est-à-dire $\omega \in \Omega$. On a $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \dots, d-1$ comme on vient de le dire. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Pour $i = 1, 2$, on relève $w_{G'_i}(\sigma)$ en un élément $g_i(\sigma) \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$. On a $(g_i(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'_i$. Par définition d'une équivalence, on a $x(g_1(\sigma), \sigma)x^{-1} \in \mathcal{G}'_2$, donc $xg_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} = hg_2(\sigma)$ pour un $h \in \hat{G}'$. Tous les éléments autres que h normalisant $\hat{T}$, h le normalise aussi. Puisque les conjugaisons par x, $(g_1(\sigma), \sigma)$ et $(g_2(\sigma), \sigma)$ conservent le groupe $\hat{B}'$, la conjugaison par h le conserve aussi. Un élément y de $\hat{G}'$ tel que Int_y conserve $(\hat{B}', \hat{T})$ appartient à $\hat{T}$, donc $h \in \hat{T}$. En projetant dans W l'égalité $xg_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} = hg_2(\sigma)$, on obtient $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$. Cela démontre (2).

Considérons une unique donnée $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$. On note $\mathrm{Out}(\boldsymbol{G}')$ le groupe des composantes connexes du groupe d'automorphismes de $\boldsymbol{G}'$. Si s est d'ordre fini et $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, on démontre de la même façon que

(3) $\mathrm{Out}(\boldsymbol{G}')$ est le groupe des $\omega \in \Omega$ tels que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \dots, d-1$ et $\omega\sigma_{G'}\omega^{-1} = \sigma_{G'}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

1.6. Équivalence presque partout, cas particulier. — On suppose dans ce paragraphe et le suivant que F est un corps de nombres. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de G. Rappelons que pour chaque place v de F, on en déduit une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}' = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$ de $G_v = G \times_F F_v$, cf. 1.1. En particulier, $\mathcal{G}'_v$ est le sous-groupe des $(g, \sigma) \in \mathcal{G}'$ tels que $\sigma \in \Gamma_v$.

Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ de G. On suppose :

(1) les éléments s_1 et s_2 sont d'ordre fini ;

(2) les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes pour presque toute place v.

Proposition. — *Sous ces hypothèses, la proposition de 1.1 est vraie : les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes.*

Démonstration. — L'équivalence en au moins une place entraîne que s_1 et s_2 sont conjugués. Quitte à remplacer l'une de nos données par une donnée équivalente, on peut supposer $s_1 = s_2$ et on note simplement s cet élément. On applique les constructions des paragraphes précédents, on obtient en particulier un ensemble $\mathfrak{X}$ commun qui est égal soit à Δ soit à Δ_{a}. Si $\mathfrak{X} = \Delta$, l'assertion 1.5.(1) entraîne que $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes. Supposons $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Notons $\Omega^\sharp$ le sous-groupe des $\omega \in \Omega$ tels que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour tout $k = 1, \ldots, d-1$. Montrons que

(3) pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $\omega \in \Omega^\sharp$ tel que $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$.

D'après le théorème de Tchebotarev et l'hypothèse (2), il existe une place v et un élément $\gamma \in \Gamma_F$ tels que les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ soient équivalentes et $\gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Gamma_{F_v}$. En appliquant 1.5.(2) aux données locales, il existe $\omega' \in \Omega^\sharp$ tel que

$$\omega'\gamma_{G'_1}\sigma_{G'_1}\gamma_{G'_1}^{-1}\omega'^{-1} = \gamma_{G'_2}\sigma_{G'_2}\gamma_{G'_2}^{-1}.$$

Posons $\omega = \gamma_{G'_2}^{-1}\omega'\gamma_{G'_1} = \gamma_G^{-1}\omega_{G'_2}(\gamma)^{-1}\omega'\omega_{G'_1}(\gamma)\gamma_G$. Puisque Ω est distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, on a $\omega \in \Omega$. Puisque ω' et $\gamma_{G'_2}$ conservent tous deux les ensembles $\mathfrak{X}_k$, ω les conserve aussi, donc $\omega \in \Omega^\sharp$. Enfin, on a bien $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$. Cela démontre (3).

On a

(4) $w_{G'_1}(\sigma) = w_{G'_2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_E$.

En effet, pour $\sigma \in \Gamma_E$, on a simplement $\sigma_{G'_i} = w_{G'_i}(\sigma)$ pour $i = 1, 2$. Ces éléments $w_{G'_i}(\sigma)$ appartiennent à Ω et sont conjugués par un élément de Ω d'après (3). Puisque Ω est commutatif, ils sont égaux.

Si $E = F$, l'assertion (4) entraîne que $\boldsymbol{G}'_1 = \boldsymbol{G}'_2$. Supposons maintenant que $\Gamma_{E/F}$ soit cyclique et fixons un élément $\gamma \in \Gamma_F$ dont l'image dans $\Gamma_{E/F}$ soit un générateur de ce groupe. Appliquons (3) et fixons $\omega \in \Omega^\sharp$ tel que $\omega\gamma_{G'_1}\omega^{-1} = \gamma_{G'_2}$. Considérons les deux homomorphismes $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$ et $\sigma \mapsto \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ de Γ_F dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$. L'ensemble des $\sigma \in \Gamma_F$ en lesquels ils coïncident est un sous-groupe de Γ_F. Ce sous-groupe contient Γ_E d'après (4) et parce que Ω est commutatif. Il contient aussi γ par le choix de ω. Mais le sous-groupe engendré par Γ_E et γ est Γ_F tout entier. Donc $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. D'après 1.5.(2), nos deux données endoscopiques sont donc équivalentes.

Remarquons que l'application $\sigma \mapsto \sigma_G$ se quotiente en une injection de $\Gamma_{E/F}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. Donc l'hypothèse que $\Gamma_{E/F}$ est cyclique est vérifiée sauf dans le cas où G est de type D_4 et où $\sigma \mapsto \sigma_G$ se quotiente en un isomorphisme de $\Gamma_{E/F}$ sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) = \mathfrak{S}_3$. Supposons ces hypothèses vérifiées. Notons L l'extension quadratique de F contenue dans E telle que l'image de Γ_L dans $\mathfrak{S}_3$ soit le sous-groupe distingué d'ordre 3 de ce groupe. On fixe un élément $\gamma \in \Gamma_L$ dont l'image dans $\Gamma_{E/L}$ engendre ce groupe. Appliquons (3) et fixons $\omega \in \Omega^\sharp$ tel que $\omega\gamma_{G'_1}\omega^{-1} = \gamma_{G'_2}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que les homomorphismes $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$ et $\sigma \mapsto \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ coïncident sur Γ_L. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. On a $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in \Gamma_L$, donc, en appliquant ce que l'on vient de démontrer à cet élément et à γ, on a les deux égalités

$$\sigma_{G'_2}\gamma_{G'_2}\sigma_{G'_2}^{-1} = \omega\sigma_{G'_1}\gamma_{G'_1}\sigma_{G'_1}^{-1}\omega^{-1}, \quad \gamma_{G'_2} = \omega\gamma_{G'_1}\omega^{-1}.$$

Posons
$$\omega_1 = \omega^{-1}\sigma_{G'_2}^{-1}\omega\sigma_{G'_1} = \omega^{-1}\sigma_G^{-1}w_{G'_2}(\sigma)^{-1}\omega w_{G'_1}(\sigma)\sigma_G.$$
C'est un élément de Ω puisque ce groupe est distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$. Les égalités précédentes entraînent $\omega_1\gamma_{G'_1}\omega_1^{-1} = \gamma_{G'_1}$, c'est-à-dire $\omega_1 w_{G'_1}(\gamma)\gamma_G = w_{G'_1}(\gamma)\gamma_G\omega_1$. Parce que Ω est commutatif, on peut supprimer les termes $w_{G'_1}(\gamma)$: on a

(5) $\omega_1\gamma_G = \gamma_G\omega_1$.

Notons $(\alpha_i)_{i=1,\dots,4}$ les éléments de Δ, α_2 étant la racine centrale, liée aux trois autres. Les racines $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}$ telles que $d(\alpha) = 1$ sont les α_i pour $i = 0, 1, 3, 4$. Donc $\omega_1(\alpha_0)$ est l'une de ces racines d'après 1.3.(4). Par hypothèse, γ_G est un automorphisme d'ordre 3. Il fixe α_2 et α_0 et permute cycliquement $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. L'égalité (5) entraîne que $\omega_1(\alpha_0)$ est fixe par γ_G et ne peut donc être que α_0. L'assertion 1.3.(4) entraîne alors $\omega_1 = 1$. En revenant à la définition de ω_1, cela signifie que $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$. Cela étant vrai pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, nos deux données endoscopiques sont équivalentes. Cela achève la preuve. □

1.7. Equivalence presque partout, cas général. — Dans ce paragraphe, on prouve la proposition de 1.1 dans le cas général.

Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ de G. On suppose que les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes pour presque toute place v. On doit montrer que les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes.

Encore une fois, l'équivalence en au moins une place entraîne que s_1 et s_2 sont conjugués. Quitte à remplacer l'une de nos données par une donnée équivalente, on peut supposer $s_1 = s_2$ et on note simplement s cet élément. On va utiliser la construction de Langlands, cf. [**L**, pp. 704-705]. Notons μ_∞ le groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$. Le groupe $\mathbb{C}^\times/\mu_\infty$ est sans torsion. Notons $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times/\mu_\infty$ la projection naturelle et R le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{p(\alpha(s)); \alpha \in \Sigma\}$. C'est un groupe abélien de type fini et sans torsion, donc il est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Fixons-en une base $(r_i)_{i=1,\dots,n}$. Un élément $r \in R$ s'écrit $r = \prod_{i=1,\dots,n} r_i^{n_i(r)}$ avec $n_i(r) \in \mathbb{Z}$. Notons R^+, resp. R^-, le sous-ensemble des $r \in R$ tels que, ou bien $r = 1$, ou bien, pour le plus petit entier i tel que $n_i(r) \neq 0$, on a $n_i(r) > 0$, resp. $n_i(r) < 0$. Il est clair que R^+ et R^- sont stables par multiplication, que R^- est l'ensemble des inverses d'éléments de R^+ et que $R^+ \cap R^- = \{1\}$. Notons Σ^P, resp. Σ^M, l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $p(\alpha(s)) \in R^+$, resp. $p(\alpha(s)) = 1$. Les propriétés précédentes entraînent qu'il existe un sous-groupe parabolique $\hat{P}$ de $\hat{G}$ et une composante de Levi $\hat{M}$ de $\hat{P}$ tels que $\hat{T} \subset \hat{M}$ et que Σ^P, resp. Σ^M, soit l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{P}$, resp. $\hat{M}$. Conjuguer nos données par un même élément de $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ conjugue notre couple $(\hat{P}, \hat{M})$ par le même élément. On peut donc supposer $\hat{B} \subset \hat{P}$. Il résulte de la construction que

(1) tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et fixe s conserve aussi la paire $(\hat{P}, \hat{M})$.

Notons $\Delta^M = \Delta \cap \Sigma^M$ et $\Delta_M = \Delta \smallsetminus \Delta^M$. L'ensemble Δ^M est un ensemble de racines simples pour $\hat{M}$. Introduisons la relation d'équivalence dans Δ_M définie par
$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow p(\alpha(s)) = p(\beta(s)).$$

Notons $(\Delta_i)_{i=1,\dots,m}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Pour $i = 1, \dots, m$, fixons une racine $\delta_i \in \Delta_i$. Fixons un entier $b \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que :

— $\alpha(s)^b = 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M$;

— $\alpha(s)^b = \beta(s)^b$ pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma$ tels que $p(\alpha(s)) = p(\beta(s))$.

Posons $c = \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{\alpha \in \Delta_i} id(\alpha)$ et $d = 3cb$. Définissons un élément $t \in T$ par les égalités :

— $\alpha(t) = \alpha(s)$ pour tout $\alpha \in \Delta^M$;

— pour $i = 1, \dots, m$ et pour tout $\alpha \in \Delta_i$, $\alpha(t) = \zeta_d^i \alpha(s) \alpha(\delta_i)^{-1}$.

Montrons que

(2) tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et fixe t conserve aussi la paire $(\hat{P}, \hat{M})$.

Pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a $\alpha(t) = \zeta_d^{m(\alpha)}$ pour un élément bien défini $m(\alpha) \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Introduisons les ensembles S^M, resp. S^U, $S^{\bar{U}}$, des racines $\alpha \in \Sigma$ qui vérifient les conditions $m(\alpha) \in 3c\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, resp. $m(\alpha) \in (\{1, \dots, c\} + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$, resp. $m(\alpha) \in (\{-1, \dots, -c\} + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$. Il résulte des définitions que l'on a les inclusions $\Sigma^M \subset S^M$, $(\Sigma^P \smallsetminus \Sigma^M) \subset S^U$ et $\{-\alpha; \alpha \in \Sigma^P - \Sigma^M\} \subset S^{\bar{U}}$. Il résulte aussi des définitions que les ensembles S^M, S^U et $S^{\bar{U}}$ sont disjoints. Les inclusions précédentes sont des égalités. Par définition de ces ensembles, S^M, S^U et $S^{\bar{U}}$ sont conservés par tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et qui fixe t. Il en est donc de même de Σ^P et Σ^M, donc de $\hat{P}$ et $\hat{M}$. Cela prouve (2).

Montrons que

(3) tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ fixe s si et seulement s'il fixe t.

On considère un automorphisme u de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et qui fixe l'un des éléments s ou t. On veut prouver qu'il fixe l'autre. D'après (1) et (2), u conserve la paire $(\hat{P}, \hat{M})$. On sait que l'on peut écrire $u = \mathrm{Int}_n \circ v$ pour un élément $n \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ et un automorphisme v de $\hat{G}$ qui conserve la paire $(\hat{B}, \hat{T})$. Alors la paire $(v(\hat{P}), v(\hat{M}))$ est conjuguée par n^{-1} à $(\hat{P}, \hat{M})$. Les deux paires $(\hat{P}, \hat{M})$ et $(v(\hat{P}), v(\hat{M}))$ étant standard, il en résulte qu'elles sont égales. Donc v et Int_n conservent la paire $(\hat{P}, \hat{M})$. Il en résulte que $n \in N_{\hat{M}}(\hat{T})$. On note w l'image de n dans le groupe de Weyl W^M de $\hat{M}$ relatif à $\hat{T}$. Puisque v conserve $(\hat{P}, \hat{M})$, v conserve Δ^M et Δ_M.

Montrons que

(4) pour $i = 1, \dots, m$, v conserve Δ_i.

Notons y l'élément s ou t que l'on suppose conservé par u. On a $wv(y) = y$. Soit $\alpha \in \Delta_i$, et posons $\beta = v(\alpha)$. On a $\beta(y) = v(\alpha)(wv(y)) = w'(\alpha)(y)$, où $w' = v^{-1}w^{-1}v$. Cet élément w' appartient encore à W^M. Il est connu que $w'(\alpha)$ s'écrit $\alpha + \sum_{\alpha' \in \Delta^M} c(\alpha')\alpha'$, avec des coefficients $c(\alpha') \in \mathbb{Z}$. Par définition de t et y, on a $\alpha'(y) = \alpha'(s)$ pour tout $\alpha' \in \Delta^M$ et ce terme est une racine de l'unité d'ordre au plus b. Il en résulte que $\beta(y)^b \alpha(y)^{-b} = 1$. Si $y = s$, alors $p(\alpha(s)) = p(\beta(s))$ donc $\beta \in \Delta_i$ par définition des classes d'équivalence Δ_i. Si $y = t$, on a $m(\beta) \in (m(\alpha) + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z} = (i + 3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$ et l'on voit que cette relation caractérise les éléments de Δ_i, donc encore $\beta \in \Delta_i$. Cela prouve (4).

Posons $x = s/t$. Pour achever la preuve de (3), il suffit de prouver que $w(x) = v(x) = x$. On a $\alpha(x) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta^M$, ce qui implique que x appartient au centre de $\hat{M}$ donc est fixé par $w \in W^M$. Pour $i = 1, \ldots, m$, $\alpha(x)$ est constant quand α parcourt Δ_i, cela par définition de t. Avec (4), on voit que $v(\alpha)(x) = \alpha(x)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, donc $v(x) = x$. Cela achève de prouver (3).

Posons $\boldsymbol{G}_1'' = (G_1', \mathcal{G}_1', t)$ et $\boldsymbol{G}_2'' = (G_2', \mathcal{G}_2', t)$. Il résulte facilement de (3) que ces triplets sont des données endoscopiques de G. Il en résulte tout aussi facilement que les données $\boldsymbol{G}_1'$ et $\boldsymbol{G}_2'$ sont équivalentes si et seulement si les données $\boldsymbol{G}_1''$ et $\boldsymbol{G}_2''$ le sont. La même chose vaut pour les données localisées en une place v. Alors l'assertion de la proposition pour $\boldsymbol{G}_1'$ et $\boldsymbol{G}_2'$ équivaut à la même assertion pour la paire $\boldsymbol{G}_1''$ et $\boldsymbol{G}_2''$. Mais on peut appliquer à cette dernière paire la proposition de 1.6. Cela achève la preuve de la proposition de 1.1 dans le cas où $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est simple (pour la forme « galoisienne » des L-groupes). Cette preuve s'adapte aisément à la forme « groupes de Weil » des L-groupes, ce qui d'après 1.2 prouve la proposition de 1.1 dans le cas général.

2. Description des données endoscopiques elliptiques

2.1. Construction de données endoscopiques elliptiques. — Les hypothèses sont comme en 1.3. Notons $\underline{\mathcal{E}}(G)$ l'ensemble des couples $(\omega_{G'}, \mathcal{O})$ où :

— $\omega_{G'} : \Gamma_F \to \Omega$ est une application telle que l'application $\sigma \mapsto \sigma_{G'} \overset{\text{déf}}{=} \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$ soit un homomorphisme de Γ_F dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$;

— $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble non vide de Δ_{a} qui est conservé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et qui forme une unique orbite pour cette action.

Disons que deux tels couples $(\omega_{G_1'}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G_2'}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalents si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$ et $\sigma_{G_2'} = \omega\sigma_{G_1'}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Notons $\underline{E}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\underline{\mathcal{E}}(G)$. Nous allons associer à tout élément de $\underline{\mathcal{E}}(G)$ une donnée endoscopique elliptique de G.

Considérons un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$. Posons

$$d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha).$$

Soit s l'unique élément de $\hat{T}$ tel que $\alpha(s) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)$ et $\alpha(s) = \zeta_d$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$. La relation 1.3.(1) implique que ces égalités s'étendent à Δ_{a}, c'est-à-dire $\alpha(s) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ et $\alpha(s) = \zeta_d$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est stable par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$, le point s est fixe par cette action. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. Ce groupe contient $\hat{T}$. Notons $\mathcal{G}'$ le sous-ensemble de ${}^LG$ formé des éléments $(g\tilde{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$ pour $g \in \hat{G}'$ et $\sigma \in \Gamma_F$, où $\tilde{\omega}_{G'}(\sigma)$ est un représentant quelconque de $\omega_{G'}(\sigma)$ dans $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'ensemble $\mathcal{G}'$ un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit de la façon habituelle une L-action de Γ_F sur $\hat{G}'$ et on introduit le groupe réductif connexe G' défini et quasi-déployé sur F dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. On vérifie que le triplet $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de G.

Puisque $\mathcal{O}$ est non vide, les éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ sont linéairement indépendants. Notons Σ_0 l'ensemble des éléments de Σ qui sont combinaisons linéaires des éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ à coefficients entiers relatifs. Notons Σ_0^+, resp. Σ_0^-, le sous-ensemble des éléments de Σ_0 pour lesquels ces coefficients sont tous positifs ou nuls, resp. négatifs ou nuls. Évidemment, $\Sigma_0^- = -\Sigma_0^+$. Notons $\Sigma^{G'}$ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}'$. Montrons :

(1) on a les égalités $\Sigma^{G'} = \Sigma_0 = \Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^-$.

L'ensemble $\Sigma^{G'}$ est celui des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(s) = 1$. L'inclusion $\Sigma_0 \subset \Sigma^{G'}$ est évidente. Soit $\beta \in \Sigma^{G'}$. Quitte à remplacer β par $-\beta$, on suppose $\beta \in \Sigma^+$. Écrivons $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m(\alpha)\alpha$, avec des coefficients $m(\alpha) \in \mathbb{N}$. D'après 1.3.(3), on a $m(\alpha) \leq d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Posons $m = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}\cap\Delta} m(\alpha)$. Les inégalités précédentes impliquent $0 \leq m \leq d$ et même $m \leq d-1$ si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. L'égalité $\beta(s) = 1$ implique $\zeta_d^m = 1$, donc m est divisible par d. Si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ cela force $m = 0$. Si $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$, on a seulement $m = 0$ ou $m = d$. Si $m = 0$, on a $m(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$, donc $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus(\mathcal{O}\cap\Delta)} m(\alpha)\alpha$ et β appartient à Σ_0^+. Supposons $m = d$, ce qui impose $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$. L'égalité $m = d$ et les inégalités $m(\alpha) \leq d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta = \mathcal{O}$ impliquent $m(\alpha) = d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$. Alors

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\sum_{\alpha\in\Delta}(m(\alpha)-d(\alpha))\alpha\right) + \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{O}} d(\alpha)\alpha\right)\\ &= \left(\sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus\mathcal{O}}(m(\alpha)-d(\alpha))\alpha\right) - \alpha_0.\end{aligned}$$

C'est une combinaison linéaire à coefficients entiers négatifs ou nuls d'éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$. Donc $\beta \in \Sigma_0^-$. Cela prouve (1).

Cette propriété entraîne qu'il existe un unique sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ contenant $\hat{T}$ de sorte que l'ensemble de racines positives dans $\hat{G}'$ associé à ce Borel soit Σ_0^+. L'ensemble de racines simples $\Delta^{G'}$ est alors $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$.

Montrons que

(2) la donnée $\boldsymbol{G'}$ est elliptique.

Notons $X^*(\hat{T})$ le groupe des caractères algébriques de $\hat{T}$ et $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}} = X^*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Pour tout ensemble fini $E \subset \Delta_{\mathrm{a}}$ stable par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$, notons $\mathbb{Q}[E]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de base E. Si $E \neq \Delta_{\mathrm{a}}$ l'espace $\mathbb{Q}[E]$ se plonge naturellement dans $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$. On munit $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{Q}[E]$ de cette action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Dire que la donnée $\boldsymbol{G'}$ est elliptique est équivalent à l'égalité

$$X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F} = \mathbb{Q}[\Delta^{G'}]^{\Gamma_F},$$

les exposants signifiants que l'on prend les sous-espaces de points fixes. On a une projection naturelle $p : \mathbb{Q}[\Delta_{\mathrm{a}}] \to X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ dont le noyau est l'espace engendré par la relation (1) de 1.3, laquelle est fixe par Γ_F. De plus, cette projection est l'identité sur $\mathbb{Q}[\Delta^{G'}]$ (qui est plongé à la fois dans les espaces de départ et d'arrivée). L'ellipticité se traduit donc par l'égalité

$$\dim(\mathbb{Q}[\Delta_{\mathrm{a}}]^{\Gamma_F}) = 1 + \dim(\mathbb{Q}[\Delta^{G'}]^{\Gamma_F}).$$

Cela équivaut à $\dim(\mathbb{Q}[\mathcal{O}]^{\Gamma_F}) = 1$. Mais ceci résulte de l'hypothèse que $\mathcal{O}$ est une unique orbite pour l'action de Γ_F.

2.2. Injectivité. — Continuons avec les notations de 2.1. Munissons Σ de l'ordre partiel $\leq_{\hat{B}'}$ défini en 1.4 : pour $\alpha, \beta \in \Sigma$, on a $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$ si et seulement si $\beta - \alpha$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ d'éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$. Posons

$$\mathfrak{S} = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(s) = \zeta_d\}.$$

Cet ensemble contient $\mathcal{O}$.

Montrons que

(1) pour tout $\beta \in \mathfrak{S}$, il existe $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$.

Supposons d'abord $\beta \in \Sigma^+$. Écrivons $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$. Posons $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta} m(\alpha)$. Comme plus haut, on a $0 \leq m(\alpha) \leq d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, d'où $0 \leq m \leq d$. On a $\beta(s) = \zeta_d^m$. Puisque $\beta(s) = \zeta_d$, cela implique $m \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$, donc $m = 1$. Il existe donc un unique élément $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ tel que $m(\alpha) \neq 0$ et, pour cette unique racine, on a $m(\alpha) = 1$. Alors $\beta = \alpha + \sum_{\alpha' \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)} m(\alpha')\alpha'$, donc $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$. Supposons maintenant $\beta \in -\Sigma^+$, écrivons $-\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$ et définissons m comme ci-dessus. On a alors $\beta(s) = \zeta_d^{-m}$ d'où $-m \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$. Cela impose $m = d - 1$. Supposons d'abord $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$. On a alors $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} m(\alpha)$ et $d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha)$. Les inégalités entre les $m(\alpha)$ et les $d(\alpha)$ impliquent qu'il existe un unique élément $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $m(\alpha) = d(\alpha) - 1$ et on a $m(\alpha') = d(\alpha')$ pour tout $\alpha' \in \mathcal{O} \smallsetminus \{\alpha\}$. Alors

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_0 + \sum_{\alpha' \in \Delta} (d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha' \\ &= \alpha + \alpha_0 + \sum_{\alpha' \in \Delta \smallsetminus \mathcal{O}} (d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$. Supposons maintenant $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. On a alors $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \smallsetminus \{\alpha_0\}} m(\alpha)$ et $d = 1 + \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \smallsetminus \{\alpha_0\}} d(\alpha)$. L'égalité $m = d - 1$ force $m(\alpha) = d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$. On obtient comme ci-dessus

$$\beta = \alpha_0 + \sum_{\alpha' \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)} (d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'$$

et $\alpha_0 \leq_{\hat{B}'} \beta$. Cela démontre (1).

Montrons que

(2) $\mathcal{O}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}$ qui sont minimaux pour l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$.

La relation (1) entraîne que l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}$ minimaux pour l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$ appartiennent à $\mathcal{O}$. Soit maintenant $\alpha \in \mathcal{O}$ et considérons un élément $\beta \in \mathfrak{S}$ tel que $\beta \leq_{\hat{B}'} \alpha$. D'après (1), on peut fixer $\alpha' \in \mathcal{O}$ tel que $\alpha' \leq_{\hat{B}'} \beta$, donc $\alpha' \leq_{\hat{B}'} \alpha$. Supposons $\alpha' \neq \alpha$. Alors, par définition de l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$, on obtient une égalité

$$-\alpha + \alpha' + \sum_{\alpha'' \in \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}} m(\alpha'')\alpha'' = 0,$$

avec des coefficients $m(\alpha'') \in \mathbb{N}$. Or les seules relations linéaires entre éléments de Δ_{a} sont proportionnelles à la relation (1) de 1.3 donc le coefficient de α et celui de

α' doivent être de même signe. Ce n'est pas le cas. Cette contradiction prouve que $\alpha' = \alpha$. Alors, les inégalités $\alpha = \alpha' \leq_{\hat{B}'} \beta \leq_{\hat{B}'} \alpha$ entraînent $\beta = \alpha$, ce qui prouve que α est minimal. Cela démontre (2).

Proposition. — *L'application qui, à un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$, associe la donnée $\boldsymbol{G}'$, se quotiente en une injection de $\underline{E}(G)$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G.*

Démonstration. — Soient $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1), (\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$. Notons $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ les données endoscopiques de G associées. La proposition signifie que $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalentes si et seulement si $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ le sont. Dans un sens, c'est clair : si les couples $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont conjugués par un élément $\omega \in \Omega$, il suffit de relever ω en un élément quelconque x de $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'élément x est une équivalence entre les deux données endoscopiques. Inversement, supposons que les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ soient équivalentes. On affecte les objets relatifs à nos deux séries de données d'indices 1 ou 2. En particulier, on introduit les sous-groupes de Borel $\hat{B}'_1$ de $\hat{G}'_1$, resp. $\hat{B}'_2$ de $\hat{G}'_2$, que l'on a défini avant l'assertion 2.1.(2). Fixons $x \in \hat{G}$ qui réalise l'équivalence, c'est-à-dire que $s_2 = xs_1x^{-1}$ et $\mathcal{G}'_2 = x\mathcal{G}'_1x^{-1}$. On peut multiplier x à droite par un élément de $\hat{G}'_1$ et à gauche par un élément de $\hat{G}'_2$. On peut donc supposer que la conjugaison par x envoie la paire de Borel $(\hat{B}'_1, \hat{T})$ de $\hat{G}'_1$ sur la paire de Borel $(\hat{B}'_2, \hat{T})$ de $\hat{G}'_2$. En particulier, x normalise $\hat{T}$ et définit un élément $\omega \in W$. Puisque, pour $i = 1, 2$, $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}_i$ est l'ensemble des racines simples dans $\Sigma^{G'_i}$ pour le Borel $\hat{B}'_i$, on a $\omega(\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}_1) = \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}_2$. De même, ω transporte l'ordre $\leq_{\hat{B}'_1}$ en l'ordre $\leq_{\hat{B}'_2}$. Pour $i = 1, 2$, d_i est l'ordre de s_i. Puisque $xs_1x^{-1} = s_2$, on a $d_1 = d_2$ et on note simplement d cet entier. Alors la conjugaison par ω envoie $\mathfrak{S}_1$ sur $\mathfrak{S}_2$. Puisque cette conjugaison transporte les ordres, l'assertion (2) entraîne qu'elle envoie $\mathcal{O}_1$ sur $\mathcal{O}_2$. Alors, elle conserve Δ_{a}, donc $\omega \in \Omega$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Pour $i = 1, 2$, l'élément $\omega_{G'_i}(\sigma)$ est obtenu en choisissant un élément $(g'_i(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'_i$ qui conserve $(\hat{B}'_i, \hat{T})$, puis en posant $\omega_{G'_i}(\sigma) = \hat{T}g'_i(\sigma)$. Puisque $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$, on a $x(g'_1(\sigma), \sigma)x^{-1} = (hg_2(\sigma), \sigma)$, pour un $h \in \hat{G}'$. Puisque la conjugaison par x envoie $(\hat{B}'_1, \hat{T})$ sur $(\hat{B}'_2, \hat{T})$, la conjugaison par h conserve $(\hat{B}'_2, \hat{T})$. Donc $h \in \hat{T}$. On en déduit $xg'_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} \in \hat{T}g'_2(\sigma)$, ce qui équivaut à $\omega\omega_{G'_1}(\sigma)\sigma_G(\omega)^{-1} = \omega_{G'_2}(\sigma)$. Ceci étant vrai pour tout σ, les couples $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalents. □

2.3. Surjectivité d'après Langlands. —

Proposition. — *L'application qui, à un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$, associe la donnée $\boldsymbol{G}'$, se quotiente en une bijection de $\underline{E}(G)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G.*

Démonstration. — L'injectivité ayant déjà été établie, il faut prouver la surjectivité. On considère une donnée endoscopique elliptique $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de G. Parce qu'elle est elliptique, Langlands prouve (par la méthode que l'on a reprise en 1.7) que s est d'ordre fini. On effectue la construction de 1.4, dont en reprend les notations. Montrons que

(1) si la donnée $\boldsymbol{G}'$ est équivalente à la donnée principale $\boldsymbol{G} = (G, 1, {}^LG)$, on a $\mathfrak{X} = \Delta$; sinon, on a $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, il existe un unique $k \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que $\mathfrak{X}_k \neq \emptyset$ et cet unique ensemble $\mathfrak{X}_k$ forme une unique orbite pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$.

Si la donnée $\boldsymbol{G}'$ est équivalente à $\boldsymbol{G}$, on a $s = 1$ donc $d = 1$ et $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0$. Puisque ce dernier ensemble est un ensemble de racines simples pour $\hat{G}'$, ses éléments sont linéairement indépendants donc $\mathfrak{X} \neq \Delta_{\mathrm{a}}$, ce qui implique $\mathfrak{X} = \Delta$. Supposons maintenant que la donnée $\boldsymbol{G}'$ ne soit pas équivalente à $\boldsymbol{G}$. Alors $s \neq 1$ et $d \geq 2$. Il y a forcément une racine $\alpha \in \Sigma$ pour laquelle $\alpha(s) \neq 1$, donc un $k \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que $\mathfrak{Y}_k \neq \emptyset$. Considérons le plus petit k pour lequel cette propriété est vérifiée. Alors, par définition, $\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{Y}_k$ donc $\mathfrak{Z}_k \neq \emptyset$. L'ensemble $\mathfrak{X}_k$ des éléments minimaux de $\mathfrak{Z}_k$ n'est pas vide non plus. Comme dans la preuve de 2.1.(2), l'ellipticité se traduit par l'égalité $\dim(X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F}) = \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$. Si $\mathfrak{X} = \Delta$, on a

$$\dim(X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F}) = \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F}) + \sum_{j=1,\dots,d-1} \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_j]^{\Gamma_F}).$$

Mais puisque $\mathfrak{X}_k$ n'est pas vide, l'espace $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_k]^{\Gamma_F}$ n'est pas nul : la somme des éléments de $\mathfrak{X}_k$ appartient à cet espace. Donc $\dim(X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F}) > \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$, contradiction. Donc $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Comme dans la preuve de 2.1(2), l'ellipticité se traduit alors par l'égalité

$$\dim(\mathbb{Q}[\Delta_{\mathrm{a}}]^{\Gamma_F}) = 1 + \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F}).$$

S'il y a au moins deux $j \in \{1, \dots, d-1\}$ tels que $\mathfrak{X}_j \neq \emptyset$, on voit comme ci-dessus que $\dim(\mathbb{Q}[\Delta_{\mathrm{a}}]^{\Gamma_F}) \geq 2 + \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$, contradiction. Donc k est l'unique élément de $\{1, \dots, d-1\}$ tel que $\mathfrak{X}_k \neq \emptyset$. Pour la même raison, on a $dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_k]^{\Gamma_F}) = 1$. Cela prouve (1).

Considérons le couple $(\omega_G, \{\alpha_0\})$, où $\omega_G : \Gamma_F \to \Omega$ est l'application constante de valeur 1. Ce couple appartient à $\underline{\mathcal{E}}(G)$ et on voit que la donnée endoscopique qui lui est associée n'est autre que $\boldsymbol{G}$. Cela règle la question pour cette donnée. Supposons maintenant que la donnée $\boldsymbol{G}'$ ne soit pas équivalente à $\boldsymbol{G}$. Alors $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$ et la construction de 1.4 munit Δ_{a} d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ qui est de la forme $\sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$, où $w_{G'}$ est une application de Γ_F dans Ω. On pose $\mathcal{O} = \mathfrak{X}_k$, où k est l'entier de la relation (1). Le couple $(w_{G'}, \mathcal{O})$ appartient à $\underline{\mathcal{E}}(G)$. On lui associe une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'' = (G'', \mathcal{G}'', \underline{s})$ comme dans le paragraphe précédent. Il résulte des définitions que $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}'$. Il est moins clair que $\underline{s} = s$. En effet, les définitions entraînent $\alpha(s) = \alpha(\underline{s}) = 1$ pour $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$, mais, pour $\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha(s) = \zeta_d^k$ tandis que $\alpha(\underline{s}) = \zeta_{\underline{d}}$, où $\underline{d} = \sum_{\beta \in \mathcal{O}} d(\beta)$. Pour montrer que $\underline{s} = s$ et donc pour achever la preuve de la proposition, il reste à prouver :

(2) on a les égalités $\underline{d} = d$ et $k = 1$.

On vient de dire que $\alpha(s) = 1$ si $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ et $\alpha(s) = \zeta_d^k$ si $\alpha \in \mathcal{O}$. Puisque d est par définition l'ordre de s, cela entraîne que k est premier à d. De plus, la relation 1.3.(1) entraîne que $\zeta_d^{k\underline{d}} = 1$, donc d divise $\underline{d}$. On sait que, pour toute racine positive $\beta \in \Sigma$, on peut trouver une suite de racines positives $(\beta_i)_{i=1,\dots,m}$ de sorte que $\beta_1 \in \hat{\Delta}$, $\beta_{i+1} - \beta_i \in \Delta$ pour $i = 1, \dots, m-1$ et $\beta_m = \beta$. On applique cela à

$\beta = -\alpha_0 = \sum_{\alpha\in\Delta} d(\alpha)\alpha$ et on écrit

$$\beta_i = \sum_{\alpha\in\Delta} d_i(\alpha)\alpha. \tag{3}$$

L'application $i \mapsto d_i = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}\cap\Delta} d_i(\alpha)$ est croissante et on a $d_{i+1} \leq d_i+1$. Pour $i = m$, on a $d_m = \underline{d}$ si $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$, et $d_m = \underline{d} - 1$ si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. Supposons $d < \underline{d}$. Alors il existe i tel que $d_i = d$. Fixons un tel i. On a alors $\beta_i(s) = \zeta_d^{kd} = 1$. Donc $\beta_i \in \Sigma^{G'}$ et β_i est combinaison linéaire des éléments de $\mathfrak{X}_0 = \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$. Écrivons $\beta_i = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathrm{a}}\smallsetminus\mathcal{O}} m(\alpha)\alpha$. Si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$, seuls interviennent ici des éléments de Δ et cette égalité coïncide avec (3). En ce cas $d_i(\alpha) = 0$ pour $\alpha \in \mathcal{O}\cap\Delta$, donc $d = d_i = 0$ ce qui est impossible. Si $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$, on a

$$\begin{aligned}\beta_i &= m(\alpha_0)\alpha_0 + \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus\mathcal{O}} m(\alpha)\alpha \\ &= -\sum_{\alpha\in\mathcal{O}} m(\alpha_0)d(\alpha)\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus\mathcal{O}} (m(\alpha) - m(\alpha_0)d(\alpha))\alpha.\end{aligned}$$

En comparant avec (3), on obtient

$$d = -m(\alpha_0)\sum_{\alpha\in\mathcal{O}} d(\alpha) = -m(\alpha_0)\underline{d}.$$

On a $d \geq 1$ par définition de d. L'égalité précédente contredit l'hypothèse $d < \underline{d}$. Cette hypothèse est donc contradictoire, d'où $d = \underline{d}$. Le même raisonnement prouve que, pour tout $e \in \{1, \ldots, d-1\}$, il existe une racine β_i telle que $\beta_i(s) = \zeta_d^{ke}$. En choisissant pour e l'entier tel que $ke \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$, on obtient que l'ensemble $\mathfrak{Y}_1$ n'est pas vide. Comme on l'a vu ci-dessus, cela entraîne $\mathfrak{X}_1 \neq \emptyset$, donc $k = 1$. Cela démontre (2) et la proposition. □

Références

[Bor] Borel A., *Automorphic L-functions*, Proc. of Symposia in Pure Math. **33** (1979), part 2, pp. 27-61.

[BT] Borel A., Tits J., *Groupes réductifs*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques **27** (1965), pp. 55-150.

[Bou] Bourbaki N., *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, 1968.

[LL] Labesse J.-P, Lapid E., *Characters of G over local and global fields*, appendice à Lapid E., Mao Z., *A conjecture of Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms*, J. Number Theory **146** (2015), pp. 448-505.

[L] Langlands R., *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. **31** (1979), pp. 700-725.

[MW] Mœglin C., Waldspurger J.-L., *Stabilisation de la formule des traces tordue, vol. 1 et 2*, Progress in Math. **316-317**, Birkhäuser, 2016.

[W] Waldspurger J.-L., *Caractères automorphes d'un groupe réductif*, prépublication (2016), arXiv : 1608.07150.

Bertrand Lemaire, Institut de Mathématiques de Luminy et UMR 6206 du CNRS, Université Aix–Marseille II, Case Postale 907, F–13288 Marseille Cedex 9
E-mail : Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr

Jean-Loup Waldspurger, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris-Rive-Gauche, 2 place Jussieu 75005 Paris • *E-mail :* jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr