



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques en contact micromécanique

Vladislav Yastrebov

► **To cite this version:**

Vladislav Yastrebov. Méthodes numériques en contact micromécanique. Mécanique Numérique du Contact, inPress. hal-02394181v2

**HAL Id: hal-02394181**

**<https://hal.science/hal-02394181v2>**

Submitted on 1 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes numériques en contact micromécanique

Vladislav A. YASTREBOV



*Mines Paris, Université PSL, Centre des Matériaux, UMR7633 CNRS, 91003 Évry, France*

## **Abstract.**

Les méthodes numériques pour traiter des problèmes du contact à petites échelles ainsi que des modèles associés sont discutés dans ce chapitre. Par petite échelle nous comprenons l'échelle à laquelle les surfaces ne peuvent pas être considérées comme déterministes et la prise en compte de la rugosité devient nécessaire. Même si des méthodes applicables à petites échelles ne diffèrent pas de celles qui sont développés pour des problèmes du contact généraux, le traitement du contact à petites échelles possède certaines particularités qui valent la peine d'être discutées séparément. Principalement, une revue d'applications de la méthode des éléments finis et de la méthode des éléments de frontière aux problèmes du contact rugueux est faite. Les deux applications pertinentes seront présentées en détail : le contact des aspérités et le contact des surfaces rugueuses. Quelques pistes pour des futures études seront proposées.

## **1.1. Introduction**

Le contact mécanique et tous les mécanismes associés : frottement, usure, adhésion, lubrification en régime mixtes représentent des mécanismes critiques dans un grand nombre des systèmes naturels (e.g., pattes des petits animaux, articulations, glaciers, failles) et industriels (par exemple., pneus/chaussée, engrenages, paliers, piston/cylindre). Très souvent, dans l'analyse de ces systèmes, on suppose que les

surfaces de contact ont des formes nominales presque partout lisses. Cependant, en réalité, toutes les surfaces réelles, d'autant plus celles de la nature, possèdent des formes bien plus complexes que leurs formes nominales : en langage simple, on peut dire que ces surfaces sont rugueuses. Cette rugosité influence la quasi-totalité des phénomènes interfasciaux (Bowden et Tabor 1986, Vakis *et al.* 2018) : l'état de contrainte près du contact, la raideur de l'interface de contact, l'usure, le frottement, l'adhésion, le transfert thermique et électrique ainsi que l'étanchéité sont tous affectés par la rugosité des surfaces en contact. Dans la plupart des cas, à l'échelle macroscopique (échelle de la zone de contact nominale et de la structure), l'effet de la rugosité peut être pris en compte par des lois phénoménologiques ou celles basées sur des considérations microscopiques (Zavarise *et al.* 1992, Cooper *et al.* 1969, Greenwood 1966), dont la loi d'usure d'Archard (Archard et Hirst 1956), la loi de frottement de Coulomb ainsi que d'autres lois de frottement du type « rate and state » (Rice et Tse 1986, Dieterich 1992, Dieterich et Kilgore 1994, Rice 2006) font partie. Cependant, les modèles micromécaniques utilisés dans le passé se basaient sur des modèles assez simplistes des rugosités et du comportement mécanique. Souvent, ces limitations provenaient de la nécessité de faire des hypothèses assez fortes pour obtenir des résultats car le problème du contact formulé pour une géométrie complexe ne peut pas être résolu analytiquement à cause de sa forte non-linéarité. Maintenant, en utilisant des méthodes numériques avancées et des puissances de calculs d'aujourd'hui, un grand champ d'applications en contact micromécanique devient très accessible aux chercheurs et ingénieurs. Dans ce chapitre, les avancées des méthodes numériques et celles de notre compréhension de la physique des contacts à petites échelles sont discutées.

### 1.1.1. Plan

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, le problème du contact et son aspect micromécanique sont présentés en Section 1.2. La méthode des éléments finis est brièvement discutée en Section 1.3 avec l'accent mis sur des particularités pertinentes pour le contact à petite échelle. La méthode des éléments de frontière n'est pas présentée en détail dans ce chapitre, le lecteur intéressé est invité à consulter une revue récente (Bemporad et Paggi 2015). Néanmoins, de nombreuses applications de cette méthode aux problèmes du contact à petite échelle sont présentées. Deux applications principales du contact micromécanique : le contact entre des aspérités et le contact des surfaces rugueuses sont discutés en Sections 1.4 et 1.5, respectivement. Quelques problèmes pour l'avenir sont formulés en Section 1.6.

## 1.2. Problème micromécanique du contact

### 1.2.1. Géométrie des surfaces : description mathématique

Dans cette section, nous formulons le problème micromécanique du contact. Son traitement fera le sujet des sections suivantes. Nous considérons le contact entre deux corps simplement connexes<sup>1</sup> (ensembles ouverts  $\Omega^1(t), \Omega^2(t)$ ) en présence de la « rugosité<sup>2</sup> » d'une ou des surfaces. La configuration est définie à chaque instant du temps  $t$ , dans la suite on va omettre cette notation explicite de cette dépendance du temps. Le comportement mécanique des matériaux (homogène ou hétérogène) peut être linéaire ou non linéaire tandis que le modèle du contact peut être considéré sans ou avec frottement/adhésion. Dans le cas général, dans l'état initial, les deux surfaces de contact potentiel sont décrites par des vecteurs :

$$\begin{cases} \mathbf{r}^1(\xi^1, \eta^1) \in \partial\Omega^1, \\ \mathbf{r}^2(\xi^2, \eta^2) \in \partial\Omega^2, \end{cases} \quad \mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2 \in \mathbb{R}^3,$$

où  $\partial\Omega^i$  définit la clôture de l'ensemble,  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$  sont des applications au moins surjectives<sup>3</sup> des paramètres  $\{\xi^i, \eta^i\} \in \mathcal{X}^i \subset \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$  dans des deux-surfaces  $\partial\Omega^i$  émergées dans l'espace physique à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{r}^i : \mathcal{X}^i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial\Omega^i \subset \mathbb{R}^3.$$

L'application  $\mathbf{r}^i$  est continue. Demandons que  $\mathcal{X}^i$  soient simplement connexes et convexes. Ci-après nous allons nous limiter à la considération du problème du contact en trois dimensions; les indices supérieurs 1, 2 dénotent les deux surfaces. En principe, la formulation peut être adaptée au cas de l'auto-contact, où entrent en contact les différentes parties d'une même surface. La mise en contact peut être effectuée *via* différents types de chargement (mécanique, thermique, magnétique). Cette formulation du problème de contact est assez générale et peut s'adapter au contact macroscopique et microscopique. Cependant, nous allons considérer que la géométrie des deux surfaces est très complexe, contrairement à la plupart des applications macroscopiques où les surfaces étudiées restent assez simples.

Introduisons la zone de contact  $\mathcal{C}$  (en absence d'auto-contact) dans la configuration actuelle comme un ensemble des points  $\mathbf{r}^c$  tels que :

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{r}^c \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{r}^1 \in \partial\Omega^1, \mathbf{r}^2 \in \partial\Omega^2 : \mathbf{r}^c = \mathbf{r}^1 = \mathbf{r}^2 \}.$$

Ses images sont dénotées

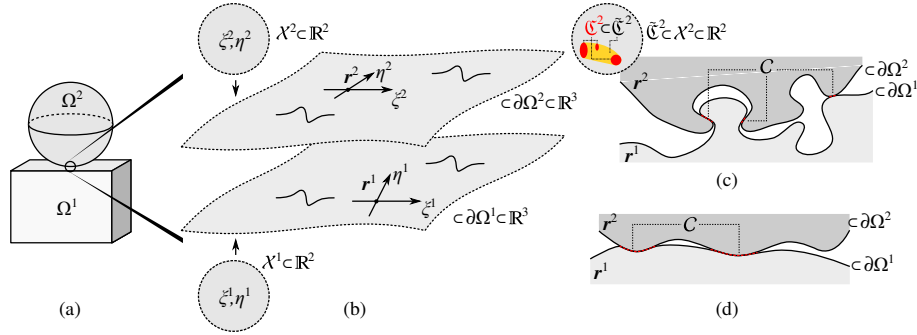
$$\mathbf{r}^i : \mathcal{C}^i \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C} \subset \partial\Omega^i.$$

1. La condition de connexité simple des corps en contact permet d'alléger un peu la formulation mathématique, notamment en termes d'application de l'espace paramétrique en l'espace physique.

2. Par la « rugosité », nous comprenons ici n'importe quelle forme des surfaces.

3. En absence d'auto-contact ces applications peuvent être considérées bijectives.





**FIGURE 1.1.** Problème du contact entre deux corps à surface : (a) l'échelle macroscopique ; (b) zoom sur des parties des surfaces potentiellement en contact (la paramétrisation est indiquée) ; (c) exemple du problème de contact non-simplifiable ; (d) exemple des surfaces qui permettent à l'instant donné une représentation explicite.

Introduisons également l'ensemble  $\tilde{\mathcal{C}}^i \supset \mathcal{C}^i$ , tel que  $\tilde{\mathcal{C}}^i$  est une 2-variété simplement connexe et convexe de taille minimale<sup>4</sup>. Notez que les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  ne sont pas nécessairement des ensembles connexes, ni des variétés, et qui ne sont pas nécessairement compacts non plus. Pour pouvoir comparer des quantités géométriques de différentes tailles, définissons la taille  $T(\bullet)$  linéaire d'une entité  $\mathcal{A}$  :

$$T(\mathcal{A}) = \max_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathcal{A}} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|,$$

où  $\|\mathbf{a}\|$  définit une norme euclidienne d'un vecteur. Dénotons par  $\mathcal{C}_0^i$  l'extension maximale de la zone de contact dans l'espace paramétrique  $\mathcal{C}_0^i \subset \mathcal{X}^i$ , i.e.  $\forall t : \mathcal{C}(t) \subseteq \mathcal{C}_0^i \subseteq \mathcal{X}^i$ . Bien entendu,  $\mathcal{C}_0^i$  dépendant du problème et ne peuvent pas être toujours devinés.

La surface a une *forme explicite* dans la zone d'intérêt, si à chaque instant du temps  $t \in \mathcal{T}$  existe une base orthonormée  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$  telle que les surfaces englobant le contact potentiel peuvent être représentées comme des fonctions  $z^i(x, y)$ , où  $z^i = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{e}_z$ ,  $x = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{e}_x$ ,  $y = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{e}_y$  :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \exists \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \forall \mathbf{r}^i \in \tilde{\mathcal{C}}_0^i : \exists ! z^i(x, y) \text{ t.q. } \mathbf{r}^i = \mathbf{e}_z z^i(x, y) + \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y,$$

où  $\tilde{\mathcal{C}}_0^i \supset \mathcal{C}_0^i$  est, comme introduit précédemment, une 2-variété simplement connexe et convexe de taille minimale qui inclut  $\mathcal{C}_0^i$ . Plus largement, on va se permettre de travailler avec des surfaces qui ont une représentation *semi-explicite* qui va être définie

4. La condition de convexité des  $\mathcal{X}^i$  qui a été demandée auparavant, provient de la nécessité d'assurer :  $\tilde{\mathcal{C}}^i \subset \mathcal{X}^i$ .

ci-après. Définissons d'abord l'ensemble  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^2$  tel qu'il consiste de tous les points :  $\{\mathbf{r}^i(\tilde{\mathbf{C}}_0^i) \cdot \mathbf{e}_x, \mathbf{r}^i(\tilde{\mathbf{C}}_0^i) \cdot \mathbf{e}_y\}$ . On définit une surface semi-explicite comme une surface pour laquelle l'ensemble des points  $\{x, y\} \in \mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}$  pour lesquelles  $z^i(x, y)$  n'est pas toujours unique est de mesure nulle. Si les deux surfaces n'ont pas de forme explicite ou semi-explicite comme définie ci-avant dans le voisinage de la zone de contact potentiel, on va appeler le problème de contact associé *non-simplifiable*. Un exemple d'un problème non-simplifiable est montré dans la figure 1.1(c).

À partir de cette formulation très générale, nous pourrions proposer quelques sous-cas d'intérêt particulier. Si la dimension linéaire de la zone de contact est très petite devant la taille des corps en contact  $T(C) \ll T(\Omega_1), T(\Omega_2)$  et si on s'intéresse exclusivement à l'état de déformation et de contrainte dans la zone de contact, les corps peuvent être considérés comme semi-infinis, voir par exemple, la théorie de Hertz (1881). Si également, dans la zone d'intérêt une représentation explicite des surfaces existe, et le gradient maximal est infinitésimal, i.e.  $\max |\nabla z(x, y)| \ll 1$ , des solutions fondamentales de Boussinesq, Cerutti et Flamant sont utilisables. C'est important de souligner que ces solutions ne sont pas utilisables dans le cas où une surface déformable ne possède pas de représentation explicite dans le voisinage de la zone de contact.

### 1.2.2. Géométrie des surfaces : exemples et discussions

La « rugosité », ou plus généralement la géométrie, des surfaces naturelles et industrielles, peut prendre des formes très variées. Dans la figure 1.2, quelques photos des surfaces différentes sont assemblées : (a) des rides de plages formées par l'interaction des particules de sables avec le vent ou le courant, (b) des galets de plages de tailles différentes, (c) la surface de rupture de granite, (d) la texture d'un mur peint, (e) la surface de rupture par fluage d'un superalliage de titane, (f) la « peau d'éléphant » sur des roches de la forêt de Fontainebleau, (g) la surface de la mer, (h) la surface d'un matériau fibreux, (i) la peinture écaillée, (j) le pavé cailloux, (k) le sol sec, (l) l'asphalte, (m) l'écorce, (n) la peau d'un doigt, (o) des gouttes d'eau sur la peinture de voiture, (p) la surface de rupture (partie bas) sur une roche de la forêt de Fontainebleau. Les géométries ci-présentes sont toutes complexes et possèdent un caractère aléatoire. Cependant, à part les exemples (c,g), la géométrie des surfaces sur les photos représente plutôt l'échelle mésoscopique qui contient en complément une rugosité à petite échelle, qui va être discutée un peu plus en détail en Section 1.2.3.

En outre, cette géométrie peut être considérée comme dépendant de la résolution. Cette assertion est d'autant plus vraie qu'à l'échelle atomique la matière ne possède pas de continuité, cette dernière n'est qu'un modèle. Cependant, c'est un modèle qui reste valide à partir des échelles nanométriques et c'est celui qui sera utilisé dans le contexte de cette présentation. Mais même aux échelles de validité du modèle de milieu continu, la géométrie des surfaces peut se décrire à différents niveaux

de précision. Prenons un exemple de ride de plage (voir la figure 1.2(a)) où l'on peut distinguer une forme « continue » qui est pourtant formée des particules de sable qui forment à leur échelle une « surface » très complexe, similaire à celle de la figure 1.2(b); de plus, la surface des particules de sables est rugueuse également comme sur la figure 1.2(c). Pour cet exemple, on peut donc distinguer au moins trois échelles : ride, particules, rugosité. Bien entendu, ces trois échelles ne peuvent pas être traitées simultanément afin de comprendre l'interaction des roues d'une automobile martienne avec le sol de la planète rouge. À part la différence des échelles de la forme et de la rugosité, des exemples des géométries de surfaces qui permettent de distinguer différentes échelles sont nombreux : surfaces tournées, surfaces polies par abrasion, surfaces architecturées (Yoon *et al.* 2006, Costa et Hutchings 2007, Autumn 2007). À noter que même si ces échelles sont bien distinctes au premier regard, dans certains cas il n'y a pas de séparation entre ces échelles en termes de mécanique (Greenwood et Tripp 1967, Yastrebov 2019).

Souvent, dans des problèmes de contact, on se limite à la « forme » des pièces telle qu'elle a été conçue, mais inévitablement cette forme cache des aspects de la rugosité qui fait l'objet de cette section. La forme, souvent, peut être définie comme déterministe, surtout dans des applications d'ingénieur tandis que la rugosité est stochastique et aléatoire. Cependant, elle peut être traitée aussi de manière déterministe. Autrement, l'aspect de la rugosité peut être pris en compte *via* des relations phénoménologiques qui peuvent être obtenues, entre autres, par des calculs déterministes du contact des surface rugueuses ou bien *via* des modèles statistiques.

### 1.2.3. Modèles de rugosité

L'objectif ici n'est pas de présenter en détails tous les aspects des surfaces rugueuses, toute l'information peut être trouvée dans des textes d'ingénieurs (Thomas 1999, Whitehouse 2010), des textes mathématiques (Adler et Taylor 2009) ou physiques (Mandelbrot 1983, Meakin 1998). Néanmoins, il serait important de proposer quelques références sur la modélisation de la géométrie des surfaces rugueuses. Tout d'abord, un modèle d'une surface rugueuse peut être obtenu par des mesures directes des surfaces, mais comme la résolution de tous les instruments est limitée, la reconstruction d'une surface finale peut être considéré comme modélisation. Outre les mesures directes, différentes méthodes pour modéliser des surfaces rugueuses existent. Souvent, ce sont des méthodes qui se basent sur une caractéristique fractale de la plupart des surfaces naturelles et industrielles (Russ 1994, Renard *et al.* 2013). Une bonne revue de ces méthodes en vue de la mécanique du contact des surfaces rugueuses a été donnée dans (Zahouani *et al.* 1998). La méthode la plus simple est le *mid-point random displacement* (Russ 1994, Meakin 1998) qui, d'une manière hiérarchique, sous-divise la grille des points à chaque itération (un segment en deux, une face en quatre) et en le faisant, il perturbe la coordonnée verticale de chaque nouveau point d'une manière aléatoire. Pour atteindre l'aspect

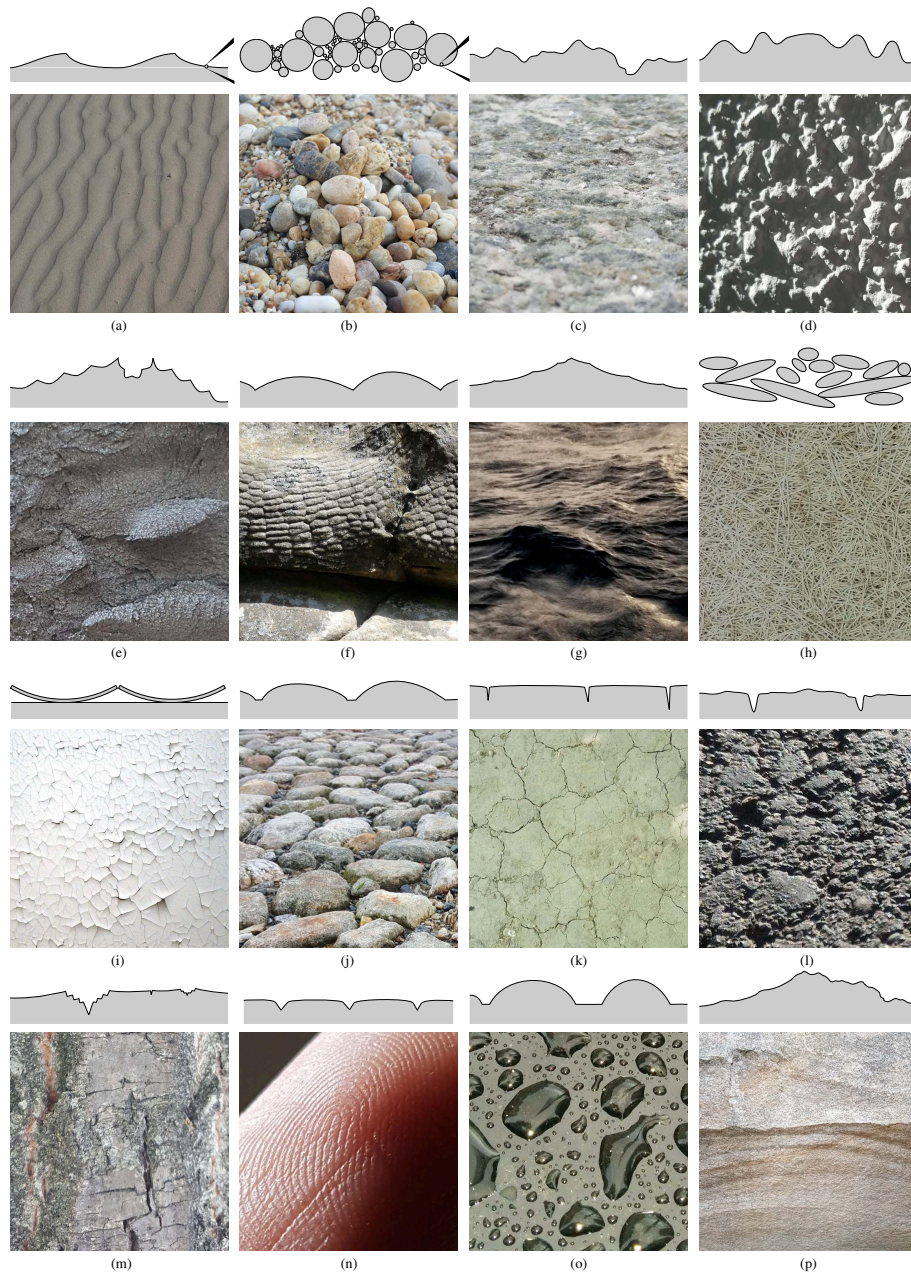


FIGURE 1.2. Différentes géométries des surfaces naturelles.

fractale, l'écart type de ces perturbations décroît à chaque nouvelle itération. Le taux de cette décroissance dépend de la dimension fractale de la surface modélisée. En revanche, la surface résultante nécessite un lissage (interpolation) pour obtenir un problème mécanique bien posé, i.e. un problème pour lequel le raffinement du maillage amène à la convergence de la solution numérique. Une autre méthode assez courante est l'utilisation de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot généralisée au cas des surface 2D par Majumdar et Tien (1990), mais cette méthode ne permet pas d'obtenir facilement des surfaces isotropes (Zahouani *et al.* 1998). Une méthode puissante et flexible est la méthode de filtrage spectral d'un bruit blanc (Hu and Tonder 1992) qui permet de reproduire en moyenne un spectre auto-affine avec un exposant de Hurst défini tout en ayant un certain niveau de stochasticité. De plus, ce filtrage permet d'introduire des coupures de basse et de haute fréquence permettant d'obtenir des surfaces lisses à l'échelle de la discrétisation et la distribution gaussienne des hauteurs (Yastrebov *et al.* 2015). Récemment, une méthode de modélisation des surfaces avec la distribution des hauteurs contrôlées a été proposée dans (Pérez-Ràfols and Almqvist 2019).

#### 1.2.4. Formalisation du contact

Dans cette section, nous allons formaliser les conditions de contact qui se résument (en absence de frottement et adhésion) selon les trois conditions suivantes :

1. absence de pénétration, i.e. pas d'intersection entre des solides  $\Omega^1 \cap \Omega^2 = \emptyset$ ;
2. absence d'adhésion  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \leq 0$ , où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy,  $\mathbf{n}$  est la normale sortante, i.e. la contrainte normale n'est pas positive;
3. absence de cisaillement dans l'interface de contact, i.e. la composante tangentielle s'annule  $(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ , où  $\mathbf{I}$  est un tenseur identité.

La condition 1) peut être reformulée comme une inégalité cinématique de manière suivante : aucun des points d'une surface  $\partial\Omega^1$  ne peut pénétrer dans le volume  $\Omega^2$ , ou bien, ne peut pénétrer sous la surface  $\partial\Omega^2$ , qui devrait donc être orientable. Les indices 1 et 2 des surfaces sont arbitraires et peuvent être échangés. Cette condition peut être reformulée encore plus facilement comme une relation entre chaque point d'une surfaces et des points les plus proches  $\mathbf{r}_p$  d'une autre surface :

$$\forall \mathbf{r}^1 \in \partial\Omega^1, \exists \mathbf{r}_p^2 \in \partial\Omega^2 \text{ t.q. } \forall \mathbf{r}^2 \in \partial\Omega^2, \|\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}_p^2\| \leq \|\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^2\|, \quad [1.1]$$

de plus, si la surface  $\partial\Omega^2$  est suffisamment lisse, on peut affirmer que pour ces points :

$$(\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}_p^2) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p^2) \geq 0,$$

où  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_p^2)$  est la normale sortante dans la configuration actuelle de point  $\mathbf{r}_p^2$ . Si la surface, ici  $\partial\Omega^2$ , est  $C^1$ -lisse, on peut définir à chaque point un vecteur normal d'une manière unique comme :

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}^2) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \xi^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \eta^2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \xi^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \eta^2} \right\|}$$

Bien entendu, la paramétrisation de la surface  $\xi^2, \eta^2$  doit être choisie de telle façon que la normale ainsi définie soit sortante. Si ces dérivées partielles n'existent pas, le vecteur normal  $\mathbf{n}$  ne peut pas être défini de manière unique. En revanche, on peut définir ses dérivés en utilisant les notions des sous-différentielles, alors définies de cette façon : la normale devrait être comprise comme l'ensemble des vecteurs normaux provenant du sous-différentiel de la surface au point d'intérêt (Moreau 1966, Heegaard et Curnier 1996, Pietrzak 1997, Yastrebov 2013). Pour simplifier l'équation [1.1], on introduit une notation suivante :

$$g_n = g_n(\mathbf{r}^1, \partial\Omega^2) = (\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}_p^2) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p^2), \quad [1.2]$$

où  $g_n$  est appelé le jeu (*gap*) normal, dont la valeur absolue définit la distance minimale entre le point  $\mathbf{r}^1$  et la surface  $\partial\Omega^2$  si la dernière est au moins  $C^1$ -lisse (au moins localement). Le signe de  $g_n$  détermine s'il y a une pénétration ( $g_n < 0$ ) ou séparation ( $g_n > 0$ ) locale. Il faut bien noter que dans le cas général,  $g_n(\mathbf{r}^1, \partial\Omega^2)$  n'est pas nécessairement égal à  $g_n(\mathbf{r}_p^2, \partial\Omega^2)$ , où  $\mathbf{r}_p^2$  est le point le plus proche à  $\mathbf{r}^1$  même si  $\partial\Omega^1$  est  $C^1$ -lisse. Avec la définition du gap normal, on peut formuler les conditions de contact de manière suivante :

$$g_n \geq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad g_n \sigma_n = 0, \quad [1.3]$$

où  $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est la contrainte normale de contact ou bien la négative de pression de contact  $\sigma_n = -p$ . Les conditions [1.3] s'appellent condition de Hertz-Signorini-Moreau (Wriggers 2006) ou conditions KKT (Karush-Kuhn-Tucker) dans la littérature sur l'analyse convexe.

Pour donner un exemple, considérons un problème de contact entre une surface rugueuse  $\partial\Omega^1$  définie par  $z(t, x, y)$  et un semi-espace élastique  $\Omega^2$  avec la frontière  $z = 0$ . En absence de déformation, à chaque instant du temps, le gap est  $g_n(\mathbf{r}^1, \partial\Omega^2) = z(t, x, y)$ . Cependant, dans la configuration actuelle, le gap est plus complexe à cause de la déformation du semi-espace.

Il faut bien noter ici, que dans le cas considéré et d'une surface  $z(x, y)$  nominalement plate, i.e. pour n'importe quelle surface  $S \subset \mathbb{R}^2$  suffisamment grande  $\langle z \rangle = 0$ , qu'en l'absence des efforts externes,  $\forall \delta < \infty : z(t, x, y) = z(x, y) - \delta(t)$ , l'aire de contact reste nulle. Cette conclusion, qui paraît étonnante au premier regard,



est liée au paradoxe de Cheseaux-Olbers (Harrison 1990), des forces de contact non nulles distribuées sur la surface du semi-espace élastique avec une densité non nulle créent une pression moyenne non nulle sur toute la surface infinie qui résulte en déplacement vertical infini. D'où suit que si le déplacement est fini  $\delta < \infty$ , la pression moyenne doit être nulle, donc les forces et l'aire de contact le sont aussi. Une formulation plus propre serait de fixer la surface rugueuse  $z(t, x, y) = z(x, y)$  et d'appliquer une pression externe à l'infini  $-\sigma_{zz} = p_0$ ; dans ce cas de figure, la fraction de l'aire de contact sera non nulle, quelle que soit la pression appliquée.

REMARQUE I.– *Les conditions [1.3] sont strictement valides si et seulement si il n'y a pas de fluide autour des solides en contact. Dans des situations réelles, souvent un fluide à pression non nulle entoure des corps. Pour cela, pour établir le contact, la pression de contact doit être supérieure à la pression de fluide partout au bord des zones de contact  $\forall \mathbf{r} \in \partial\mathcal{C} : \sigma_n \leq -p_f$ , où  $p_f$  est la pression locale du fluide. Cette correction est surtout pertinente quand la pression de contact est comparable à la pression de fluide (Shvarts et Yastrebov 2018a,b).*

REMARQUE II.– *À l'échelle macroscopique, parfois on suppose que l'interface de contact a une certaine raideur (Shi et Polycarpou 2005, Campañá et al. 2011, Pohrt et Popov 2012). Cette raideur complémentaire provient de la déformation des rugosités des deux surfaces. À l'échelle macroscopique, si les surfaces sont considérées comme des surfaces moyennées des surfaces réelles (en absence de détails infimes), le contact réel peut s'établir à une distance non nulle entre des surfaces moyennées, en revanche la raideur complémentaire doit devenir infinie quand la surface de contact sature et quand dans la zone de contact, l'aire réelle de contact soit égale à l'aire de contact entre des surfaces moyennes. Cette considération justifiait l'utilisation d'une méthode des barrières avec des paramètres non linéaires qui capturaient l'évolution de la raideur de contact. Alternativement, une méthode de pénalisation peut être utilisée pour capturer cette raideur complémentaire de contact (Wriggers et Zavarise 1993, Andersson et Kropp 2008); cependant, dans le cas échéant, la géométrie des surfaces ne devrait pas être la ligne moyenne des surfaces réelles mais plutôt la surface englobante qui passe par les aspérités les plus élevées. Ces techniques ne seront pas justifiées d'un point de vue physique dans le contexte du contact à petites échelles car on suppose qu'il n'y a plus de rugosité sous-jacente.*

### 1.2.5. Lois de frottement

Il existe une grande variété des lois de frottement qui cependant en leur majorité ne sont pertinentes qu'à l'échelle macroscopique. Par exemple, la loi de frottement de Coulomb selon laquelle la force tangentielle  $\mathbf{T}$  ne peut pas dépasser un seuil proportionnel à la force normale  $\mathbf{N}$ , i.e.  $\|\mathbf{T}\| \leq \mu\|\mathbf{N}\|$ , peut être considérée comme la conséquence de l'évolution linéaire de l'aire de contact réelle locale avec la pression  $a \sim p$ . Selon la théorie adhésive du contact (Rabinowicz 1965, Bowden et Tabor 1986,

Straffelini 2001), la résistance maximale des aspérités en contact au cisaillement est donnée par une constante  $\tau_c$ , alors la force tangentielle maximale  $T \leq \int a\tau_c dA \sim \int p\tau_c dA = \|N\|\tau_c$ . En plus des pertes dissipatives à la surface, en glissement, il existe de la dissipation présente dans le volume comme c'est le cas des élastomères à comportement visco-élastique, des métaux à comportement visco-élasto-plastique ou bien la dissipation peut provenir de la formation d'endommagement dans des matériaux quelconques (micro-fissures). À l'échelle macroscopique, toutes ces pertes d'énergie sont incluses dans la loi de frottement. De plus, la chaleur produite près de l'interface de contact change le comportement du matériau (conductivité thermique, module de Young, etc.) et peut même provoquer le changement de phase (transition vitreuse, austénitisation, fusion, évaporation, etc.). Tous ces phénomènes microscopiques donnent lieu à des lois de frottement macroscopiques (Vakis *et al.* 2018) qui peuvent être utilisées dans des systèmes complexes. L'utilisation de ces lois à l'échelle de la rugosité prête à confusion et ne peut pas reproduire correctement des lois de frottement macroscopiques. Pour cela, à l'échelle de la rugosité, il est pertinent d'utiliser des lois de frottement du type Tresca, i.e. des lois qui supposent que la résistance tangentielle locale ne dépend pas de la pression locale (Krim 2002, 1996, Mo *et al.* 2009) et qui peuvent être formulées de manière suivante :

$$\begin{cases} \|v_t\| = 0, & \text{if } \|\sigma_t\| < \tau_c \text{ adhérence,} \\ \|v_t\| > 0, & \text{if } \|\sigma_t\| = \tau_c \text{ glissement,} \end{cases} \quad [1.4]$$

où  $v_t$  est la vitesse de glissement tangentielle, et  $\sigma_t = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \sigma$  est le vecteur de contrainte privé de sa composante normale, i.e. le vecteur de contrainte dans le plan tangent. Pour rendre le modèle de frottement plus riche, la dépendance du seuil  $\tau_c$  de la température et de la vitesse peut être considérée provenant de l'échelle atomique (Gnecco *et al.* 2000, Gnecco et Meyer 2015) :

$$\tau_c(T, v_t) = \tau_c^0 + \alpha T \log(v_t/v_0),$$

où  $\alpha$  [Pa K<sup>-1</sup>] est une constante liée à la structure atomique et  $v_0$  est une vitesse de normalisation. Cependant, à des vitesses élevées, l'activation thermique ne devrait plus être importante et la résistance doit saturer. Dans l'intervalle de ces vitesses, une loi suivante peut être utilisée (Sang *et al.* 2001) :

$$\tau_c(T, v_t) = \begin{cases} \tau_c^e - \alpha T^{2/3} \log(\beta T/v_t)^{2/3}, & \text{if } v_t < \beta T \\ \tau_c^e, & \text{if } v_t \geq \beta T, \end{cases}$$

où  $\alpha$  [Pa K<sup>-2/3</sup>] et  $\beta$  [m s<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>] sont des constantes liées aux matériaux en contact.

Les conditions KKT peuvent donc être formulées de la façon suivante :

$$\|v_t\| \geq 0, \quad \|\sigma_t\| - \tau_c \leq 0, \quad (\|\sigma_t\| - \tau_c) \|v_t\| = 0. \quad [1.5]$$



Contrairement à la loi de Coulomb, cette loi de frottement est associative, ce qui simplifie beaucoup le traitement des problèmes de contact frottant associés (Michalowski et Mróz 1978, Curnier 1984) car il n’y a pas de couplage entre la pression du contact et le cisaillement. En outre, dans le cadre plus général, le frottement de Coulomb peut être approximé par des méthodes de type « point-fixe » où à chaque itération la loi de Tresca est utilisée (Panagiotopoulos 1975, Gwinner 2013).

REMARQUE.— De la même façon que les méthodes de pénalisation et des barrières perdent leur motivation physique dans le cadre du contact normal à petite échelle de la rugosité, la même chose se passe avec le traitement du frottement via la méthode de la pénalisation, qui devrait être évitée ou utilisée avec précaution particulière, étant donné qu’il n’y a pas de base physique.

### 1.3. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est un outil puissant et polyvalent qui permet de traiter divers problèmes en mécanique et physique (Zienkiewicz et Taylor 2000*a,b*, Bathe 1996). Cependant, le contact reste un problème à part pour cette méthode car il nécessite la description d’interaction entre des solides qui ont chacun leur propre discrétisation en éléments finis. Dans le cas général où les surfaces originales ne sont pas conformes géométriquement et/ou leurs discrétisations ne sont pas conformes non plus, le traitement du contact restait un problème délicat jusqu’à récemment. Dans cette section, nous allons aborder quelques questions d’intérêt général en vue d’appliquer la méthode des éléments finis aux problèmes du contact micromécanique ; tous les détails d’implémentation des algorithmes de contact peuvent être trouvés dans les monographies et les thèses de doctorat suivantes (Kikuchi et Oden 1988, Pietrzak 1997, Wriggers 2006, Laursen 2002, Konyukhov et Schweizerhof 2012, Popp 2012, Yastrebov 2013, Akula 2019, Shvarts 2019).

Avant d’entrer dans les particularités d’utilisation de la MEF aux microcontacts, nous rappelons les bases de cette méthode et de son utilisation pour le contact. La méthode des éléments finis est basée sur le principe des travaux virtuels qui, en l’absence de contact et dans le contexte infinitésimal peut être décrit sous la forme suivante<sup>5</sup> :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_f} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad [1.6]$$

5. Cette forme s’appelle la forme faible contrairement à la forme forte car cette première s’obtient par l’intégration de la forme forte, qui permet entre autres d’affaiblir les conditions sur la régularité de la solution.

où  $\delta \mathbf{u}$  dénote des déplacements virtuels (ou déplacements-test) qui s'annulent aux bords où des conditions de Dirichlet sont prescrites  $\Gamma_u$ , i.e.  $\delta \mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_u$ ,  $\mathbf{b}$  sont des forces volumiques,  $\ddot{\mathbf{u}}$  est un vecteur d'accélération,  $\rho$  densité et  $\mathbf{t}_0$  est l'intensité surfacique des efforts prescrits à la surface de Neumann  $\Gamma_f$ . Le déplacement  $\mathbf{u}$  doit vérifier les conditions de Dirichlet  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  sur  $\Gamma_u$  et être dans un espace fonctionnel tel que les intégrales dans [1.6] ont du sens ; cela concerne également les déplacements virtuels.

L'introduction des contraintes de contact transforme l'égalité variationnelle [1.6] en une inégalité variationnelle :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t dS \geq \int_{\Omega} \rho (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_f} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad [1.7]$$

avec le terme de dissipation mis dans la deuxième intégrale évaluée sur un des côtés de la surface de contact qui reste inconnue. En même temps, la solution  $\mathbf{u}$  et le déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$  doivent vérifier les conditions de contact  $g_n(\mathbf{u}) \geq 0$  et  $g_n(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \geq 0$ . Dans le cas des lois de frottement pertinentes aux petites échelles [1.4], l'intégrale de dissipation de frottement peut être reformulée comme :

$$\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t dS = \int_{\Gamma_{sl}} \tau_c \|\delta \mathbf{g}_t\| dS,$$

où  $\Gamma_{sl}$  détermine la zone de glissement dans laquelle  $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| = \tau_c$ . Cette forme du terme dissipative préserve la non-différentiabilité (Duvaut et Lions 1972, Kikuchi et Oden 1988) mais enlève la dépendance de la pression.

Afin d'aborder le problème du contact, l'inégalité [1.7] (qu'on peut considérer comme un problème d'optimisation sous contrainte) peut être transformée en un problème d'optimisation sans contraintes *via* des méthodes classiques telles que la méthode de pénalisation, méthode des barrières, méthode des multiplicateurs de Lagrange, méthode du lagrangien augmenté, ou *via* d'autres méthodes de l'optimisation (Bertsekas *et al.* 2003). L'utilisation de ces méthodes permet d'enlever les contraintes de contact imposées sur le choix des déplacements réels et virtuels et les ramener dans la fonctionnelle elle-même. Après la discrétisation de la formulation continue en éléments finis, on obtient un système d'équations non linéaires qu'on résout en général *via* la méthode de Newton dans la formulation implicite des éléments finis. Cette procédure nécessite naturellement la linéarisation de la forme faible (pour obtenir la matrice tangente) qui est lourde à réaliser dans le cas général (Pietrzak 1997, Popp 2012, Yastrebov 2013). Cependant, des méthodes de dérivation automatique permettent de simplifier cette procédure (Korelc 1997, Wriggers 2008, Lengiewicz *et al.* 2011).

Avant de passer à la discussion des applications de la méthode des éléments finis aux problèmes du contact à petite échelle, il serait important de faire quelques remarques sur la méthode elle-même.

### 1.3.1. Convergence, paramètres et pas de chargement

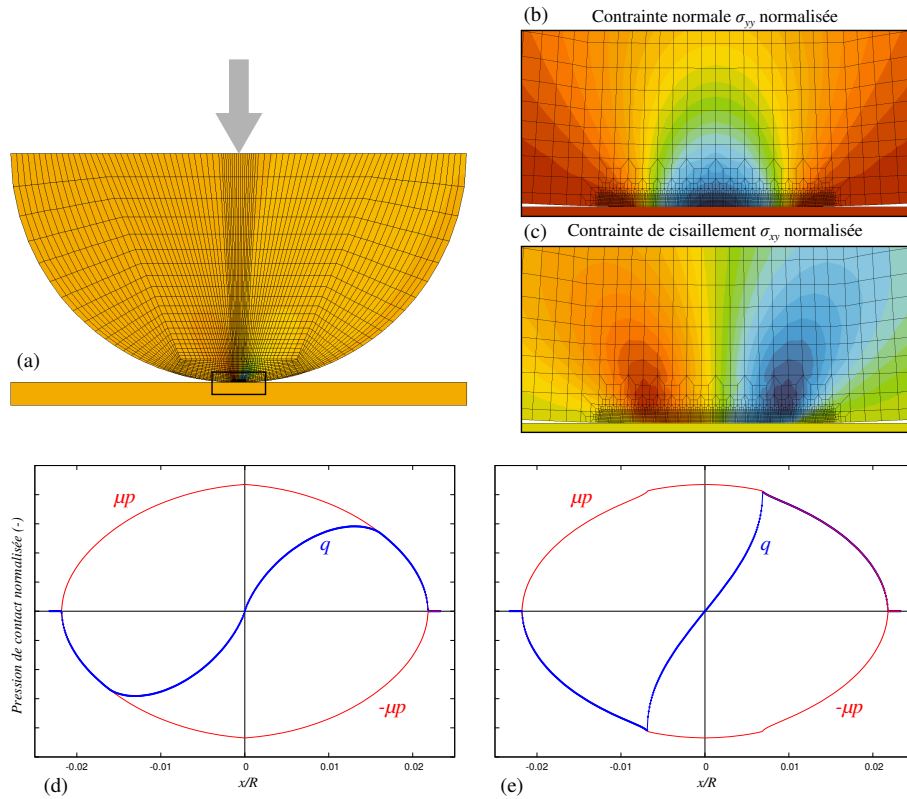
La convergence des itérations de Newton dans des problèmes du contact ne peut pas être toujours assurée pour le changement donné des conditions aux limites. L'utilisateur pourtant possède des paramètres de contrôle tels que le(s) coefficient(s) de pénalisation ou le(s) coefficient(s) d'augmentation dans la méthode du lagrangien augmenté. Il est préférable d'avoir ces paramètres définis indépendamment pour le contact normal et le contact tangentiel. En outre, il est aussi préférable d'avoir ces paramètres définis indépendamment pour chaque localisation, i.e. pour chaque élément de contact car ces paramètres sont liés à la raideur locale structurale qui n'est pas uniforme et qui change pour des modèles non linéaires des matériaux. On sait que pour la méthode de pénalisation, la solution est très sensible au choix du paramètre de pénalisation. Il est donc de bonne pratique de refaire chaque calcul avec la pénalisation, par exemple, deux fois plus élevée, qui permettra de valider la solution. La pratique de contrôle de pénétration « à l'œil nu », en général, n'est jamais concluante. La valeur basse de la pénalisation donne des résultats souvent peu précis mais assure la convergence assez rapide et robuste. En revanche, la valeur élevée de la pénalisation détériore le nombre de conditionnement de la matrice tangente, ce qui peut être critique pour des solveurs itératifs et en même temps détériore la convergence. Pour la méthode du lagrangien augmenté, le choix des paramètres d'augmentation n'influe pas autant la solution convergée mais l'arrivée à cette solution (la convergence elle-même) en dépend fortement : un mauvais choix du paramètre d'augmentation peut facilement se traduire en boucle de convergence infinie (Alart 1997, Yastrebov 2013). Pour la convergence optimale, les paramètres d'augmentation peuvent être ajustés à la volée au cours des itérations (Bussetta *et al.* 2012, Sewerin et Papadopoulos 2017).

### 1.3.2. Convergence des problèmes du frottement

La convergence des problèmes de frottement quasi statique ne signifie pas forcément la convergence vers la bonne solution. Un exemple marquant est le contact hertzien entre deux cylindres ou bien un plan et un cylindre en 2D ou 3D en présence du frottement de Coulomb (voir figure 1.3). Si les matériaux constituant les deux solides sont différents<sup>6</sup>, la mise en contact normal (sans efforts tangentiels) produira des contraintes de cisaillement dans l'interface. En revanche, la solution

---

6. Plus précisément, cette affirmation est correcte si la combinaison des paramètres élastiques suivante  $(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)/E_i$  est différente pour les deux matériaux (Johnson 1985).



**FIGURE 1.3.** Problème de Hertz avec le frottement. Contact entre un demi-cylindre élastique isotrope avec un plan rigide sous le déplacement imposé à la surface supérieure du cylindre (a). La zone de contact magnifiée (b,c) démontre la distribution des contraintes normales  $\sigma_{yy}$  et de cisaillement  $\sigma_{xy}$  respectivement obtenue avec 100 pas de chargement avec le déplacement imposé qui suit la forme parabolique  $u_y \sim i^2$  où  $i$  est le numéro du pas de temps, la distribution de contrainte le long de l'interface pour ce cas est démontrée dans (d). Pour comparaison, la distribution des mêmes efforts pour une solution obtenue en un seul pas de chargement est démontrée dans (e), cette solution est erronée ; figure adaptée de (Shvarts 2019).

semi-analytique auto similaire (Spence 1975, Johnson 1985) peut être obtenue si et seulement si la mise en contact se passe de telle façon qu'à chaque pas de chargement très peu d'éléments entrent en contact. Il est pourtant possible d'arriver à la charge ultime en un seul incrément sans difficulté de convergence, mais la solution obtenue est différente de la solution obtenue pour le même cas fait en 100 pas de temps (comparer figures 1.3(d) et (e)). D'autres exemples peuvent être trouvés dans (Klarbring et Bjöörkman 1992, Christensen *et al.* 1998, Kravchuk 2008, Spinu et Frunza 2015, Shvarts 2019). L'importance du choix du pas de chargement d'une manière automatique présente un problème pertinent en mécanique du contact qui n'a reçu que très peu d'attention (Torstenfelt 1984). En outre, la solution des problèmes du frottement n'est pas toujours unique même théoriquement dans des cas particuliers quasi statiques (Schatzman 1978, Klarbring 1990*b,a*, Ballard 1999, Ballard et Basseville 2005).

Le problème du frottement élasto-dynamique est encore plus sévère en terme d'existence et unicité de solution. Dans le cas de frottement de Coulomb entre des semi-espaces élastiquement différents, la solution de glissement uniforme dans l'interface peut être instable. Encore pire le problème en soi peut être mal posé. Par exemple, dans le cas de frottement entre un plan rigide et un semi-plan élastique, le problème reste bien posé et une solution de glissement uniforme existe pour des coefficients de frottement de Coulomb inférieure à un. En revanche, pour un coefficient de frottement supérieur à un, la moindre perturbation dans la contrainte dans l'interface grandit exponentiellement en temps avec l'exposant proportionnel au nombre d'onde de cette perturbation (Renardy 1992, Martins *et al.* 1995). Puisque il n'y a pas de limite de longueur d'onde pertinente en mécanique continue classique, le problème devient mal posé et l'absence de convergence avec le maillage de ces problèmes risque de mener des chercheurs à des conclusions erronées (Andrews et Ben-Zion 1997). Dans le cas des deux semi-plans déformables, la stabilité de la solution dépend du contraste de leurs propriétés élastiques et de leurs densités (Adams 1995, Cocharad et Rice 2000, Ranjith et Rice 2001) : il y a des cas où la solution stable existe mais seulement pour des valeurs de frottement inférieures à un certain seuil critique, et il y a des cas où la solution est instable ou mal posée quel que soit le coefficient de frottement. Ces instabilités sont liées au couplage fort entre la pression de contact et la contrainte de cisaillement dans le cas des matériaux différents. Ces effets donnent naissance, par exemple, aux nuisances sonores de crissement de frein (Kinkaid *et al.* 2003, Massi *et al.* 2007) et aux localisation de glissement dans des failles géologiques qui sont responsables des séismes (Heaton 1990). Pour des systèmes de taille finis ou stratifiés, le glissement uniforme peut être toujours instable (Brener *et al.* 2016, Mohammadi et Adams 2018) ce qui se manifeste en localisation spatio-temporelle de glissement (Renard 1998, Adams 2000, Bui et Oueslati 2010), adhérence et même ouverture dans certains cas (Gerde et Marder 2001, Moirrot *et al.* 2003, Yastrebov 2016). Pour relever ce défi, les études de la dynamique de frottement doivent refuser des lois de type Coulomb où la contrainte

de cisaillement est proportionnelle à la pression de contact. Ce lien peut être adouci par une relation de type visco-élastique comme c'est le cas dans la loi de frottement de Prakash-Clifton qui est basée sur une observation expérimentale (Prakash et Clifton 1993, Prakash 1995) d'ajustement de frottement non immédiat en réponse d'un changement de pression instantané. Cette régularisation du frottement permet d'obtenir des résultats physiques et convergés (Cochard et Rice 2000, Ranjith et Rice 2001, Kammer *et al.* 2014). Une alternative est l'utilisation des lois de frottement non locales (Simoes et Martins 1998).

Cependant, pour des lois de frottement pertinentes à l'échelle de la rugosité, la dynamique de frottement ne doit pas présenter les défauts mentionnés ci-avant grâce à l'absence du couplage des contraintes normale-tangentielle.

### 1.3.3. Remarque. Convergence quadratique

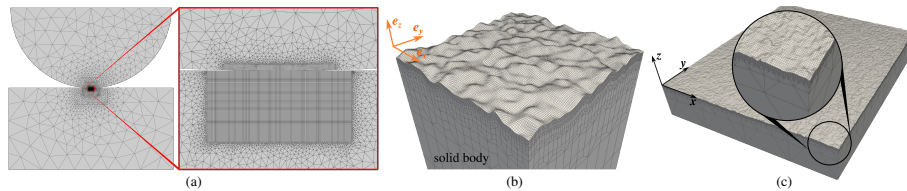
Contrairement à beaucoup de problèmes non linéaires de la mécanique des milieux continus, les problèmes du contact dans la plupart des cas ne convergent pas quadratiquement avec la méthode de Newton. Ce manque de convergence quadratique est provoquée par le changement de statut des éléments de contact entre contact / non-contact et glissement / adhérence. Si l'ensemble des statuts est figé, la convergence devient quadratique dans le cas où tous les termes de la matrice tangente ont été inclus. Dans des problèmes de contact avec le changement très rapide des conditions aux limites (par exemple, pénétration initiale supérieure à la taille des éléments), il est préférable de ne pas inclure tous les termes dans la matrice tangente, qui peuvent être rajoutés dès que la convergence des statuts se réalise (Wriggers 2006).

### 1.3.4. Remarque. Maillage et le temps de calcul

L'état de contrainte varie considérablement près de la zone de contact qui nécessite donc des maillages fins dans ces zones pour assurer la précision de la solution numérique. La pression de contact près du bord de la zone de contact dans le cadre des surfaces lisses change comme  $p \sim t^{1/2}$ , où  $t$  est la distance jusqu'au bord. À cause de cette décroissance rapide de la pression de contact, le maillage très fin est nécessaire pour pouvoir déterminer la frontière entre contact et non-contact et pour mesurer l'aire de contact, ce qui est important pour un grand nombre de problèmes du contact micromécanique (Yastrebov *et al.* 2017a,b). Dans le cas des poinçons plats, la pression près du bord évolue comme  $p \sim t^{-1/2}$ . Dans ce cas, il est facile de raffiner le maillage près de ce bord qui est connu *a priori*, en revanche dans le cas de contact glissant le maillage uniformément fin serait nécessaire pour ce problème. Un raffinement du maillage est aussi nécessaire si le coefficient de frottement n'est pas continu le long de l'interface de contact (Ballard 2016) ou bien si l'on étudie une fissure en mode II ou III; dans tous ces cas des singularités de contrainte apparaissent

dans l'interface (Coker *et al.* 2005, Kammer *et al.* 2015, Svetlizky et Fineberg 2014, Barras *et al.* 2014, Svetlizky *et al.* 2016).

La simulation du contact entre des matériaux non linéaires nécessite des maillages raffinés dans le volume près des zones de contact (Nigro *et al.* 2014). C'est le cas dans des études du comportement des aspérités isolées qui seront discutées en détail en Section 1.4 où le raffinement de maillage est très important pour détecter l'amorçage du processus de plastification qui commence dans le volume en l'absence de frottement surfacique (Johnson 1985, Hill *et al.* 1989, Mesarovic et Fleck 1999, Kogut et Etsion 2002), mais aussi pour obtenir une réponse précise macroscopique force-déplacement qui dépend fortement de la finesse du maillage volumique. Cette exigence sur la finesse du maillage présente un goulet d'étranglement pour des calculs des surfaces rugueuses en contact *via* la méthode des éléments finis même en utilisant des méthodes parallèles très avancées déployées sur des clusters de calcul de haute performance (Dostál *et al.* 2016), car cela implique des temps de calculs très élevés. De plus, afin de mener une étude statistiquement significative de contact entre des surfaces rugueuses, un nombre très important de calculs doit être effectué (Yastrebov *et al.* 2015, Rey *et al.* 2019). Cependant, le maillage fin peut être limité seulement à la zone près de l'interface de contact et rester assez grossier loin de cette zone pour tout simplement capturer la raideur du système ou bien éviter des effets de bords ; quelques exemples des maillages de ce type sont démontrés dans la figure 1.4.



**FIGURE 1.4.** Maillages éléments finis pour (a) le contact de fretting fatigue en 2D (Sun 2012), (b-c) le contact rugueux en présence de la rugosité (Shvarts 2019)

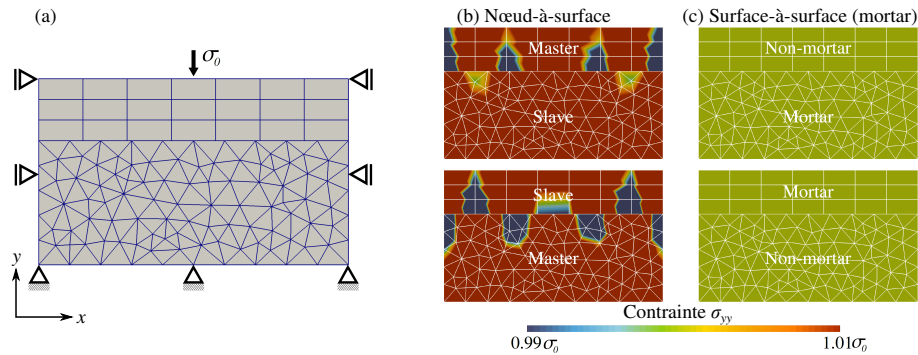
### 1.3.5. Contrainte de contact

Dans des problèmes du contact, on s'intéresse souvent à la distribution de contrainte en surface. Pourtant, cela n'est pas toujours facile à obtenir car la contrainte est souvent évaluée aux points d'intégration qui se situent à l'intérieur des éléments. Afin d'avoir des valeurs nodales et utiliser l'interpolation par la suite, les logiciels éléments finis procèdent à l'extrapolation des valeurs trouvées aux points d'intégration et au moyennage. La conséquence directe de cette procédure est que la contrainte de contact obtenu de telle façon n'est pas très précise et peut avoir des valeurs

non nulles en dehors de la zone de contact. Pour récupérer de vraies valeurs de contrainte, les contraintes doivent être trouvées à la surface en utilisant directement  $\sigma = \mathbf{C} : (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) / 2|_{\mathbf{x} \in \Gamma_c}$  dans le cas élastique, où  $\mathbf{C}$  est le tenseur des modules d'élasticité d'ordre quatre, ce calcul pourrait se faire en post-processing. Pour des matériaux non linéaires impliquant des variables d'état, la procédure de calcul des contraintes à la surface est plus coûteuse et nécessite l'ajout des points d'intégration surfaciques au tout début du calcul et implique l'intégration du modèle du matériau localement (Simo et Hughes 1998). Contrairement à ce que l'on pourrait croire, cette discussion est aussi pertinente dans le cas d'utilisation de la méthode de pénalisation classique que pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Il est vrai que dans cette dernière il est plus trivial d'avoir des valeurs des efforts (forces [N]) de contact qui sont représentés par des multiplicateurs de Lagrange dans le cas de discrétisation nœud-à-surface. Pour cela, afin de déterminer des contraintes [N/m<sup>2</sup>] il est nécessaire d'associer une aire à chaque nœud de la surface pour normaliser la valeur des multiplicateurs de Lagrange. Même si cette procédure est triviale à effectuer en 2D, ce n'est pas le cas en 3D. Une autre possibilité d'avoir une bonne estimation des contraintes surfaciques est d'avoir une couche fine des éléments près de la surface de contact pour minimiser l'erreur d'extrapolation. Dans des méthodes de l'état de l'art, les contraintes surfaciques peuvent être obtenues directement, ce sont des méthodes de discrétisation du type surface-à-surface : méthodes de mortier et de Nitsche (Belgacem *et al.* 1999, Puso et Laursen 2004, Puso *et al.* 2008, Wriggers et Zavarise 2008, Popp *et al.* 2010, Temizer *et al.* 2012, Chouly et Hild 2013, Chouly *et al.* 2015).

Il est important de remarquer que les méthodes de type nœud-à-surface ne peuvent pas transférer des efforts surfaciques uniformes entre des maillages non conformes ce qui représente un « patch-test » des problèmes interfaciques (Taylor et Papadopoulos 1991) (voir la figure 1.5). Cet effet est lié à la sous-intégration des contraintes de contact à l'interface qui a donné naissance à l'analyse poussée pour relever ce défi, voir Crisfield (2000), El-Abbasi et Bathe (2001), Tan (2003), Chen et Hisada (2006), Zavarise et De Lorenzis (2009*a,b*), Oliver *et al.* (2009), Hartmann *et al.* (2009). Même si les oscillations parasites dues à une sous-intégration peuvent être de très faibles amplitudes, elles sont capables de fausser la solution si l'on s'intéresse à l'état de contrainte surfacique et si, par exemple, des lois d'usure basées sur ces contraintes sont utilisées pour mettre à jour la géométrie des surfaces usées (Lengiewicz et Stupkiewicz 2013, Basseville et Cailletaud 2015, Farah *et al.* 2016, Basseville *et al.* 2019). Les méthodes de type surface-à-surface permettent d'éviter ce défaut et assurer un état de contrainte précis. Cependant, si le contraste entre des matériaux est très élevé, alors les oscillations similaires peuvent apparaître dans le contact même avec ces méthodes (Akula *et al.* 2019).





**FIGURE 1.5.** Comparaison des contraintes normales  $\sigma_{yy}$  dans le cas de discrétisation (b) nœud-à-surface (NTS) et (c) surface-à-surface (STS) pour différents choix des surfaces maître-esclave (master-slave) et mortier/non-mortier dans les cas NTS et STS, respectivement (figure adaptée de (Akula 2019)).

### 1.3.6. Régularité des surfaces.

Naturellement, des surfaces éléments finis sont de classe de régularité  $C^0$  (seulement continuité), même si elles sont  $C^\infty$ -lisse à l'intérieure des facettes des éléments. L'incompatibilité des gradients à la jonction entre des éléments est liée à la nature compacte des fonctions de forme des éléments finis. Cette irrégularité de la géométrie des surfaces pose des problèmes en traitement des contacts car elle induit des oscillations dans les contraintes locales qui peuvent se traduire en oscillation macroscopique des efforts. Pour éviter ces problèmes, dans des applications de contact entre des corps de raideur très différente (pneu/chaussée, indenteur/substrat en test de dureté, écran tactile/doigt, chaussure/sol), il est préférable d'utiliser des surfaces rigides décrites par des fonctions analytiques ou des modèles CAD (Heege et Alart 1996) : l'exemple le plus simple serait un plan rigide, qui est beaucoup utilisé en contact micromécanique pour des aspérités isolées ainsi que pour des surfaces rugueuses (Mesarovic et Fleck 1999, Kogut et Etsion 2002, Pei *et al.* 2005, Yastrebov *et al.* 2011). Cependant, la méthode de l'analyse iso-géométrique (IGA) qui bénéficie des avantages des surfaces lisses et en même temps déformables, permet d'oublier le problème de régularité des surfaces. Pourtant, la formulation du contact dans le cadre de l'IGA n'est pas directe car le caractère trop régulier des solutions ne permet pas de représenter la pression de contact qui atteint un zéro avec pente verticale. Pour cela, différentes techniques ont été développées et peuvent être trouvées dans ces articles de revue (Temizer *et al.* 2011, De Lorenzis *et al.* 2014).

Dans le cadre des éléments finis classiques, des techniques de lissage peuvent être utilisées : cela peut concerner soit le champ du vecteur normal exclusivement (Yang

*et al.* 2005, Popp *et al.* 2010), soit directement la géométrie de la surface (Wriggers et Krstulović-Opara 2000, Wriggers *et al.* 2001, Puso et Laursen 2002, Belytschko *et al.* 2002, Munoz 2008, Chamoret *et al.* 2004). En outre, la méthode des éléments finis avec des degrés de liberté supplémentaires de rotation, qui assure la régularité de la normale aux jonctions des éléments, peut être considérée comme une solution alternative au lissage (Batailly *et al.* 2013).

REMARQUE SUR LA SURFACE FRACTALE SANS COUPURE.— *Un problème de contact entre des surfaces rugueuses avec un spectre auto-affine sans coupure de haute fréquence, voir par exemple, (Hyun et al. 2004, Pei et al. 2005), présente un problème mal posé d'un point de vue de mécanique numérique. Comme la longueur d'onde la plus courte de la surface est limitée par la taille d'élément, la convergence ne peut pas être atteinte en raffinant le maillage, ce qui bien entendu pose aussi le problème d'interprétation des résultats de calcul.*

## 1.4. Application I : étude d'une aspérité isolée

### 1.4.1. Aspérité élastique

Dans la description continue et lisse<sup>7</sup> des surfaces « rugueuses » on peut toujours isoler des « aspérités », les éléments de la géométrie simple qui peuvent être localement approximés par des paraboloides elliptiques :

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + z_0$$

dans une base orthonormée  $\{x, y\}$  avec deux rayons de courbure principaux  $R_x, R_y$  tels que  $R_x R_y > 0$ . Pourtant, des surfaces des cristaux (minéraux) peuvent être décrites par des formes élémentaires différentes telles que des marches, des crêtes et des pyramides. Notez qu'à part des paraboloides qui sont essentiels pour l'étude de faible contact, une autre quadrique – paraboloides hyperbolique ou point de selle ( $R_x R_y < 0$ ) – est essentielle pour l'étude des jonctions critiques en problèmes d'écoulement entre des surfaces rugueuses en contact (Plouraboué *et al.* 2004, Dapp *et al.* 2012, Dapp et Müser 2016, Shvarts et Yastrebov 2018a) mais aussi pour le contact au-delà de l'hypothèse d'aire infinitésimal (Johnson *et al.* 1985, Yastrebov *et al.* 2014).

L'étude du contact entre des aspérités présente une branche importante de l'étude des contacts microscopiques. Tout d'abord, il faut souligner que ce type de contact

7. Si la surface est lisse, elle est automatiquement *non fractale* car les fractales ne sont pas des variétés différentiables : des éléments de ces surfaces ne peuvent pas être décrits par des formes simples et différentiables.

est en lien directe avec l'étude d'indentation surtout si les aspérités sont décrites à l'échelle où les théories classiques du milieu continu restent valides. En revanche, à petite échelle, où la caractérisation purement locale de la déformation cesse d'être valide, on devrait plutôt considérer le lien entre le contact des aspérités et la micro- ou nano-indentations. L'objectif de cette section est de présenter une revue des études de ces contacts élémentaires réalisées avec la méthode des éléments finis ou de frontière. En même temps, dans les cas pertinents, nous allons souligner des nouveautés numériques qui ont été utilisées.

Le cas du contact purement élastique linéaire entre des paraboloides elliptiques représente la première étude du contact déformable qui a été réalisée par Hertz (1881). Dans le cas simple des surfaces de révolution, le rayon de contact  $a$ , le rapprochement  $\delta$  et la distribution de pression de contact sont trouvés :

$$a = \left( \frac{3NR^*}{4E^*} \right)^{1/3} \quad [1.8]$$

$$\delta = \frac{a^2}{R^*} = \left( \frac{9N^2}{16R^*E^{*2}} \right)^{1/3} \quad [1.9]$$

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \quad [1.10]$$

où  $N$  est la force normale,  $R^* = R_1R_2/(R_1 + R_2)$  est le rayon de courbure effectif avec  $R_i$  étant le rayon de courbure de la surface  $i = \{1, 2\}$ ,  $E^* = E_1E_2/[(1 - \nu_2^2)E_1 + (1 - \nu_1^2)E_2]$  est le module effectif d'élasticité avec  $\nu_i, E_i$  étant le coefficient de Poisson et le module de Young du corps  $i = \{1, 2\}$ . En voisinage du sommet, la surface parabolique  $z = r^2/(2R)$  est équivalente à une surface sphérique  $z = R - \sqrt{R^2 - r^2}$  à  $o(r^2/R^2)$  près. Pour cela, la théorie de Hertz formulée pour les paraboloides fonctionne aussi bien pour les sphères si  $a/R \ll 1$ .

Désormais, le contact hertzien est le test classique pour valider des techniques numériques de traitement du contact. Mais souvent ces tests de validation se contentent de valider la méthode dans le cadre des surfaces de révolution  $R_x = R_y$  en deux dimensions en vue de la symétrie axiale du problème. La validation la plus simple peut être faite pour le contact entre un plan rigide  $R_1 = \infty, E_1 = \infty$  et un paraboloides (sphère ou sa moitié) déformable  $R_2 = R^*, E_2 = E^*(1 - \nu_2^2)$ . En revanche, on ne peut se contenter d'une représentation axisymétrique que dans le cas du contact normal (en l'absence de tout chargement tangentiel).

REMARQUE SUR LE CALCUL DE L' AIRE DE CONTACT. – *Comme le calcul de l'aire de contact ou du rayon de contact repose sur le calcul de nombre de nœuds/éléments en*

contact, l'évaluation numérique de l'aire de contact n'est pas continue : le rayon de contact grandit par des marches de taille comparable à la discrétisation des surfaces de contact  $\Delta a \lesssim h$  qui détermine donc l'erreur numérique du rayon de contact. Dans le cas général, comme cette erreur est localisée au périmètre  $P$  de la zone de contact d'aire  $A$ , l'erreur sur l'aire de contact dépend de la ratio  $E_r \sim Ph/A$  qui pour le cas du contact de révolution se réduit à  $E_r \sim 2h/a$  qui explique la nécessité des maillages très fins près de la frontière de contact pour capturer correctement l'aire de contact. Dans le cas des surfaces rugueuses avec la longueur d'onde minimale  $\lambda_s$ , la courbure des aspérités  $R \sim \lambda_s^2/(4\pi^2\Delta)$ , où  $\Delta$  est l'amplitude liée à cette longueur d'onde. Comme  $a \sim \sqrt{R^*\delta}$ , l'erreur de calcul de l'aire de contact évolue comme  $E_r \sim 4\pi h\sqrt{\Delta/\delta}/\lambda_s$  pour chaque aspérité en contact dont le nombre peut être très grand (Yastrebov et al. 2017a, Shvarts 2019).

Au-delà de ce cas simple qui est exclusivement utilisé pour valider des méthodes numériques, l'interaction de contact peut être enrichie avec le frottement et/ou l'adhésion. En présence de frottement, la solution analytique n'existe que pour les trois cas suivant : (1) le contact normal et tangentiel entre des matériaux identiques (voir note de bas de page sous numéro 6, section 1.3.2) ou matériaux non compressibles, (2) le contact normal avec le frottement infini (Mossakovskii 1954, 1963, Abramian et al. 1966, Spence 1968), (3) l'aspérité en glissement stationnaire (Goodman et Hamilton 1966, Hamilton 1983). Ces trois cas peuvent être utilisés pour valider l'implémentation des algorithmes de contact frottant. Notamment, le cas le plus utilisé et le plus riche parmi des trois, est le cas de contact entre deux matériaux similaires qui a été dérivé dans (Cattaneo 1938, Mindlin 1949). Ce test a été utilisé dans (Laursen et Simo 1993, Yang et al. 2005, Gitterle et al. 2010, De Lorenzis et al. 2011, Wei et al. 2016, Akula et al. 2019) pour citer certains. Un autre test du frottement a été utilisé dans (Alart et Curnier 1991, Yastrebov 2013) basé sur une solution semi-analytique de Klang (1979). Le test consiste en un contact entre un cylindre et un trou circulaire dans un plan qui ont des géométries quasi conformes. Cependant, les deux solutions numériques (Alart et Curnier 1991, Yastrebov 2013), qui s'accordent, ne convergent pas vers la solution analytique en terme de distribution de contrainte de cisaillement. Une solution numérique plus conforme a été obtenue dans (Pietrzak et Curnier 1999) pour une géométrie légèrement différente de celle utilisée dans les deux tentatives citées ci-avant.

SÉPARABILITÉ DU CONTACT NORMAL ET TANGENTIEL.— *Dans le cas général, le problème de contact peut être divisé en deux problèmes découplés (celui de contact normal et celui de contact tangentiel) si et seulement si les constantes élastiques de deux corps en contact sont les mêmes dans le sens de la note de bas de page sous numéro 6 (section 1.3.2) et quand les bords ou des interfaces sont suffisamment loin de la zone du contact. Dans le cas contraire, les deux problèmes restent couplés et ne peuvent pas être rigoureusement résolus séparément. Mais dans le cas échéant du même matériau, les schémas numériques nécessitent d'être utilisés avec grande précaution pour obtenir des résultats corrects même pour le chargement normal, voir*

des exemples de solution erronée (Andersson 1981, Appl. 1) et (Shyu et al. 1989). Le couplage entre des efforts tangentiels  $\tau(x)$ /normaux  $p(x)$  appliqués sur  $x \in (-b, a)$  et les déplacements  $v, u$  associés peut être explicitement visualisé par la forme de la solution fondamentale de Flamant et de Cerutti pour un semi-plan élastique (Johnson 1985) :

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{y=0} = -\frac{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} p(x) - \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \int_{-b}^a \frac{\tau(s)}{x-s} ds \quad [1.11]$$

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x} \right|_{y=0} = \frac{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} \tau(x) - \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds \quad [1.12]$$

où  $i = 1, 2$  signifie les valeurs associées avec le  $i$ -ième corps.

Une solution semi-analytique pour un cas d'indenteur rigide qui se base sur la considération d'auto-similarité a été obtenue par Spence (1975). Notez cependant que l'auto-similarité se perd en cas de décharge (Stingl et al. 2013, Kim et Jang 2014). Ce problème, généralisé pour le cas de deux solides déformables (Nowell et al. 1988), représente un test de référence pour l'implémentation des algorithmes de contact frottant (Jinn 1989, Klarbring et Bjöorkman 1992, Christensen et al. 1998, Guyot et al. 2000, Gallego et al. 2010, Akula et al. 2019). Ce cas de contact normal en l'absence de couplage entre des tractions normales et tangentielles a été considéré dans (Hills et Sackfield 1987). Notez cependant que ce découplage est réalisable exclusivement avec la méthode des éléments de frontière et ne peut pas être utilisé avec des éléments finis où le couplage est inhérent. Notez que des cas de fausses solutions numériques de ce problème sont récurrentes dans la littérature, cf. pour des exemples (Jing et Liao 1990, Lee 1994, Kosior et al. 1999, Elkilani 2003, Li et Berger 2003, Chen et Wang 2008) et une discussion sur le sujet dans (Kwak et Lee 1988). L'auto similarité de la solution peut être utilisée pour accélérer des calculs numériques en réduisant le calcul à un seul pas de chargement avec des conditions supplémentaires à vérifier (Storåkers et Elaguine 2005, Jelagin et Larsson 2012).

En plus de servir un cas test pour des algorithmes numériques, ce problème de contact normale entre des corps différents est aussi important pour plusieurs applications, notamment pour comprendre des modes de défaillance (usure et amorçage des fissures de fatigue) du contact normal cyclique micro- et macroscopique.

Un autre test qui implique une compression et torsion de la zone de contact avec un frottement fini entre un plan rigide et une sphère déformable a été utilisé dans (Chaudhary et Bathe 1986) basé sur une solution analytique (Hetenyi et McDonald 1958). Ce problème implique une phase de chargement normal en l'absence de frottement qui est suivie d'une phase de torsion avec un frottement fini. Cette hypothèse est non physique car l'influence de l'historique est justement ce qui

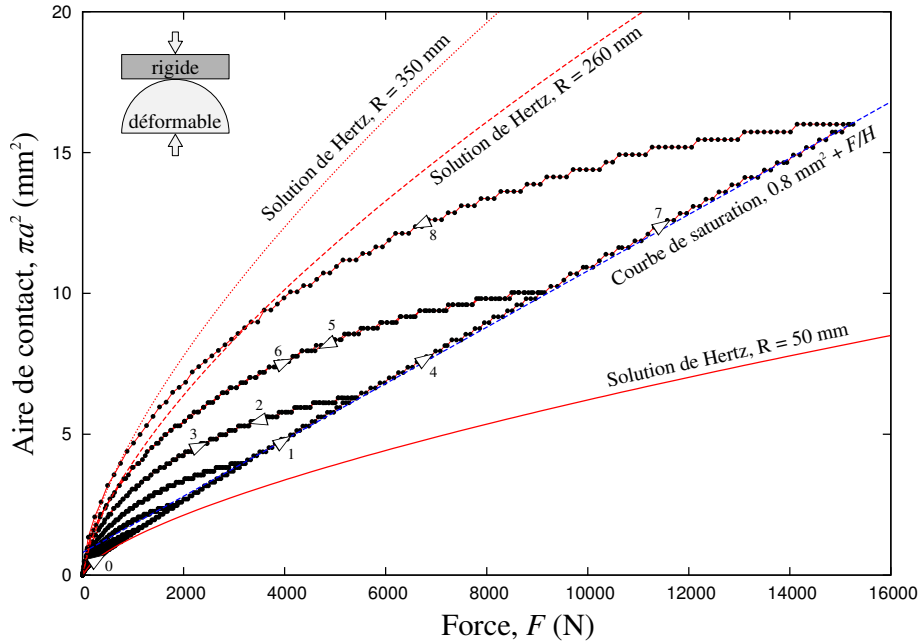
*fait le problème de frottement aussi complexe et elle n'est pas pris en compte dans cette solution. Un autre test numérique pour le contact frottant entre un corps déformable et un indenteur rigide est l'indentation axisymétrique d'un semi-espace élastique par un poinçon cylindrique dont la solution a été montrée être similaire à l'indentation parabolique (Spence 1975) : ce problème a été utilisé pour tester l'implémentation du lagrangien augmenté dans (Torstenfelt 1984, Pietrzak et Curnier 1999, Yastrebov 2013). Une automatisation du choix du pas de chargement pour des problèmes de frottement a été proposée dans (Torstenfelt 1984).*

On conclura cette section en soulignant la manque de solutions analytiques et numériques pour le contact normal et tangentiel entre des paraboloïdes fait en matériaux similaires ou différents avec une loi de frottement du type Tresca qui est plus pertinente à petite échelle des aspérités que la lois de Coulomb.

#### **1.4.2. Aspérité élasto-plastique**

Le comportement élasto-plastique du matériaux dans le voisinage des zones de contact est très pertinent pour beaucoup d'applications d'ingénieur qui impliquent des matériaux métalliques. À partir des courbes force-déplacement d'un enfoncement d'un indenteur dur (diamant ou carbure de tungstène) sur un matériau métallique ou bien basé sur l'empreinte, plusieurs propriétés du matériau peuvent être retrouvées (Oliver et Pharr 1992, Tabor 1951, Fischer-Cripps 2011, Herrmann *et al.* 2011). La pertinence de ce type d'interaction indenteur/substrat est évidente pour le contact microscopique : à petite échelle, des aspérités du matériaux plus dur (« moins plastique ») peuvent être vues comme des indenteurs pour les aspérités de l'autre matériaux. La compréhension de l'interaction normale et tangentielle des surfaces paraboliques dans le régime élasto-plastique est nécessaire pour comprendre le contact microscopique des métaux et des alliages. Dans cette section, nous faisons une brève revue des calculs numériques du contact élasto-plastique soit entre un indenteur parabolique/sphérique rigide et un substrat déformable, soit l'inverse, soit des deux corps déformables.

De nombreuses études traitant du contact élasto-plastique se focalisent exclusivement sur la phase de chargement. Cependant, la phase de décharge ainsi que le contact répétitif (chargement cyclique) sont très importants à prendre en compte pour le contact des aspérités. Dans la Figure 1.6, on montre des résultats d'un calcul par éléments finis du comportement élasto-plastique d'un corps sphérique sous un chargement cyclique où chaque nouveau cycle a une amplitude de chargement plus élevée que le cycle précédent. Le cycle zéro est purement élastique et suit la solution de Hertz. Pour les cycles ayant une force plus élevée (branche 1), la pression de contact sature à la dureté du matériau et la dérivée de l'aire de contact  $A$  par rapport à la force de compression  $\partial A/\partial F$  reste constante, i.e. l'aire de contact évolue d'une manière affine avec la force  $A = A_0 + F/H$  où  $H$  indique la dureté du matériaux. Souvent la



**FIGURE 1.6.** Chargement cyclique d'une "aspérité" élasto-plastique du rayon initial  $R = 50$  mm en contact avec un plan rigide.

constante  $A_0$  est négligée car elle peut être très petite dans le cas du contact plastique développé. La décharge (branche 2), dans ce cas, est complètement élastique, mais elle ne suit pas la solution de Hertz  $A \sim F^{2/3}$  car la courbure résiduelle n'est pas constante à tout point comme elle devrait l'être pour que la solution de Hertz soit valide. La recharge consécutive, la branche 3, suit de nouveau la branche 2 (comme on reste dans le régime élastique en absence de frottement), mais dès que la charge dépasse la charge maximale du cycle précédent, la solution change qualitativement et suit de nouveau la courbe de saturation (branche 4) et ainsi de suite : décharge élastique (5); recharge élastique (6), saturation en charge (7). Il est donc clair avec cet exemple que l'on ne peut pas prédire l'aire de contact pour une charge donnée car l'historique du chargement entre en jeu comme dans tous les problèmes en évolution non conservative.

Parmi d'autres, de nombreuses études de l'indentation élasto-plastique ont été effectuées par Komvopoulos *et al.* (Kral *et al.* 1993, Komvopoulos 1989, Song et Komvopoulos 2013) ainsi que par Etsion *et al.* (Kogut et Etsion 2002, 2003a, Etsion *et al.* 2005, Kadin *et al.* 2006, Brizmer *et al.* 2007). Le contact élasto-plastique en

présence de revêtement a été étudié dans (Sun *et al.* 1995, Song *et al.* 2012) en utilisant la méthode des éléments finis.

REMARQUE SUR LE COMMENCEMENT DE LA PLASTICITÉ.— Dans un cas idéalisé du contact normal entre des surfaces paraboliques et en absence de frottement et d'adhésion, la théorie de Hertz permet de prédire le commencement d'écoulement plastique. Pour obtenir le point de commencement qui se trouve sur l'axe de symétrie, il faut tout simplement dériver la contrainte de, par exemple, von Mises  $\sigma_{\text{eq}}$  par rapport à la profondeur normalisée  $z' = z/a$  où  $a$  est le rayon de contact. En utilisant les équations suivantes :

$$\frac{\sigma_z(z)}{p_0} = -\frac{1}{1+z'^2} \quad [1.13]$$

$$\frac{\sigma_r(z)}{p_0} = \frac{\sigma_\theta(z)}{p_0} = (1+\nu)(z' \arctan(1/z') - 1) + \frac{1}{2(1+z'^2)} \quad [1.14]$$

et la contrainte de von Mises est donnée par :

$$\sigma_{\text{eq}} = |\sigma_z - \sigma_r| = p_0 m(\nu, z') \quad [1.15]$$

avec :

$$m(\nu, z') = \left| (1+\nu)(1 - z' \arctan(1/z')) - \frac{3}{2(1+z'^2)} \right|$$

on peut alors facilement montrer que la contrainte de von Mises atteint la valeur maximale à une distance  $z'^*$  qui vérifie  $\partial\sigma_{\text{eq}}/\partial z' = 0$ , la dernière équation se réduit à l'équation suivante :

$$(1+\nu)(\arctan(1/z'^*) - z'/(1+z'^{*2})) = 3z'/(1+z'^{*2})^2. \quad [1.16]$$

La solution de cette équation peut être approximé par une fonction affine (voir la figure 1.7(b.4)) :

$$z'^* \approx 0,3819375 + 0,33187\nu. \quad [1.17]$$

Ensuite, la fonction  $m(\nu, z'^*)$  peut être aussi bien approximée par une autre fonction affine (voir la figure 1.7(b.3)) :

$$\max(\sigma_{\text{eq}}/p_0) = m(\nu, z'^*) \approx 0,7696422 - 0,4738901915\nu \quad [1.18]$$

Finalement, si la limite d'élasticité est donnée par  $\sigma_Y$ , alors la pression maximale au centre du contact  $p_0^*$  nécessaire pour initier la plastification est donnée par  $p_0^*$  et la profondeur est donnée par  $z^*$ , respectivement :

$$p_0^* = \frac{\sigma_Y}{m(\nu, z'^*)}, \quad z^* = z'^* a^* = \frac{\pi z'^* p_0^* R^*}{2E^*} = \frac{\pi z'^* \sigma_Y R^*}{2E^* m(\nu, z'^*)}$$



où  $R^*$  est le rayon de courbure effectif, et  $E^*$  est le module d'élasticité effectif. À partir de ces équations, la profondeur normalisée de commencement d'écoulement plastique peut être trouvée approximativement en utilisant [1.18] et [1.17] (figure 1.7(b.2)) :

$$\frac{z^*}{R^*} \approx \frac{1,199892 + 1,042600\nu}{1,53928444 - 0,947780\nu} \frac{\sigma_y}{E^*} \quad [1.19]$$

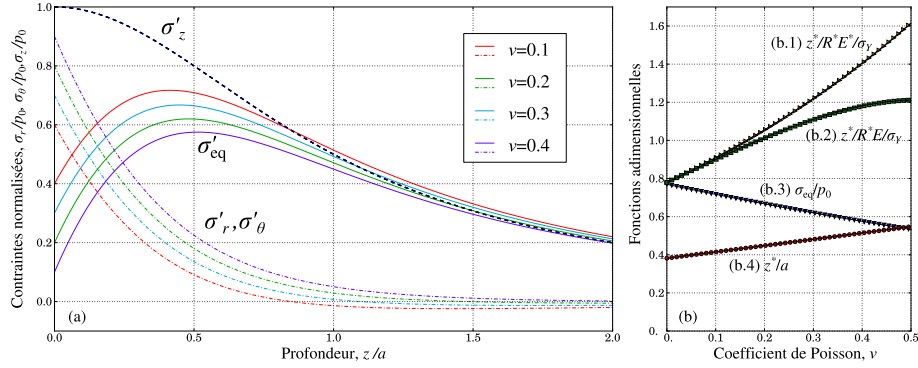
Si l'on suppose que l'indenteur est rigide, il suit que le module effectif d'élasticité ne dépend que du coefficient de Poisson du solide déformable  $E^* = E/(1 - \nu^2)$  qui nous donne la forme suivante approximative pour la profondeur normalisée de commencement de plasticité (figure 1.7(b.1)) :

$$\frac{z^*}{R^*} \approx \frac{(1,199892 + 1,042600\nu)(1 - \nu^2)}{1,53928444 - 0,947780\nu} \frac{\sigma_y}{E} \quad [1.20]$$

Cette estimation analytique permet de construire un maillage éléments finis adapté au calcul élasto-plastique, i.e. d'avoir la profondeur du maillage fin qui serait adapté au calcul. Notez que le commencement de la plasticité ne peut pas être facilement détecté pendant le test d'indentation car si la zone plastique reste très petite, alors elle n'affecte pas la courbe de chargement.

Bien entendu, à petite échelle de la rugosité, la microstructure du métal doit être prise en compte car le modèle de plasticité de von Mises n'est pas très pertinent à cette échelle. Néanmoins, la dureté et les courbes force-déplacement ne sont pas très affectées par la plasticité cristalline (i.e. par l'orientation cristallographique) de CFC car beaucoup de systèmes de glissement sont activés (Casals et Forest 2009, Durand 2012, Sabnis *et al.* 2013). En revanche, ce n'est pas le cas pour le réseau HCP (Casals et Forest 2009). Cependant, la morphologie de la zone plastique est très sensible à l'orientation cristallographique du cristal indenté. En complément de l'anisotropie de la plasticité cristalline, l'anisotropie élastique doit être prise en compte à cette échelle. Puisque même la solution de type Boussinesq ne peut pas être obtenue analytiquement dans le cas d'anisotropie générale, la solution de problème du contact entre des corps anisotropes est un problème difficile, qui cependant a été résolu par Willis (1966, 1967) *via* l'utilisation des transformées de Fourier avec laquelle le problème se réduit à l'évaluation numérique des intégrales de contour. Le cas bidimensionnel est plus simple et il existe des méthodes analytiques pour son traitement (Lekhnitskii 1981).

Le calcul direct de la profondeur du commencement de la plasticité pour de très petits rayon de courbure donne des valeurs comparables aux distances interatomiques. Prenons l'or polycristallin qui a la limite d'élasticité  $\sigma_Y = 140$  MPa, le module d'élasticité  $E = 79$  GPa, le coefficient de Poisson  $\nu = 0,4$ , le paramètre cristallin CFC  $a = 0,4$  nm. La profondeur de commencement peut être estimée selon l'équation [1.20] à  $z^* \approx 0,0021R^*$ . Lorsqu'une surface d'or est indentée par une aspérité plus dure de rayon micrométrique, la profondeur  $z^*$  est nanométrique, pour



**FIGURE 1.7.** Containtes sous le contact hertzien : (a) contrainte  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  et  $\sigma_z$  le long de l'axe de symétrie ; (b) des fonctions adimensionnelles qui représentent (b.1) la profondeur normalisée de commencement d'écoulement plastique  $z^*/R^*E/\sigma_Y$ , (b.2) la profondeur normalisée dans le cas d'indenteur rigide  $z^*/R^*E/\sigma_Y$ , (b.3) la contrainte de von Mises maximale normalisée  $\sigma_{eq}/p_0$ , (b.4) la profondeur normalisée  $z^*/a$ , la solution de l'équation [1.16] ; les lignes solides dans (b) représentent des solutions approximatives [1.19],[1.20],[1.18],[1.17], respectivement.

$R^* = 1 \mu\text{m}$ ,  $z^* \approx 2,1 \text{ nm} = 5,25a$ , ce qui ne peut pas être décrit proprement dans le cadre de la mécanique des milieux continus et de la plasticité isotrope. À cette échelle, la nature discrète du réseau cristallin doit être prise en compte comme dans les études multi-échelles suivantes (Fivel *et al.* 1998, Chang *et al.* 2010). Sous la pression importante, à cette petite échelle la pression sature à la dureté du matériau, qui à son tour dépend de l'échelle (soit de la profondeur de l'indentation pour des indenteurs non lisses (Nix et Gao 1998, Qiu *et al.* 2001, Feng et Nix 2004) soit du rayon de courbure pour des indenteurs sphériques (Swadener *et al.* 2002, Gao *et al.* 2015)). Par des considérations géométriques (accommodation de la forme par des dislocations géométriquement nécessaires) et phénoménologiques (basées sur la saturation des dislocations), des lois simplifiées pour la dureté de contact  $H$  ont été déduites. La loi la plus simple pour un indenteur conique prend la forme suivante (Nix et Gao 1998) :

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{1 + \frac{d_0}{d}} \quad [1.21]$$

où la dureté macroscopique est  $H_0$ ,  $d$  est la profondeur d'indentation, et  $d_0$  est une distance interne caractérisant le matériaux. Une loi plus élaborée a été proposée

dans (Qiu *et al.* 2001, Feng et Nix 2004) qui prend en compte la contrainte élevée de frottement qui est caractéristique pour des réseaux cubiques centrés (CC) :

$$\frac{H - H_P}{H_0 - H_P} = \sqrt{1 + \frac{1}{(1 + \beta \exp(-d/d_1))^3} \frac{d_0}{d}} \quad [1.22]$$

où  $H_P = 3\sqrt{3} \tau_P$  où  $\tau_P$  est la contrainte de Peierls,  $1 + \beta \exp(-d/d_1) = r/a(d)$  représente le rapport entre le rayon d'extension de la zone plastique par rapport au rayon de contact  $a(d)$  qui est une fonction d'enfoncement  $d$ ,  $H_0$  est la dureté macroscopique, et  $d_1, d_0$  sont des caractéristique du matériau.

Dans le cas d'indenteur sphérique/parabolique, la profondeur d'enfoncement ne change plus la dureté du matériau, mais le rayon de courbure d'indenteur  $R$  si. Le modèle simple et, contrairement à l'indentation conique, sans paramètre ajustable peut être proposé dans ce cas (Swadener *et al.* 2002) :

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{1 + \frac{R_0}{fR}} \quad [1.23]$$

où  $R_0 = \bar{r}/(\rho_s b)$ , et  $\bar{r}$  est le facteur de Nye<sup>8</sup>,  $\rho_s$  est la densité de dislocations statistiques dans la région déformée,  $b$  est le vecteur de Burgers, et le facteur  $f$  est le rapport du rayon de courbure d'empreinte par rapport au rayon d'indenteur qui peut être pris approximativement  $f = 1,17$  (Swadener *et al.* 2002). Pour l'or,  $b = 0,288$  nm, la densité statistique de dislocations dans la région fortement déformée sous l'indenteur peut être estimée comme  $\rho_s \approx 10^{16} \text{ m}^{-2}$ , et pour le facteur de Nye  $\bar{r} = 2$ , on obtient  $R_0 \approx 0,69 \mu\text{m}$ , qui est en accord avec (Kim *et al.* 2018). Pour la dureté macroscopique  $H_0 = 250 \text{ MPa}$ , nous obtenons la dureté suivante :

$$H = 250 \text{ MPa} \sqrt{1 + \frac{0,59 \mu\text{m}}{R}}$$

Bien entendu, cette équation ne peut pas être utilisée dans les calculs par éléments finis, mais elle est utilisable dans des calculs faits avec des modèles de multi-aspérités (Kogut et Etsion 2003a, Ciavarella *et al.* 2006, Afferrante *et al.* 2012, Yastrebov 2019) ou avec des codes d'éléments de frontière avec la prise en compte phénoménologique de la plasticité par la saturation de la pression de contact (Sahlin *et al.* 2010, Manoylov *et al.* 2013). Pour simuler l'effet de taille avec les éléments finis,

8. Le facteur adimensionnel de Nye détermine la fraction de dislocations qui doivent être créées pour accommoder la déformation plastique par rapport au nombre de dislocations géométriquement nécessaires.

des modèles généralisés du milieu continu (Forest 1998, Maugin et Metrikine 2010, Altenbach *et al.* 2011, Eringen 2012) doivent être utilisés, comme fait dans (Zhang *et al.* 2005, Zisis *et al.* 2014, Song *et al.* 2017, Lewandowski et Stupkiewicz 2018).

En présence de frottement, la contrainte de von Mises peut être assez importante à la surface et elle peut donc créer une autre source de croissance de plasticité qui va s'agréger au cœur plastique développé sous la surface. L'effet du frottement sur l'indentation a été discuté dans plusieurs travaux (Tabor 1951, Mata et Alcalá 2004), même si la discussion se limite à la loi de Coulomb qui peut être imprécise en indentation<sup>9</sup> et n'est pas valide à petite échelle. En outre, des pressions très importantes sont récurrentes dans d'autres applications comme, par exemple, l'indentation, l'usinage (Özel 2006) ou le formage et laminage des métaux (Wilson et Sheu 1988, Ma *et al.* 2010, Hol *et al.* 2012). Dans certaines études, l'effet du frottement est inclus dans l'analyse par la considération de deux cas limites : sans frottement et avec un frottement infini, i.e. le contact purement adhérent (Mesarovic et Fleck 1999). Le frottement non local a été étudié dans (Jelagin et Larsson 2013).

La littérature sur l'indentation et l'interaction des aspérités isolées est très riche. Le contact entre des matériaux différents élasto-plastiques a été étudié dans (Eriten *et al.* 2012, Olsson et Larsson 2016). En plus des propriétés du contact normal avec et sans frottement, le contact avec l'adhésion joue un rôle important à petite échelle surtout pour des métaux nobles qui s'oxydent moins que d'autres métaux. C'est aussi le cas pour les études de l'usure où les oxydes de la surface s'enlèvent par l'usure en rendant l'interface plus adhésive. Des études du contact adhésif entre des aspérités élasto-plastiques peuvent être trouvées dans (Olsson et Larsson 2013). Encore plus importantes pour la compréhension de la physique des interfaces sont des études du mouvement tangentiel entre des aspérités élastiques ou élasto-plastiques en commençant par des travaux de Green (1954), Greenwood et Tabor (1955) sur la déformation des aspérités en pâte à modeler, qui a été suivi par de nombreuses études (Challen et Oxley 1979, Cocks 1966, Black *et al.* 1993) entre autres des études numériques, comme par exemple, (Tangena et Wijnhoven 1985, Faulkner et Arnell 2000, Kogut et Etsion 2003b, Jackson *et al.* 2007, Eriten *et al.* 2010, Mulvihill *et al.* 2011). Cependant, dans beaucoup d'études, les aspérités sont simulées comme des semi-sphères, ce qui réduit la pertinence des résultats quantitatifs pour des vraies rugosités ; la même remarque concerne l'utilisation de la loi de frottement de type Coulomb qui, comme cela a déjà été évoqué à plusieurs reprises, n'est pas pertinente pour le contact entre des aspérités et qui doit être remplacée par le frottement de Tresca.

---

9. L'invalidité de la loi de Coulomb pour très grande pression s'explique par le fait que l'aire de contact sature et la résistance maximale le fait aussi en conséquence.

L'intérêt de toutes les études des aspérités ou des indenteurs isolés est de pouvoir nourrir des modèles mésoscopiques qui se basent sur la notion des aspérités et de leur interaction (Yastrebov *et al.* 2011, Afferrante *et al.* 2012, Yastrebov 2019). En outre, les résultats obtenus pour des aspérités isolées peuvent être utilisés pour la construction ou la validation des modèles phénoménologiques (Hulikal *et al.* 2015). Dans l'étude de Yastrebov *et al.* (2011), de nombreux calculs élasto-plastiques en grande déformation sur des aspérités isolées ont permis de construire une surface de réponse des aspérités caractéristiques trouvée sur des surfaces rugueuses expérimentales, ce qui a été ensuite utilisé dans un modèle multi-aspérités avec une interaction élastique mais à courte portée<sup>10</sup>. L'effet d'échelle dans ce type de calcul multi-échelles a été brièvement analysé dans (Yastrebov 2019) en supposant la dureté dépendant du rayon de courbure. Cependant, il faut bien se rendre compte que même si l'interaction entre des aspérités peut être prise en compte (Ciavarella *et al.* 2006, Paggi et Ciavarella 2010, Yastrebov *et al.* 2011, Yastrebov 2019), ces modèles basés sur la notion d'aspérités ne peuvent prédire l'évolution de l'aire réelle du contact qu'en cas de faible pression quand les zones de contact restent associées avec des aspérités isolées. La prise en compte de jonction des zones de contact associées avec des aspérités voisines ne peut pas être faite rigoureusement dans ces modèles et reste un mécanisme très important de croissance de l'aire réelle de contact (Eid et Adams 2007, Greenwood 2007, Yastrebov *et al.* 2014).

### 1.5. Application II : contact des surfaces rugueuses

Comme noté ci-avant, l'étude du contact entre des aspérités isolées a ses limites et ne peut pas être directement utilisée pour bâtir des modèles mésoscopiques qui sont capables de traiter le problème du contact entre des surfaces rugueuses pour un chargement arbitraire. Ce type de problème peut donc être abordé directement en simulant le contact entre deux surfaces rugueuses déformables ou une surface rugueuse déformable et un plan rigide ou une surface rugueuse rigide et un semi-espace déformable. Le traitement de ce problème nécessite (1) la construction d'une ou des surfaces rugueuses et (2) la solution du contact normal, et éventuellement tangentiel, entre ces surfaces. Comme déjà mentionné, à l'échelle de la discrétisation, les surfaces doivent être lisses pour permettre la convergence vers une solution avec le raffinement du maillage. Cela implique une procédure de lissage à mettre en place pour des mesures topographiques réelles, ce qui n'est pas très difficile car ces dernières se font souvent sur des grilles régulières. Le lissage peut être fait par des surfaces de Béziérs (Pietrzak 1997, Yastrebov *et al.* 2011), NURBS Laursen (2002), ou bien par

---

10. Il y a des cas de configuration où la plasticité se localise près des aspérités en contact, et l'interaction entre les aspérités peut être considérée comme élastique.

l'interpolation de Shanon<sup>11</sup> (Hyun et Robbins 2007, An *et al.* 2019). Cette question est étudiée en détail dans (Thompson et Thompson 2010).

Pour la partie (2) simulations, la question de capacité des calculateurs à faire ce type de calcul se pose immédiatement. Si l'on prend comme maillage de référence celui qui a été utilisé pour modéliser le contact entre deux aspérités sphériques (Mulvihill *et al.* 2011) avec  $\approx 190\,000$  éléments tétraédriques et hexaédriques pour deux quarts des sphères, on obtient alors que pour simuler une centaine d'aspérités, il nous faudrait résoudre un système avec le nombre de degrés de liberté  $N_{dof} \approx 3 \times 100 \times 190\,000 \times 2 \times 1,5 = 171\,000$ , où le facteur 3 prend en compte le nombre de degrés de liberté (DDL) par nœud, le facteur 100 est le nombre d'aspérités, le facteur 2 sert à simuler les demi-sphères des aspérités au lieu des quarts, et le facteur 1,5 sert à prendre en compte le maillage grossier du volume sous-jacent et l'espacement entre des aspérités. Une résolution du problème associé avec autant de DDL semble plutôt réaliste pour des puissances modernes des calculateurs et pour le niveau de parallélisme des codes de calcul, par exemple, (Dostál *et al.* 2019). En revanche, des calculs du contact entre des surfaces rugueuses de telle ampleur n'existent pas encore. D'ailleurs, il faut remarquer que l'optimisation du maillage et des procédures de remaillage seront très importantes pour effectuer ce type de calcul.

L'historique des calculs du contact entre des surfaces rugueuses commence par les premiers calculs qui ont été faits avec des éléments de frontières combinés avec une couche d'éléments finis à la surface : la méthode baptisée des éléments finis surfaciques en deux (Francis 1982, 1983*b*) et trois Francis (1983*a*) dimensions<sup>12</sup>. En restant en deux dimensions, une technique similaire a été utilisée pour l'analyse de glissement d'un indenteur sur une surface avec des empreintes (Webster et Sayles 1986). Souvent, le calcul de ce type se fait avec la méthode des éléments de frontière ou similaire qui ne nécessite pas de discrétisation volumique, mais qui est normalement limitée aux matériaux élastiques linéaires, isotropes et homogènes car elle se base sur la solution fondamentale de Boussinesq-Cerutti. Pour donner quelques exemples, l'on peut citer des travaux précurseurs (Lai et Cheng 1985, Seabra et Berthe 1987, Sainsot *et al.* 1990). Un des premiers résultats avec la prise en compte de la plasticité, qui a été fait en saturant la pression de contact à  $1,6\sigma_Y$ <sup>13</sup>, en plus en 3D,

11. Ici, par l'interpolation de Shanon nous comprenons l'interpolation de Whittaker-Kotel'nikov-Shannon (Marks 2012) applicable aux signaux à bande limitée qui interpole les séries de Fourier qui peuvent être évaluées à tous points. Cette interpolation est applicable aux signaux de deux et trois dimensions ; le fait qu'elle utilise la bande limitée s'aligne bien avec la nécessité d'avoir des surfaces lisses à petite échelle ce qui est requis pour la convergence du calcul mécanique.

12. C'est probablement le premier papier dans lequel les simulations tridimensionnelles ont été présentées.

13. Étrangement, les auteurs ont pris pour la dureté la valeur de  $1,6\sigma_Y$  qui correspond à la pression d'initiation de plasticité même si c'était déjà bien connu que les valeurs de pression

a été rapporté dans (West et Sayles 1987). L'importance de résolution des mesures topographiques pour le traitement du contact a été soulignée dans (Myshkin *et al.* 1998). L'étude du contact rugueux entre des solides revêtus présente un problème important de la tribologie, une des premières simulations a été présentée dans (Cole et Sayles 1992), d'autres études peuvent être trouvées dans (Nogi et Kato 1997, Peng 2001). Il faut remarquer que dans (Nogi et Kato 1997) le contact rugueux entre un substrat revêtu et un indenteur a été étudié en 3D en utilisant une technique spectrale comme dans (Stanley et Kato 1997). Dans (Borri-Brunetto *et al.* 1998), des considérations et des idées intéressantes sont présentées ainsi que des modèles des surfaces et l'analyse par la méthode des éléments de frontière ; le volume entier, d'où provient cette publication, est intéressant pour les études de la rugosité et du contact. Un des premiers traitements du contact rugueux en présence du frottement a été fait par Kalker *et al.* (1997). D'ailleurs, il est important de remarquer que la plupart des méthodes de type éléments de frontière pour la simulation du contact rugueux sont basées sur des principes variationnels formulés par Kalker et Van Randen (1972), Kalker (1977). Une étude assez détaillée sur le contact élasto-plastique a été effectuée dans (Lee et Ren 1996) en utilisant une méthode des éléments de frontière Ren et Lee (1994) complétée par la saturation de pression. D'ailleurs, le commentaire fait par Etsion sur ce dernier article et la réponse des auteurs, reprend la question importante de pertinence de l'étude du contact élastique. Effectivement, comme déjà démontré par Greenwood et Williamson (1966), l'indice de plasticité décroît en raison de la déformation plastique irréversible qui aplatit la surface et qui, après certain temps, se déforme en régime élastique : c'est d'ailleurs souvent le cas dans les systèmes d'ingénieur qui tous fonctionnent en chargement cyclique. Sous cet éclairage, l'étude du contact élasto-plastique n'est pertinente que pour le régime de *running-in* dans lequel la déformation plastique peut avoir lieu.

Une méthode d'analyse du contact en deux et trois dimensions a été élaborée par Lubrecht et Ioannides (1991) basée sur les éléments de frontière classiques mais équipée d'une procédure multiniveau multi-intégration (*Multi-Level Multi-Integration* ou *Multi-Level Multi-Summation*) (Brandt et Lubrecht 1990) permettant de réduire considérablement le coût d'évaluation de convolution, de plus les auteurs utilisent la méthode associée multigrille permettant d'améliorer également le solveur. Ces méthodes ont trouvé leurs applications dans beaucoup de travaux (Venner et Lubrecht 1996, Polonsky et Keer 1999, Medina et Dini 2014). À noter, la méthode MLMI avec le Full Multi-Grid solveur ne convergeait pas pour des surfaces suffisamment rugueuses, et le remplacement de ce solveur par un gradient conjugué a permis d'assurer la convergence beaucoup plus stable et plus rapide (Polonsky et Keer 1999) ; l'utilisation du gradient conjugué avec la méthode FFT a été présentée dans (Ai et Sawamiphakdi 1999). Les couplages du gradient conjugué avec MLMI/MLMS

---

d'initiation de plasticité et de saturation de pression (dureté) correspondent aux pressions différentes.

ou FFT ont été comparés dans (Polonsky et Keer 2000); étrangement, Xiaolan AI a été remercié par les auteurs mais son article sur ce type de couplage (voir ci-après) n'a pas été cité. Dans (Gao *et al.* 2000), les auteurs ont effectué une des premières simulations thermo-mécaniques d'échauffement du contact à l'échelle de la rugosité à cause du frottement localisé sur les zones de contact. Une revue des méthodes numériques pour le traitement du contact rugueux a été faite dans (Sayles 1996). Un autre effort de comparaison de différentes méthodes (éléments de frontière) a été repris dans (Allwood 2005). La revue la plus récente a été faite par Bemporad et Paggi (2015), où les auteurs ont comparé beaucoup de méthodes : (i) algorithme glouton avec des solveurs sans contraintes (gradient conjugué, Cholesky, Gauss-Seidel), par exemple, (Borri-Brunetto *et al.* 1999), (ii) la méthode du gradient conjugué restreint (Polonsky et Keer 1999), (iii) *Alternating Direction Method of Multipliers* (Boyd *et al.* 2011), (iv) la méthode des moindres carrés non-négatifs (Lawson et Hanson 1995, p.161). En outre, les auteurs soulignent l'importance de l'estimation initiale du contact (*warm start*) permettant d'atteindre une convergence très rapide.

Dans le paysage scientifique des quinze dernières années, des simulations du contact rugueux par la méthode des éléments finis commencent à émerger (Hyun *et al.* 2004, Pei *et al.* 2005, Hyun et Robbins 2007, Yastrebov *et al.* 2011, Song *et al.* 2017, An *et al.* 2019). Notamment, cette méthode permet de traiter des problèmes de matériaux non linéaires et hétérogènes. Les méthodes des éléments de frontière continuent aussi à se développer en abordant le contact des corps hétérogènes (Koumi *et al.* 2015), visco-élastiques (Carbone et Putignano 2013, Putignano *et al.* 2015, van Dokkum et Nicola 2019) et élasto-plastiques (Nelias *et al.* 2006, Pérez-Ràfols *et al.* 2016, Frérot *et al.* 2019) avec l'adhésion (Carbone et Mangialardi 2008, Pohrt et Popov 2015, Dapp et Müser 2015, Rey *et al.* 2017, Popov *et al.* 2017, Müser *et al.* 2017) et le frottement (Paggi *et al.* 2014, Pohrt et Li 2014) en utilisant aussi une procédure de remaillage (Putignano *et al.* 2012). Ces nouveaux algorithmes se construisent toujours sur les principes variationnels mis en place par (Kalker 1977). L'émergence des modèles basés sur l'amortissement des vibrations d'un système de "atomes" surfaciques interagissant *via* un opérateur élastique des éléments de frontière a permis d'arriver à des discrétisations incroyablement fines (Campaña et Müser 2006, Prodanov *et al.* 2014, Müser *et al.* 2017). Dans (Prodanov *et al.* 2014) les auteurs présentent des simulations faites sur une grille comportant  $2^{34} \approx 17,18 \cdot 10^9$  (!) points de discrétisation. Mais cette technique ne se base pas sur des principes variationnels, i.e. il n'y a pas de problème de minimisation derrière.

REMARQUE SUR LE MODÈLE DU CONTACT PUREMENT GÉOMÉTRIQUE.— Dans (Pei *et al.* 2005), les auteurs ont démontré l'inconsistance du modèle de soustraction géométrique entre deux surfaces rugueuses pour déterminer l'aire réelle de contact, qui a été utilisée dans (Sayles et Thomas 1978, Majumdar et Bhushan 1991, Majumdar et Tien 1991) ainsi que d'autres modèles notamment basés sur la notion de fractale. Le modèle de soustraction géométrique (qui est similaire au modèle du



substrat de Winkler) n'est pas précis pour le contact élasto-plastique, sans même parler du contact élastique (une bonne démonstration de ce fait peut être trouvée dans (Dapp et al. 2012)). En revanche, le modèle basé sur la redistribution du volume plastique (Pullen et Williamson 1972, Nayak 1973), même s'il ne prend pas en compte l'interaction élastique, fait plus de sens que le modèle de soustraction géométrique.

REMARQUE SUR LA SIMULATION DU CONTACT RUGUEUX EN 2D.– Dans la solution de Flamant (2D), la contrainte décroît comme  $1/r$  et le déplacement change comme  $\ln(r)$  où  $r$  est la distance jusqu'au point d'application de la force, ce qui pose des problèmes de définition de déplacement comme il diverge à l'infini. Dans la solution de Boussinesq (3D), les asymptotes sont  $1/r^2$  et  $1/r$  pour la contrainte et le déplacement, respectivement. En conséquence, les solutions des deux problèmes sont assez différentes. Au niveau de la géométrie : les pics qui apparaissent comme des aspérités sur un profil ne sont pas des sommets (des vraies aspérités) qui peuvent entrer en contact, la statistique des deux n'est pas la même, même si l'une peut se déduire de l'autre (Nayak 1971). Cela a des conséquences directes sur la mécanique du contact entre des profils et des surfaces. Une correction directe des résultats 2D pour estimer l'aire de contact comme  $A = \pi/4 \sum_i l_i^2$  où  $l_i$  sont des longueurs des contacts séparés, qui, par exemple, ont été utilisées dans l'analyse 2D (Mitchell et al. 2013) ne peut pas être considérée comme une solution précise, même si elle permet de récupérer la croissance linéaire (ou quasi linéaire) de l'aire de contact avec la pression appliquée. En outre, des problèmes d'étanchéité et de lubrification en régime mixte ne peuvent pas être traités en 2D car un seul point de contact ferme le passage pour l'écoulement d'un fluide, qui nécessite donc une correction artificielle qui est difficile à faire proprement. Calculs 2D et 3D ont été comparés par Francis (1983a) pour déterminer pour quel niveau d'anisotropie le modèle 2D peut être représentatif d'une surface sinusoïdale. Mais même si le niveau d'anisotropie nécessaire n'est pas très grand, il est peu probable qu'à petite échelle la rugosité soit très anisotrope. En conclusion, le contact 2D (pour des profils) ne peut pas être utilisé pour estimer le contact des surfaces rugueuses en 3D.

REMARQUE SUR L'ASPECT MICROSTRUCTURAL DU CONTACT.– En plus de la géométrie des surfaces, la microstructure sous-jacente joue un rôle important dans le contact micromécanique. Ici, on propose quelques références (cette liste est largement incomplète) où cet aspect est pris en compte dans l'analyse des problèmes du contact. Un des premiers modèles microstructuraux pour le fretting-fatigue qui a traité la microstructure sur une grille régulière et en 2D a été rapporté dans (Goh et al. 2003). Des microstructures plus réalistes et en 3D pour le même problème ont été étudiées dans (Dick et Cailletaud 2006, Dick et al. 2008); ces travaux ont été suivis par beaucoup d'autres (Nigro et al. 2014, McCarthy et al. 2014, Lindroos et al. 2015, Tkalich et al. 2017, Lindroos et al. 2018). La plasticité cristalline avec l'effet de taille (plasticité à gradient) a été prise en compte dans (Ashton et al. 2018), ce qui a été motivé par l'observation et la modélisation du lien entre la taille des grains et

*l'amorçage des fissures de fretting-fatigue (Ashton et al. 2017). Les études comprenant la microstructure et la rugosité sont extrêmement rares, voir (Durand 2012).*

## 1.6. Conclusion et perspectives

Un grand progrès a été fait dans la simulation numérique du contact microscopique avec les méthodes des éléments finis et des éléments de frontière. On peut cependant identifier quelques lacunes à combler :

- la plupart des études du contact entre des aspérités utilisent la loi de frottement d'Amontons-Coulomb qui n'est pas adaptée à petite échelle. Dans le futur, il serait donc intéressant de refaire toutes les études en utilisant la loi de Tresca, qui est plus pertinente aux petites échelles de la rugosité ;
- dans l'avenir, il serait important d'étudier le contact élastique et élasto-plastique entre *deux* surfaces rugueuses. Notamment, il serait important de comprendre mieux la transition entre l'adhérence et glissement qui permettra de faire le lien entre le frottement statique et les paramètres de la rugosité et du matériau. La prise en compte de la microstructure avec son anisotropie et sa plasticité cristalline sera importante pour tirer des résultats quantitatifs ; En outre, il serait intéressant d'étudier le comportement visco-élastique qui permettra de quantifier l'état du contact en fonction du temps et de la vitesse (pour des faibles vitesses), qui alors permettra d'étudier le frottement dynamique. De plus, l'effet de visco-plasticité permettra de comprendre mieux le glissement (ou l'écoulement) des glaciers sur le lit rocheux ainsi que de formuler précisément des lois de frottement qui le gouvernent ;
- pour des vitesses plus élevées, les effets visqueux ne seront plus suffisants pour comprendre le glissement frottant à petite échelle. Comme la dissipation de frottement est très localisée, la chaleur produite est telle que localement une fusion de la matière a lieu. La prise en compte de ce phénomène en simulation thermo-mécanique fortement couplée permettra d'approfondir notre compréhension de ce phénomène complexe ;
- beaucoup de progrès ont été faits sur la simulation de l'interaction fluide/solide dans l'interface de contact (Lubrecht et Venner 1999, Sahlin *et al.* 2010, Dapp *et al.* 2012, Pérez-Ràfols *et al.* 2016, Temizer et Stupkiewicz 2016, Stupkiewicz *et al.* 2016, Shvarts et Yastrebov 2018*b,a*, Ager *et al.* 2019, Alp Çakal *et al.* 2019, Shvarts 2019, Vlădescu *et al.* 2019). En revanche, le modèle fortement couplé éléments finis qui permettra de simuler la lubrification en régime mixte à l'échelle de la rugosité est toujours manquant (Vakis *et al.* 2018).

## 1.7. Bibliographie

- Abramian, B., Arutiunian, N. K., Babloian, A. (1966), On symmetric pressure of a circular stamp on an elastic half-space in the presence of adhesion, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 30(1), 173–179.
- Adams, G. (2000), Radiation of body waves induced by the sliding of an elastic half-space against a rigid surface, *Journal of Applied Mechanics*, 67(1), 1–5.
- Adams, G. G. (1995), Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction, *Journal of applied mechanics*, 62(4), 867–872.
- Adler, R. J., Taylor, J. E. (2009), *Random fields and geometry*, Springer Science & Business Media.
- Afferrante, L., Carbone, G., Demelio, G. (2012), Interacting and coalescing hertzian asperities : a new multiasperity contact model, *Wear*, 278, 28–33.
- Ager, C., Schott, B., Vuong, A.-T., Popp, A., Wall, W. A. (2019), A consistent approach for fluid-structure-contact interaction based on a porous flow model for rough surface contact, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 0(0).
- Ai, X., Sawamiphakdi, K. (1999), Solving elastic contact between rough surfaces as an unconstrained strain energy minimization by using CGM and FFT techniques, *Journal of tribology*, 121(4), 639–647.
- Akula, B. R. (2019), Extended mortar method for contact and mesh-tying applications, PhD thesis, PSL Research University, MINES ParisTech.
- Akula, B. R., Vignollet, J., Yastrebov, V. A. (2019), Mortex method for contact along real and embedded surfaces : coupling X-FEM with the mortar method, *arXiv :1902.04000*, .
- Alart, P. (1997), Méthode de newton généralisée en mécanique du contact, *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 76, 83–108.
- Alart, P., Curnier, A. (1991), A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3), 353 – 375.
- Allwood, J. (2005), Survey and performance assessment of solution methods for elastic rough contact problems, *Journal of tribology*, 127(1), 10–23.
- Alp Çakal, B., Temizer, İ., Terada, K., Kato, J. (2019), Microscopic design and optimization of hydrodynamically lubricated dissipative interfaces, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, .
- Altenbach, H., Maugin, G. A., Erofeev, V. (2011), *Mechanics of generalized continua*, Springer Science & Business Media.
- An, B., Wang, X., Xu, Y., Jackson, R. L. (2019), Deterministic elastic-plastic modelling of rough surface contact including spectral interpolation and comparison to theoretical models, *Tribology International*, 135, 246–258.

- Andersson, P., Kropp, W. (2008), Time domain contact model for tyre/road interaction including nonlinear contact stiffness due to small-scale roughness, *Journal of sound and vibration*, 318(1-2), 296–312.
- Andersson, T. (1981), The boundary element method applied to two-dimensional contact problems with friction, in *Boundary element methods*, Springer, pp. 239–258.
- Andrews, D. J., Ben-Zion, Y. (1997), Wrinkle-like slip pulse on a fault between different materials, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 102(B1), 553–571.
- Archard, J., Hirst, W. (1956), The wear of metals under unlubricated conditions, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 236(1206), 397–410.
- Ashton, P., Harte, A., Leen, S. (2018), A strain-gradient, crystal plasticity model for microstructure-sensitive fretting crack initiation in ferritic-pearlitic steel for flexible marine risers, *International Journal of Fatigue*, 111, 81–92.
- Ashton, P., Harte, A. M., Leen, S. B. (2017), Statistical grain size effects in fretting crack initiation, *Tribology International*, 108, 75–86.
- Autumn, K. (2007), Gecko adhesion : structure, function, and applications, *MRS Bulletin*, 32(6), 473–478.
- Ballard, P. (1999), A counter-example to uniqueness in quasi-static elastic contact problems with small friction, *International Journal of Engineering Science*, 37(2), 163–178.
- Ballard, P. (2016), Steady sliding frictional contact problem for a 2D elastic half-space with a discontinuous friction coefficient and related stress singularities, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97, 225–259.
- Ballard, P., Basseville, S. (2005), Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with Coulomb friction : a model problem, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1), 59–77.
- Barras, F., Kammer, D. S., Geubelle, P. H., Molinari, J.-F. (2014), A study of frictional contact in dynamic fracture along bimaterial interfaces, *International Journal of Fracture*, 189(2), 149–162.
- Basseville, S., Cailletaud, G. (2015), An evaluation of the competition between wear and crack initiation in fretting conditions for Ti–6Al–4V alloy, *Wear*, 328, 443–455.
- Basseville, S., Niass, M., Missoum-Benziane, D., Leroux, J., Cailletaud, G. (2019), Effect of fretting wear on crack initiation for cylinder-plate and punch-plane tests, *Wear*, 420, 133–148.
- Batailly, A., Magnain, B., Chevaugeon, N. (2013), A comparative study between two smoothing strategies for the simulation of contact with large sliding, *Computational Mechanics*, 51(5), 581–601.
- Bathe, K.-J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.

- Belgacem, F. B., Hild, P., Laborde, P. (1999), Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(02), 287–303.
- Belytschko, T., Daniel, W., Ventura, G. (2002), A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function, *International Journal for numerical methods in engineering*, 55(1), 101–125.
- Bemporad, A., Paggi, M. (2015), Optimization algorithms for the solution of the frictionless normal contact between rough surfaces, *International Journal of Solids and Structures*, 69, 94–105.
- Bertsekas, D., Nedic, A., Ozdaglar, A. (2003), *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific.
- Black, A., Kopalinsky, E., Oxley, P. (1993), Asperity deformation models for explaining the mechanisms involved in metallic sliding friction and wear - A review, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 207(5), 335–353.
- Borri-Brunetto, M., Carpinteri, A., Chiaia, B. (1998), Lacunarity of the contact domain between elastic bodies with rough boundaries, in *Probama–21st century : probabilities and materials*, Springer, pp. 45–64.
- Borri-Brunetto, M., Carpinteri, A., Chiaia, B. (1999), Scaling phenomena due to fractal contact in concrete and rock fractures, in *Fracture Scaling*, Springer, pp. 221–238.
- Bowden, F. P., Tabor, D. (1986), *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford University Press.
- Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B., Eckstein, J. *et al.* (2011), Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers, *Foundations and Trends in Machine learning*, 3(1), 1–122.
- Brandt, A., Lubrecht, A. (1990), Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations, *Journal of Computational Physics*, 90(2), 348–370.
- Brener, E. A., Weikamp, M., Spatschek, R., Bar-Sinai, Y., Bouchbinder, E. (2016), Dynamic instabilities of frictional sliding at a bimaterial interface, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 89, 149–173.
- Brizmer, V., Kligerman, Y., Etsion, I. (2007), Elastic–plastic spherical contact under combined normal and tangential loading in full stick, *Tribology Letters*, 25(1), 61–70.
- Bui, H. D., Oueslati, A. (2010), On the stick-slip waves under unilateral contact and Coulomb friction, *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 1(3-4), 159–172.
- Bussetta, P., Marceau, D., Ponthot, J.-P. (2012), The adapted augmented lagrangian method : a new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem, *Computational Mechanics*, 49(2), 259–275.

- Campañá, C., Müser, M. H. (2006), Practical Green's function approach to the simulation of elastic semi-infinite solids, *Physical Review B*, 74(7), 075420.
- Campañá, C., Persson, B., Müser, M. (2011), Transverse and normal interfacial stiffness of solids with randomly rough surfaces, *Journal of physics : condensed matter*, 23(8), 085001.
- Carbone, G., Mangialardi, L. (2008), Analysis of the adhesive contact of confined layers by using a Green's function approach, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(2), 684–706.
- Carbone, G., Putignano, C. (2013), A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials : Theory and experiments, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(8), 1822–1834.
- Casals, O., Forest, S. (2009), Finite element crystal plasticity analysis of spherical indentation in bulk single crystals and coatings, *Computational Materials Science*, 45(3), 774–782.
- Cattaneo, C. (1938), Sul contatto de due corpi elastici : Distribuzione locale degli sforzi, *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 27, 342–349.
- Challen, J., Oxley, P. (1979), An explanation of the different regimes of friction and wear using asperity deformation models, *Wear*, 53(2), 229–243.
- Chamoret, D., Saillard, P., Rassineux, A., Bergheau, J.-M. (2004), New smoothing procedures in contact mechanics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 107–116.
- Chang, H.-J., Fivel, M., Rodney, D., Verdier, M. (2010), Multiscale modelling of indentation in FCC metals : From atomic to continuum, *Comptes Rendus Physique*, 11(3-4), 285–292.
- Chaudhary, A. B., Bathe, K.-J. (1986), A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction, *Computers & Structures*, 24(6), 855–873.
- Chen, W. W., Wang, Q. J. (2008), A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions, *Mechanics of Materials*, 40(11), 936–948.
- Chen, X., Hisada, T. (2006), Development of a finite element contact analysis algorithm to pass the patch test, *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering*, 49(4), 483–491.
- Chouly, F., Hild, P. (2013), A Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2), 1295–1307.
- Chouly, F., Hild, P., Renard, Y. (2015), Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche's method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments, *Mathematics of Computation*, 84(293), 1089–1112.
- Christensen, P., Klarbring, A., Pang, J.-S., Strömberg, N. (1998), Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems, *International Journal for*

- Numerical Methods in Engineering*, 42(1), 145–173.
- Ciavarella, M., Delfino, V., Demelio, G. (2006), A "re-vitalized" Greenwood and Williamson model of elastic contact between fractal surfaces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(12), 2569–2591.
- Cochard, A., Rice, J. (2000), Fault rupture between dissimilar materials : Ill-posedness, regularization, and slip-pulse response, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 105(B11), 25891–25907.
- Cocks, M. (1966), Shearing of junctions between metal surfaces, *Wear*, 9(4), 320–328.
- Coker, D., Lykotrafitis, G., Needleman, A., Rosakis, A. (2005), Frictional sliding modes along an interface between identical elastic plates subject to shear impact loading, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(4), 884–922.
- Cole, S., Sayles, R. (1992), A numerical model for the contact of layered elastic bodies with real rough surfaces, *Journal of tribology*, 114(2), 334–340.
- Cooper, M., Mikic, B., Yovanovich, M. (1969), Thermal contact conductance, *International Journal of heat and mass transfer*, 12(3), 279–300.
- Costa, H., Hutchings, I. (2007), Hydrodynamic lubrication of textured steel surfaces under reciprocating sliding conditions, *Tribology International*, 40(8), 1227–1238.
- Crisfield, M. (2000), Re-visiting the contact patch test, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(3), 435–449.
- Curnier, A. (1984), A theory of friction, *International Journal of Solids and Structures*, 20, 637–647.
- Dapp, W. B., Lücke, A., Persson, B. N., Müser, M. H. (2012), Self-affine elastic contacts : percolation and leakage, *Physical review letters*, 108(24), 244301.
- Dapp, W. B., Müser, M. H. (2015), Contact mechanics of and Reynolds flow through saddle points : On the coalescence of contact patches and the leakage rate through near-critical constrictions, *EPL (Europhysics Letters)*, 109(4), 44001.
- Dapp, W. B., Müser, M. H. (2016), Fluid leakage near the percolation threshold, *Scientific reports*, 6.
- De Lorenzis, L., Temizer, I., Wriggers, P., Zavarise, G. (2011), A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(13), 1278–1300.
- De Lorenzis, L., Wriggers, P., Hughes, T. J. (2014), Isogeometric contact : a review, *GAMM-Mitteilungen*, 37(1), 85–123.
- Dick, T., Basseville, S., Cailletaud, G. (2008), Fatigue modelling in fretting contact with a crystal plasticity model, *Computational Materials Science*, 43(1), 36–42.
- Dick, T., Cailletaud, G. (2006), Fretting modelling with a crystal plasticity model of Ti6Al4V, *Computational Materials Science*, 38(1), 113–125.
- Dieterich, J. H. (1992), Earthquake nucleation on faults with rate-and state-dependent strength, *Tectonophysics*, 211(1-4), 115–134.



- Dieterich, J. H., Kilgore, B. D. (1994), Direct observation of frictional contacts : New insights for state-dependent properties, *Pure and Applied Geophysics*, 143(1-3), 283–302.
- Dostál, Z., Kozubek, T., Sadowská, M., Vondrák, V. (2016), *Scalable algorithms for contact problems*, Springer.
- Dostál, Z., Vlach, O., Brzobohatý, T. (2019), Scalable TFETI based algorithm with adaptive augmentation for contact problems with variationally consistent discretization of contact conditions, *Finite Elements in Analysis and Design*, 156, 34–43.
- Durand, J. (2012), Approche multi-échelles des problèmes de contact et d'étanchéité, PhD thesis, MINES ParisTech. <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00820173>.
- Duvaut, G., Lions, J. L. (1972), *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod.
- Eid, H., Adams, G. G. (2007), An elastic–plastic finite element analysis of interacting asperities in contact with a rigid flat, *Journal of Physics D : Applied Physics*, 40(23), 7432.
- El-Abbasi, N., Bathe, K.-J. (2001), Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm, *Computers & Structures*, 79(16), 1473–1486.
- Elkilani, Y. S. (2003), A Hybrid Elasticity and Finite Element Method for Three-dimensional Contact problems with Friction, PhD thesis, University of Cincinnati.
- Eringen, A. C. (2012), *Microcontinuum field theories : I. Foundations and solids*, Springer Science & Business Media.
- Eriten, M., Petlicki, D., Polycarpou, A., Bergman, L. (2012), Influence of friction and adhesion on the onset of plasticity during normal loading of spherical contacts, *Mechanics of Materials*, 48, 26–42.
- Eriten, M., Polycarpou, A., Bergman, L. (2010), Physics-based modeling for partial slip behavior of spherical contacts, *International Journal of Solids and Structures*, 47(18-19), 2554–2567.
- Etsion, I., Kligerman, Y., Kadin, Y. (2005), Unloading of an elastic–plastic loaded spherical contact, *International Journal of Solids and Structures*, 42(13), 3716–3729.
- Farah, P., Gitterle, M., Wall, W. A., Popp, A. (2016), Computational wear and contact modeling for fretting analysis with isogeometric dual mortar methods, in *Key Engineering Materials*, vol. 681, Trans Tech Publ, pp. 1–18.
- Faulkner, A., Arnell, R. (2000), The development of a finite element model to simulate the sliding interaction between two, three-dimensional, elastoplastic, hemispherical asperities, *Wear*, 242(1-2), 114–122.
- Feng, G., Nix, W. D. (2004), Indentation size effect in MgO, *Scripta materialia*, 51(6), 599–603.



- Fischer-Cripps, A. C. (2011), Nanoindentation testing, *in* Nanoindentation, Springer, pp. 21–37.
- Fivel, M., Robertson, C., Canova, G., Boulanger, L. (1998), Three-dimensional modeling of indent-induced plastic zone at a mesoscale, *Acta materialia*, 46(17), 6183–6194.
- Forest, S. (1998), Mechanics of generalized continua : construction by homogenization, *Le Journal de Physique IV*, 8(PR4), Pr4–39.
- Francis, H. (1982), A finite surface element model for plane-strain elastic contact, *Wear*, 76(2), 221–245.
- Francis, H. (1983a), The accuracy of plane strain models for the elastic contact of three-dimensional rough surfaces, *Wear*, 85(2), 239–256.
- Francis, H. (1983b), A finite surface element model for two concentric nearly circular rings in partial contact, *Computers & Structures*, 17(2), 169–176.
- Frérot, L., Bonnet, M., Molinari, J.-F., Anciaux, G. (2019), A Fourier-accelerated volume integral method for elastoplastic contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 351, 951–976.
- Gallego, L., Nelias, D., Deyber, S. (2010), A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III, *Wear*, 268(1-2), 208–222.
- Gao, J., Lee, S. C., Ai, X., Nixon, H. (2000), An FFT-based transient flash temperature model for general three-dimensional rough surface contacts, *Transactions-ASME Journal Of Tribology*, 122(3), 519–523.
- Gao, Y., Larson, B. C., Lee, J., Nicola, L., Tischler, J., Pharr, G. M. (2015), Lattice rotation patterns and strain gradient effects in face-centered-cubic single crystals under spherical indentation, *Journal of Applied Mechanics*, 82(6), 061007.
- Gerde, E., Marder, M. (2001), Friction and fracture, *Nature*, 413(6853), 285.
- Gitterle, M., Popp, A., Gee, M. W., Wall, W. A. (2010), Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth newton method with consistent linearization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(5), 543–571.
- Gnecco, E., Bennewitz, R., Gyalog, T., Loppacher, C., Bammerlin, M., Meyer, E., Güntherodt, H.-J. (2000), Velocity dependence of atomic friction, *Physical Review Letters*, 84(6), 1172.
- Gnecco, E., Meyer, E. (2015), *Fundamentals of Friction and Wear on the Nanoscale*, Springer.
- Goh, C.-H., Neu, R. W., McDowell, D. L. (2003), Crystallographic plasticity in fretting of Ti–6Al–4V, *International Journal of Plasticity*, 19(10), 1627–1650.
- Goodman, L., Hamilton, G. (1966), The stress field created by a circular sliding contact, *Asme J. appl. mech*, 33(2), 371–376.
- Green, A. (1954), The plastic yielding of metal junctions due to combined shear and pressure, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2(3), 197–211.

- Greenwood, J. (2007), A note on Nayak's third paper, *Wear*, 262(1-2), 225–227.
- Greenwood, J. A. (1966), Constriction resistance and the real area of contact, *British Journal of Applied Physics*, 17(12), 1621.
- Greenwood, J. A., Tripp, J. H. (1967), The elastic contact of rough spheres, *Journal of Applied Mechanics*, 34(1), 153–159.
- Greenwood, J. A., Williamson, J. B. P. (1966), Contact of nominally flat surfaces, *P Roy Soc Lond A Mat*, 295, 300–319.
- Greenwood, J., Tabor, D. (1955), Deformation properties of friction junctions, *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 68(9), 609.
- Guyot, N., Kosior, F., Maurice, G. (2000), Coupling of finite elements and boundary elements methods for study of the frictional contact problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3), 147–159.
- Gwinner, J. (2013), hp-FEM convergence for unilateral contact problems with tresca friction in plane linear elastostatics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 254, 175–184.
- Hamilton, G. (1983), Explicit equations for the stresses beneath a sliding spherical contact, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 197(1), 53–59.
- Harrison, E. (1990), Olbers' paradox in recent times, *Modern Cosmology in Retrospect*, p. 33.
- Hartmann, S., Oliver, J., Cante, J., Weyler, R., Hernández, J. (2009), A contact domain method for large deformation frictional contact problems. part 2 : Numerical aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2607–2631.
- Heaton, T. H. (1990), Evidence for and implications of self-healing pulses of slip in earthquake rupture, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 64(1), 1–20.
- Heegaard, J.-H., Curnier, A. (1996), Geometric properties of 2D and 3D unilateral large slip contact operators, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 131, 263–286.
- Heege, A., Alart, P. (1996), A frictional contact element for strongly curved contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(1), 165–184.
- Herrmann, K. *et al.* (2011), *Hardness testing : principles and applications*, ASM International.
- Hertz, H. (1881), On the contact of elastic solids, *Z. Reine Angew. Mathematik*, 92, 156–171. English translation H. Hertz "Miscellaneous Papers" edited by MacMillan and Co., New York (1896), translation by D.E. Jones and G. A. Schott.
- Hetenyi, M., McDonald, P. (1958), Contact stresses under combined pressure and twist, *Journal of Applied Mechanics*, 25, 396–401.

- Hill, R., Storåkers, B., Zdunek, A. (1989), A theoretical study of the brinell hardness test, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 423(1865), 301–330.
- Hills, D., Sackfield, A. (1987), The stress field induced by normal contact between dissimilar spheres, *Journal of Applied Mechanics*, 54(1), 8–14.
- Hol, J., Alfaro, M. C., de Rooij, M. B., Meinders, T. (2012), Advanced friction modeling for sheet metal forming, *Wear*, 286, 66–78.
- Hu, Y. Z., Tonder, K. (1992), Simulation of 3-D random rough surface by 2-D digital filter and Fourier analysis, *Int J Mach Tool Manu*, 32, 83–90.
- Hulikal, S., Bhattacharya, K., Lapusta, N. (2015), Collective behavior of viscoelastic asperities as a model for static and kinetic friction, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 76, 144–161.
- Hyun, S., Pei, L., Molinari, J. F., Robbins, M. O. (2004), Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces, *Phys Rev E*, 70(2), 026117.
- Hyun, S., Robbins, M. O. (2007), Elastic contact between rough surfaces : Effect of roughness at large and small wavelengths, *Tribology International*, 40(10-12), 1413–1422.
- Jackson, R. L., Duvvuru, R. S., Meghani, H., Mahajan, M. (2007), An analysis of elasto-plastic sliding spherical asperity interaction, *Wear*, 262(1-2), 210–219.
- Jelagin, D., Larsson, P.-L. (2012), On indenter boundary effects at elastic contact, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(2), 165–182.
- Jelagin, D., Larsson, P.-L. (2013), Nonlocal frictional effects at indentation of elastic materials, *Tribology letters*, 51(3), 397–407.
- Jing, H.-S., Liao, M.-L. (1990), An improved finite element scheme for elastic contact problems with friction, *Computers & Structures*, 35(5), 571–578.
- Jinn, J.-T. (1989), Finite element analysis of elastic contact problems with friction, PhD thesis, The Ohio State University.
- Johnson, K., Greenwood, J., Higginson, J. (1985), The contact of elastic regular wavy surfaces, *Int J Mech Sci*, 27(6), 383 – 396.
- Johnson, K. L. (1985), *Contact mechanics*, Cambridge University Press.
- Kadin, Y., Kligerman, Y., Etsion, I. (2006), Multiple loading–unloading of an elastic–plastic spherical contact, *International journal of solids and structures*, 43(22-23), 7119–7127.
- Kalker, J. (1977), Variational principles of contact elastostatics, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 20(2), 199–219.
- Kalker, J., Dekking, F., Vollebregt, E. (1997), Simulation of rough, elastic contacts, *Journal of Applied Mechanics*, 64(2), 361–368.
- Kalker, J., Van Randen, Y. (1972), A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-hertzian half-space contact problems, *Journal of engineering mathematics*, 6(2), 193–206.

- Kammer, D. S., Radiguet, M., Ampuero, J.-P., Molinari, J.-F. (2015), Linear elastic fracture mechanics predicts the propagation distance of frictional slip, *Tribology letters*, 57(3), 23.
- Kammer, D., Yastrebov, V., Anciaux, G., Molinari, J. (2014), The existence of a critical length scale in regularised friction, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 63, 40–50.
- Kikuchi, N., Oden, J. (1988), *Contact Problems in Elasticity : a Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia.
- Kim, J. H., Jang, Y. H. (2014), Frictional hertzian contact problems under cyclic loading using static reduction, *International Journal of Solids and Structures*, 51(1), 252–258.
- Kim, Y.-C., Gwak, E.-J., Ahn, S.-m., Kang, N.-R., Han, H. N., Jang, J.-i., Kim, J.-Y. (2018), Indentation size effect for spherical nanoindentation on nanoporous gold, *Scripta Materialia*, 143, 10–14.
- Kinkaid, N., O'Reilly, O. M., Papadopoulos, P. (2003), Automotive disc brake squeal, *Journal of sound and vibration*, 267(1), 105–166.
- Klang, M. (1979), On interior contact under friction between cylindrical elastic bodies, PhD thesis, Linköping University.
- Klarbring, A. (1990a), Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact, *European journal of mechanics. A. Solids*, 9(1), 53–85.
- Klarbring, A. (1990b), Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction, *Ingenieur-Archiv*, 60(8), 529–541.
- Klarbring, A., Bjöorkman, G. (1992), Solution of large displacement contact problems with friction using newton's method for generalized equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34(1), 249–269.
- Kogut, L., Etsion, I. (2002), Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat, *Journal of Applied Mechanics*, 69(5), 657–662.
- Kogut, L., Etsion, I. (2003a), A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces, *Tribology transactions*, 46(3), 383–390.
- Kogut, L., Etsion, I. (2003b), A semi-analytical solution for the sliding inception of a spherical contact, *Journal of tribology*, 125(3), 499–506.
- Komvopoulos, K. (1989), Elastic-plastic finite element analysis of indented layered media, *Journal of Tribology*, 111(3), 430–439.
- Konyukhov, A., Schweizerhof, K. (2012), *Computational Contact Mechanics : geometrically exact theory for arbitrary shaped bodies*, Springer Science & Business Media.
- Korelc, J. (1997), Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions, *Theoretical Computer Science*, 187(1-2), 231–248.

- Kosior, F., Guyot, N., Maurice, G. (1999), Analysis of frictional contact problem using boundary element method and domain decomposition method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), 65–82.
- Koumi, K. E., Chaise, T., Nelias, D. (2015), Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 80, 1–25.
- Kral, E., Komvopoulos, K., Bogy, D. (1993), Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere, *Journal of Applied Mechanics*, 60(4), 829–841.
- Kravchuk, A. (2008), The solution of three-dimensional friction contact problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 72(3), 338–346.
- Krim, J. (1996), Friction at the atomic scale, *Scientific American*, 275(4), 74–80.
- Krim, J. (2002), Surface science and the atomic-scale origins of friction : what once was old is new again, *Surface Science*, 500(1-3), 741–758.
- Kwak, B. M., Lee, S. S. (1988), A complementarity problem formulation for two-dimensional frictional contact problems, *Computers & Structures*, 28(4), 469–480.
- Lai, W., Cheng, H. (1985), Computer simulation of elastic rough contacts, *ASLE transactions*, 28(2), 172–180.
- Laursen, T. (2002), *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*, Springer-Verlag.
- Laursen, T., Simo, J. (1993), A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems, *International Journal for numerical methods in engineering*, 36(20), 3451–3485.
- Lawson, C. L., Hanson, R. J. (1995), *Solving least squares problems*, SIAM, Philadelphia.
- Lee, S. C., Ren, N. (1996), Behavior of elastic-plastic rough surface contacts as affected by surface topography, load, and material hardness, *Tribology transactions*, 39(1), 67–74.
- Lee, S.-S. (1994), A computational method for frictional contact problem using finite element method, *International Journal for numerical methods in engineering*, 37(2), 217–228.
- Lekhnitskii, S. (1981), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, 2nd edition, Mir Publishers. Traduit de l'édition russe de 1977.
- Lengiewicz, J., Korelc, J., Stupkiewicz, S. (2011), Automation of finite element formulations for large deformation contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(10), 1252–1279.
- Lengiewicz, J., Stupkiewicz, S. (2013), Efficient model of evolution of wear in quasi-steady-state sliding contacts, *Wear*, 303(1-2), 611–621.

- Lewandowski, M., Stupkiewicz, S. (2018), Size effects in wedge indentation predicted by a gradient-enhanced crystal-plasticity model, *International Journal of Plasticity*, 109, 54–78.
- Li, J., Berger, E. (2003), A semi-analytical approach to three-dimensional normal contact problems with friction, *Computational Mechanics*, 30(4), 310–322.
- Lindroos, M., Laukkanen, A., Cailletaud, G., Kuokkala, V.-T. (2018), Microstructure based modeling of the strain rate history effect in wear resistant hadfield steels, *Wear*, 396, 56–66.
- Lindroos, M., Ratia, V., Apostol, M., Valtonen, K., Laukkanen, A., Molnar, W., Holmberg, K., Kuokkala, V.-T. (2015), The effect of impact conditions on the wear and deformation behavior of wear resistant steels, *Wear*, 328, 197–205.
- Lubrecht, A., Ioannides, E. (1991), A fast solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques, *Journal of tribology*, 113(1), 128–133.
- Lubrecht, A., Venner, C. H. (1999), Elastohydrodynamic lubrication of rough surfaces, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 213(5), 397–404.
- Ma, X., De Rooij, M., Schipper, D. (2010), A load dependent friction model for fully plastic contact conditions, *Wear*, 269(11-12), 790–796.
- Majumdar, A., Bhushan, B. (1991), Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces, *Journal of Tribology*, 113(1), 1–11.
- Majumdar, A., Tien, C. (1990), Fractal characterization and simulation of rough surfaces, *Wear*, 136(2), 313–327.
- Majumdar, A., Tien, C. (1991), Fractal network model for contact conductance, *Journal of Heat Transfer*, 113(3), 516–525.
- Mandelbrot, B. B. (1983), *The fractal geometry of nature*, vol. 173, WH Freeman, New York.
- Manoylov, A., Bryant, M. J., Evans, H. P. (2013), Dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces, *Tribology International*, 65, 248–258.
- Marks, R. J. I. (2012), *Introduction to Shannon sampling and interpolation theory*, Springer Science & Business Media.
- Martins, J., Guimarães, J., Faria, L. (1995), Dynamic surface solutions in linear elasticity and viscoelasticity with frictional boundary conditions, *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(4), 445–451.
- Massi, F., Baillet, L., Giannini, O., Sestieri, A. (2007), Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6), 2374–2393.
- Mata, M., Alcalá, J. (2004), The role of friction on sharp indentation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(1), 145–165.

- Maugin, G. A., Metrikine, A. V. (2010), Mechanics of generalized continua, *Advances in mechanics and mathematics*, 21.
- McCarthy, O., McGarry, J., Leen, S. (2014), The effect of grain orientation on fretting fatigue plasticity and life prediction, *Tribology international*, 76, 100–115.
- Meakin, P. (1998), *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*, Cambridge University Press.
- Medina, S., Dini, D. (2014), A numerical model for the deterministic analysis of adhesive rough contacts down to the nano-scale, *International Journal of Solids and Structures*, 51(14), 2620–2632.
- Mesarovic, S. D., Fleck, N. A. (1999), Spherical indentation of elastic–plastic solids, *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455, 2707–2728.
- Michalowski, R., Mróz, Z. (1978), Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems, *Archives of Mechanics*, 30, 259–276.
- Mindlin, R. (1949), Compliance of elastic bodies in contact, *J. Appl. Mech., ASME*, 16, 259–268.
- Mitchell, E., Fialko, Y., Brown, K. (2013), Temperature dependence of frictional healing of westerly granite : Experimental observations and numerical simulations, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 14(3), 567–582.
- Mo, Y., Turner, K. T., Szlufarska, I. (2009), Friction laws at the nanoscale, *Nature*, 457(7233), 1116.
- Mohammadi, N. K., Adams, G. G. (2018), Self-excited oscillations of a finite-thickness elastic layer sliding against a rigid surface with a constant coefficient of friction, *Journal of Applied Mechanics*, 85(2), 021005.
- Moirot, F., Nguyen, Q.-S., Oueslati, A. (2003), An example of stick-slip and stick-slip-separation waves, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(1), 107 – 118.
- Moreau, J.-J. (1966), Fonctionnelles convexes, *Séminaire Jean Leray*, 1966-1967(2), 1–108.
- Mossakovskii, V. (1954), The fundamental mixed problem of the theory of elasticity for a half-space with a circular line separating the boundary conditions, *Prikl. Mat. Mekh*, 18(2), 187–196.
- Mossakovskii, V. (1963), Compression of elastic bodies under conditions of adhesion (axisymmetric case), *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 27(3), 630–643.
- Mulvihill, D. M., Kartal, M. E., Nowell, D., Hills, D. A. (2011), An elastic–plastic asperity interaction model for sliding friction, *Tribology international*, 44(12), 1679–1694.
- Munoz, J. (2008), Modelling unilateral frictionless contact using the null-space method and cubic b-spline interpolation, *Computer Methods in Applied Mechanics*



- and Engineering*, 197(9-12), 979–993.
- Müser, M. H., Dapp, W. B., Bugnicourt, R., Sainsot, P., Lesaffre, N., Lubrecht, T. A., Persson, B. N., Harris, K., Bennett, A., Schulze, K. *et al.* (2017), Meeting the contact-mechanics challenge, *Tribology Letters*, 65(4), 118.
- Myshkin, N., Petrokovets, M., Chizhik, S. (1998), Simulation of real contact in tribology, *Tribology International*, 31(1-3), 79–86.
- Nayak, P. (1973), Random process model of rough surfaces in plastic contact, *Wear*, 26(3), 305–333.
- Nayak, P. R. (1971), Random process model of rough surfaces, *J Lubr Technol (ASME)*, 93, 398–407.
- Nelias, D., Boucly, V., Brunet, M. (2006), Elastic-plastic contact between rough surfaces : proposal for a wear or running-in model, *Journal of Tribology*, 128(2), 236–244.
- Nigro, C., Sun, L., Meriaux, J., Proudhon, H. (2014), Microstructural simulations of the initiation and propagation of short fretting cracks in a ti–6al–4v contact, *Tribology International*, 74, 103–109.
- Nix, W. D., Gao, H. (1998), Indentation size effects in crystalline materials : a law for strain gradient plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(3), 411–425.
- Nogi, T., Kato, T. (1997), Influence of a hard surface layer on the limit of elastic contact – part i : Analysis using a real surface model, *Journal of tribology*, 119(3), 493–500.
- Nowell, D., Hills, D., Sackfield, A. (1988), Contact of dissimilar elastic cylinders under normal and tangential loading, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36(1), 59–75.
- Oliver, J., Hartmann, S., Cante, J., Weyler, R., Hernández, J. (2009), A contact domain method for large deformation frictional contact problems. part 1 : Theoretical basis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2591 – 2606.
- Oliver, W. C., Pharr, G. M. (1992), An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments, *Journal of materials research*, 7(6), 1564–1583.
- Olsson, E., Larsson, P.-L. (2013), On force–displacement relations at contact between elastic–plastic adhesive bodies, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(5), 1185–1201.
- Olsson, E., Larsson, P.-L. (2016), A unified model for the contact behaviour between equal and dissimilar elastic–plastic spherical bodies, *International Journal of Solids and Structures*, 81, 23–32.
- Özel, T. (2006), The influence of friction models on finite element simulations of machining, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46(5), 518–530.



- Paggi, M., Ciavarella, M. (2010), The coefficient of proportionality  $\kappa$  between real contact area and load, with new asperity models, *Wear*, 268(7-8), 1020–1029.
- Paggi, M., Pohrt, R., Popov, V. L. (2014), Partial-slip frictional response of rough surfaces, *Scientific reports*, 4, 5178.
- Panagiotopoulos, P. (1975), A nonlinear programming approach to the unilateral contact-, and friction-boundary value problem in the theory of elasticity, *Ingenieur-Archiv*, 44(6), 421–432.
- Pei, L., Hyun, S., Molinari, J. F., Robbins, M. O. (2005), Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces, *J Mech Phys Solids*, 53, 2385–2409.
- Peng, W. (2001), Contact mechanics of multilayered rough surfaces in tribology, PhD thesis, The Ohio State University.
- Pérez-Ràfols, F., Almqvist, A. (2019), Generating randomly rough surfaces with given height probability distribution and power spectrum, *Tribology International*, 131, 591–604.
- Pérez-Ràfols, F., Larsson, R., Almqvist, A. (2016), Modelling of leakage on metal-to-metal seals, *Tribology International*, 94, 421–427.
- Pietrzak, G. (1997), Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems, PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Sc. advisor A. Curnier.
- Pietrzak, G., Curnier, A. (1999), Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented lagrangian treatment, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4), 351–381.
- Plouraboué, F., Geoffroy, S., Prat, M. (2004), Conductances between confined rough walls, *Physics of Fluids*, 16(3), 615–624.
- Pohrt, R., Li, Q. (2014), Complete boundary element formulation for normal and tangential contact problems, *Physical Mesomechanics*, 17(4), 334–340.
- Pohrt, R., Popov, V. L. (2012), Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces, *Physical Review Letters*, 108(10), 104301.
- Pohrt, R., Popov, V. L. (2015), Adhesive contact simulation of elastic solids using local mesh-dependent detachment criterion in boundary elements method, *Facta Universitatis, Series : Mechanical Engineering*, 13(1), 3–10.
- Polonsky, I., Keer, L. (1999), A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques, *Wear*, 231(2), 206–219.
- Polonsky, I., Keer, L. M. (2000), Fast methods for solving rough contact problems : a comparative study, *Journal of tribology*, 122(1), 36–41.
- Popov, V. L., Pohrt, R., Li, Q. (2017), Strength of adhesive contacts : Influence of contact geometry and material gradients, *Friction*, 5(3), 308–325.

- Popp, A. (2012), Mortar methods for computational contact mechanics and general interface problems, PhD thesis, Technische Universität München.
- Popp, A., Gitterle, M., Gee, M. W., Wall, W. A. (2010), A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(11), 1428–1465.
- Prakash, V. (1995), A pressure-shear plate impact experiment for investigating transient friction, *Experimental Mechanics*, 35(4), 329–336.
- Prakash, V., Clifton, R. (1993), Time resolved dynamic friction measurements in pressure-shear, in K. Ramesh, (ed.), *Experimental Techniques in the Dynamics of Deformable Solids*, vol. 165, ASME, pp. 33–48.
- Prodanov, N., Dapp, W. B., Müser, M. H. (2014), On the contact area and mean gap of rough, elastic contacts : Dimensional analysis, numerical corrections, and reference data, *Tribology Letters*, 53(2), 433–448.
- Pullen, J., Williamson, J. (1972), On the plastic contact of rough surfaces, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 327(1569), 159–173.
- Puso, M. A., Laursen, T. A. (2002), A 3D contact smoothing method using gregory patches, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8), 1161–1194.
- Puso, M. A., Laursen, T. A. (2004), A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(6-8), 601–629.
- Puso, M. A., Laursen, T., Solberg, J. (2008), A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8), 555–566.
- Putignano, C., Afferrante, L., Carbone, G., Demelio, G. (2012), A new efficient numerical method for contact mechanics of rough surfaces, *Int J Solids Struct*, 49(2), 338–343.
- Putignano, C., Carbone, G., Dini, D. (2015), Mechanics of rough contacts in elastic and viscoelastic thin layers, *International Journal of Solids and Structures*, 69, 507–517.
- Qiu, X., Huang, Y., Nix, W., Hwang, K., Gao, H. (2001), Effect of intrinsic lattice resistance in strain gradient plasticity, *Acta Materialia*, 49(19), 3949–3958.
- Rabinowicz, E. (1965), *Friction and Wear of Materials*, Wiley.
- Ranjith, K., Rice, J. (2001), Slip dynamics at an interface between dissimilar materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(2), 341–361.
- Ren, N., Lee, S. C. (1994), The effects of surface roughness and topography on the contact behavior of elastic bodies, *Journal of tribology*, 116(4), 804–810.

- Renard, F., Candela, T., Bouchaud, E. (2013), Constant dimensionality of fault roughness from the scale of micro-fractures to the scale of continents, *Geophysical Research Letters*, 40(1), 83–87.
- Renard, Y. (1998), Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques, PhD thesis, LMC-IMAG Grenoble.
- Renardy, M. (1992), Ill-posedness at the boundary for elastic solids sliding under Coulomb friction, *Journal of Elasticity*, 27(3), 281–287.
- Rey, V., Anciaux, G., Molinari, J.-F. (2017), Normal adhesive contact on rough surfaces : efficient algorithm for FFT-based BEM resolution, *Computational Mechanics*, 60(1), 69–81.
- Rey, V., Krumscheid, S., Nobile, F. (2019), Quantifying uncertainties in contact mechanics of rough surfaces using the multilevel Monte Carlo method, *International Journal of Engineering Science*, 138, 50 – 64.
- Rice, J. R. (2006), Heating and weakening of faults during earthquake slip, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 111(B5).
- Rice, J. R., Tse, S. T. (1986), Dynamic motion of a single degree of freedom system following a rate and state dependent friction law, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 91(B1), 521–530.
- Russ, J. C. (1994), *Fractal surfaces*, Springer Science & Business Media.
- Sabnis, P. A., Forest, S., Arakere, N. K., Yastrebov, V. A. (2013), Crystal plasticity analysis of cylindrical indentation on a ni-base single crystal superalloy, *International Journal of Plasticity*, 51, 200 – 217.
- Sahlin, F., Larsson, R., Almqvist, A., Lugt, P., Marklund, P. (2010), A mixed lubrication model incorporating measured surface topography. part 1 : theory of flow factors, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 224(4), 335–351.
- Sainsot, P., Leroy, J., Villechaise, B. (1990), Effect of surface coatings in a rough normally loaded contact, in *Tribology Series*, vol. 17, Elsevier, pp. 151–156.
- Sang, Y., Dubé, M., Grant, M. (2001), Thermal effects on atomic friction, *Physical Review Letters*, 87(17), 174301.
- Sayles, R. (1996), Basic principles of rough surface contact analysis using numerical methods, *Tribology International*, 29(8), 639–650.
- Sayles, R., Thomas, T. (1978), Computer simulation of the contact of rough surfaces, *Wear*, 49(2), 273–296.
- Schatzman, M. (1978), A class of nonlinear differential equations of second order in time, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 2(3), 355–373.
- Seabra, J., Berthe, D. (1987), Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the hertzian contact, *Journal of tribology*, 109(3), 462–469.

- Sewerin, F., Papadopoulos, P. (2017), An exact penalty approach for the finite element solution of frictionless contact problems, *in Proceedings of the 7th GACM Colloquium on Computational Mechanics*, Stuttgart, Germany.
- Shi, X., Polycarpou, A. A. (2005), Measurement and modeling of normal contact stiffness and contact damping at the meso scale, *Journal of vibration and acoustics*, 127(1), 52–60.
- Shvarts, A. G. (2019), Coupling mechanical frictional contact with interfacial fluid flow at small and large scales, PhD thesis, PSL Research University, MINES ParisTech.
- Shvarts, A. G., Yastrebov, V. A. (2018a), Fluid flow across a wavy channel brought in contact, *Tribology International*, 126, 116–126.
- Shvarts, A. G., Yastrebov, V. A. (2018b), Trapped fluid in contact interface, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 119, 140–162.
- Shyu, S., Chang, T., Saleeb, A. (1989), Friction-contact analysis using a mixed finite element method, *Computers & structures*, 32(1), 223–242.
- Simo, J., Hughes, T. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer.
- Simoes, F., Martins, J. (1998), Instability and ill-posedness in some friction problems, *International Journal of Engineering Science*, 36(11), 1265–1293.
- Song, H., Vakis, A., Liu, X., Van der Giessen, E. (2017), Statistical model of rough surface contact accounting for size-dependent plasticity and asperity interaction, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 106, 1–14.
- Song, W., Li, L., Ovcharenko, A., Jia, D., Etsion, I., Talke, F. E. (2012), Plastic yield inception of an indented coated flat and comparison with a flattened coated sphere, *Tribology International*, 53, 61–67.
- Song, Z., Komvopoulos, K. (2013), Elastic–plastic spherical indentation : deformation regimes, evolution of plasticity, and hardening effect, *Mechanics of Materials*, 61, 91–100.
- Spence, D. (1968), Self similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 305(1480), 55–80.
- Spence, D. (1975), The hertz contact problem with finite friction, *Journal of Elasticity*, 5, 297–319.
- Spinu, S., Frunza, G. (2015), The hysteretic behaviour of partial slip elastic contacts undergoing a fretting loop, *in Journal of Physics : Conference Series*, vol. 585, IOP Publishing, p. 012007.
- Stanley, H. M., Kato, T. (1997), An FFT-based method for rough surface contact, *J Tribol-T ASME*, 119, 481–485.
- Stingl, B., Ciavarella, M., Hoffmann, N. (2013), Frictional dissipation in elastically dissimilar oscillating hertzian contacts, *International Journal of Mechanical*

- Sciences*, 72, 55–62.
- Storåkers, B., Elaguine, D. (2005), Hertz contact at finite friction and arbitrary profiles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(6), 1422–1447.
- Straffelini, G. (2001), A simplified approach to the adhesive theory of friction, *Wear*, 249(1-2), 78–84.
- Stupkiewicz, S., Lengiewicz, J., Sadowski, P., Kucharski, S. (2016), Finite deformation effects in soft elastohydrodynamic lubrication problems, *Tribology International*, 93, 511–522.
- Sun, L. (2012), Étude numérique de l’amorçage et de la propagation de fissures de fretting, PhD thesis, MINES ParisTech.
- Sun, Y., Bloyce, A., Bell, T. (1995), Finite element analysis of plastic deformation of various tin coating/substrate systems under normal contact with a rigid sphere, *Thin Solid Films*, 271(1-2), 122–131.
- Svetlizky, I., Fineberg, J. (2014), Classical shear cracks drive the onset of dry frictional motion, *Nature*, 509(7499), 205.
- Svetlizky, I., Muñoz, D. P., Radiguet, M., Kammer, D. S., Molinari, J.-F., Fineberg, J. (2016), Properties of the shear stress peak radiated ahead of rapidly accelerating rupture fronts that mediate frictional slip, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(3), 542–547.
- Swadener, J., George, E., Pharr, G. (2002), The correlation of the indentation size effect measured with indenters of various shapes, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(4), 681–694.
- Tabor, D. (1951), *The hardness of metals*, Oxford university press.
- Tan, D. (2003), Mesh matching and contact patch test, *Computational mechanics*, 31(1-2), 135–152.
- Tangena, A., Wijnhoven, P. (1985), Finite element calculations on the influence of surface roughness on friction, *Wear*, 103(4), 345–354.
- Taylor, R., Papadopoulos, O. (1991), On a patch test for contact problems in two dimensions, in P. Wriggers, W. Wagner, (eds), *Nonlinear Computational Mechanics*, Springer, pp. 690–702.
- Temizer, I., Stupkiewicz, S. (2016), Formulation of the Reynolds equation on a time-dependent lubrication surface, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2187), 20160032.
- Temizer, I., Wriggers, P., Hughes, T. (2011), Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12), 1100–1112.
- Temizer, I., Wriggers, P., Hughes, T. (2012), Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209, 115–128.

- Thomas, T. R. (1999), *Rough surfaces*, World Scientific Publishing Co.
- Thompson, M. K., Thompson, J. M. (2010), Considerations for the incorporation of measured surfaces in finite element models, *Scanning*, 32(4), 183–198.
- Tkalich, D., Yastrebov, V. A., Cailletaud, G., Kane, A. (2017), Multiscale modeling of cemented tungsten carbide in hard rock drilling, *International Journal of Solids and Structures*, 128, 282–295.
- Torstenfelt, B. R. (1984), An automatic incrementation technique for contact problems with friction, *Computers & structures*, 19(3), 393–400.
- Vakis, A., Yastrebov, V., Scheibert, J., Nicola, L., Dini, D., Minfray, C., Almqvist, A., Paggi, M., Lee, S., Limbert, G., Molinari, J., Anciaux, G., Aghababaei, R., Restrepo, S. E., Papangelo, A., Cammarata, A., Nicolini, P., Putignano, C., Carbone, G., Stupkiewicz, S., Lengiewicz, J., Costagliola, G., Bosia, F., Guarino, R., Pugno, N., Müser, M., Ciavarella, M. (2018), Modeling and simulation in tribology across scales : An overview, *Tribology International*, 125, 169 – 199.
- van Dokkum, J. S., Nicola, L. (2019), Green’s function molecular dynamics including viscoelasticity, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, .
- Venner, C. H., Lubrecht, A. (1996), Numerical analysis of the influence of waviness on the film thickness of a circular ehl contact, *Journal of tribology*, 118(1), 153–161.
- Vlădescu, S.-C., Putignano, C., Marx, N., Keppens, T., Reddyhoff, T., Dini, D. (2019), The percolation of liquid through a compliant seal – an experimental and theoretical study, *Journal of Fluids Engineering*, 141(3), 031101.
- Webster, M., Sayles, R. (1986), A numerical model for the elastic frictionless contact of real rough surfaces, *Journal of tribology*, 108(3), 314–320.
- Wei, Z., Li, Z., Qian, Z., Chen, R., Dollevoet, R. (2016), 3D FE modelling and validation of frictional contact with partial slip in compression–shift–rolling evolution, *International Journal of Rail Transportation*, 4(1), 20–36.
- West, M., Sayles, R. (1987), A 3-dimensional method of studying 3-body contact geometry and stress on real rough surfaces, in *Tribology Series*, vol. 12, Elsevier, pp. 195–200.
- Whitehouse, D. J. (2010), *Handbook of surface and nanometrology*, CRC press.
- Willis, J. (1966), Hertzian contact of anisotropic bodies, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14(3), 163–176.
- Willis, J. (1967), Boussinesq problems for an anisotropic half-space, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(5), 331–339.
- Wilson, W., Sheu, S. (1988), Real area of contact and boundary friction in metal forming, *International journal of mechanical sciences*, 30(7), 475–489.
- Wriggers, P. (2006), *Computational Contact Mechanics*, second edition, Springer-Verlag.

- Wriggers, P. (2008), *Nonlinear finite element methods*, Springer Science & Business Media.
- Wriggers, P., Krstulović-Opara, L. (2000), On smooth finite element discretizations for frictional contact problems, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 80(S1), 77–80.
- Wriggers, P., Krstulović-Opara, L., Korelc, J. (2001), Smooth C1-interpolations for two-dimensional frictional contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, 1469–1495.
- Wriggers, P., Zavarise, G. (1993), Application of augmented lagrangian techniques for non-linear constitutive laws in contact interfaces, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(10), 815–824.
- Wriggers, P., Zavarise, G. (2008), A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by Nitsche, *Computational Mechanics*, 41(3), 407–420.
- Yang, B., Laursen, T., Meng, X. (2005), Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62, 1183–1225.
- Yastrebov, V. A. (2013), *Numerical Methods in Contact Mechanics*, WILEY/ISTE.
- Yastrebov, V. A. (2016), Sliding without slipping under Coulomb friction : Opening waves and inversion of frictional force, *Tribology Letters*, 62(1), 1–8.
- Yastrebov, V. A. (2019), The elastic contact of rough spheres investigated using a deterministic multi-asperity model, *Journal of Multiscale Modelling*, 10(01), 1841002.
- Yastrebov, V. A., Ancaix, G., Molinari, J.-F. (2014), The contact of elastic regular wavy surfaces revisited, *Tribology Letters*, 56(1), 171–183.
- Yastrebov, V. A., Ancaix, G., Molinari, J.-F. (2015), From infinitesimal to full contact between rough surfaces : evolution of the contact area, *International Journal of Solids and Structures*, 52, 83–102.
- Yastrebov, V. A., Ancaix, G., Molinari, J.-F. (2017a), On the accurate computation of the true contact-area in mechanical contact of random rough surfaces, *Tribology International*, 114, 161–171.
- Yastrebov, V. A., Ancaix, G., Molinari, J.-F. (2017b), The role of the roughness spectral breadth in elastic contact of rough surfaces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 107, 469–493.
- Yastrebov, V. A., Durand, J., Proudhon, H., Cailletaud, G. (2011), Rough surface contact analysis by means of the finite element method and of a new reduced model, *Comptes Rendus Mécanique*, 339(7-8), 473–490.
- Yoon, E.-S., Singh, R. A., Kong, H., Kim, B., Kim, D.-H., Jeong, H. E., Suh, K. Y. (2006), Tribological properties of bio-mimetic nano-patterned polymeric surfaces on silicon wafer, *Tribology Letters*, 21(1), 31–37.



- Zahouani, H., Vargiolu, R., Loubet, J.-L. (1998), Fractal models of surface topography and contact mechanics, *Mathematical and Computer modelling*, 28(4-8), 517–534.
- Zavarise, G., De Lorenzis, L. (2009a), A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test, *International journal for numerical methods in engineering*, 79(4), 379–416.
- Zavarise, G., De Lorenzis, L. (2009b), The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact : classical formulation and special cases, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41-44), 3428–3451.
- Zavarise, G., Wriggers, P., Stein, E., Schrefler, B. A. (1992), Real contact mechanisms and finite element formulation – a coupled thermomechanical approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(4), 767–785.
- Zhang, H., Wang, H., Wriggers, P., Schrefler, B. (2005), A finite element model for contact analysis of multiple cosserat bodies, *Computational Mechanics*, 36(6), 444–458.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R. (2000a), *The Finite Element Method, Volume 1 : The Basis, fifth edition*, Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R. (2000b), *The Finite Element Method, Volume 2 : Solid Mechanics, fifth edition*, Butterworth-Heinemann.
- Zisis, T., Gourgiotis, P., Baxevanakis, K. P., Georgiadis, H. (2014), Some basic contact problems in couple stress elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 51(11-12), 2084–2095.



