HAL open science

# Groupe fondamental des champs algébriques, inertie et action galoisienne

Pierre Lochak, Michel Vaquié

**To cite this version:**

Pierre Lochak, Michel Vaquié. Groupe fondamental des champs algébriques, inertie et action galoisienne. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2018. hal-02394162

**HAL Id: hal-02394162**

**https://hal.science/hal-02394162v1**

Submitted on 4 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume , n° 0, XXXX
pp. 000-000

# Groupe fondamental des champs algébriques, inertie et action galoisienne (*)

Pierre Lochak (1) et Michel Vaquié (2)

**Résumé.** — Nous étudions l'action du groupe de Galois arithmétique sur l'inertie géométrique attachée au groupe fondamental d'un (1-)champ algébrique, dans un contexte modéré. La situation est analogue mais aussi foncièrement distincte et plus complexe que celle, essentiellement bien comprise, qui concerne l'étude des groupes d'inertie procycliques associés aux composantes d'un diviseur à croisements normaux. Une grande partie du texte est consacrée à mettre en place les outils nécessaires à cette étude, elle-même en partie motivée par et appliquée à l'exemple important des champs de modules de courbes, dans lequel les groupes d'inertie en question correspondent aux automorphismes des courbes algébriques du type classifié par le champ.

**Abstract.** — We study the action of the arithmetic Galois group on the geometric inertia subgroups of the fundamental group, in a tame but typically stacky context. The problem is analogous but more involved than the by now fairly well-understood situation of the procyclic inertia subgroups associated with the components of a divisor with normal crossings. A significant part of the text is devoted to introducing the necessary tools for a study which is in part motivated by and applied to the important example of the moduli stacks of curves, where the geometric inertia groups correspond to the automorphisms of algebraic curves of the type classified by the stack.

## Introduction

Soit $X/k$ un $k$-schéma où $k$ est un corps dont on notera $\bar{k}$ une clôture séparable. Notons $\bar{X} = X \otimes \bar{k}$ le schéma « géométrique » correspondant.

(*) Reçu le 30 juin 2015, accepté le 23 août 2016.

(1) Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie, Paris — pierre.lochak@umj-prg.fr

(2) Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, Toulouse — michel.vaquie@math.univ-toulouse.fr

Article proposé par Laurent Clozel.

On supposera $X$ géométriquement connexe (*i.e.* $\bar{X}$ est connexe) et normal. Rien n'empêche le lecteur de supposer que $k = \mathbb{Q}$ et que $X$ est une variété quasi-projective (géométriquement connexe) lisse sur $\mathbb{Q}$. À cette situation sont associés les groupes fondamentaux (profinis) de $X$, $\bar{X}$ et $k$ (ou plus correctement $\mathrm{Spec}(k)$), ce dernier n'étant autre que le groupe de Galois absolu $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Nous oublierons commodément dans cette introduction la question du choix des points bases. Ces groupes fondamentaux sont alors reliés par une suite exacte courte :

$$1 \to \pi_1(\bar{X}) \to \pi_1(X) \to G_k \to 1 \tag{1}$$

établie dans [22]. Nous noterons aussi $\pi_1^{geom}(X) = \pi_1(\bar{X})$ le groupe fondamental géométrique de $X$. La suite exacte courte (1), ou suite exacte « fondamentale », détermine une action extérieure du groupe de Galois arithmétique $G_k$ sur le groupe fondamental géométrique, soit un morphisme

$$G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1^{geom}(X))$$

(avec $\mathrm{Out} = \mathrm{Aut} \,/\, \mathrm{Inn}$). Réciproquement, si le centre du groupe fondamental géométrique est trivial, la suite d'extension (1) est déterminée (à isomorphisme près) par la donnée de cette action (extérieure).

Dans son *Esquisse d'un programme* et d'autres manuscrits, Grothendieck a mis l'accent sur la richesse de cette action arithmétique, foncièrement non linéaire ou non abélienne contrairement aux représentations galoisiennes plus classiques générées par les diverses théories cohomologiques. À ce propos on évoquera simplement le théorème de Belyi, la géométrie anabélienne et la théorie de Grothendieck–Teichmüller. En même temps on connaît très peu de contraintes générales de nature à cerner l'action du groupe de Galois arithmétique définie comme ci-dessus. La propriété générale connue la plus importante de cette action est donnée par son comportement sur les sous-groupes du groupe fondamental géométrique qui correspondent à l'inertie attachée à un diviseur à l'infini. Plus précisément — mais très succinctement tout de même — supposons que $X \subset Y$ avec $Y$ projectif lisse et $Y \setminus X = D$ où $D$ est un diviseur à croisements strictement normaux dans $Y$. Supposons aussi pour simplifier que $k = \mathbb{Q}$ ; le lecteur trouvera des hypothèses un peu plus générales dans [23]. Notons que l'on est tenté d'écrire $\bar{X}$ plutôt que $Y$ mais $\bar{X}$ désigne déja un « revêtement universel arithmétique » de $X$. À chaque composante irréductible du diviseur géométrique $\bar{D} = D \otimes \bar{k}$, disons $C$, est attachée une classe de conjugaison de groupes procycliques (quotients de $\widehat{\mathbb{Z}}$), soit $I(C)$, l'inertie correspondant à ce diviseur irréductible. La propriété à laquelle nous faisions allusion ci-dessus consiste dans le fait que l'action extérieure du groupe de Galois (ici $G_{\mathbb{Q}}$) est *cyclotomique* si on la restreint à l'inertie. Autrement dit si $\gamma \in I(C) \subset \pi_1^{geom}(X)$ et $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, alors $\sigma(\gamma) \sim \gamma^{\chi(\sigma)}$. Ici $\chi : G_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ désigne le caractère cyclotomique et $\sim$

indique que les deux membres sont conjugués dans le groupe fondamental géométrique $\pi_1^{geom}(X)$. On vérifie tout de suite que cette relation a bien un sens, sachant que l'action est extérieure et que l'inertie n'est elle-même définie qu'à conjugaison près. On exprimera cette propriété brièvement en disant que l'action du groupe de Galois (arithmétique) sur l'inertie (géométrique) divisorielle est cyclotomique. Autre formulation : les sous-groupes d'inertie divisorielle ont un twist de Tate égal à 1 ; ce sont des quotients de $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$.

Cet article examine un problème analogue qui survient très naturellement dans le contexte des *champs*, qui ici désigneront toujours les 1-champs algébriques d'Artin. Étant donné cette fois $\mathcal{X}/k$, un tel champ sur un corps $k$, et avec essentiellement les mêmes hypothèses que ci-dessus dans le cas des schémas, on dispose de nouveau de la suite fondamentale (1), dans laquelle bien entendu $\mathcal{X}$ se substitue à $X$ (voir [42]), et donc d'une action galoisienne $G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1^{geom}(\mathcal{X}))$ sur le groupe fondamental géométrique $\pi_1^{geom}(\mathcal{X}) = \pi_1(\mathcal{X} \otimes \bar{k})$. D'autre part à $\mathcal{X}$ est associé le champ d'inertie $\mathcal{I}(\mathcal{X})$, formellement défini comme le (2-)produit cartésien $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \mathcal{X}$, et qui code les « automorphismes des points de $\mathcal{X}$ ». On peut y associer en particulier des groupes d'inertie champêtre (géométrique) $I(x)$, où $x$ est un point (géométrique mais pas nécessairement fermé) de $\mathcal{X}$, et qui sont des sous-groupes du groupe fondamental géométrique $\pi_1^{geom}(\mathcal{X})$. Ils sont définis ici à conjugaison près et sont finis si $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne–Mumford, cas auquel nous nous restreindrons essentiellement car on verra qu'il est non seulement le plus simple, mais aussi le plus significatif à ce point de vue. Le problème qui nous occupe consiste donc à étudier l'action du groupe de Galois $G_k$ sur les groupes d'inertie géométriques $I(x)$. Si $\mathcal{X}$ est un espace de modules de courbes et $x$ représente donc une courbe $C_x$ classifiée par $\mathcal{X}$, $I(x) \simeq \mathrm{Aut}(C_x)$, le groupe des automorphismes de la courbe $C_x$, et l'on se pose donc la question de l'étude « en famille » des automorphismes des courbes d'un type donné, déterminé par le choix du champ $\mathcal{X}$.

Le problème posé ci-dessus, autrement dit celui de l'action galoisienne arithmétique sur l'inertie champêtre (géométrique) n'admet à l'évidence pas de solution générale et « universelle » simple comme dans le cas classique de l'inertie divisorielle résumé ci-dessus. Déjà en se bornant aux espaces de modules de courbes, *tous* les groupes finis apparaissent parmi les groupes $I(x)$, en faisant varier le type des courbes (supposées même hyperboliques projectives) et le point $x$ (supposé même en outre fermé). Néanmoins on peut dégager quelques traits généraux et quelques analogies très suggestives avec le cas divisoriel, qui nous ont paru valoir d'être détaillées. C'est ainsi que la vocation de cet article est en partie pédagogique, dans la mesure où il permet d'illustrer quelques phénomènes à la fois typiques et nouveaux qui apparaissent lorsque l'on passe des variétés (schémas) aux champs. Comme

souvent dans ce domaine, il s'agit de « prendre les automorphismes au sérieux ». Nous n'avons donc pas recherché une généralité maximale, ni même forcément l'originalité, privilégiant la lisibilité et le caractère suggestif des énoncés et des preuves tout en minimisant les prérequis.

La première section est consacrée à quelques propriétés spécifiques des champs de Deligne–Mumford, nous nous intéressons en particulier au champ d'inertie associé à un champ algébrique, y compris d'ailleurs en le ou les points génériques de celui-ci. Ces champs d'inertie déterminent une stratification dont les strates non génériques constituent le parallèle à un diviseur à croisements normaux, en particulier celui qui est associé à une compactification lisse d'un schéma. Cependant les strates (de profondeur 1) de cette stratification sont de dimensions quelconques et la situation est beaucoup moins bien comprise que pour les diviseurs. En particulier nous y définissons la notion de *champ inertiellement réduit*, c'est un champ de Deligne–Mumford tel que le groupe des automorphismes aux points génériques des composantes irréductibles est trivial (cf. définition 1.12), la *réduction inertielle* d'un champ de Deligne–Mumford et démontrons que pour tout champ de Deligne–Mumford séparé géométriquement unibranche $\mathcal{X}$ tel que les cardinaux des groupes d'automorphismes des points génériques des composantes de $\mathcal{X}$ sont premiers à la caractéristique du corps de base, il existe un morphisme $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ où $\mathcal{X}'$ est un champ inertiellement réduit, ayant même espace des modules que $\mathcal{X}$ (cf. proposition 1.13).

La deuxième section du texte rappelle quelques éléments sur les groupes fondamentaux des champs algébriques, dont l'étude n'a commencé que récemment, et précise (au paragraphe 2.3) les propriétés générales que l'on peut attendre de l'action arithmétique galoisienne attachée à la situation. Dans la troisième section nous exposons, de plusieurs points de vue, y compris analytiques, quelques traits saillants des champs de modules des courbes algébriques, qui constituent la motivation et peut-être potentiellement le champ d'application le plus évident de la présente étude.

C'est pourquoi la quatrième et dernière section est consacrée explicitement à ce cas. L'action du groupe de Galois sur l'inertie champêtre d'un point de $\mathcal{M}$ s'identifie alors à son action sur le groupe des automorphismes de la courbe algébrique associée à ce point. Nous montrons en particulier que sous certaines hypothèses cette action est donnée par le caractère cyclotomique (cf. proposition 4.7). On trouvera dans ce cas particulier important des espaces de modules de courbes des résultats similaires dans les articles de Collas et Maugeais (cf. [10, 11]).

Enfin dans l'Appendice nous montrons comment la stratification inertielle peut se lire aussi sur l'espace des modules grossiers attaché à un champ de

Deligne–Mumford, via la notion d'inertie singulière (voir l'introduction de l'Appendice pour davantage de détails).

*Remerciements.* — C'est pour nous un plaisir de remercier ici chaleureusement le rapporteur de ce texte, tant pour ses remarques mathématiques toujours pertinentes que pour son examen très soigneux du texte et les nombreuses corrections orthographiques et typographiques.

## 1. Quelques propriétés géométriques des champs de Deligne–Mumford

### 1.1. Champ d'inertie et stratification

Suivant essentiellement la présentation de [25], nous nous donnons un schéma de base $S$, et considérons la catégorie $\mathit{Aff}/S$ des schémas affines sur $S$, munie de la topologie *étale*. Nous supposerons toujours que le schéma $S$ est suffisamment régulier, c'est-à-dire quasi-compact et essentiellement de type fini sur un anneau excellent. Nous considérons aussi les catégories $Sch/S$ et $Es/S$ respectivement des schémas et des espaces algébriques sur $S$. Un *$S$-champ* est un groupoïde $a\colon \mathcal{X} \to (\mathit{Aff}/S)$ au-dessus de $S$ qui vérifie les deux propriétés suivantes : le préfaisceau des isomorphismes entre deux objets $x$ et $y$ de $\mathcal{X}(U)$ est un faisceau pour la topologie étale sur $(\mathit{Aff}/U)$ noté $\mathrm{Isom}_{\mathcal{X}}(x, y)$, et toute donnée de descente est effective. Les $S$-champs forment une 2-catégorie, les espaces algébriques forment une sous-catégorie pleine de la 1-catégorie associée. Nous renvoyons à [25] ou à [41] pour les propriétés de cette catégorie et des introductions plus ou moins détaillées à ces objets.

Un champ *algébrique* est un champ quasi-séparé $\mathcal{X}$, c'est-à-dire tel que la diagonale $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est représentable, séparée et quasi-compacte, et qui admet un atlas lisse, c'est-à-dire tel qu'il existe un morphisme de $S$-champs $X \xrightarrow{p} \mathcal{X}$ surjectif et lisse où $X$ est un $S$-espace algébrique. Si on peut trouver un atlas étale, *i.e.* si le morphisme $p$ est étale, on dit que $\mathcal{X}$ un $S$-champ de Deligne–Mumford. Si Normde plus le morphisme diagonal est propre nous dirons que le champ $\mathcal{X}$ est séparé. Dans la suite, sauf mention contraire, tous les champs considérés seront des $S$-champs algébriques, ou 1-champs d'Artin sur $S$, localement de type fini sur un schéma noethérien $S$.

Nous associons à un champ $\mathcal{X}$ son *champ d'inertie* $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \mathcal{X}$ où les morphismes sont donnés par la diagonale $\Delta$. Autrement dit nous avons

le carré (2-)cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{X} \times \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Par définition le champ d'inertie est lié au faisceau des isomorphismes $\mathrm{Isom}_{\mathcal{X}}$ du champ $\mathcal{X}$. Plus précisément pour tout $U \in (\mathit{Aff}/S)$, un $U$-point de $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire un objet de la catégorie $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(U)$ est la donnée d'un $U$-point $u$ de $\mathcal{X}$ et d'une section au-dessus de $U$ du faisceau en groupes $\mathrm{Aut}(u) := \mathrm{Isom}_{\mathcal{X}}(u, u)$. En particulier si $x$ est un $k$-point de $\mathcal{X}$ où $k$ est un corps, $\mathrm{Aut}(x)$ possède une structure naturelle de groupe algébrique sur $k$. Si $x$ est un point géométrique, *i.e.* si le corps $k$ est algébriquement clos, et si le champ $\mathcal{X}$ est de Deligne–Mumford, nous pouvons identifier ce groupe à un groupe fini que nous appelons le *groupe d'inertie* de $\mathcal{X}$ au point $x$.

À tout champ $\mathcal{X}$ nous pouvons aussi associer un $S$-espace en groupoïdes de la manière suivante. Si $p : X \to \mathcal{X}$ est un atlas pour $\mathcal{X}$, celui-ci est isomorphe au champ quotient de l'espace en groupoïdes $(s, b)\colon R \rightrightarrows X$, avec $R := X \times_{\mathcal{X}} X$ ; $s$ et $b$ sont les deux projections. Réciproquement, si nous nous donnons un tel espace en groupoïdes $(s, b)\colon X_1 \rightrightarrows X_0$ où $X_0$ et $X_1$ sont des $S$-schémas (ou même des espaces algébriques), $s$ et $b$ sont lisses, et le morphisme $X_1 \to X_0 \times_S X_0$ est séparé et quasicompact, nous pouvons définir le champ quotient $\mathcal{X} = [X_0/X_1]$. Le morphisme canonique $p\colon X_0 \to \mathcal{X}$ fournit un atlas pour $\mathcal{X}$ et $X_1$ s'identifie au produit fibré $X_0 \times_{\mathcal{X}} X_0$ défini à partir de $p$.

L'espace en groupoïdes $(s, b)\colon R \rightrightarrows X$ associé au champ $\mathcal{X}$ permet de définir un espace en groupes $\omega\colon S_X \to X$ par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} S_X \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & R \arrow[d, "(s,b)"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

Cet espace en groupes, appelé l'*espace en groupes d'inertie* est relié au champ d'inertie par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} S_X \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "p"] & \mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{X}$ est un champ et si $M$ est un espace algébrique, nous dirons qu'un morphisme $\pi\colon \mathcal{X} \to M$ réalise $M$ comme *espace des modules* de $\mathcal{X}$ si $\pi$ est

universel pour les morphismes de $\mathcal{X}$ vers les espaces algébriques et induit une bijection entre l'ensemble des points géométriques de $\mathcal{X}$ et celui de $M$.

Les premiers exemples de champs algébriques, et essentiellement les plus importants, sont les champs quotients. Si $X$ est un espace algébrique et si $G$ est un $X$-espace en groupes agissant à droite, nous pouvons définir le champ $[X/G]$ qui est le *champ classifiant* de $G/X$ de [25, (2.4.2)]. En particulier si l'espace en groupes $G$ est fini constant le champ $[X/G]$ est un champ de Deligne–Mumford, et réciproquement tout champ de Deligne–Mumford est localement de cette forme. Plus précisément nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.1 ([1, Lemma 2.2.3]). — *Soit $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford noethérien séparé et $\pi : \mathcal{X} \to M$ son espace des modules. Alors localement pour la topologie étale sur $M$, le champ $\mathcal{X}$ est isomorphe à un champ quotient, c'est-à-dire il existe une application étale $N \to M$, un schéma $Y$ et un faisceau localement constant de groupes finis $G$ opérant sur $Y$ tels que le champ $\mathcal{Y} = N \times_M \mathcal{X}$ soit isomorphe au champ quotient $[Y/G]$.*

Nous voudrions maintenant définir une stratification d'un champ de Deligne–Mumford séparé $\mathcal{X}$ déterminée par les groupes d'automorphismes de ses points. Pour cela nous avons besoin d'un lemme général sur les schémas en groupes. Soit $f\colon G \longrightarrow T$ un schéma en groupes fini ; pour tout point $t$ de $T$, on définit le groupe fini $G(t) = G(\Omega)$ où $\bar{t} : \Omega \to T$ est un point géométrique au-dessus de $t$. Le groupe $G(t)$ est bien défini, c'est-à-dire ne dépend pas du point géométrique $\bar{t}$ choisi. On a alors classiquement l'énoncé suivant :

Lemme 1.2. — *Soit $f\colon G \longrightarrow T$ un schéma en groupes fini sur $T = \mathrm{Spec}(V)$, où $V$ est un anneau de valuation discrète, et soient $\eta$ et $s$ respectivement les points générique et fermé de $T$. Alors il existe un morphisme naturel de spécialisation $\phi\colon G(\eta) \to G(s)$. De plus, si la caractéristique du corps résiduel $k$ de $V$ ne divise par l'ordre du groupe $G(s)$, le morphisme $\phi$ est injectif ; c'est un isomorphisme si et seulement si le morphisme structural $f$ est en outre plat.*

Un *point* $x$ d'un champ algébrique $\mathcal{X}$ est défini par une classe d'équivalence de morphismes $x : \mathrm{Spec}(K) \to \mathcal{X}$ où $K$ est un corps (cf. [25, chapitre 5]). La *factorisation canonique* du morphisme défini par $x$ en surjection et injection $\mathrm{Spec}(K) \twoheadrightarrow \mathcal{G}_x \hookrightarrow \mathcal{X}$ permet de définir la *gerbe résiduelle* $\mathcal{G}_x$ du point $x$ comme le sous-champ de $\mathcal{X}$ image de ce morphisme ([25, chapitre 11]) ; c'est une gerbe sur son espace des modules qui est égal au spectre d'un corps $\kappa(x)$. Elle est indépendante du représentant $x$ choisi. Si $\bar{\kappa}$ est une clôture séparable de $\kappa(x)$, on dispose ainsi d'un point géométrique $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{\kappa}) \to \mathcal{X}$ qui est un représentant de $x$ et on notera souvent $\mathrm{Aut}(x)$ le

groupe fini $\mathrm{Aut}(\bar{x})$, autrement dit on définit les automorphismes de $x$ comme ceux du point géométrique associé.

*Dans la suite de ce paragraphe $\mathcal{X}$ sera supposé de Deligne–Mumford localement noethérien et séparé.* En particulier tout point de $\mathcal{X}$ est alors algébrique au sens de [25, chapitre 11, théorème 11.3], nous supposerons aussi que nous sommes dans la situation *modérée* ou même *première à $p$* : les caractéristiques des corps résiduels de la base $S$ sont premières aux ordres des groupes considérés.

Pour tout groupe fini $H$ on définit $\mathcal{X}(H)$ tout d'abord ensemblistement, comme l'ensemble des points $\xi$ dont le groupe des automorphismes contient un sous-groupe isomorphe à $H$. C'est donc l'ensemble des $\xi$ tels qu'il existe un homomorphisme injectif $j : H \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$. On a alors :

Proposition 1.3. — *Avec les hypothèses pécédentes et pour tout groupe fini $H$, $\mathcal{X}(H)$ est un sous-espace fermé de l'espace topologique sous-jacent à $\mathcal{X}$. On munit alors $\mathcal{X}(H)$ de la structure de sous-champ fermé réduit de $\mathcal{X}$.*

*Démonstration.* — Soit $p : X \to \mathcal{X}$ un atlas du champ $\mathcal{X}$ et soit $(s, b)\colon R \rightrightarrows X$ l'espace en groupoïdes associé. Comme le champ $\mathcal{X}$ est séparé, le morphisme $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est propre, par conséquent le schéma en groupes d'inertie $\omega\colon S_X \to X$ obtenu par changement de base est fini. Pour tout point $x$ de $\mathcal{X}$ de corps résiduel $\kappa(x)$ nous pouvons trouver un représentant géométrique $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(\bar{\kappa}) = \mathrm{Spec}(\overline{\kappa(x)}) \to \mathcal{X}$ et un point géométrique $\tilde{x}\colon \mathrm{Spec}(\bar{\kappa}) \to \mathcal{X}$ qui le relève. Alors le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(x)$ est isomorphe au groupe $S_{\tilde{x}}$, fibre du morphisme $\omega\colon S_X \to X$ au-dessus de $\tilde{x}$, que l'on peut voir comme un $\bar{\kappa}$-groupe algébrique.

Si un point $\xi$ du champ $\mathcal{X}$ est une spécialisation d'un point $\zeta$, nous pouvons trouver des relèvements $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ respectivement de $\xi$ et $\zeta$ tels que $\tilde{x}$ est une spécialisation de $\tilde{y}$. Le lemme 1.2 fournit une injection naturelle de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\zeta)$ dans $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$, ce qui assure que $\mathcal{X}(H)$ est stable par spécialisation. D'autre part, il est facile de voir, en utilisant le théorème de platitude générique ([20, (6.9)]) comme au début de la preuve du théorème 11.5 de [25], que $\mathcal{X}(H)$ est constructible. Étant constructible et stable par spécialisation, il est fermé — mais bien entendu éventuellement vide. □

Pour tout $H' \supset H$, c'est-à-dire pour tout groupe fini $H'$ tel qu'il existe un morphisme injectif de $H$ dans $H'$, $\mathcal{X}(H')$ est un sous-champ fermé de $\mathcal{X}(H)$ et l'ensemble $\mathcal{X}^0(H)$ des points de $\mathcal{X}$ dont le groupe des automorphismes est isomorphe au groupe $H$, soit $\mathcal{X}^0(H) = \mathcal{X}(H) \setminus \bigcup_{H' \supsetneq H} \mathcal{X}(H')$, est un sous-champ localement fermé de $\mathcal{X}$.

*Remarque 1.4.* — Si $\overline{\mathcal{Y}}_\alpha$ est une composante irréductible de $\mathcal{X}(H)$, on peut considérer les sous-champs localement fermés réduits $\mathcal{Y}_\alpha = \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \cap \mathcal{X}^0(H)$

et si $\mathcal{Y}_\alpha$ est non vide, l'unique point générique $\zeta_\alpha$ de $\overline{\mathcal{Y}}_\alpha$ appartient à $\mathcal{Y}_\alpha$ ; de plus $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}_\alpha}(\zeta_\alpha) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\zeta_\alpha) \simeq H$. Les sous-champs localement fermés $\mathcal{Y}_\alpha$ définis précédemment, pour $\mathcal{Y}_\alpha \neq \emptyset$, définissent une stratification du champ $\mathcal{X}$ telle que tous les points appartenant à une même strate $\mathcal{Y}_\alpha$ ont des groupes d'automorphismes isomorphes. Nous retrouvons ainsi, dans le cas particulier d'un champ de Deligne–Mumford séparé, la stratification donnée par le théorème 11.5 de [25]. Pour le vérifier il reste à montrer que chacune des strates $\mathcal{Y}_\alpha$ définies précédemment est une gerbe plate au-dessus de son espace des modules. D'après [25, corollaire 10.8], il suffit de vérifier que le morphisme $\sigma : \mathcal{I}_{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ est plat, ce qui est conséquence du résultat suivant :

Proposition 1.5. — *Soit $\mathcal{Y}$ un champ de Deligne–Mumford séparé connexe, on suppose que les groupes d'automorphismes des objets classifiés par $\mathcal{Y}$ ont des ordres premiers aux caractéristiques résiduelles, alors $\mathcal{Y}$ est une gerbe fidèlement plate sur son espace des modules si et seulement si tous les points ont des groupes d'automorphismes isomorphes.*

*Démonstration.* — Le morphisme $\sigma\colon \mathcal{I}_{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ est plat si et seulement si le morphisme $\omega : S_Y \to Y$ est plat, où $q : Y \to \mathcal{Y}$ est une présentation de $\mathcal{Y}$ ; d'après le lemme 1.2 cette condition est justement équivalente au fait que tous les groupes $S_Y(\tilde{y}) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(\zeta)$ soient isomorphes. □

Comme $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne–Mumford séparé, le morphisme $\sigma\colon \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ est fini et non ramifié ; autrement dit ce morphisme est plat si et seulement si c'est un revêtement étale.

## 1.2. Réduction inertielle

Nous aimerions à présent définir une opération de *réduction inertielle* ou *rigidification* qui consiste dans le cas d'un champ de Deligne–Mumford irréductible à « tuer » les automorphismes au point générique. Cette opération est intimement liée à la suite *décomposition-inertie* dans la théorie usuelle de la ramification (cf. par ex. [39]).

Soit $\mathcal{X}$ un champ algébrique séparé muni d'un atlas étale $p\colon X \to \mathcal{X}$ ; l'espace en groupoïdes $R$ associé est défini par deux morphismes $s : R \to X$ (source) et $b : R \to X$ (but), une origine $\varepsilon : X \to R$, un inverse $i : R \to R$ et une multiplication $m : R \times_{s,X,b} R \to R$ avec les propriétés habituelles. Ces morphismes induisent sur l'espace en groupes d'inertie fini $\omega\colon S_X \to X$ les morphismes $\tilde{\varepsilon}$ (origine), $\tilde{\iota}$ (inverse) et $\tilde{m}$ (multiplication). Soit maintenant $w\colon G_X \to S_X$ un sous-schéma en groupes de $S_X$ ; on notera encore $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\iota}$ et $\tilde{m}$ les morphismes de $G_X$ induits par ceux de $S_X$, et $t = \omega \circ w\colon G_X \to X$.

Définissons alors l'espace $T$ comme le produit cartésien :

$$\begin{tikzcd} G_X \times_{t,X,b} R = T \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\bar{q}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & R \arrow[d, "b"] \\ G_X \arrow[r, "t"] & X \end{tikzcd}$$

Le schéma en groupes $G_X$, vu comme sous-espace en groupes de l'espace en groupoïdes $R$, est dit *normal* dans $R$ si le morphisme de conjugaison $c$ de $T = G_X \times_{t,X,b} R$ dans $R$ se factorise à travers $u = v \circ w \colon G_X \to R$. Ou encore, $G_X$ est normal s'il existe $d : T \to G_X$ au-dessus de $X$ ($t \circ d = t \circ \bar{q} = b \circ \bar{p}$) qui fasse commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} T = G_X \times_{t,X,b} R \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & R \times_{s,X,b} R \times_{s,X,b} R \arrow[d, "m"'] \\ G_X \arrow[r, "u"] & R \end{tikzcd}$$

où l'on note toujours $m$ le composé $m \circ (m \times id_R) = m \circ (id_R \times m)$, et $g$ désigne le morphisme $(i \circ \bar{p}, u \circ \bar{q}, \bar{p})$, d'où $c = m \circ g$.

Si $x$ et $y$ sont deux sections de $\mathcal{X}(U)$ au-dessus d'un schéma $U$ qui se relèvent respectivement en $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sections de $X(U)$ — ce qui est toujours possible quitte à passer à un recouvrement de $U$ — les isomorphismes entre $x$ et $y$ sont donnés par le changement de base :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Isom}_{\mathcal{X}}(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d, "(s,b)"] \\ U \arrow[r, "(\tilde{x},\tilde{y})"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Par conséquent un sous-espace en groupes normal $G_X$ de $R$ peut aussi être considéré comme un schéma en groupe normal dans les faisceaux $\mathrm{Isom}_{\mathcal{X}}(x,y)$, tels que définis par exemple dans [35] ; on en déduit alors le résultat suivant :

Proposition 1.6 ([35, Theorem 5.1]). — *Soient $\mathcal{X}$ un champ algébrique et $t \colon G_X \to X$ un sous-espace en groupes normal et plat de l'espace en groupoïdes $R$ associé à une présentation $p : X \to \mathcal{X}$ de $\mathcal{X} = [X/R]$. Alors il existe un champ algébrique $\mathcal{X}'$ et un morphisme surjectif de présentation finie $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, qui induit la suite exacte d'espaces en groupes :*

$$1 \longrightarrow G_X \longrightarrow S_X \longrightarrow S'_X \longrightarrow 1,$$

*où $\omega' : S'_X \to X$ est l'espace en groupes d'inertie du champ $\mathcal{X}'$.*

*De plus si le champ $\mathcal{X}$ est de Deligne–Mumford séparé il en est de même du champ $\mathcal{X}'$, et le morphisme $\pi$ induit un isomorphisme entre l'espace des modules $M$ de $\mathcal{X}$ et l'espace des modules $M'$ de $\mathcal{X}'$.*

On notera que le morphisme $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ n'est *pas* représentable ; il est cependant lisse et même étale si $\mathcal{X}$ est de Deligne–Mumford.

Corollaire 1.7. — *On reprend les hypothèses de la proposition précédente avec $\mathcal{X}$ champ de Deligne–Mumford. Soient $x$ un point géométrique de $\mathcal{X}$, $y$ un point de $X$ au-dessus de $x$ et soit $G$ le groupe fini associé à la fibre en $y$ de l'espace en groupes $G_X$. Alors le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}'}(\pi(x))$ de $\pi(x)$ dans $\mathcal{X}'$ est égal au quotient $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(x)/G$ du groupe des automorphismes de $x$ dans $\mathcal{X}$ par le groupe fini $G$.*

La construction qui précède est naturelle, c'est-à-dire fonctorielle. Elle permet par exemple « d'habiller » un champ, autrement dit de lui *ajouter* des automorphismes par changement de base. De manière précise, on a l'énoncé suivant :

Proposition 1.8. — *Soient $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford séparé et $G_X$ un espace en groupes fini et plat sur un atlas $X$ de $\mathcal{X}$ ; on suppose $G_X$ normal dans l'espace en groupoïdes $R$, et soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ le morphisme de champs associé.*

*Alors pour tout morphisme représentable $f' : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$, si $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{Y}'$ et $Y = X \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{Y}'$ sont respectivement le champ et l'espace algébrique obtenus par changement de base, le champ $\mathcal{Y}$ et l'espace en groupes $G_X \times_X Y$, fini et plat sur $Y$, vérifient les hypothèses du théorème et le morphisme de champs associé est le morphisme naturel $\pi' : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$.*

*Démonstration.* — Les données de l'énoncé fournissent le diagramme commutatif suivant, formé de carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{Y}' \arrow[r, "f'"] & \mathcal{X}'
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi des présentations $p' = \pi \circ p$ de $X$ et $q' = \pi' \circ q$ de $Y$, ainsi qu'un morphisme représentable $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ (puisque $f'$ l'est par hypothèse). Les morphismes $f$ et $f'$ étant séparés, il leur correspond des immersions fermées $S_Y \to S_X \times_X Y$ et $S'_Y \to S'_X \times_X Y$ d'espaces en groupes sur $X$, où $S_X$,

$S'_X$, $S_Y$ et $S'_Y$ sont les espaces en groupes d'inertie associés respectivement aux présentations $p$, $p'$, $q$ et $q'$. De la suite exacte de la proposition 1.6 on déduit le diagramme suivant, formé de suites exactes d'espaces en groupes sur $Y$ :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_Y \arrow[r] \arrow[d] & S_Y \arrow[r] \arrow[d] & S'_Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & G_X \times_X Y \arrow[r] & S_X \times_X Y \arrow[r] & S'_X \times_X Y \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{Y}$ est le produit fibré $\mathcal{X} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{Y}'$, un point géométrique $y : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{Y}$ est défini par la donnée d'un triplet $(x, y', \alpha)$, où $x : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{X}$ et $y' : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{Y}'$ sont des points géométriques ayant même image $x'$ dans $\mathcal{X}'$, et où $\alpha$ est un élément du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}'}(x')$ des automorphismes de $x'$ dans $\mathcal{X}'$. Le groupe des automorphismes de $y$ dans $\mathcal{Y}$ est donné par :

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(y) = \left\{(\beta, \gamma) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(x) \times \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}'}(y') \,\middle|\, \alpha.\pi_x(\beta) = f'_{y'}(\gamma).\alpha\right\},$$

où $\pi_x$ et $f'_{y'}$ sont les applications de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(x)$ dans $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}'}(x')$ et de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}'}(y')$ dans $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}'}(x')$ définies par $\pi$ et $f'$, tandis que $f_y \colon \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(y) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(x)$ et $\pi'_y \colon \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(y) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}'}(y')$ sont les projections $(\beta, \gamma) \mapsto \beta$ et $(\beta, \gamma) \mapsto \gamma$. L'application $f_y$ est injective car $f$ est représentable ; de la surjectivité de $\pi_x$ on tire alors celle de $\pi'_y$. De plus $(\beta, \gamma)$ appartient au noyau de $\pi'_y$ si et seulement si $\gamma = \pi_x(\beta) = id$, et par conséquent le noyau $Ker(\pi'_y)$ est isomorphe à $Ker(\pi_x) \simeq G$.

Soit alors $y$ un point géométrique de $\mathcal{Y}$, d'images $x$, $y'$ et $x'$ respectivement dans $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}'$ et $\mathcal{X}'$, $\tilde{y}$ un point géométrique de $Y$ au-dessus de $y$ et de $y'$ et notons $\tilde{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ l'image de $\tilde{y}$ dans $X$, qui est un point au-dessus de $x$ et $x'$. D'où le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (K_Y)_{\tilde{y}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{\tilde{y}}"] & (S_Y)_{\tilde{y}} \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d] & (S'_Y)_{\tilde{y}} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & (G_X \times_X Y)_{\tilde{y}} \arrow[r] & (S_X \times_X Y)_{\tilde{y}} \arrow[r] & (S'_X \times_X Y)_{\tilde{y}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où $\varpi : (S_Y)_{\tilde{y}} \to (S'_Y)_{\tilde{y}}$ correspond à $\pi'_y \colon \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(y) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}'}(y')$. Son noyau est donc isomorphe à $(G_X \times_X Y)_{\tilde{y}}$ et l'application $\alpha_{\tilde{y}}$ est un isomorphisme. On en déduit que le noyau $K_Y$ de $S_Y \longrightarrow S'_Y$ est isomorphe à l'espace en groupes plat $G_X \times_X Y$. De plus l'espace en groupoïdes associé à la présentation $q \colon Y \to \mathcal{Y}$ n'est autre quel'espace $(s_Y, b_Y) \colon R_Y \rightrightarrows Y$ obtenu par

changement de base à partir de $(s,b)\colon R \rightrightarrows X$. Par conséquent $G_X \times_X Y$ est aussi un sous-espace en groupes normal de $R_Y$ et on peut lui appliquer la proposition 1.6. On en tire un nouvel espace en groupoïdes $(s'_Y, b'_Y) : R'_Y \rightrightarrows Y$ au-dessus de $Y$, dont il est facile de voir qu'il provient de $(s', b') : R' \rightrightarrows X$ par le changement de base $F : Y \to X$. Le champ associé $[Y/R'_Y]$ coïncide avec $\mathcal{Y}'$. □

Dans la suite nous considérons $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford séparé connexe localement de type fini sur un corps $k$ ; nous supposons de plus $\mathcal{X}$ réduit et *géométriquement unibranche*. Il s'agit de propriétés locales pour la topologie lisse, et donc tout atlas $X$ de $\mathcal{X}$ est aussi réduit et géométriquement unibranche, c'est-à-dire que le complété en tout point du schéma $X \otimes \bar{k}$, obtenu à partir de $X$ par extension à une clôture algébrique $\bar{k}$ du corps $k$, est irréductible. Le champ $\mathcal{X}$ est lui-même irréductible puisque supposé connexe ; soit $\xi$ le point générique de $\mathcal{X}$, et $\xi : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{X}$ un représentant géométrique. Nous noterons $X_i$ les composantes irréductibles de $X$ et $\zeta_i$ le point générique de la composante $X_i$ ; les points $\zeta_i$ sont donc les points de $X$ au-dessus de $\xi$. Notons enfin $(S_X)_{\zeta_i}$ la fibre de $\omega$ au-dessus de $\zeta_i$ et définissons $G_X$ comme l'adhérence dans $S_X$ des $(S_X)_{\zeta_i}$. Nous notons enfin $t\colon G_X \to X$ la restriction de $\omega$ à $G_X$ ; la restriction de $t$ au-dessus de la composante connexe $X_i$ est obtenue comme adhérence de la fibre générique de la restriction de $\omega : S_X \to X$ à $X_i$.

Soit $(S_X)_\xi$ la réunion des fibres génériques $(S_X)_{\zeta_i}$, c'est-à-dire pour $\zeta_i$ appartenant à $p^{-1}(\xi)$ ; $(S_X)_\xi$ n'est autre que l'image inverse par $P\colon S_X \to \mathcal{I}_\mathcal{X}$ de la fibre $(\mathcal{I}_\mathcal{X})_\xi$ du champ en groupes $\sigma\colon \mathcal{I}_\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ au-dessus du point générique $\xi$ de $\mathcal{X}$. Nous pouvons alors définir aussi le nouveau champ en groupes $\mathcal{G}_\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ comme l'adhérence de la fibre générique $(\mathcal{I}_\mathcal{X})_\xi$ dans $\mathcal{I}_\mathcal{X}$ de sorte que, le morphisme $P$ étant ouvert, $G_X$ est bien l'image inverse $\mathcal{G}_\mathcal{X}$ par $P$. Nous supposerons enfin que nous sommes dans une situation *première à la caractéristique*, autrement dit que les ordres des groupes fibres de $\mathcal{G}_\mathcal{X}$ sont premiers à la caractéristique du corps de base $k$. Dans cette situation on a l'énoncé suivant, qui permet d'appliquer la proposition 1.6 :

Proposition 1.9. — *Le schéma en groupes $t : G_X \to X$ est un schéma en groupes fini et plat et c'est un sous-espace en groupes normal de l'espace en groupoïdes $(s,b) : R \rightrightarrows X$.*

*Démonstration.* — Pour montrer que le morphisme $t : G_X \to X$ est plat on peut se restreindre à une composante connexe de $X$, donc supposer $X$ connexe, et partant irréductible. Il suffit alors de montrer, d'après [20, IV, corollaire 15.2.3],que $t$ est universellement ouvert aux points génériques des

composantes irréductibles de chacune de ses fibres ; en effet par hypothèse $X$ est réduit et chaque fibre $(G_X)_x = t^{-1}(x)$ est également réduite car de cardinal premier à la caractéristique. D'après une variante du critère de Chevalley ([20, IV, proposition 14.5.9]), il suffit de montrer que pour tout point fermé $z$ de la fibre $t^{-1}(x)$ il existe un fermé irréductible de $t^{-1}(x)$ passant par $z$ fini et surjectif au-dessus de $X$. En fait il suffit de monter que la restriction de $t$ à toute composante irréductible $G'$ de $G_X$ est surjective, ce qui est une conséquence du lemme suivant dont nous omettrons la preuve (Suggestion : supposer $X$ et $Y$ affines).

Lemme 1.10. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme fini, avec $X$ un schéma intègre de point générique $\xi$. Alors si $Y$ est égal à l'adhérence de la fibre générique $Y_\xi = f^{-1}(\xi)$, la restriction de $f$ à toute composante irréductible de $Y$ est surjective.*

Ce lemme est nécessaire pour assurer la platitude sur une base plus générale qu'un anneau de valuation, qui était le cas considéré plus haut. On remarquera aussi qu'il suffit de supposer $f$ quasifini puis d'appliquer la factorisation donnée par le Main Theorem de Zariski.

Il reste à montrer que $G_X$ est un sous-schéma en groupes *normal* de $R$. Pour ce faire, notons $\tilde{c}$ le morphisme conjugaison de $\tilde{T} = S_X \times_{\omega,X,b} R$ dans $R$ défini par $\tilde{c} = m \circ (i \circ \bar{p}, v \circ \bar{q}, \bar{p})$, avec les notations comme ci-dessus (voir au début de ce paragraphe) et notons encore $c$ la restriction de $\tilde{c}$ à $T = G_X \times_{t,X,b} R$. Comme $S_X$ est normal dans $R$, le morphisme $\tilde{c}$ se factorise par $v : S_X \to R$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{d} : \tilde{T} \to S_X$ tel que $\tilde{c} = \tilde{d} \circ v$, et il reste à montrer que la restriction $d$ de $\tilde{d}$ à $T$ se factorise par $w : G_X \to S_X$.

Montrons d'abord que tout point $r$ de $R$ dont l'image par le morphisme source est le point générique $\zeta_i$ d'une composante $X_i$ de $X$ a pour image par le morphisme but le point générique $\zeta_j$ d'une composante $X_j$. Pour cela nous allons associer à un élément $r$ de $R$ un morphisme de $X$ dans lui-même, défini localement pour la topologie étale, qui envoie $s(r)$ sur $b(r)$. Si le groupoïde $(s, b) : R \rightrightarrows X$ correspond à l'action d'un groupe $H$ sur $X$, et si $r = (h, x) \in R \simeq H \times X$, alors $s(r) = x$ et $b(r) = h.x$ ; le morphisme cherché correspond à l'action de $h$ sur $X$.

Soit $s : R \to X$ un morphisme étale quelconque et $r : \mathrm{Spec}(\Omega) \to R$ un point géométrique de $R$ d'image $x = s \circ r : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$. Il existe alors un voisinage étale $\lambda\colon U \to X$ de $x$ dans $X$ tel que $s_U : R_U = R \times_X U \to U$ admette une section $\sigma$ au voisinage de $x$ et de $r$. Plus précisément nous avons

le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & R_U \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "s_U"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & R \arrow[d, "s"] \\
\mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[ur] \arrow[r, "y"] \arrow[urr, bend left, "r"] \arrow[drr, bend right, "x"'] & U \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[r, "\lambda"] & X
\end{tikzcd}$$

et on peut supposer que le morphisme $\sigma$ est ouvert. Soit maintenant $(s, b) : R \rightrightarrows X$ un groupoïde étale, et soit $r : \mathrm{Spec}(\Omega) \to R$ un point géométrique de $R$, d'image $x$ dans $X$. On définit $\lambda' : U \to X$ par $\lambda' = b \circ \mu \circ \sigma$. En particulier $\lambda(y) = x = s(r)$ et $\lambda'(y) = b \circ \mu \circ \sigma(y) = b(r)$.

Si maintenant $X$ est géométriquement unibranche et $x$ est le point générique $\zeta_i$ d'une composante $X_i$ de $X$, alors $y$ est le point générique d'une composante irréductible de $U$, et comme le morphisme $\lambda'$ est ouvert, $\lambda'(y)$ est encore égal au point générique $\zeta_j$ d'une composante $X_j$ de $X$. Autrement dit si $s(r) \in p^{-1}(\xi)$, alors $b(s) \in p^{-1}(\xi)$, et réciproquement.

Le reste suit formellement en contemplant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
T = G_X \times_{t,X,b} R \arrow[r, "\bar{w}"] \arrow[rr, bend left, "\bar{u}"] & \tilde{T} = S_X \times_{\omega,X,b} R \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d, "\tilde{d}"] \arrow[dd, bend left, "\tilde{\omega}"] & R \times_{s,X,b} R \\
G_X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "t"] & S_X \arrow[d, "\omega"] & \\
X \arrow[r, "id_X"] & X &
\end{tikzcd}$$

qui n'est pas nécessairement commutatif car $\tilde{\omega} \neq \omega \circ \tilde{d}$. En particulier pour un point $x$ de $X$, l'image $\tilde{d}((\tilde{T})_x)$ de la fibre de $\tilde{T}$ au-dessus de $x$ n'est pas incluse dans la fibre $(S_X)_x$ de $S_X$ au-dessus du même point $x$.

Comme précédemment notons $(\tilde{T})_\xi$ et $R_\xi$, la réunion des fibres $(\tilde{T})_{\zeta_i}$ de $\tilde{T}$ et des fibres $R_{\zeta_i}$ de $R$, au-dessus des points génériques des différentes composantes connexes de $X$. D'après le résultat précédent, on a l'inclusion $\tilde{d}((\tilde{T})_\xi) \subset (S_X)_\xi$, et comme $\tilde{d}$ est continue on en déduit l'inclusion $\tilde{d}(\overline{(\tilde{T})_\xi}) \subset G_X$, où $\overline{(\tilde{T})_\xi}$ est l'adhérence de la fibre $(\tilde{T})_\xi$ dans $\tilde{T}$. La fibre $(\tilde{T})_\xi$ est égale à $(S_X)_\xi \times R_\xi$ et comme $R$ est plat sur $X$, l'adhérence $\overline{(\tilde{T})_\xi}$ est égale à $\overline{(S_X)_\xi} \times R$,

c'est à dire à $T = G_X \times_{t,X,b} R$. Par conséquent le morphisme $\tilde{d}$ se factorise par $G_X$ : il existe un morphisme $d\colon T \to G_X$ vérifiant $\tilde{d} \circ \bar{w} = w \circ d$, d'où $u \circ d = c$. $\square$

*Remarque 1.11.* — Le morphisme $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ permet de définir un morphisme $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{I}_{\mathcal{X}'} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{X}$, où $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{I}_{\mathcal{X}'}$ sont les champs en groupes d'inertie respectifs de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$. On en tire alors la suite exacte suivante de champs en groupes sur $\mathcal{X}$ :

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{X}'} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{X} \longrightarrow 1,$$

où $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ est le champ en groupes défini précédemment comme l'adhérence de la fibre $(\mathcal{I}_{\mathcal{X}})_{\xi}$ au-dessus du point générique $\xi$ de $\mathcal{X}$. Pour s'en assurer il suffit de noter qu'après changement de base par le morphisme étale surjectif $p : X \to \mathcal{X}$, on retrouve la suite exacte d'espaces en groupes sur $X$ :

$$1 \longrightarrow G_X \longrightarrow S_X \longrightarrow S'_X \longrightarrow 1.$$

Ce qui précède suggère la définition suivante :

Définition 1.12. — *Soit $\mathcal{X}$ un champ algébrique, on dira que $\mathcal{X}$ est* inertiellement réduit *ou* génériquement schématique *si les groupes des automorphismes de $\mathcal{X}$ aux points génériques $\xi_j$ de chacune de ses composantes irréductibles $\mathcal{X}_j$ sont triviaux :* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi_j) = (1)$.

Dans ce langage, nous avons donc montré :

Proposition 1.13. — *Soit $\mathcal{X}/k$ un champ de Deligne–Mumford séparé réduit et géométriquement unibranche sur un corps $k$ ; on suppose de plus que les cardinaux des groupes d'automorphismes des points génériques des composantes de $\mathcal{X}$ sont premiers à la caractéristique du corps $k$.*

*Alors il existe un morphisme $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ où $\mathcal{X}'$ est un champ inertiellement réduit, ayant même espace des modules que $\mathcal{X}$ ; en particulier les espaces topologiques associés à $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont homéomorphes. Ce champ est unique à isomorphisme près ; il sera appelé* réduction inertielle *de $\mathcal{X}$ et noté $\mathcal{X}_{(red)}$.*

*Remarque 1.14.* — Dans le cas où le champ de Deligne–Mumford $\mathcal{X}$ est une gerbe plate sur l'espace des modules $M$, le champ $\mathcal{X}_{(red)}$ obtenu n'est autre que l'espace des modules associé.

## 2. Groupe fondamental, groupes de décomposition et d'inertie

### 2.1. Groupe fondamental, inertie divisorielle, inertie champêtre

La théorie du groupe fondamental d'un champ de Deligne–Mumford a été introduite de deux manières différentes, soit à partir des *systèmes locaux* ([42, 43]), soit à partir des revêtements étales ([32]). Ces deux approches sont équivalentes (cf. [43, §3]) et nous utiliserons celle développée dans [32] qui est plus immédiatement adaptée à cette étude. *Dans la suite de ce paragraphe tous les champs seront supposés de Deligne–Mumford localement de type fini sur $S$*, et dans ce cadre la théorie du groupe fondamental est largement calquée sur la théorie qui s'applique aux schémas, développée dans [22].

Soit $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford, on définit la catégorie $(Et)/\mathcal{X}$ des revêtements étales de $\mathcal{X}$ de la manière suivante.

- Les objets sont donnés par :

$$\mathrm{Obj}\big((Et)/\mathcal{X}\big) = \big\{(\mathcal{Y}, f) \,\big|\, f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \text{ est un revêtement étale de } \mathcal{X}\big\};$$

  où un *revêtement étale* est un morphisme représentable, étale et fini.
- Les morphismes sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Mor}_{(Et)/\mathcal{X}}\big((\mathcal{Y}, f), (\mathcal{Z}, g)\big)\\ &= \big\{(h, \varepsilon) \,\big|\, h\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z} \text{ 1-morphisme et } \varepsilon\colon f \Rightarrow g \circ h \text{ 2-morphisme}\big\}/\sim,\end{aligned}$$

  où l'on identifie deux couples $(h, \varepsilon)$ et $(h', \varepsilon')$ s'il existe un 2-morphisme $\gamma\colon h \Rightarrow h'$ tel que $g(\gamma) \circ \varepsilon = \varepsilon'$.

On fera attention que la définition ci-dessus fait bien de $(Et)/\mathcal{X}$ une 1-catégorie, qui est le $\pi_0$ de la 2-catégorie naturelle des revêtements étales d'un champ.

Soit $\Omega$ un corps algébriquement clos, assez grand pour que l'ensemble des points géométriques de $\mathcal{X}$ soit isomorphe à $\{\xi\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{X}\}$, c'est-à-dire s'identifie à l'ensemble des objets du groupoïde $\mathcal{X}(\Omega)$. À tout point géométrique $\xi$ de $\mathcal{X}$ on associe un *foncteur fibre* $F_\xi$ de $(Et)/\mathcal{X}$ dans $(Fin)$, la catégorie des ensembles finis, de la manière suivante.

$$\begin{aligned}&F_\xi\big((\mathcal{Y}, f)\big)\\ &\quad= \big\{(\zeta, \phi) \,\big|\, \zeta\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{Y} \text{ point géométrique et } \phi\colon \xi \Rightarrow f \circ \zeta\big\}/\sim,\end{aligned}$$

où l'on identifie les couples $(\zeta, \phi)$ et $(\zeta', \phi')$ s'il existe $\psi\colon \zeta \Rightarrow \zeta'$ tel que $f(\psi) \circ \phi = \phi'$.

On notera que, comme dans le cas schématique, l'ensemble fini $F_\xi(\mathcal{Y})$ est naturellement en bijection avec la fibre géométrique $\mathrm{Spec}(\Omega) \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$, constituée

de copies de $\mathrm{Spec}(\Omega) = (*)$, c'est-à-dire d'un nombre fini de points. Toujours comme dans le cas schématique, un revêtement $\mathcal{Y}$ est *galoisien* si $\mathrm{Aut}(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ agit transitivement sur la fibre.

Proposition 2.1 ([32, Theorem 4.2]). — *La catégorie* $(Et)/\mathcal{X}$ *des revêtement étales d'un champ algébrique pointé* $(\mathcal{X}, \xi)$ *munie du foncteur fibre* $F_\xi$ *est une* catégorie galoisienne.

Il s'agit de vérifier les axiomes (G.1) à (G.6) de ([22, exposé V]) ce qui est essentiellement formel ; nous renvoyons à [32]. La catégorie $(Et)/\mathcal{X}$, munie de son foncteur fibre, est alors équivalente à la catégorie $C(\pi)$ des ensembles finis sur lesquels opère continument un groupe profini $\pi$. On définit alors le groupe fondamental du champ $\mathcal{X}$ au point $\xi$ comme le groupe $\pi_1(\mathcal{X}, \xi) = \pi$, que l'on peut voir aussi, de manière tannakienne, comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre $F_\xi$. Plus concrètement, c'est aussi, comme dans le cas schématique, la limite inverse des groupes finis $\mathrm{Aut}(\mathcal{Y}/\mathcal{X})$ lorsque $\mathcal{Y}$ parcourt l'ensemble des revêtements galoisiens de $\mathcal{X}$.

Il est aussi possible de définir le *groupoïde fondamental* $\Pi_1(\mathcal{X})$ du champ $\mathcal{X}$ comme le groupoïde de la catégorie galoisienne $(Et)/\mathcal{X}$ ; par définition ses objets sont les points géométriques de $\mathcal{X}$, et pour deux points $\xi$ et $\xi'$ l'ensemble des morphismes $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(\mathcal{X})}(\xi, \xi')$ est l'ensemble des transformations naturelles de $F_\xi$ dans $F_{\xi'}$. Nous avons alors un morphisme naturel de groupoïdes de $\mathcal{X}(\Omega)$ dans $\Pi_1(\mathcal{X})$, qui est un isomorphisme sur les ensembles d'objets, d'où en particulier l'on déduit, pour tout point géométrique $\xi$, un morphisme de groupes

$$\omega_\xi : \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi) \to \pi_1(\mathcal{X}, \xi),$$

où nous identifions le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$ à $\mathrm{Mor}_{\mathcal{X}(\Omega)}(\xi, \xi)$ et le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{X}, \xi)$ à $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(\mathcal{X})}(\xi, \xi)$. Ce morphisme correspond à l'application $\omega_\xi \colon \pi_1^h(\mathcal{X}, \xi) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{X}, \xi)$ définie dans [32].

Le champ $\mathcal{X}$ est dit *uniformisable* au point $\xi$ si le morphisme $\omega_\xi$ est injectif, et nous renvoyons à [32, §5] pour une étude détaillée de ce morphisme. Heuristiquement le champ $\mathcal{X}$ est uniformisable au point $\xi$ s'il possède assez de revêtements étales *globaux* pour séparer les automorphismes en ce point. Il y a donc là une réelle « interaction local-global ».

Soit maintenant $\mathcal{X}$ un champ quotient de Deligne–Mumford, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{X} = [X/G]$ avec $X$ un espace algébrique connexe et $G$ un groupe fini agissant sur $X$. Par définition un tel champ quotient $\mathcal{X}$ est alors dit *globalement uniformisable*, *i.e.* il admet un revêtement étale galoisien $p : X \to \mathcal{X}$ avec $X$ un espace algébrique ; on montre qu'il est équivalent de demander que $\mathcal{X}$ soit uniformisable en tous ses points ([32, Theorem 6.2]), autrement dit il n'y a pas là d'obstruction à globaliser les informations locales. Il s'agit de

construire un revêtement étale de $\mathcal{X}$ dont *tous* les points soient schématiques (sans automorphismes). Le groupe de Galois du revêtement est $G$, et si l'on fixe un point base géométrique $x$ de $X$ d'image $\xi$ dans $\mathcal{X}$, on déduit de la suite exacte de [22, proposition 6.13] la proposition suivante (voir aussi [42, Corollary 6.4]) :

Proposition 2.2. — *Il existe une suite exacte courte naturelle :*

$$1 \to \pi_1(X, x) \to \pi_1(\mathcal{X}, \xi) \to G \to 1\,.$$

Nous pouvons comparer cette suite exacte avec celle obtenue en considérant le quotient *schématique* $Y = X/G$ (considérer au besoin $Y$ comme un espace algébrique), qui est aussi l'espace des modules du champ $\mathcal{X}$ ; on obtient en ce sens l'énoncé suivant :

Proposition 2.3 ([32, Corollary 8.3]). — *Il existe une suite exacte courte naturelle :*

$$\pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y) \to G/I \to 1\,.$$

*où $I$ est le groupe d'inertie* global*, autrement dit le sous-groupe normal de $G$ engendré par les éléments qui possèdent un point fixe (ou encore dont l'action est ramifiée).*

Nous avons mentionné déjà que le groupe fondamental est un invariant spécialement significatif dans le cas des champs de Deligne–Mumford. Illustrons cela à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 2.4. — *Soit $k$ un corps séparablement clôt, $G$ un groupe algébrique de type fini sur $k$, $\mathcal{X} = [\mathrm{Spec}(k)/G] = BG$ le champ quotient (classifiant) associé. Alors $\pi_1(\mathcal{X}) = \pi_0(G)$, le* groupe fini *des composantes connexes du groupe $G$.*

Un peu plus précisément, $\pi_1(BG) = G/G^0$ si on note $G^0$ la composante de l'identité de $G$ (ce qui exhibe $\pi_1(BG)$ comme un $k$-groupe algébrique). Pour une courte preuve, voir [32, Example 4.3] ; on se ramène tout de suite au cas connexe ($G = G^0$) et on montre qu'alors $\mathcal{X}$ n'a pas de revêtement étale non trivial, en prenant garde qu'un revêtement est défini par un morphisme *représentable.*

Le groupe fondamental ne « voit » donc, et c'est normal, que le quotient étale des stabilisateurs des points d'un champ. On notera dans ce sens que le champ précédent $[\mathrm{Spec}(k)/G]$ est de Deligne–Mumford si $G$ est un $k$-groupe algébrique fini *et* tel que sa composante connexe $G^0$ soit triviale (condition évidemment non vide seulement si la caractéristique de $k$ est $> 0$).

Avant de revenir aux automorphismes, qui nous intéressent au premier chef, ajoutons d'abord — sans preuves — quelques outils à notre boîte. La

plupart des résultats de [22] sur le groupe fondamental des schémas s'étend de façon plus ou moins formelle au cas des champs. On citera d'abord l'invariance du groupe fondamental par extension séparablement close. Plus précisément, si $K/k$ est une extension entre deux corps séparablement clos et $\mathcal{X}$ un $k$-champ connexe séparé, alors :

Proposition 2.5. — *Si $\mathcal{X}$ est* propre*, le morphisme canonique $\mathcal{X}\otimes K \to \mathcal{X}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. C'est encore vrai sans hypothèse de propreté pour le quotient du groupe fondamental premier à la caractéristique du corps $k$ (et en particulier pour le groupe fondamental tout entier si la caractéristique est nulle).*

Étant donné maintenant $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford séparé sur un corps $k$ algébriquement clos et muni d'un plongement complexe $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, on lui associe d'abord le champ $\mathcal{X} \otimes \mathbb{C}$ défini sur $\mathbb{C}$, puis l'espace analytique complexe $\mathcal{X}^{an}$ qui est une orbifold complexe, par exemple en utilisant un atlas pour le champ $\mathcal{X}$. Localement pour la topologie complexe, $\mathcal{X}^{an}$ est le quotient d'un espace affine complexe par l'action d'un groupe fini. On peut alors définir comme dans [40] la notion de revêtement non ramifié, et donc le groupe fondamental $\pi_1^{orb}(\mathcal{X}^{an})$, qui est discret, finiment engendré. D'après la proposition ci-dessus, les deux groupes (profinis) $\pi_1(\mathcal{X})$ et $\pi_1(\mathcal{X} \otimes \mathbb{C})$ sont canoniquement isomorphes et il reste à les comparer au groupe discret $\pi_1^{orb}(\mathcal{X}^{an})$. Les points bases, omis ici pour alléger les notations, se déduisent naturellement d'un point base géométrique pointant $\mathcal{X}$. La réponse, sans surprise et de type GAGA, est donnée par l'énoncé suivant :

Proposition 2.6. — *Le groupe $\pi_1(\mathcal{X}) \simeq \pi_1(\mathcal{X} \otimes \mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe au complété profini du groupe $\pi_1^{orb}(\mathcal{X}^{an})$.*

*Remarque 2.7.* — Malheureusement une preuve de la proposition 2.6 ne semble pas disponible sous forme écrite (du moins dans la littérature) mais elle est formelle à partir du cas schématique. Dans le cas propre celui-ci est traité dans [22, exposé X]. L'énoncé dans le cas non propre est « bien connu » mais paradoxalement difficile à trouver dans la littérature. Il se déduit en principe de [22, XIII.2.9], mais on se réfèrera plus volontiers à [33, §4] pour une reprise plus lisible et adaptée au cas des champs. La proposition 2.4 est elle démontrée en détail dans [42, Theorem 4.6], malheureusement non publié. En considérant le groupoïde associé au champ, elle résulte facilement du théorème d'algébrisation des revêtements étales pour les schémas ([22, XII.5.1]).

Reprenons avec $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford séparé, réduit, géométriquement unibranche et connexe, $\xi$ son point générique. Pour tout revêtement étale $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, le champ $\mathcal{Y}$ est encore géométriquement unibranche

et si $\zeta$ est le point générique d'une composante connexe de $\mathcal{Y}$, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(\zeta)$ s'injecte naturellement dans le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$. Nous pouvons donc définir la sous-catégorie pleine $(Et)_{(red)}/\mathcal{X}$ de la catégorie $(Et)/\mathcal{X}$ des revêtements étales de $\mathcal{X}$, comme la sous-catégorie dont les objets sont les revêtements étales $(\mathcal{Y}, f)$ de $\mathcal{X}$ tels que pour le point générique $\zeta$ de toute composante connexe de $\mathcal{Y}$ nous ayons l'égalité $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(\zeta) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$. Dans ce cadre on a alors :

Proposition 2.8. — *Soient $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford séparé, réduit, géométriquement unibranche et connexe, $\mathcal{X}' = \mathcal{X}_{(red)}$ sa réduction inertielle. Alors la transformation qui à tout revêtement étale $f' : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ associe le revêtement étale $f : \mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ définit une équivalence de catégories entre $(Et)/\mathcal{X}'$ et $(Et)_{(red)}/\mathcal{X}$.*

*Démonstration.* — Nous la donnons en détail, en partie par souci d'illustration. Soit $f' : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ un revêtement de la réduction inertielle $\mathcal{X}'$ et soit $f : \mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}'} \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}$ le revêtement correspondant de $\mathcal{X}$. Soit de plus $F : Y \to X$ la présentation de $\mathcal{Y}$ obtenu par changement de base à partir d'une présentation $X$ de $\mathcal{X}$. Le morphisme $\pi' : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ est défini grâce à la suite exacte d'espaces en groupes sur $Y$ :

$$1 \to G_X \times_X Y \to S_Y \to S'_Y \to 1,$$

où $S_Y$ et $S'_Y$ sont les espaces en groupes d'inertie associés respectivement aux champs $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}'$, et où $G_X \times_X Y$ est l'image sur $Y$ de l'espace en groupes $G_X$ sur $X$ défini par $G_X = \overline{(S_X)_{\tilde{\xi}}}$, avec $\tilde{\xi}$ point géométrique de $X$ au-dessus du point générique $\xi$ de $X$.

Si $\tilde{\zeta}$ est un point géométrique de $Y$ au-dessus du point générique $\zeta$ d'une composante connexe de $\mathcal{Y}$, avec $F(\tilde{\zeta}) = \tilde{\xi}$, alors nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(G_X \times_X Y)_{\tilde{\zeta}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & (S_Y)_{\tilde{\zeta}} \arrow[d] \\
(G_X)_{\tilde{\xi}} \arrow[r, hook] & (S_X)_{\tilde{\xi}}
\end{tikzcd}$$

et les isomorphismes $(G_X \times_X Y)_{\tilde{\zeta}} \simeq (G_X)_{\tilde{\xi}} \simeq (S_X)_{\tilde{\xi}}$, d'où aussi l'isomorphisme $(S_Y)_{\tilde{\zeta}} \simeq (S_X)_{\tilde{\xi}}$, c'est-à-dire $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Y}}(\zeta) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$ ; le revêtement étale $(\mathcal{Y}, f)$ est donc bien élément de $(Et)_{(red)}/\mathcal{X}$.

Réciproquement, soit $(\mathcal{Y}, f)$ un revêtement étale de $\mathcal{X}$ appartenant à $(Et)_{(red)}/\mathcal{X}$, soit $q\colon Y \to \mathcal{Y}$ une présentation de $\mathcal{Y}$ et $(s_Y, b_Y)\colon R_Y \rightrightarrows Y$

l'espace en groupoïdes sur $Y$ obtenu par changement de base :

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X R = R_Y \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, phantom, "\square"] & R \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} X = Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "f"] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

$$(s_Y, b_Y) \qquad (s, b)$$

Pour tout point géométrique $\tilde{\zeta}$ de $Y$ au-dessus du point générique $\zeta$ d'une composante connexe de $\mathcal{Y}$, la fibre en $\tilde{\zeta}$ de l'espace en groupes d'inertie $S_Y$ est isomorphe à la fibre en $\tilde{\xi} = F(\tilde{\zeta})$ de $S_X$, par conséquent à la fibre en $\tilde{\zeta}$ de l'espace en groupes $G_X \times_X Y$, où $G_X = \overline{(S_X)_{\tilde{\xi}}}$. Comme l'espace en groupes $G_X \times_X Y$ est fini et plat sur $Y$, nous en déduisons qu'il est égal à $G_Y$, espace en groupes sur $Y$ défini comme l'adhérence dans $S_Y$ des fibres génériques $(S_Y)_{\tilde{\zeta}}$. Nous pouvons alors construire comme précédemment les espaces en groupoïdes $T_Y$ sur $R_Y$ et $R'_Y$ sur $Y$, $R'_Y = R_Y/T_Y$, et la réduction inertielle $\mathcal{Y}'$ de $\mathcal{Y}$ qu'ils définissent, $\mathcal{Y}' = [Y/R'_Y]$. Nous avons encore $T_Y = T \times_X Y$ et $R'_Y = R' \times_X Y$, par conséquent il existe un morphisme $f' \colon \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}' = [X/R']$ tel que $Y = \mathcal{Y}' \times_{\mathcal{X}'} X$. Nous en tirons que $f' : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ est un revêtement étale de $\mathcal{X}'$ et que le revêtement étale initial $f$ s'en déduit par changement de base.

Pour terminer on montre facilement que si $\mathcal{Y}'_i$ et $\mathcal{Y}'_j$ sont deux revêtements étales de $\mathcal{X}'$, et si $\mathcal{Y}_i$ et $\mathcal{Y}_j$ sont les revêtements étales de $\mathcal{X}$ obtenus par changement de base, les ensembles $\mathrm{Mor}_{(Et)/\mathcal{X}'}(\mathcal{Y}'_i, \mathcal{Y}'_j)$ et $\mathrm{Mor}_{(Et)_{red}/\mathcal{X}}(\mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_j)$ sont en bijection naturelle. $\square$

De cette proposition on déduit :

Corollaire 2.9. — *Soit $\mathcal{X}$ comme ci-dessus et $G$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{X}$ en son point générique : $G = \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$. On a une suite exacte courte :*

$$G \longrightarrow \pi_1(\mathcal{X}, \xi) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{X}', \xi) \longrightarrow 1.$$

*Si de plus $\mathcal{X}$ est uniformisable au point générique $\xi$, le morphisme de gauche est injectif.*

*Démonstration.* — Comme la catégorie $(Et)/\mathcal{X}'$ des revêtements étales de $\mathcal{X}'$ est isomorphe à une sous-catégorie pleine de la catégorie $(Et)/\mathcal{X}$ des revêtements de $\mathcal{X}$, le morphisme $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ induit une surjection entre les groupes fondamentaux, dont le noyau est l'image de $G = \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(\xi)$ par l'application $\omega_\xi$.

Si d'autre part $\mathcal{X}$ est génériquement uniformisable, c'est-à-dire uniformisable au point $\xi$, nous avons vu plus haut (cf. aussi [32, §5]) que le morphisme $\omega_\xi$ est par définition injectif. $\square$

Cet énoncé est plus significatif qu'il n'y paraît peut-être à première vue et il étaye concrètrement l'analogie serrée entre la situation qui nous occupe et celles, classiques, de la théorie algébrique de la ramification (cf. [39]) ou encore de la version géométrique attachée à un diviseur à croisements (strictement) normaux (cf. [23]). En un mot la suite exacte du corollaire ci-dessus est à rapprocher de la ou des suites exactes du type inertie-décomposition. Plus précisément et dans le contexte de [23] auquel nous renvoyons pour toutes les pécisions nécessaires, soit $X$ un schéma (projectif lisse sur un corps de caractéristique nulle pour simplifier), $Y \subset X$ un diviseur lisse et irréductible de $X$. Notant $\widehat{X/Y}$ le complété formel de $X$ le long de $Y$, on a alors une suite exacte :

$$\widehat{\mathbb{Z}}(1) \longrightarrow \pi_1^Y(\widehat{X/Y}) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow 1.$$

Ici $\pi_1^Y$ est calculé en considérant les revêtements modérés du complété formel qui sont non ramifiés en dehors de $Y$. De plus le premier morphisme est injectif si et seulement si une condition très naturelle est vérifiée, qui revient à dire qu'il existe suffisamment de revêments étales (connexes) globaux de $X \backslash Y$ pour induire un indice ramification quelconque le long de $Y$. Par ailleurs la valeur 1 du twist de Tate indique que l'action galoisienne sur l'inertie divisorielle est cyclotomique, une problématique que nous retrouverons par la suite.

Ceci dit, on comprend aussi que la situation divisorielle avec la suite exacte ci-dessus est plus simple et plus universelle en principe que la situation champêtre, laquelle donne lieu à la suite exacte du corollaire 2.9. Dans le cas divisoriel l'inertie le long de $Y$ d'un revêtement est cyclique, et l'existence même d'un indice de ramification au point générique de $Y$ traduit le lemme d'Abyankhar, aussi fondamental qu'élémentaire. L'autre ingrédient, plus délicat, qui entre dans l'établissement de la suite exacte inertie-décomposition divisorielle est le théorème de propreté de la ramification. Dans le cas champêtre, le groupe d'inertie est un groupe fini *quelconque* et, pour anticiper, il n'y a pas d'universalité quant à l'action du groupe de Galois arithmétique (voir plus bas). Ajoutons qu'il pourrait être tentant de considérer le cas divisoriel comme un cas particulier du cas champêtre. Avec les notations précédentes on attache d'abord à $Y$ un groupe d'automorphismes cyclique au point générique, soit $\mathbb{Z}/N$, puis on fait croître $N$ vers l'infini avec un ordre multiplicatif sur les entiers : ce faisant on creuse en quelque sorte un trou le long de $Y$ (tout en l'habillant). Donner corps à ces images n'est cependant pas une mince affaire.

## 2.2. Cas d'un champ algébrique normal

Nous voudrions à présent définir la *normalisation* $\tilde{\mathcal{X}}$ d'un champ algébrique $\mathcal{X}$, ce problème est abordé dans [25, §16] sans que la définition de la normalisation soit donnée de manière explicite. Rappelons tout d'abord que la propriété d'être normal étant locale pour la topologie lisse, il est licite de définir un champ algébrique normal comme un champ $\mathcal{Z}$ pour lequel il existe un atlas $p\colon Z \to \mathcal{Z}$ avec $Z$ un schéma normal.

Soit alors $\mathcal{X}$ un champ algébrique donné comme le quotient de l'espace en groupoïdes $(s,t)\colon R \rightrightarrows X$ de schémas séparés réduits, de type fini sur $S$, avec $s$ et $t$ lisses de type fini.

Tout d'abord on déduit du corollaire (3.3.2) et de la proposition (6.14.1) de [20, IV] que le changement de base par un morphisme plat de type fini, à fibres géométriquement normales $f\colon R \to X$ de la normalisation $n\colon \tilde{X} \to X$ n'est autre que la normalisation $n'\colon \tilde{R} \to R$. Appliquant ce résultat aux morphismes $s$ et $t$, on obtient que le changement de base par $n\colon \tilde{X} \to X$ transporte l'espace en groupoïdes $(s,t)\colon R \rightrightarrows X$ en un espace en groupoïdes $(\tilde{s},\tilde{t})\colon \tilde{R} \rightrightarrows \tilde{X}$, où $\tilde{X}$ et $\tilde{R}$ sont donc les normalisés respectifs de $X$ et $R$.

Le champ algébrique ainsi défini, $\tilde{\mathcal{X}} = [\tilde{X}/\tilde{R}]$, est un champ normal et le morphisme naturel $\eta\colon \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ induit par $n\colon \tilde{X} \to X$ est un morphisme représentable, fini, qui est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de $\mathcal{X}$. Il est facile de voir que ce morphisme $\eta\colon \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ est défini ainsi de manière unique, et nous le nommerons *normalisation* de $\mathcal{X}$ ; nous dirons aussi que le champ $\tilde{\mathcal{X}}$ est le normalisé de $\mathcal{X}$. En utilisant le résultat connu dans le cas des schémas, on obtient facilement :

Lemme 2.10 ([25, proposition 4.13]). — *Si $\mathcal{Z}$ est un champ algébrique normal et connexe, alors il est irréductible.*

*Démonstration.* — La propriété d'être irréductible est locale ; plus précisément si $T$ est un espace topologique connexe et si $(U_i)_I$ est un recouvrement fini de $T$ par des ouverts irréductibles, alors $T$ est irréductible. En effet comme $T$ est connexe l'intersection de deux ouverts $U_i$ et $U_j$ du recouvrement est non vide, en particulier $T$ est égal à l'adhérence de chacun d'eux, $T = \overline{U_i}$, et par conséquent est irréductible.

Soit maintenant $p\colon Z \to \mathcal{Z}$ un atlas lisse du champ $\mathcal{Z}$ et soient $Z_1, \ldots, Z_r$ les composantes connexes de $Z$. Par hypothèse le schéma $Z$ est normal, par conséquent chacune des composantes $Z_i$ est irréductible. Leurs images $\mathcal{U}_i = p(Z_i)$ forment un recouvrement ouvert de $\mathcal{Z}$ par des ouverts irréductibles, et donc $\mathcal{Z}$ est lui aussi irréductible. $\square$

Proposition 2.11. — *Soit $\mathcal{Z}$ un champ de Deligne–Mumford normal connexe et soit $\xi$ un représentant géométrique du point générique de $\mathcal{Z}$. Alors le morphisme naturel*

$$\pi_1\big(\mathcal{G}_\xi, \xi\big) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{Z}, \xi)$$

*est un épimorphisme, où l'on a noté $\mathcal{G}_\xi$ la gerbe résiduelle au point $\xi$.*

*Démonstration.* — Rappelons que la gerbe résiduelle est obtenue comme l'image du morphisme $\xi$, autrement dit on a la factorisation

$$\mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{G}_\xi \hookrightarrow \mathcal{Z}\,,$$

où $\mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{G}_\xi$ est un épimorphisme de champs.

Pour montrer que le morphisme induit $\pi_1(\mathcal{G}_\xi, \xi) \to \pi_1(\mathcal{Z}, \xi)$ entre les groupes fondamentaux est surjectif il suffit de montrer que tout revêtement étale connexe $f\colon \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ dans $(Et)/\mathcal{Z}$ induit par changement de base un revêtement étale *connexe* $g\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}_\xi$ dans $(Et)/\mathcal{G}_\xi$.

Grâce au lemme précédent la démonstration est identique à celle du résultat correspondant pour les schémas normaux. En effet le revêtement de la gerbe résiduelle $g\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}_\xi$, induit par le revêtement étale $f\colon \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$, est isomorphe à la réunion des gerbes résiduelles aux différents points de $\mathcal{Z}'$ au-dessus de $\xi$, qui sont tous des points maximaux. Comme par hypothèse le champ $\mathcal{Z}'$ est connexe normal, donc irréductible, il possède un seul point générique et la fibre $\mathcal{G}'$ est aussi connexe. □

### 2.3. Action du groupe de Galois arithmétique

Si $\mathcal{X}$ est un champ algébrique défini sur un corps $k$, il se représente comme le champ quotient $[X_1/X_0]$, où $(s, b)\colon X_1 \rightrightarrows X_0$ est un espace en groupoïdes défini sur $k$. Pour toute extension $k'$ de $k$, le champ $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \otimes_k k'$ est par définition le champ quotient $[X_1'/X_0']$, où $(s', b')\colon X_1' \rightrightarrows X_0'$ est l'espace en groupoïdes défini sur $k'$ obtenu par changement de base de $k$ à $k'$. On a alors le résultat suivant, qui généralise la suite exacte courte reliant le groupe fondamental d'un schéma $X$ défini sur un corps $k$ au groupe fondamental du schéma $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ obtenu par changement de base à une clôture séparable $\bar{k}$ de $k$ ([22, exposé IX, théorème 6.1]). La démonstration est essentiellement la même que dans le cas des schémas (cf. [42, Corollary 6.6]) :

Proposition 2.12. — *Soient $\mathcal{X}$ un champ de Deligne–Mumford géométriquement connexe, quasi-compact et défini sur un corps $k$ ; soit $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \otimes_k \bar{k}$ le champ obtenu par changement de base à une clôture séparable $\bar{k}$ de $k$, et soient enfin $\bar{\xi}$ un point géométrique de $\bar{\mathcal{X}}$, $\xi$ son image dans $\mathcal{X}$. On a alors une suite exacte courte :*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\xi}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{X}, \xi) \longrightarrow G_k \longrightarrow 1,$$

*où* $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ *est le groupe de Galois de* $\bar{k}$ *sur* $k$.

On déduit formellement de cette suite exacte une action extérieure du groupe de Galois $G_k$ sur le *groupe fondamental géométrique* de $\mathcal{X}$, soit $\pi_1^{geom}(\mathcal{X}) = \pi_1(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\xi})$, c'est-à-dire un morphisme

$$G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1^{geom}(\mathcal{X}))\,,$$

où pour un groupe $G$ (ici profini) on note classiquement $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$, $\mathrm{Inn}(G)$ étant le groupe des automorphismes intérieurs de $G$ ; bien entendu $\mathrm{Inn}(G) \simeq G$ si le centre de $G$ est trivial, ce qui est souvent le cas dans les applications. Rappelons aussi que si le point géométrique $\xi\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{X}$ se factorise à travers un point rationnel $x\colon \mathrm{Spec}(k) \to \mathcal{X}$ du champ $\mathcal{X}$, ce dernier définit, par application du foncteur $\pi_1$ (et le fait que $\pi_1(\mathrm{Spec}(k)) = G_k$) un scindage de la suite exacte ci-dessus, d'où une « vraie » action du groupe de Galois $G_k$, c'est-à-dire un morphisme $G_k \to \mathrm{Aut}(\pi_1^{geom}(\mathcal{X}))$ par lequel se factorise l'action extérieure naturelle.

Dans la suite on se donne une fois pour toutes un corps $k$ dont on fixe une clôture séparable $\bar{k}$. Pour tout champ $\mathcal{Y}$ défini sur $k$ on note $\bar{\mathcal{Y}}$ le champ $\mathcal{Y} \otimes_k \bar{k}$ obtenu par extension des scalaires, et pour un point géométrique $\zeta$ de $\mathcal{Y}$, on supposera souvent fixé un point géométrique $\bar{\zeta}$ de $\bar{\mathcal{Y}}$ au-dessus de $\zeta$. On note comme ci-dessus $\pi_1^{geom}(\mathcal{Y}, \zeta) = \pi_1(\bar{\mathcal{Y}}, \bar{\zeta})$ le groupe fondamental géométrique de $\bar{\mathcal{Y}}$ au point donné $\bar{\zeta}$.

Soient maintenant $\mathcal{X}$ un champ algébrique localement noethérien et $p\colon X \to \mathcal{X}$ un atlas de $\mathcal{X}$ ; on se donne $x\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ un point géométrique du schéma (ou espace algébrique) $X$ et $\xi$ son image dans $\mathcal{X}$. De ce que $\mathcal{X}$ est localement noethérien on déduit que le point $\xi$ est algébrique (au sens de [LM]). On peut donc en choisir un représentant $\xi\colon \mathrm{Spec}(K) \to \mathcal{X}$ tel que $K$ soit une extension finie du corps résiduel $\kappa(\xi)$. On notera $\mathcal{G}_\xi$ la gerbe résiduelle en ce point, qui est une gerbe fidèlement plate sur son espace de module $\mathrm{Spec}(\kappa(\xi)) = \{\eta\}$. Le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd}
 & O(x) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Spec}(K) \arrow[ur] \arrow[r, two heads, "\xi"] & \mathcal{G}_\xi \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{X} \\
 & \mathrm{Spec}\big(\kappa(\xi)\big) &
\end{tikzcd}$$

définit un atlas $g\colon O(x) \to \mathcal{G}_\xi$ de la gerbe résiduelle, avec $O(x)$ schéma de type fini sur $\kappa(\xi)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{X}$ est (étale) *localement* un champ quotient, ce qui est toujours vrai si $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne–Mumford. On notera globalement $\mathcal{X} = [X/G]$ mais c'est là seulement un souci de simplification notationnelle puisque nous travaillons bien localement. La gerbe résiduelle est alors aussi un champ quotient de la forme $\mathcal{G}_\xi = [O(x)/G]$, et le schéma $O(x)$ est un espace homogène sous l'action du groupe $G$, non géométriquement connexe en général (cf. [25]). Pour toute extension $L/K$, la gerbe $\mathcal{G}_\xi \otimes_{\kappa(\xi)} L$ est neutre ; elle est donc isomorphe à la gerbe quotient $[\mathrm{Spec}(L)/H]$, où $H$ est le stabilisateur du point $x$. Si de plus le corps $L$ est algébriquement clos, c'est l'espace classifiant $BH$ du groupe fini $H = \mathrm{Aut}(\xi)$, et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\xi)$.

La gerbe résiduelle étant uniformisable, nous déduisons de la remarque 1.14 et du corollaire 2.9 l'énoncé suivant, avec $\mathcal{X}$ comme dans la proposition précédente (voir aussi [32, Proposition 9.5]) :

Lemme 2.13. — *Si $\mathcal{X}$ est de Deligne–Mumford on a une suite exacte courte :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\xi) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}_\xi, \xi) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\kappa(\xi)) \longrightarrow 1$$

*où* $\mathrm{Gal}(\kappa(\xi)) \simeq \pi_1(\mathrm{Spec}(\kappa(\xi)))$ *est le groupe de Galois absolu du corps résiduel* $\kappa(\xi)$.

De l'application $\mathcal{G}_\xi \to \mathcal{X}$ et de ce qui précède on retrouve en particulier, par application du foncteur $\pi_1$, l'application naturelle $\omega_\xi \colon \mathrm{Aut}(\xi) \to \pi_1(\mathcal{X}, \xi)$ définie précédément.

Soit à nouveau $\mathcal{X}$ comme dans le lemme, autrement dit de Deligne–Mumford, défini sur $k$, séparé, noethérien et géométriquement connexe. Soit $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \otimes_k \bar{k}$ le champ obtenu par changement de base à $\bar{k}$, $\bar{\xi}$ un point de $\bar{\mathcal{X}}$ et $\xi$ le point du champ $\mathcal{X}$, image de $\bar{\xi}$. On note $\mathcal{G}_\xi$ (resp. $\mathcal{G}_{\bar{\xi}}$) et $\kappa(\xi)$ (resp. $\kappa(\bar{\xi})$) la gerbe résiduelle et le corps résiduel du point $\xi$ de $\mathcal{X}$ (resp. $\bar{\xi}$ de $\bar{\mathcal{X}}$).

Pour déterminer les gerbes résiduelles $\mathcal{G}_{\bar{\xi}}$ et $\mathcal{G}_\xi$ on peut se placer sur des voisinages suffisamment petits des points géométriques $\bar{\xi}$ et $\xi$ et supposer que les champs $\bar{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{X}$ sont des gerbes plates irréductibles, d'espaces des modules respectifs $\bar{M}$ et $M$, avec $\bar{M} = M \otimes_k \bar{k}$. Les corps résiduels cherchés $\kappa(\bar{\xi})$ et $\kappa(\xi)$ sont les corps résiduels respectifs des points $\bar{\eta}$ de $\bar{M}$ et $\eta$ de $M$, et les gerbes résiduelles $\mathcal{G}_{\bar{\xi}}$ et $\mathcal{G}_\xi$ sont obtenues par changement de base :

$$\mathcal{G}_\xi = \{\eta\} \times_M \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G}_{\bar{\xi}} = \{\bar{\eta}\} \times_{\bar{M}} \bar{\mathcal{X}}.$$

Si $\bar{\kappa}$ désigne une clôture séparable de $\kappa(\xi)$, nous pouvons supposer que $\bar{k}$ et $\kappa(\bar{\xi})$ sont contenues dans $\bar{\kappa}$, et que $\kappa(\bar{\xi})$ est l'extension composée $\bar{k}.\kappa(\xi) \subset \bar{\kappa}$. En particulier $\kappa(\bar{\xi})/\kappa(\xi)$ est une extension normale dont le groupe de Galois

est isomorphe au groupe $G_{k'} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k')$ où $k' = \bar{k} \cap \kappa(\xi)$. La gerbe $\bar{\mathcal{G}}_\xi$, définie comme $\bar{\mathcal{G}}_\xi = \mathcal{G}_\xi \otimes_k \bar{k}$, est obtenue comme le produit fibré $\mathcal{G}_\xi \otimes_M \bar{M}$ ; en particulier si l'espace algébrique $M$ est suffisamment régulier l'image inverse du point $\eta$ est une union de points $\{\bar{\eta}_i\}$ et la gerbe $\bar{\mathcal{G}}_\xi$ est réunion disjointe des gerbes $\mathcal{G}_{\bar{\xi}_i}$ au-dessus de ces différents points, la composante au-dessus du point $\bar{\eta}$ étant égale à la gerbe résiduelle $\mathcal{G}_{\bar{\xi}}$. De l'égalité entre les groupes d'automorphismes, $\mathrm{Aut}(\xi) = \mathrm{Aut}(\bar{\xi})$, et du lemme précédent on tire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\bar{\xi}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1\big(\mathcal{G}_{\bar{\xi}}, \bar{\xi}\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}\big(\kappa(\bar{\xi})\big) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\xi) \arrow[r] & \pi_1\big(\mathcal{G}_\xi, \xi\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}\big(\kappa(\xi)\big) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & G_{k'} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Gal}\big(\kappa(\bar{\xi})/\kappa(\xi)\big) \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

*Remarque 2.14.* — On trouve en particulier la suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\bar{\mathcal{G}}_{\bar{\xi}}, \bar{\xi}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}_\xi, \xi) \longrightarrow G_{k'} \longrightarrow 1$$

La différence entre cette suite et celle qui figure dans la proposition 2.12, ou plus précisément la différence entre les groupes de Galois $G_k$ et $G_{k'}$ obtenus comme conoyaux, mesure le défaut de connexité de la gerbe $\bar{\mathcal{G}}_\xi$ $(= \mathcal{G}_\xi \otimes_k \bar{k})$.

Nous sommes maintenant presque en mesure de définir l'action galoisienne que nous avons en vue. Avant cela il nous faut encore préciser une notion arithmétique, celle de *corps de définition*, que nous avons à vrai dire déjà rencontrée un peu implicitement ci-dessus. Sans chercher une généralité qui serait ici inutile, considérons $\mathcal{X}/k$, un champ de Deligne–Mumford séparé localement noethérien sur un corps $k$, et $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ un sous-champ intègre, adhérence de son point générique $\xi$. Soit toujours $\kappa(\xi)$ le corps résiduel au point générique $\xi$ défini, rappelons-le, en stipulant que $\mathrm{Spec}(\kappa(\xi))$ est l'espace des modules de la gerbe résiduelle en $\xi$ :

Définition 2.15. — *Le* corps de définition $k'$ *de* $\mathcal{Z}$ *est la clôture algébrique du corps* $k$ *dans le corps résiduel* $\kappa(\xi)$ *au point générique :* $k' = \bar{k} \cap \kappa(\xi)$.

La dernière formulation est légèrement abusive en ce qu'elle suppose certains choix, mais il sont innocents. Avec nos hypothèses $k'/k$ est une extension finie et par exemple $k'$ est donc un corps de nombres (resp. un corps fini) si $k$ en est un. De plus le groupe de Galois $G_{k'}$ sera donc un sous-groupe ouvert (*i.e.* d'indice fini) de $G_k$.

Reprenons maintenant comme ci-dessus un point $\xi$ du champ $\mathcal{X}/k$, soit $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ le sous-champ fermé obtenu comme l'adhérence de $\xi$, et soit $\eta\colon \tilde{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$ une normalisation de $\mathcal{Z}$. On notera $k'$ le corps de définition de $\mathcal{Z}$ ; c'est aussi celui de la normalisation $\tilde{\mathcal{Z}}$. Le champ $\mathcal{Z}$ étant réduit, le morphisme $\eta$ est génériquement un isomorphisme et le point $\xi$ se relève en un point géométrique $\tilde{\xi}$ de $\tilde{\mathcal{Z}}$. De plus les gerbes résiduelles $\mathcal{G}_\xi$ et $\mathcal{G}_{\tilde{\xi}}$ sont isomorphes, avec les égalités $\mathrm{Aut}(\xi) = \mathrm{Aut}(\tilde{\xi})$ et $\kappa(\xi) = \kappa(\tilde{\xi})$. Pour simplifier, on confondra donc en général $\xi$ et $\tilde{\xi}$ dans la notation. Enfin comme ces points sont les points génériques des champs $\mathcal{Z}$ et$\tilde{\mathcal{Z}}$, ils sont uniformisables, d'où des morphismes injectifs $\mathrm{Aut}(\xi) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{Z}, \xi)$ et $\mathrm{Aut}(\xi) \hookrightarrow \pi_1(\tilde{\mathcal{Z}}, \xi)$.

On note $\mathcal{Z}_{(red)}$ et $\tilde{\mathcal{Z}}_{(red)}$ les réductions inertielles respectives des champs $\mathcal{Z}$ et $\tilde{\mathcal{Z}}$, et on remarque que $\tilde{\mathcal{Z}}$ est en particulier géométriquement unibranche, puisque normal. Plus loin on se donnera souvent un groupe fini $H$ et on choisira alors pour $\xi$ le point générique d'une composante irréductible $\mathcal{Z}$ du sous-champ fermé $\mathcal{X}(H)$ (supposé non vide) défini par le groupe fini $H$ (voir proposition 1.3 ci-dessus). Quitte à grossir le groupe $H$ on peut alors supposer que celui-ci coïncide avec le groupe $\mathrm{Aut}(\xi)$.

Définition 2.16. — *Les groupes fondamentaux géometriques* $\pi_1^{geom}(\mathcal{Z}_{(red)}, \xi)$ *et* $\pi_1^{geom}(\tilde{\mathcal{Z}}_{(red)}, \xi)$ *sont appelés respectivement groupe de* monodromie géométrique *et groupe de* monodromie géométrique normalisé *du champ* $\mathcal{Z}$ *au point* $\xi$. *Ils sont notés* $\mu^{geom}(\mathcal{Z}, \xi)$ *et* $\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z}, \xi)$.

Notons que le morphisme de normalisation induit un morphisme naturel $\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z}, \xi) \to \mu^{geom}(\mathcal{Z}, \xi)$, lequel est d'ailleurs un isomorphisme si $\mathcal{Z}$ est propre, en particulier si le champ $\mathcal{X}$ lui-même est propre ; ce sera rarement le cas plus loin — penser au cas des espaces de modules. Ce morphisme est par ailleurs « souvent » injectif mais il est notoirement difficile de calculer effectivement le groupe fondamental d'un schéma (*a fortiori* un champ) non normal (en dimension $> 1$). Heureusement il est possible de travailler directement avec les normalisations, comme nous l'illustrerons concrètement sur l'exemple des champs de modules de courbes. On a en effet la proposition-définition suivante :

Proposition 2.17. — *Il existe un morphisme naturel :*

$$G_{k'} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathrm{Aut}(\xi))/\,\mathrm{Im}(\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z}, \xi))\,,$$

*où $k'$ est le corps de définition de $\mathcal{Z}$ et $Im(\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z},\xi))$ est l'image du groupe de monodromie géométrique normalisé de $\mathcal{Z}$ au point générique $\xi$ dans le groupe des automorphismes extérieurs de* $\mathrm{Aut}(\xi)$. *Ce morphisme définit* l'action galoisienne sur l'inertie champêtre.

*Démonstration.* — D'après le corollaire 2.9, la proposition 2.12 et l'uniformisabilité au point générique, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & \\
 & & & \pi_1^{geom}(\tilde{\mathcal{Z}}_{(red)},\xi) \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\xi) \arrow[r] & \pi_1(\tilde{\mathcal{Z}},\xi) \arrow[r] & \pi_1(\tilde{\mathcal{Z}}_{(red)},\xi) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & & G_{k'} \arrow[d] & \\
 & & & 1 &
\end{tikzcd}$$

On en déduit formellement le morphisme de l'énoncé. □

Lorsque le champ $\mathcal{Z}$ est géométriquement unibranche, ce qui d'ailleurs n'est généralement *pas* le cas dans les exemples des champs de modules de courbes, on peut évidemment écrire ce même diagramme avec le champ $\mathcal{Z}$ au lieu de sa normalisation $\tilde{\mathcal{Z}}$. Le morphisme naturel $\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z},\xi) \to \mu^{geom}(\mathcal{Z},\xi)$ induit alors une suite de morphismes :

$$G_k \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathrm{Aut}(\xi))/\,\mathrm{Im}(\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z},\xi)) \to \mathrm{Out}(\mathrm{Aut}(\xi))/\,\mathrm{Im}(\mu^{geom}(\mathcal{Z},\xi))$$

dans laquelle la seconde application est *surjective* du fait que l'application naturelle de la monodromie normalisée $\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z},\xi)$ dans $\mathrm{Out}(\mathrm{Aut}(\xi))$ se factorise à travers l'application correspondante pour la monodromie $\tilde{\mu}^{geom}(\mathcal{Z},\xi)$. En d'autres termes l'action galoisienne définie dans la proposition est à la fois plus fine et plus générale que celle que l'on obtiendrait en utilisant directement $\mathcal{Z}$.

Ce qui précède pourrait donner envie d'aller plus loin, ou monter plus haut, et pourquoi pas jusqu'à la situation birationnelle. De façon précise, le

lemme 2.13 assure que nous disposons aussi, dès lors que $\mathcal{X}$ est de Deligne–Mumford et sans imposer une quelconque hypothèse de type « géométriquement unibranche », d'un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\xi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1^{geom}(\mathcal{G}_\xi, \xi) \arrow[r] \arrow[d] & G_{\kappa(\bar{\xi})} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\xi) \arrow[r] & \pi_1^{geom}(\tilde{\mathcal{Z}}, \xi) \arrow[r] & \pi_1^{geom}(\tilde{\mathcal{Z}}_{(red)}, \xi) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où $G_{\kappa(\bar{\xi})}$ est le groupe de Galois du corps résiduel de la gerbe au-dessus du point $\bar{\xi}$. Cependant, de la normalité de $\tilde{\mathcal{Z}}$ et de la proposition 2.11 résulte la *surjectivité* du morphisme naturel $\pi_1^{geom}(\mathcal{G}_\xi, \xi) \to \pi_1^{geom}(\tilde{\mathcal{Z}}, \xi)$. Par conséquent le groupes de Galois $G_{\kappa(\bar{\xi})}$ et le groupe de monodromie géométrique normalisé ont même image dans $\mathrm{Out}(\mathrm{Aut}(\xi)) : \mathrm{Im}(G_{\kappa(\bar{\xi})}) = \mathrm{Im}(\mu^{geom}(\mathcal{Z}, \xi))$. Il s'en suit que l'on peut s'en tenir au morphisme figurant dans la proposition 2.17 pour définir l'action galoisienne sur l'inertie champêtre.

Il paraît très difficile, ou mieux impossible, de donner des énoncés généraux décrivant l'action galoisienne sur l'inertie champêtre, contrairement à ce qui se passe pour l'action sur l'inertie divisorielle, contrepartie galoisienne de la théorie de Hodge. Pour illustrer ce phénomène on procèdera à rebours, c'est-à-dire en se donnant une action galoisienne et en construisant un champ qui la réalise. Nous suivrons ici, partiellement et avec des variantes, [31, §6] que l'on consultera pour plus de renseignements.

Étant donné un corps $k$ et son groupe de Galois $G_k = \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ ($k^{sep}$ une clôture séparable de $k$), on se donne $\mathcal{G}$ un groupe profini muni d'une surjection continue $\mathcal{G} \to G_k$ de noyau $G$ fini, d'où une suite exacte :

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow G_k \longrightarrow 1.$$

À cette construction en termes de groupes correspond un champ $\mathcal{X}$ que l'on notera $\mathcal{X} = [\mathrm{Spec}(k)/G]$ bien que cette notation ne contienne pas toute l'information, dont les revêtements étales sont de la forme $\mathcal{Y} = [\mathrm{Spec}(\ell)/H]$ avec $\ell/k$ une extension séparable finie et $H$ un sous-groupe de $G$. De plus $\pi_1(\mathcal{X}) = \mathcal{G}$, l'inertie au point générique est donnée par le groupe fini $G$ et l'action galoisienne (extérieure) est celle prescrite par la suite exacte ci-dessus, autrement dit par la surjection $\mathcal{G} \to G_k$ qui était au point de départ. La monodromie géométrique est ici triviale. On a dans ce contexte la proposition suivante, variante de [31, Theorem 6.6] :

Proposition 2.18. — *Tout champ de Deligne–Mumford connexe réduit et de dimension 0 est donné par la construction précédente, autrement dit, avec les notations ci-dessus, par la donnée d'une surjection continue $\mathcal{G} \to G_k$ de noyau fini.*

Autre variante : on se donne à nouveau un corps $k$ et cette fois un groupe fini $G$, muni d'une action exérieure du groupe de Galois du corps $k$, autrement dit un morphisme $\phi : G_k \to \mathrm{Out}(G)$. On sait alors classifier les extensions $\mathcal{G}$ de $G_k$ par $G$ donnant lieu à cette action extérieure. Plus précisément, si $Z(G)$ dénote le centre de $G$, il existe une telle extension si et seulement si une certaine obstruction dans $H^3(G_k, Z(G))$ s'annule, auquel cas l'ensemble des extensions avec action extérieure donnée $\phi$ se réalise comme un torseur sous le groupe $H^2(G_k, Z(G))$ (voir par exemple [5, §IV.6]). On en déduit donc, grâce à la proposition précédente, une classification complète à action extérieure galoisienne donnée, ainsi que la condition de réalisation d'une telle action.

Ce qui précède pourrait être sans doute beaucoup amplifié en travaillant en termes de gerbes, de liens, etc. Nous n'entrerons pas ici dans ces considérations à développer, préférant revenir à ce qui constitue pour nous davantage qu'une source d'exemples, à savoir les champs de modules des courbes (stables). Nous étudierons l'action galoisienne correspondante au paragraphe cinquième et dernier, après une brève introduction, adaptée à nos besoins, à ces objets centraux de la géométrie algébrique.

## 3. Champs de modules des courbes : un exemple motivant

Nous étudierons dans ce paragraphe les espaces de modules des courbes qui constituent assurément parmi les plus beaux exemples de champs et qui ont largement contribué à la naissance et au développement de la théorie toute entière. Dans ce cas l'inertie champêtre est représentée par les automorphismes de courbes algébriques, ce qui fournit une panoplie d'exemples à la fois importants et concrets. Nous serons évidemment très brefs et incomplets, avec un but essentiel d'illustration et de préparation au paragraphe suivant sur l'action arithmétique. La théorie peut être envisagée de plusieurs points de vue complémentaires, essentiellement le point de vue algébrique, le point de vue analytique (surfaces de Riemann), et le point de vue hyperbolique. Dans la mesure où l'action galoisienne ne peut même être définie qu'algébriquement (ou plutôt arithmétiquement), nous adopterons essentiellement le premier mais parlerons souvent aussi le langage complexe, passant sous silence les résultats de type GAGA qui assurent l'existence de passerelles solides.

Commençons par rappeler, sans entrer dans les détails, la définition des champs $\mathcal{M}_{g,n}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ pour $g \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ deux entiers vérifiant $2g-2+n > 0$, cette dernière inégalité assurant le caractère hyperbolique des courbes considérées. Si $S$ est un schéma quelconque, une *courbe pointée lisse* $C/S$ de type $(g, n)$ est définie par la donnée de :

(1) un morphisme plat $\pi : C \to S$ dont les fibres géométriques sont des courbes (*i.e.* des schémas de dimension 1) complètes, réduites, connexes et régulières de genre $g$ ;
(2) $n$ sections deux à deux distinctes $\sigma_i : S \to C$.

À partir de cette notion on définit un champ $\mathcal{M}_{g,n}$ tel que le groupoïde $\mathcal{M}_{g,n}(S)$ des sections au-dessus d'un schéma $S$ ait précisément comme objets les $S$-courbes de type $(g, n)$. À partir de cette notion on définit un champ $\mathcal{M}_{g,n}$ tel que le groupoïde $\mathcal{M}_{g,n}(S)$ des sections au-dessus d'un schéma $S$ ait précisément comme objets les $S$-courbes de type $(g, n)$. Un théorème fondateur et qui est à l'origine de la terminologie « Deligne–Mumford » assure que :

Théorème 3.1 ([16]). — *Soient $g \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ deux entiers tels que $2g - 2 + n \geqslant 0$, alors $\mathcal{M}_{g,n}$ est un champ de Deligne–Mumford séparé et de type fini sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Ce champ $\mathcal{M}_{g,n}$ n'est pas propre : une courbe lisse peut dégénérer. Suivant une idée fondamentale due essentiellement à Grothendieck (réduction stable), on complète $\mathcal{M}_{g,n}$ en $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ en ajoutant à l'infini les *courbes stables* (de type $(g, n)$) non lisses, qui dans le monde complexe correspondent aux surfaces de Riemann à nœuds. Pour une définition en forme nous renvoyons à [16, Definition 1.1, « the key definition of the whole paper »] ou [3] par exemple. En adjoignant les courbes stables non lisses on obtient alors un champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 3.2 ([16]). — *Soient $g \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ deux entiers vérifiant $2g-2+n \geqslant 0$, alors $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est un champ de Deligne–Mumford séparé, propre et lisse sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *et dont les fibres géométriques sont irréductibles. De plus $\partial\mathcal{M}_{g,n} = \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$ est un diviseur à croisements normaux (relativement à* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*).*

Ajoutons à cela, un peu pêle-mêle, quelques remarques utiles pour entrer dans le sujet :

*Remarque 3.3.*

(1) Un automorphisme non trivial d'une courbe de genre $g$ fixe au plus $2g + 2$ points (voir par exemple [2]). On en déduit que $\mathcal{M}_{g,n}$ est en fait un schéma pour $n > 2g + 2$.
(2) On dispose d'une action naturelle du groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{M}_{g,n}$, qui permute les sections $\sigma_i$. En particulier on peut considérer le quotient par l'action du groupe tout entier, que l'on notera $\mathcal{M}_{g,[n]}$. D'où un revêtement étale galoisien $p : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,[n]}$ de groupe $\mathcal{S}_n$.

(3) La complétion stable $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est naturellement munie d'une stratification par le nombre de singularités (nœuds) des courbes considérées. Celui-ci est compris entre 0 et $3g-3+n$, ce dernier nombre donnant la dimension de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (ainsi que de $\mathcal{M}_{g,n}$ et $\mathcal{M}_{g,[n]}$). L'espace $\mathcal{M}_{g,n}$ constitue la strate générique (aucune singularité).

(4) L'article de P. Deligne et D. Mumford avait pour but premier, comme son titre l'indique, de montrer l'irréductibilité des fibres géométriques pour les premiers finis, autrement dit l'irréductibilité de $\mathcal{M}_{g,n}$ vu (après changement de base) comme un $k$-champ, où $k$ est séparablement clos de caractéristique $p > 0$. L'article lui-même traite explicitement du cas des courbes projectives, autrement dit de $\mathcal{M}_g(= \mathcal{M}_{g,0}; g \geqslant 2)$ mais le résultat (et la démonstration) reste valable en général.

(5) Nous sommes au premier chef intéressés par l'action galoisienne associée à la fibre générique, c'est-à-dire en regardant $\mathcal{M}_{g,n}$ comme un $\mathbb{Q}$-champ. Cependant l'action arithmétique aux premiers finis est évidemment intéressante elle aussi, de même que l'accord de ces différentes actions.

Passons maintenant brièvement en revue les groupes fondamentaux de ces différents espaces. On notera $\Gamma_{g,n} = \pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,n})$ le groupe fondamental orbifold de $\mathcal{M}_{g,n}$. On se permettra aussi de ne pas préciser toujours la structure qui est considérée pour tel ou tel espace. Ici par exemple il faudrait écrire $(\mathcal{M}_{g,n} \otimes \mathbb{C})^{an}$, l'analytification du $\mathbb{C}$-champ obtenu par extension des scalaires de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{C}$. Nous notons $\Gamma_{g,n}$ le groupe de Teichmüller de type $(g,n)$ ; c'est aussi le « mapping class group » des topologues. On notera aussi $\Gamma_{g,[n]} = \pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]})$, extension de $\mathcal{S}_n$ par $\Gamma_{g,n}$. Les propositions 2.5 et 2.6 montrent que le groupe fondamental champêtre de $\mathcal{M}_{g,n}$, vu comme $\overline{\mathbb{Q}}$-champ ou comme $\mathbb{C}$-champ, s'identifie naturellement à $\widehat{\Gamma}_{g,n}$, le complété profini de $\Gamma_{g,n}$. L'énoncé analogue vaut naturellement pour $\mathcal{M}_{g,[n]}$. Comme ci-dessus nous ferons maintenant un certain nombre de remarques qui permettent de préciser la situation. Celles-ci se trouvent dispersées sous une forme ou une autre dans la littérature et nous nous permettrons de renvoyer ici en particulier à [27] et à sa bibliographie :

*Remarque 3.4.*

(1) Le champ complété $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, vu sur un corps séparablement clos, est simplement connexe, ce qui revient à dire que le groupe de Teichmüller $\Gamma_{g,n}$ est engendré par des twists de Dehn (voir la remarque suivante).

(2) L'inertie divisorielle associée aux composantes du diviseur à l'infini $\partial\mathcal{M}(= \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M})$ est donnée par les twists de Dehn, en tant qu'éléments de $\widehat{\Gamma}$, ou si l'on préfère par les groupes procycliques qu'ils

engendrent. (Nous ne précisons pas toujours le type $(g, n)$ lorsque sa mention n'est pas significative.)

(3) Tout élément de torsion de $\Gamma$ (vu à conjugaison près) est donné par un automorphisme d'une courbe algébrique du type considéré (résultat dû à Nielsen), permutant éventuellement les points marqués si $\Gamma = \Gamma_{g,[n]}$.

(4) Il n'est par contre pas connu, et il semble difficile de montrer, que tout élément de torsion du complété profini $\widehat{\Gamma}$ est $\widehat{\Gamma}$-conjugé à un élément de torsion du groupe discret $\Gamma$ (cf. [27, §8.3]). Les éléments de ce type constituent précisément l'inertie champêtre associée à $\mathcal{M}$.

(5) Ce qui précède vaut aussi, *mutatis mutandis*, pour les classes de conjugaison de groupes finis contenus dans $\Gamma$ (resp. $\widehat{\Gamma}$). En particulier un théorème de S.P. Kerckhoff, utilisant la théorie de Thurston des difféomorphismes de surfaces (topologiques), garantit que pour tout sous-groupe fini $H$ de $\Gamma$, il existe une courbe algébrique (du type considéré) dont le groupe d'automorphismes contient un sous-groupe isomorphe à $H$. En fait la donnée de $H$ plongé dans $\Gamma$, toujours à conjugaison près, décrit la topologie du sous-groupe des automorphismes de la courbe en question vue comme surface de Riemann. L'isomorphisme est donc topologique et pas seulement abstrait.

(6) Les groupes $\Gamma_{g,n}$ et $\Gamma_{g,[n]}$ sont finiment engendrés par des twists de Dehn ; leurs complétés profinis respectifs le sont donc aussi. Le groupe $\Gamma_{g,n}$ (et donc aussi $\Gamma_{g,[n]}$) est virtuellement sans torsion. Comme à la remarque (4) ci-dessus, on ignore si c'est le cas pour le complété $\widehat{\Gamma}_{g,n}$.

(7) En même temps le groupe $\Gamma_{g,[n]}$ (mais pas toujours $\Gamma_{g,n}$) est engendré par sa torsion, formée des automorphismes de courbes algébriques permutant les $n$ points marqués. On peut traduire ce fait en disant que l'inertie champêtre attachée au champ $\mathcal{M}_{g,[n]}$ engendre le groupe fondamental géométrique.

Avant d'en venir à quelques exemples explicites, reprenons dans ce cadre des champs de modules des courbes la stratification par les lieux à automorphismes que nous avons considérée dans la section 2. Étant donné $H$ un groupe fini, on notera ici $\mathcal{M}\langle H\rangle \subset \mathcal{M}$ le lieu des courbes dont le groupe d'automorphismes contient un sous-groupe isomorphe à $H$, autrement dit les courbes qui admettent une action fidèle du groupe $H$. D'après la proposition 1.3 il s'agit d'un sous-champ fermé du champ $\mathcal{M}$, éventuellement vide. En utilisant notamment la notion d'espace de Hurwitz (voir [3]), bien adaptée à cette situation, on peut être plus précis, du moins au-dessus de l'ouvert

$S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|H|])$ autrement dit pour les corps de base dont la caractéristique est première au cardinal $|H|$ du groupe $H$. On a alors, d'après [36, proposition 3.4.1] :

Proposition 3.5 (M. Romagny). — *Soient $H$ un groupe fini et $\mathcal{M}\langle H\rangle \subset \mathcal{M}$ le sous-champ des courbes qui admettent une action fidèle de $H$. Ce sous-champ est fermé, plat et de présentation finie sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|H|])$, à fibres géométriquement réduites. De plus sa normalisation $\widetilde{\mathcal{M}}\langle H\rangle$ est un champ algébrique* lisse *au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/(30|H|)])$.

Que la normalisation du champ $\mathcal{M}\langle H\rangle$ soit lisse résulte de son identification avec un schéma de Hurwitz, qui est lui manifestement lisse (voir [36]). Ceci n'est vrai toutefois qu'à condition de rétrécir peut-être $S$, en enlevant les premiers 2, 3 et 5 (de produit = 30). Cette restriction provient du phénomène suivant, qui nous intéresse par ailleurs. Soit $H'$ le groupe des automorphismes au point générique d'une composante irréductible de $\mathcal{M}\langle H\rangle$. On a $H \subset H'$ et en règle générale $H = H'$, autrement dit le groupe des automorphismes au point d'une composante irréductible de $\mathcal{M}\langle H\rangle$ est en général égal à $H$ et pas plus grand. De plus et par définition $\mathcal{M}\langle H'\rangle = \mathcal{M}\langle H\rangle$. Le lemme 4.1 de [29] (difficile à déchiffrer et beaucoup plus précis) montre en particulier que le cardinal du quotient $(|H/H'|)$ n'est divisible que par les premiers 2, 3 et 5. D'où l'apparition du facteur 30, qui peut très souvent être amélioré, dans l'énoncé.

Examinons maintenant la situation du point de vue complexe, d'après [19] en particulier, ce qui va nous permettre de préciser les composantes irréductibles géométriques de $\mathcal{M}\langle H\rangle$, du moins sur la fibre générique, autrement dit sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou, ce qui revient au même, sur $\mathbb{C}$. On dispose alors de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}$ associé a $\mathcal{M}$. Notons que si le type est $(g, n)$, l'espace $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{g,n}$ est associé aussi bien à $\mathcal{M}_{g,n}$ qu'au champ pointé non ordonné (ou non coloré) $\mathcal{M}_{g,[n]}$. L'espace $\mathcal{T}$ est le revêtement universel (orbifold) de ces deux espaces, avec des revêtements (infinis) galoisiens (orbifold) non ramifiés $\mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ (de groupe $\Gamma_{g,n}$) et $\mathcal{T}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,[n]}$ (de groupe $\Gamma_{g,[n]}$), obtenu par composition du premier avec l'oubli de la coloration $\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,[n]}$ (de groupe $\mathcal{S}_n$).

Considérons maintenant $H \subset \Gamma$, avec $\Gamma = \Gamma_{g,n}$ ou $\Gamma = \Gamma_{g,[n]}$, ou même un groupe intermédiaire — coloration partielle —, peu importe ici. On regarde donc cette fois non pas un groupe abstrait mais un sous-groupe du groupe de Teichmüller, que l'on considère toutefois à conjugaison près. D'après la remarque 3.4 (5) il existe une courbe $X$ complexe dont le groupe des automorphismes non seulement contient $H$ (*i.e.* $\mathcal{M}\langle H\rangle \neq \emptyset$) mais de plus est telle que l'action de ce sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$ sur $X$, vu comme surface topologique, soit isomorphe à celle de $H$ (à $\Gamma$-conjugaison près). Notons

$\mathcal{M}(H) \subset \mathcal{M}$ le lieu des courbes complexes $X$ telles que $H \subset \mathrm{Aut}(X) \subset \Gamma$ (inclusions à $\Gamma$-conjugaison près). On a alors, par exemple d'après [19] :

Proposition 3.6. — *étant donné $H \subset \Gamma$ la classe de conjugaison dans $\Gamma$ d'un groupe fini $H$, le sous-champ fermé $\mathcal{M}(H) \subset \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathcal{M} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (et pas seulement sur $\mathbb{C}$) ; c'est une composante irréductible de $\mathcal{M}\langle H\rangle$ ($= \mathcal{M}\langle H\rangle_{\overline{\mathbb{Q}}}$). Les composantes irréductibles de ce dernier champ sont donc en bijection naturelle avec les plongements $H \hookrightarrow \Gamma$ à $\Gamma$-conjugaison près.*

En résumé, les composantes irréductibles $\mathcal{M}(H)$ de $\mathcal{M}\langle H\rangle$, où ici les objets sont considérés, parfois implicitement, sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou sur $\mathbb{C}$, sont énumérées par les plongements de $H$ dans $\Gamma$, c'est-à-dire aussi par les types topologiques de l'action (fidèle) de $H$ sur les courbes paramétrées par $\mathcal{M}\langle H\rangle$. Nous dirons parfois que $\mathcal{M}(H)$ est un *lieu spécial* du champ $\mathcal{M}$, le plongement de $H$ dans $\Gamma$ étant sous-entendu dans la notation. D'après la proposition 3.5, la normalisation $\widetilde{\mathcal{M}}(H)$ est un champ irréductible et lisse défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et en fait, tout comme $\mathcal{M}(H)$ lui-même, sur un corps de nombres, puisqu'il est finiment présenté.

L'espace de Teichmüller, objet hautement non algébrique, fournit une description parlante de la situation précédente, du moins sur $\mathbb{C}$. Suivant W. Harvey, on montre qu'à $H$ est associé $\mathcal{T}(H) \subset \mathcal{T}$, qui décrit en gros les déformations équivariantes. Plus précisément, si $X$ est un point (complexe) de $\mathcal{M}(H)$ et $Y = X/H$ la courbe quotient, $\mathcal{T}(H)$ est naturellement isomorphe à l'espace de Teichmüller de $Y$, les points de ramifications du revêtement $X \to Y$ étant considérés comme marqués et bien sûr ordonnés puisqu'il s'agit d'espaces de Teichmüller. Pour tout $g \in \Gamma$ on a $\mathcal{T}(gHg^{-1}) = g \cdot \mathcal{T}(H)$, avec l'action naturelle de $\Gamma$ sur $\mathcal{T}$. Autrement dit quand on fait varier $H \subset \Gamma$ dans une classe de conjugaison, $\mathcal{T}(H)$ parcourt une orbite pour l'action de $\Gamma$ sur $\mathcal{T}$. Notons $\Gamma(H) \subset \Gamma$ le stabilisateur (global) de $\mathcal{T}(H)$ ; d'après ce qui précède, $\Gamma(H)$ n'est autre que le normalisateur de $H$ dans $\Gamma$ (y compris si le centre de $\Gamma$ est non trivial, autrement dit dans quelques cas bien connus et de petites dimensions). Notons enfin $\widetilde{\mathcal{M}}(H)$ le quotient $\mathcal{T}(H)/\Gamma(H)$. C'est une variété irréductible et normale parce que $\Gamma$ agit proprement et discontinument sur $\mathcal{T}$. On a par définition des surjections canoniques $\mathcal{T}(H) \to \mathcal{M}(H)$ et $\mathcal{T}(H) \to \widetilde{\mathcal{M}}(H)$ et une factorisation de la première à travers une application $\pi : \widetilde{\mathcal{M}}(H) \to \mathcal{M}(H)$ dont on montre facilement (cf. [19]) qu'elle est propre et génériquement injective. Ceci justifie la notation : $\widetilde{\mathcal{M}}(H)$ est bien la normalisée de $\mathcal{M}(H)$ et c'est une variété complexe lisse. On peut aussi rappeler dans ce contexte que les lieux spéciaux $\mathcal{M}(H)$ sont totalement géodésiques, tant pour la métrique de Teichmüller (non riemannienne) que pour celle (riemanienne) de Weil–Petersson, ce qui rend leurs singularités assez

faciles à décrire : il s'agit d'autointersections propres et donc par exemple, en dimension 1, d'autointersections transverses.

Puisque $\mathcal{T}(H)$ est isomorphe à un espace de Teichmüller, donc en particulier simplement connexe, et que $\widetilde{\mathcal{M}}(H) = \mathcal{T}(H)/\Gamma(H)$, on a, dans la catégorie des orbifolds complexes

$$\pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}}(H)) = \Gamma(H) \hookrightarrow \Gamma = \pi_1^{orb}(\mathcal{M}),$$

où comme ci-dessus $\Gamma(H)$ est le normalisateur de $H$ dans $\Gamma$. Notons que choisir un représentant de $H$ dans sa classe de conjugaison revient ici à choisir un point base, ce que nous éviterons pour simplifier. D'où une suite exacte courte tautologique :

$$1 \to H \to \pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}}(H)) = \Gamma(H) \to \Gamma(H)/H \to 1$$

dans laquelle le troisième terme ($= \Gamma(H)/H$) n'est autre que le groupe fondamental du champ $\widetilde{\mathcal{M}}(H)_{(red)}$, réduction inertielle géométrique de $\widetilde{\mathcal{M}}(H)$ (cf. proposition 1.13), autrement dit de ce dernier champ « débarrassé » de ses automorphismes au point générique. Ceci vaut si ce groupe d'automorphismes générique est exactement $H$ et pas plus gros ; voir la discussion qui suit la proposition 3.5.

Il est intéressant de comparer la suite exacte ci-dessus à la suite de type inertie-décomposition du corollaire 2.9, sachant qu'ici nous envisageons un *sous*-champ $\mathcal{M}(H)$ du champ $\mathcal{M}$. Dans le cas présent l'exactitude à gauche est assurée par le fait que tous les champs sont globalement uniformisables. Pour montrer ce dernier fait, il suffit de se souvenir qu'en rigidifiant les courbes à l'aide de structures de niveaux (abéliennes) on « tue » les automorphismes et on obtient donc des classifiants qui sont des *schémas* et aussi des revêtements étales des champs de modules originaux (voir par exemple [16] ; sur le corps des complexes ce fait était connu de Hurwitz). D'autre part nous avons ici affaire à $\pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}}(H))$, sous-groupe du groupe fondamental du lieu spécial lui-même, soit $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}(H))$, plutôt qu'à ce dernier groupe. Il arrive que $\mathcal{M}(H)$ soit lisse mais ce n'est pas la règle. Du moins déterminer si c'est le cas est-il une affaire de théorie des groupes : comme on l'a vu plus haut, l'obstruction à la lissité provient d'éventuelles autointersections et celles-ci se lisent entièrement sur les plongements $H \hookrightarrow \Gamma$ (voir [19, §2] pour des détails). Notons enfin qu'on a une immersion fermée de champs géométriquement irréductibles $\mathcal{M}(H) \hookrightarrow \mathcal{M}$, d'où des morphismes, naturels au choix près d'un point base :

$$\pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}}(H)) \hookrightarrow \pi_1^{orb}(\mathcal{M}(H)) \to \Gamma = \pi_1^{orb}(\mathcal{M}),$$

la composition redonnant l'injection $\Gamma(H) \hookrightarrow \Gamma$.

Il serait très souhaitable de pouvoir transposer ces descriptions au cas algébrique, toujours sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{C}$, ce qui en principe et si l'on s'en tient à la théorie des groupes, revient à considérer partout des complétés profinis (cf. propositions 2.5 et 2.6). Or il se trouve que cela paraît très difficile en général, pour des raisons qui sont détaillées dans [27]. Bornons-nous à décrire brutalement l'obstacle du point de vue de la pure théorie des groupes : on aimerait que $\widehat{\Gamma(H)}$, le complété profini de $\Gamma(H)$, coïncide avec le normalisateur de $H$ dans $\widehat{\Gamma}$, sachant que $\Gamma$ est bien résiduellement fini, c'est-à-dire que l'on a une *injection* naturelle $\Gamma \hookrightarrow \widehat{\Gamma}$ qui permet de considérer $H$ comme un sous-groupe du complété. Malheureusement un tel énoncé, qui paraît plausible et important (cf. [27]) semble aussi très difficile à démontrer à l'heure actuelle, au moins dans le cas général et plus précisément en genre $g > 2$.

Nous nous tournerons à présent vers quelques exemples concrets en nous permettant toujours, pour simplifier, de mêler implicitement les « niveaux de langue » (topologique, analytique, algébro-géométrique, arithmétique). La situation en genre 0 est simple mais intéressante et toutes les descriptions sont élémentaires et explicites ce qui autorise bien des calculs, y compris en ce qui concerne l'action de groupe de Galois ou de celui, plus gros, de Grothendieck–Teichmüller. Nous renvoyons à [37] pour une description détaillée et exhaustive des lieux propres en genre 0. Contentons-nous ici d'un exemple après avoir rappelé quelques points faciles. L'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ classifiant les configurations de $n$ ($> 2$) points marqués *ordonnés* sur la droite projective (la sphère) est un schéma (une variété) affine ; ces objets n'admettent pas d'automorphismes non triviaux du fait de la numérotation. On note comme toujours $\mathcal{M}_{0,[n]}$ le quotient par l'action des permutations (oubli de la numérotation). On a un revêtement galoisien $\mathcal{M}_{0,n} \to \mathcal{M}_{0,[n]}$, de groupe $\mathcal{S}_n$. Les points à automorphismes de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ sont simplement ceux dont la préimage comprend strictement moins de $n!$ points. Très concrètement ils s'obtiennent comme les configurations de points telles qu'il existe une permutation qui a le même effet qu'un élément de $\mathrm{PGL}_2$ ; il importera plus bas de faire attention aux coefficients, ici non précisés.

Rien ne vaut une illustration, élémentaire et explicite. Soit donc $\tilde{\mathcal{E}}$ le lieu unidimensionnel, dans $\mathcal{M}_{0,6}$, défini par les configurations de la forme :

$$F(t) = (1, \rho, \rho^2, t, \rho t, \rho^2 t)\,,$$

avec $\rho$ une racine primitive troisième de l'unité ($\rho^3 = 1$). Ce lieu correspond à un automorphisme codé par la permutation $(123)(456)$. En effet, si $z$ désigne la coordonnée sur la sphère et que l'on effectue cette permutation sur $F(t)$, on retombe sur une configuration équivalente, qui diffère par l'action de l'automorphisme $z \mapsto \rho z$.

Dans $\mathcal{M}_{0,6}$ il est facile de décrire $\tilde{\mathcal{E}}$ ; il s'agit simplement de la droite projective $\mathbb{P}^1_t$ paramétrée par $t$, privée des points $0, 1, \infty, \rho, \rho^2$, de sorte que les 6 coordonnées de $F(t)$ soient distinctes. À quoi ressemble le lieu spécial correspondant $\mathcal{E}$, projection de $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{M}_{0,[6]}$ ? La rotation d'ordre 3, soit $R : t \mapsto \rho t$, envoie $F(t)$ sur une configuration permutée, et donc identique dans $\mathcal{M}_{0,[6]}$. Il en est de même de l'involution $I : t \mapsto 1/t$ (après multiplication des coordonnées par $t$). On peut vérifier que le stabilisateur de $\mathcal{E}$ est donné par ce groupe dihédral $D = \langle R, I\rangle$ et on en conclut que $\mathcal{E}$ a la structure d'une droite affine avec un point enlevé et un point orbifold d'ordre 2. Plus précisément, si $s = t^3$, $\mathcal{E}$ est donné par la droite affine paramétrée par $s$, privée du point $s = 1$ et avec $s = -1$ point d'ordre 2, soit une orbifold du type noté $\mathbb{P}^1_{2,\infty,\infty}$.

À $R$ et $I$ correspondent des transformations de la sphère des $z$ sur laquelle se trouvent les configurations de points marqués. Ces transformations s'écrivent en l'occurence de manière identique, à savoir $R : z \mapsto \rho z$ et $I : z \mapsto 1/z$. Nous conservons les mêmes noms pour simplifier mais la signification est très différente. Par définition, pour toute valeur de $s = t^3$, le point correspondant de $\mathcal{E}$ admet un automorphisme représenté par la permutation $(123)(456)$ ou aussi bien par $R$. De plus pour $s = -1$, qui correspond à la configuration des racines sixièmes de l'unité soit $(1, \rho, \rho^2, -1, -\rho, -\rho^2)$, on a une involution supplémentaire associée à $I$. Enfin à $R$ et $I$ correspondent des éléments du groupe fondamental $\Gamma_{0,[6]}$ c'est-à-dire des tresses non colorées à 6 brins. Pour des détails sur tout ceci et un cadre nettement plus général, nous renvoyons à [26, §4]. Soulignons enfin que de tels exemples, relativement élémentaires géométriquement parlant, deviennent très substantiels si l'on y adjoint l'étude de l'action du groupe de Galois ou de Grothendieck–Teichmüller (cf. [28], ainsi que [9], [38]).

Les courbes de genres 1 et 2, elliptiques et hyperelliptiques, sont également instructives et assez élémentaires dans ce contexte. On les étudie essentiellement en se ramenant au genre 0 puisque la donnée d'une telle courbe est ici pratiquement équivalente à celle de ses points de Weierstrass sur la sphère. On trouvera en particulier dans [8, §6] une liste des automorphismes des courbes marquées de genre 1. Donnons ici brièvement un exemple en genre 2, relié à celui de genre 0 ci-dessus et dans lequel intervient un zeste d'arithmétique. Considérons donc les familles de courbes à un paramètres $C$ et $C'$ dans $\mathcal{M}_2$ d'équations respectives :

$$\begin{aligned} C &: \ y^2 = (x^3 - 1)(x^3 - t^3)\,, \\ C' &: y'^2 = x'(x' - 1)(x' - t')(x' - \omega(t'))(x' - \omega^2(t'))\,, \end{aligned}$$

avec $\omega(u) = 1/(1 - u)$. La courbe $C$ (resp. $C'$) possède génériquement un groupe d'automorphismes $H$ (resp. $H'$), cyclique d'ordre 6 et engendré par

$h$ (resp. $h'$) avec :

$$h : (x, y) \to (\rho x, -y), \qquad h' : (x', y') \to \left(\omega(x'), \frac{-y'}{(x'-1)^3}\right).$$

On notera que $h'$ est à coefficients rationnels, et donc fixé par l'action du groupe de Galois, ce qui n'est pas le cas pour $h$. D'autre part on dispose d'un isomorphisme $\alpha$ de $C$ à $C'$ défini par :

$$x' = \alpha(x) = -\rho\frac{x-1}{x-\rho^2}\,; \qquad y' = \alpha(y) = 3\rho(1-\rho)\frac{y}{(x-\rho^2)^3}\,,$$

dont l'inverse $\alpha^{-1}$ est donné par :

$$x = \alpha^{-1}(x') = \rho\frac{\rho x'+1}{x'+\rho}\,, \qquad y = \alpha^{-1}(y') = \frac{y'}{(x'+\rho)^3}\,.$$

Sans suprise cet isomorphisme n'est *pas* à coefficients rationnels. Enfin le groupe d'automorphismes (ou d'inertie) grossit au point $t = -1$ correspondant à la courbe d'équation $y^2 = x^6 - 1$. Ce groupe est alors de la forme $\mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/2$, engendré par $(x, y) \to (-\rho x, y)$ et $(x, y) \to (x, -y)$. On peut calculer les formules correspondantes pour la famille $C'$, qui sont elles à coefficients rationnels, en transmuant ce qui précède via l'isomorphisme $\alpha$.

Venons-en enfin à quelques mots sur le cas du genre 3 qui, comme souvent en théorie de Teichmüller, représente en quelque sorte le premier cas « générique », ou du moins représentatif et aussi plus difficile. Nous nous bornerons au cadre non pointé, autrement dit à l'espace $\mathcal{M}_3$ des courbes projectives lisses de genre 3, espace de dimension 6 ($= 3g - 3$), et nous écarterons le cas particulier des courbes hyperelliptiques qui constituent en l'occurence un diviseur (noté $\mathcal{H}_3$) de $\mathcal{M}_3$ ($\dim(\mathcal{H}_3) = 2g - 1 = 5$), ce qui pour le coup est évidemment spécifique au genre 3. Pour une introduction aux automorphismes de courbes (surfaces de Riemann), nous renvoyons au Chapitre V de [18]. Pour un point de vue modulaire, outre les références déjà mentionnées, on consultera [29] et pour le genre 3 spécifiquement on se reportera au très utile et exhaustif [2] ainsi qu'à sa bibliographie (et celle de [29]). La tâche qui consiste à classifier tous les automorphismes de toutes les courbes (projectives lisses) de genre 3 s'avère à la fois intéressante et ardue. La situation est aujourd'hui clarifiée mais il a fallu beaucoup de temps (un siècle en gros !), un certain nombre d'articles par plusieurs auteurs et pas mal d'erreurs et d'oublis en tous genres pour en arriver là. On trouvera dans [2] des tables, reproduites d'articles antérieurs, qui fournissent une carte globale de la situation sur $\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{H}_3$.

Rappelons que l'immersion canonique permet de réaliser les courbes qui nous intéressent comme des cubiques planes dont on donnera l'équation de la partie affine. Les automorphismes sont eux donnés par des éléments d'ordre fini de $\mathrm{PGL}_3$. La théorie générale assure que le groupe d'automorphismes

d'une courbe de ce type (en caractéristique nulle) est d'ordre $\leqslant 84(g-1) = 168$, borne atteinte par la fameuse quartique de Klein ($x^3z + y^3x + z^3y = 0$) et par elle seule, avec un groupe d'automorphismes isomorphe à $PSL_3(\mathbb{Z}/2)$ ($\simeq PSL_2(\mathbb{Z}/7)$). De plus seuls les premiers 2, 3 et 7 peuvent diviser l'ordre du groupe d'automorphisme, 7 n'intervenant que dans la quartique de Klein. On trouvera dans [Ba] (§2.4) le treillis complet des groupes qui apparaissent, contrepartie algébrique de la stratification de l'espace des modules $\mathcal{M}_3$ par les lieux à automorphismes. Nous serons d'abord intéressés, en lien avec l'action galoisienne, par les groupes cycliques, qui ici sont d'ordres 2, 3, 4, 6, 7 et 9. À part le cas de la quartique de Klein, évidemment rationnelle et d'ailleurs unique, la situation est donc essentiellement contrôlée par les racines cubiques de l'unité ; sans être encore très riche elle est déjà non triviale et permet d'illustrer certains phénomènes de base.

En particulier le lieu des courbes dont le groupe d'automorphismes est d'ordre au moins 2, admettant un automorphisme non trivial qui est une involution *non* hyperelliptique, est de dimension 4. On peut décrire ce lieu comme celui des courbes dont une équation est de la forme :

$$x^4 + x^2\ell_2(y,z) + \ell_4(y,z) = 0\,,$$

où $\ell_2$ (resp. $\ell_4$) est quadratique (resp. quartique) et l'automorphisme consiste simplement à changer $x$ en $-x$. On voit que toute la situation est rationnelle. Il est déjà plus intéressant dans l'optique de l'action galoisienne de considérer le lieu des courbes dont le groupe d'automorphismes est divisible par 3 ([2]). Il est de dimension 2 et correspond à la famille de courbes d'équations :

$$x(x-y)(x-ay)(x-by) + yz^3 = 0\,,$$

avec $a$ et $b$ des paramètres libres. Le groupe d'automorphismes est engendré par la transformation $z \mapsto \rho z$ avec $\rho$ racine cubique (primitive) de 1 ($x$ et $y$ fixes).

## 4. Action galoisienne sur le groupe fondamental : le cas des champs de modules des courbes

Le but de cette dernière section est de comprendre, de manière à vrai dire très partielle, l'action galoisienne sur l'inertie champêtre dans le cas particulier mais important des modules de courbes, sachant qu'alors cette inertie correspond aux automorphismes des objets classifiés, autrement dit des courbes. Cette section est divisée en deux paragraphes : le premier (§4.1) détaille la relation entre les actions galoisiennes sur les courbes et sur leurs champs de modules. Nous nous sommes restreints à ce cas afin de ne pas

alourdir l'exposé mais le lecteur notera que les mêmes raisonnements s'appliquent — moyennant des hypothèses et précautions qu'il serait bon de détailler — dans un cadre plus large, à savoir la comparaison entre les actions galoisiennes sur certains objets algébriques et sur leurs champs classifiants (supposés également algébriques). Dans le second paragraphe (§4.2) on montre comment l'action galoisienne est bien en un sens *cyclotomique* sur l'inertie champêtre, du moins moyennant une hypothèse cruciale sur la ramification. Là encore de nombreux énoncés apparentés sont possibles et nous n'en expliciterons qu'un échantillon tout en notant quelques directions éventuellement à explorer.

## 4.1. Deux actions qui n'en font qu'une

On suppose donc que le champ $\mathcal{X}/k$ est le champ classifiant de certains objets géométriques, et il s'agit de comparer l'action du groupe de Galois $G_k$ du corps $k$ (ou d'un sous-groupe ouvert de $G_k$) sur les groupes d'inertie d'un point géométrique $\xi$ de $\mathcal{X}$ avec l'action de ce même groupe de Galois sur le groupe des automorphismes de l'objet géométrique correspondant à ce point $\xi$. Dans la suite nous supposerons que le champ $\mathcal{X}$ est le champ des modules de courbes avec ou sans points marqués (ordonnés ou pas), *i.e.* $\mathcal{X} = \mathcal{M}_g$, ou $\mathcal{M}_{g,n}$, ou encore $\mathcal{M}_{g,[n]}$. Comme indiqué ci-dessus on pourrait s'intéresser à un cas plus général, et même ne pas supposer que le champ algébrique $\mathcal{X}$ est de Deligne–Mumford.

Rappelons d'abord comment est définie l'action galoisienne sur le groupe des automorphismes d'un schéma, en l'occurence une courbe hyperbolique lisse. Étant donné $C$ un schéma sur le corps $F$ et une extension galoisienne $F/K$, on cherche à définir l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F/K)$ sur le groupe $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Aut}_F(C)$ des automorphismes de $C$ au-dessus de $F$. Pour que cette action existe il faut supposer que $K$ *contient le corps des modules* de $C$ (voir ci-dessous) et de plus, en l'absence du choix d'un point base $K$-rationnel (qui n'existe pas toujours), on ne peut espérer obtenir qu'une action *extérieure*.

Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/K)$ on définit le schéma tordu $C^\sigma = C \times_\sigma \mathrm{Spec}(F)$ ; autrement dit on a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} C^\sigma \arrow[r, "\sigma_C^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(F) \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Spec}(F) \end{tikzcd}$$

Soit $H$ le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(F/K)$ formé des éléments $\tau$ tels qu'il existe un $F$-isomorphisme (évidemment non unique *a priori*) $f_\tau : C \to C^\tau$. Par définition le corps fixé $M = F^H$ est dit *corps des modules* de $C$ relativement à l'extension $F/K$ ; pour $F = \bar{K}$ une clôture séparable de $K$ on parlera simplement du corps des modules de $C$. Pour simplifier la notation, on supposera dorénavant que $F = \bar{K}$, et surtout que $K$ contient le corps des modules de $C$.

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/K)$ on dispose donc d'un $F$-isomorphisme $f_\sigma \colon C \to C^\sigma$ ; on définit alors, pour tout $\varphi \in G = \mathrm{Aut}(C)$, l'automorphisme $\varphi(f_\sigma)$ via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f_\sigma"] \arrow[d, "\varphi(f_\sigma)"'] & C^\sigma \arrow[r, "\sigma_C^*"] & C \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "f_\sigma"] & C^\sigma \arrow[r, "\sigma_C^*"] & C \end{tikzcd}$$

Ou encore : $\varphi(f_\sigma) = (f_\sigma)^{-1} \circ (\sigma_C^*)^{-1} \circ \varphi \circ \sigma_C^* \circ f_\sigma$. Il est clair que $\varphi(f_\sigma)$ est défini au-dessus de $F$. D'autre part $\varphi(f_\sigma)$ dépend du choix de l'isomorphisme $f_\sigma$. Plus précisément, si on remplace $f_\sigma$ par un autre isomorphisme $g_\sigma \colon C \to C^\sigma$, il existe $\psi \in \mathrm{Aut}(C)$ tel que $g_\sigma = f_\sigma \circ \psi$ et on a donc l'égalité $\varphi(g_{\sigma corpsdfigma}) = \psi^{-1} \circ \varphi(f_\sigma) \circ \psi$.

Finalement on a bien défini une action à conjugaison près du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur le groupe $G = \mathrm{Aut}(C)$ des automorphismes du $\bar{K}$-schéma $C$, soit un morphisme

$$\mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(G)\,,$$

pourvu toutefois que $K$ contienne le corps des modules de $C$.

Traduisons brièvement ce qui précède en termes de revêtements de courbes, renvoyant par exemple le lecteur à [3] ou [15] pour des précisions. Avec les notations ci-dessus on commence par définir $G = \mathrm{Aut}(C)$, le groupe des $\bar{K}$-automorphismes de la courbe (connexe) $C$, puis la courbe quotient $D = C/G$. On obtient ainsi un $G$-revêtement $\pi : C \to D$, galoisien de groupe $G = \mathrm{Gal}(C/D)$. Autrement dit $\pi$ est galoisien et la courbe $C$ est explicitement munie d'une action du groupe de Galois géométrique $G$. On se place dans une situation modérée et même, pour simplifier, on suppose l'ordre $|G|$ de $G$ premier à la caractéristique de $K$ si celle-ci est non nulle. La courbe $D$ est naturellement marquée par le diviseur de branchement du morphisme fini $\pi$ ; lorsque la courbe $C$ est elle-même marquée, on suppose en outre que le diviseur de ramification (préimage du diviseur de branchement) est disjoint du diviseur des points marqués de $C$. Le résultat principal de [15, théorème 3.1] garantit que la courbe $D$ possède un modèle canonique sur le corps des modules de la courbe originelle $C$.

On peut maintenant « oublier » l'isomorphisme $G \simeq \mathrm{Aut}(C)$ et considérer $\pi$ comme un « simple » revêtement (« mere cover ») galoisien de groupe $G$. Le morphisme $\mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(G)$ construit ci-dessus, où $K$ est le corps des modules de $C$, *définit* alors l'action (extérieure) du groupe de Galois arithmétique $\mathrm{Gal}(K)$ sur le groupe de Galois géométrique $\mathrm{Gal}(C/D)$ (voir par exemple [13] ou [15]).

Reprenons à présent la situation d'un point de vue modulaire, avec une deuxième version de l'action arithmétique dont nous verrons qu'elle coïncide en fait avec la précédente. Ce qui précède suggère naturellement l'existence d'une suite exacte de la forme

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(C) \longrightarrow \Pi_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K) \longrightarrow 1,$$

qui livrera formellement une action $\mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(G)$ ($G = \mathrm{Aut}(C)$). Repartons donc des suites exactes de la théorie du groupe fondamental des champs algébriques, ou plus précisément d'un champ de modules de courbes, noté ici simplement $\mathcal{X}$, avec un point géométrique $\bar{\xi}\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathcal{X}$ qui correspond à une courbe $\bar{C}$ au-dessus d'un corps algébriquement clos $\Omega$. Le champ $\mathcal{X}$ étant localement noethérien, le point $\bar{\xi}$ est algébrique et en particulier il existe une extension galoisienne *finie* $F$ du corps résiduel $\kappa(\bar{\xi}) = K$ telle que $\bar{\xi}$ se factorise par $\xi\colon \mathrm{Spec}(F) \to \mathcal{X}$ (cf. [25, remarque (11.2.1)]). Ceci permet de supposer que $\Omega = \bar{K}$, la clôture séparable de $K$. La courbe $\bar{C}$ est alors définie sur $F$, c'est-à-dire qu'il existe une courbe $C$ sur $F$, définie par un morphisme $\xi$ et telle que $\bar{C} = C \otimes_F \bar{K}$ ; le corps résiduel $K$ de l'image du morphisme $\bar{\xi}$ coïncide avec le corps des modules de $C$.

On dispose dans cette situation de la suite exacte courte (voir au §2 ci-dessus)

$$1 \longrightarrow \pi_1\big(\mathcal{G}_{\bar{\xi}} \otimes_K \bar{K}, \bar{\xi}\big) \longrightarrow \pi_1\big(\mathcal{G}_{\bar{\xi}}, \bar{\xi}\big) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K) \longrightarrow 1.$$

On identifie alors, d'après le lemme 2.13, le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{G}_{\bar{\xi}} \otimes_K \bar{K}, \bar{\xi})$ avec le groupe des ($\bar{K}$-)automorphismes de la courbe $\bar{C} = C \otimes_F \bar{K}$. On aura noté que plus haut $\mathrm{Aut}(C)$ désigne en fait le groupe des automorphismes *géométriques* de $C$, autrement dit le groupe des $\bar{K}$-automorphismes de $\bar{C}$. Dans une notation plus modulaire on a d'ailleurs $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Aut}(\bar{\xi})$, le groupe des automorphismes du point géométrique $\bar{\xi}$. Il possède une structure naturelle de $\bar{K}$-groupe algébrique, mais dans la situation modérée dans laquelle nous nous sommes placés, on ne perd rien à le traiter comme un groupe fini. Il reste à identifier l'action extérieure déduite de la suite exacte ci-dessus avec celle que nous avons décrite plus haut en partant des courbes (*i.e.* des objets classifiés par le champ de modules).

Pour ce faire décrivons cette dernière action, en partant d'un morphisme de champs de Deligne–Mumford $f\colon Y \to X$ . Soit $H = f^*\colon \mathcal{C} = (Et)/X \to$

$\mathcal{C}' = (Et)/Y$ le foncteur exact entre les catégories galoisiennes des revêtements étales respectives de $X$ et $Y$. Si $y\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to Y$ est un point géométrique de $Y$ et si $F' = F_y$ est le foncteur fondamental (foncteur fibre) de $\mathcal{C}'$ correspondant, le foncteur fondamental $F = F' \circ H$ est le foncteur $F_x$ associé au point géométrique $x = f(y) = f \circ y$ de $X$. On notera ${}^tH$ le foncteur du groupoïde fondamental $\Gamma' = \Pi_1(Y)$ de $Y$ dans le groupoïde fondamental $\Gamma = \Pi_1(X)$ de $X$ qui envoie $F_y$ sur $F_x = F_y \circ H$. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ ce foncteur induit un morphisme $f_*$ du groupe $\pi_1(Y, y)$ des automorphismes du foncteur $F_y$ dans le groupe $\pi_1(X, x)$ des automorphismes du foncteur $F_x$.

En particulier un élément $\phi \in \pi_1(Y, y)$ est une transformation naturelle de $F_y$ : tout $v\colon \tilde{Y} \to Y$ dans $Et/Y$ détermine une application $\phi_{\tilde{Y}}$ de l'ensemble $F_y(\tilde{Y})$ dans lui-même, où $F_y(\tilde{Y})$ est l'ensemble des classes d'équivalence de couples $(\tilde{y}, \alpha)$ avec $\tilde{y}\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to \tilde{Y}$ un point géométrique de $\tilde{Y}$ au-dessus de $y$ et $\alpha\colon y \Rightarrow v(\tilde{y})$ un 2-morphisme de $y$ dans $v(\tilde{y})$ dans le groupoïde $Y(\mathrm{Spec}(\Omega))$, et où deux couples $(\tilde{y}_1, \alpha_1)$ et $(\tilde{y}_2, \alpha_2)$ sont équivalents s'il existe $\beta\colon \tilde{y}_1 \Rightarrow \tilde{y}_2$ dans $\tilde{Y}(\mathrm{Spec}(\Omega))$ avec $v(\beta) \circ \alpha_1 = \alpha_2$ (voir aussi [N]).

L'image $\psi = f_*(\phi)$ est la transformation naturelle de $F_x$ définie pour tout $u\colon \tilde{X} \to X$ dans $Et/X$ par $\psi_{\tilde{X}} = \phi_{H(\tilde{X})}$, où $\tilde{Y} = H(\tilde{X})$ est le revêtement obtenu par changement de base : $\tilde{Y} = Y \times_X \tilde{X}$. Le morphisme $f_*$ est surjectif si le foncteur $H$ est pleinement fidèle, ou de manière équivalente si l'image $\tilde{Y} = H(\tilde{X})$ de tout revêtement connexe $\tilde{X}$ de $X$ est connexe.

Supposons maintenant le champ de Deligne–Mumford $Y$ (sur un corps $K$) géométriquement connexe, soit $f\colon Y \to X = \mathrm{Spec}(K)$ le morphisme structural et choisissons un point géométrique $x\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$, autrement dit une clôture séparable $\bar{K}$ de $K$ dans $\Omega$. On ne perdrait d'ailleurs rien à supposer dans la suite que $\Omega = \bar{K}$. Soit enfin $y$ un point géométrique de $Y$ au-dessus de $x$. Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et tout élément $\psi^{(\sigma)}$ de $\pi_1(X, x)$, correspondant à $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$, se relève en un élément $\phi^{(\sigma)}$ de $\pi_1(Y, y)$ qui pour tout revêtement $v\colon \tilde{Y} \to Y$ de la forme $\tilde{Y} = Y \otimes_K L$, où $L/K$ est une extension séparable finie, $L \subset \bar{K}$, vérifie $\phi^{(\sigma)}_{\tilde{Y}} = \psi^{(\sigma)}_{\tilde{X}}$ comme automorphisme de $F_y(\tilde{Y}) = F_x(\tilde{X})$, avec $\tilde{X} = \mathrm{Spec}(L)$. Dans ce contexte on peut identifier $F_x(\tilde{X})$ avec l'ensemble des plongements de $L$ dans $\bar{K}$ au-dessus de $K$.

On fera attention que nous ne faisons ici en un sens que reprendre une partie des considérations du paragraphe 2.3. Deux différences cependant qui justifient cette reprise : nous précisons l'action extérieure en termes de 2-morphismes (voir ci-dessous) ; par contre nous ne distinguons pas explicitement la partie proprement arithmétique du groupe de Galois dans ce qui suit, autrement dit celle qui est attachée à la clôture séparable du corps premier dans le corps résiduel du point considéré ($k'$ dans la définition 2.15).

Considérons maintenant le diagramme 2-cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Z} \arrow[r] \arrow[d, "w"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{X} \arrow[d, "u"] \\
\mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "y"] \arrow[rr, bend right, "x"'] & Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

L'action de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$, en tant qu'automorphisme de $F_y(\tilde{Y}) = F_x(\tilde{X})$, se ramène à une composition par $\sigma$ ; plus précisément l'image de $(\tilde{y}, \alpha)$, formé du point $\tilde{y}\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to \tilde{Y}$ et de $\alpha\colon y \Rightarrow v(\tilde{y})$, est donnée par le couple $(\sigma^*(\tilde{y}), \alpha \circ id)$.

Par ailleurs le morphisme $\omega_y\colon \mathrm{Aut}(y) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ envoie $\beta \in \mathrm{Aut}(y)$ sur la transformation naturelle $\phi^{(\beta)}$ de $F_y$ définie par

$$\begin{aligned}
\phi^{(\beta)}_{\tilde{Y}} : F_y(\tilde{Y}) &\longrightarrow F_y(\tilde{Y}) \\
(\tilde{y}, \alpha) &\longmapsto (\tilde{y}, \alpha \circ \beta)\,.
\end{aligned}$$

L'image de $\omega_y$ est contenue dans le noyau du morphisme naturel $\pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, x) = \mathrm{Gal}(K)$ du fait que le groupe des automorphismes géométriques d'un point $y \in Y$ est naturellement isomorphe au groupe des automorphismes de tout point géométrique $\tilde{y}$ au-dessus de $y$. Plus formellement et en procédant comme ci-dessus, on considère un revêtement $\tilde{Y}$ de la forme $\tilde{Y} = Y \otimes_K L$ avec $L/K$ une extension galoisienne finie. On peut identifier la fibre $F_y(\tilde{Y})$ avec l'ensemble des points géométriques du produit fibré $\tilde{Z} = \tilde{Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\Omega)$, et comme le morphisme $v\colon \tilde{Y} \to Y$ est étale (en particulier représentable), $\tilde{Z}$ n'est autre qu'un ensemble de $d$ copies de $\mathrm{Spec}(\Omega)$ où $d$ est le degré de $v$, c'est-à-dire de l'extension $L/K$. Les automorphismes d'un point $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ ne sont autres que ceux de son image $y = v(\tilde{y})$ dans $Y$.

Nous pouvons maintenant décrire précisément l'action galoisienne arithmétique de ce point de vue modulaire, rappelant d'abord que dans la 2-catégorie des champs, on peut composer les 2-flèches de deux manières, horizontalement et verticalement, comme dans les diagrammes ci-dessous :

- pour $\alpha_1\colon f_1 \Rightarrow g_1$ et $\alpha_2\colon f_2 \Rightarrow g_2$ on définit $\alpha_2 \square \alpha_1\colon f_2 \circ f_1 \Rightarrow g_2 \circ g_1$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_1"] & Y \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_2"] & Z \arrow[r, mapsto] & X \arrow[r, bend left, "f_2 \circ f_1"] \arrow[r, bend right, "g_2 \circ g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_2 \square \alpha_1"] & Z
\end{tikzcd}$$

- pour $\alpha\colon f \Rightarrow g$ et $\beta\colon g \Rightarrow h$ on définit $\beta \circ \alpha\colon f \Rightarrow h$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & Y \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

On vérifie alors, en suivant les définitions, que l'action de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ sur $\beta \in \mathrm{Aut}(y)$ est définie à conjugaison près par l'élément $\beta^\sigma \in \mathrm{Aut}(y)$ tel que pour tout $\alpha$ dans $Y(\mathrm{Spec}(\Omega))$ on ait l'égalité :

$$\alpha \circ \beta^\sigma = \big((\alpha \Box id_{\sigma^{-1}}) \circ \beta\big) \Box id_\sigma\,,$$

formule qui ne fait que traduire le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, bend left=60, "\sigma"] \arrow[r, bend right=60, "\sigma"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_\sigma"] & \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "\sigma^{-1}"] \arrow[r, bend right=60, "\sigma^{-1}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow id_{\sigma^{-1}}"] \arrow[rr, bend left=60, "y\circ\sigma^{-1}"] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\Downarrow\beta"] & \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "y"] \arrow[r, bend right=60, "v(\tilde{y})"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\longmapsto \begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, bend left=60, "y"] \arrow[r, bend right=60, "v(\tilde{y})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\circ\beta^\sigma"] & Y \end{tikzcd}$$

Il est alors facile de se convaincre, et nous laisserons cet exercice de contemplation au lecteur, que cette action coïncide avec celle qui a été définie plus haut en partant des objets, ici des revêtements de courbes. On se souviendra simplement que les automorphismes (géométriques) des points $y$ du champ de modules ($\alpha$, $\beta$, etc.) correspondent aux automorphismes (géométriques) des revêtements du type $C \to C/\mathrm{Aut}(C)$, où $C = C_y$ représente $y$.

## 4.2. Action galoisienne sur l'inertie champêtre : le cas des champs de modules de courbes

Ce dernier paragraphe est consacré à un résultat qui décrit l'action galoisienne sur *certains* éléments de torsion du groupe fondamental géométrique des champs de modules de courbes. Il s'agit de montrer que cette action

sur l'inertie champêtre est bien cyclotomique, en un sens à préciser. On pourra comparer alors au fait que l'action galoisienne sur l'inertie *divisorielle* est elle toujours cyclotomique (voir [23] dans le cas des schémas). Pour ce faire on va utiliser l'équivalence des deux définitions de l'action galoisienne obtenue au paragraphe précédent et le fait que l'on sait que l'action galoisienne est cyclotomique sur l'inertie (divisorielle) dans le cas des revêments de courbes. Autrement dit on ramène l'étude de l'action sur l'inertie *champêtre* modulaire, correspondant aux éléments de torsion du groupe de Teichmüller, à l'action sur l'inertie *divisorielle* attachée aux objets représentés, ici des courbes. Cette stratégie présente cependant une limite évidente : elle ne permet pas de traiter la partie étale (*i.e.* non ramifiée) des revêtements du type $C \to C/\operatorname{Aut}(C)$, de laquelle nous ne pouvons rien dire ou presque. Répétons avant de commencer que comme souvent les possibilités et les tentations de variantes et variations en tous genres ne manquent pas. Nous nous contenterons de quelques énoncés pour ainsi dire « modèles », assortis de brèves remarques qui suggèrent de possibles variantes (pas toutes bien évidemment). Reprenons d'abord les éléments de la situation, avec les notations du paragraphe 4 ci-dessus. On fixe un type de courbes $(g, n)$ hyperboliques $(2g - 2 + n > 0)$ et le champ de modules $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,[n]}$ associé, que l'on regarde comme un champ de Deligne–Mumford sur $\mathbb{Q}$.

*Remarque 4.1.*

(1) Il est naturel en l'occurrence de considérer que les points marqués ne sont *pas* numérotés, et de les voir donc comme un diviseur, donnée qui viendra s'adjoindre à celle du diviseur de branchement d'un automorphisme. On pourrait cependant envisager d'autres situations c'est-à-dire d'autres sous-groupes de $\mathcal{S}_n$ qui définissent les permutations « licites ». On notera par exemple que si $C$ est une courbe hyperbolique lisse, le sous-groupe de ses automorphismes qui préservent un point $P$ donné est toujours cyclique (voir par exemple [2] ou [6]).

(2) Il serait possible de travailler au-dessus d'un ouvert de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ (de manière à rester dans une situation modérée ; voir proposition 3.5 ci-dessus) et de s'intéresser à l'action du Frobenius pour les premiers envisagés. Nous laisserons au lecteur le soin de lire ce qui suit dans cette perspective, qui demande peu de changements.

On note $\Gamma = \Gamma_{g,[n]}$ le groupe de Teichmüller associé, $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}) = \pi_1(\mathcal{M} \otimes \bar{\mathbb{Q}}) \simeq \hat{\Gamma}$ le groupe fondamental géométrique de $\mathcal{M}$. Si $G \hookrightarrow \Gamma$ est un groupe fini muni d'un plongement dans $\Gamma$ (à conjugaison près), $\mathcal{M}(G) \subset \mathcal{M}$ est le sous-champ fermé irréductible dont les points paramétrisent les courbes possédant un groupe d'automorphismes contenant $G$ (cf. proposition 3.6). Bien entendu les automorphismes permutent les points marqués, ou si l'on

préfère laissent stable le diviseur associé. On lit sur un $\mathbb{C}$-point de $\mathcal{M}(G)$ l'action topologique des automorphismes de la courbe correspondante, et ceux-ci contiennent un groupe conjugé à $G \subset \Gamma$. Dit autrement les plongements à conjugaison près des sous-groupes finis de $\Gamma$ énumèrent les composantes irréductibles de la stratification de $\mathcal{M}$ définie par les groupes d'automorphismes. Notons que ceci est clairement un trait spécifique aux champs de modules de courbes.

On définit ensuite le corps de définition $k(G)$ (arithmétique) de $\mathcal{M}(G)$ comme pour tout sous-champ irréductible (voir définition 2.15). Plus précisément, si $\kappa(G)$ est le corps des fonctions de $\mathcal{M}(G)$, $k(G)$ est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ (ou plus généralement du corps premier) dans $\kappa(G)$. Remarquons aussi que le degré de transcendance de $\kappa(G)$, qui n'est autre que la dimension de $\mathcal{M}(G)$, se détermine très explicitement. En effet, soit $[C]$ un point « générique » de $\mathcal{M}(G)$ ; ici on peut utiliser aussi bien *le* point générique de $\mathcal{M}(G)$, qu'un $\mathbb{C}$-point appartenant à un ouvert dense. Si $C$ est la courbe représentée par $[C]$, $deg.tr.(\kappa(G)) = \dim(\mathcal{M}(G))$ n'est autre que la dimension modulaire de la courbe quotient $D = C/G$ ; autrement dit : $\dim(\mathcal{M}(G)) = 3g' - 3 + n'$ si $D$ est de type $(g', n')$, les points de ramification du revêtement $C/D$ étant considérés comme marqués.

Il s'agit donc d'étudier dans cette situation l'action galoisienne sur les automorphismes, telle que définie plus haut. Soit $\xi(G)$ le point générique de $\mathcal{M}(G)$ et pour alléger la notation notons encore $\xi(G)$ la courbe associée. Dans la suite et pour simplifier la discussion, nous ferons l'hypothèse que $\mathrm{Aut}(\xi(G)) = G$, et donc en particulier que $\mathrm{Aut}(\xi(G))$ est cyclique si $G$ l'est. On a toujours, par définition, l'inclusion $G \subset \mathrm{Aut}(\xi(G))$, avec égalité « en général ». Plus précisément la question de l'égalité est topologique et les exceptions sont décrites exhaustivement dans [29]. Elles sont liées à la présence possible d'une involution hyperelliptique et $\mathrm{Aut}(\xi(G))$ est toujours au plus une extension de $\mathbb{Z}/2$ par $G$.

Sous l'hypothèse précédente que $G$ est bien le groupe d'automorphismes au point générique du lieu spécial, la monodromie topologique normalisée est donnée par le groupe $\tilde{\mu}^{top} = \Gamma(G)/G$, où $\Gamma(G) = \mathrm{Norm}_\Gamma(G)$ est le normalisateur de $G$ dans $\Gamma$. Plus géométriquement $\Gamma(G) = \pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}(G)})$, le groupe fondamental orbifold de la normalisation de $\mathcal{M}(G)$ vu comme une orbifold complexe, et $\Gamma(G)/G = \pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}(G)}_{(red)})$. Enfin le groupe de monodromie géométrique $\tilde{\mu}^{geom}$ est le complété profini du groupe discret $\tilde{\mu}^{top}$ (voir au §3 pour tout ce qui précède). On notera que dans cette situation la monodromie est en sens maximal, puisque dans tous les cas elle doit normaliser $G$ dans $\Gamma$.

D'après ce qui précède (cf. proposition 2.17) l'action galoisienne arithmétique s'écrit comme un morphisme

$$\rho : \mathrm{Gal}(k(G)) \to \mathrm{Out}(G)/Im(\tilde{\mu}^{geom})$$

et c'est ce morphisme, représentant ici l'action galoisienne arithmétique sur l'inertie champêtre, qu'il s'agit d'étudier. Il paraît très difficile d'obtenir des résultats dans le cas général mais on notera d'abord que si $G \subset G'$ on a manifestement $\mathcal{M}(G') \subset \mathcal{M}(G)$ et $k(G) \subset k(G')$. Il est donc naturel de se borner dans un premier temps aux groupes finis $G$ minimaux, autrement dit cycliques d'ordre premier. Sans aller jusque là et supposant seulement $G$ *abélien*, on peut réécrire l'action comme un morphisme

$$\rho : \mathrm{Gal}(k(G)) \to \mathrm{Aut}(G) \qquad \mathrm{mod}\ \widehat{\Gamma}(G)\,,$$

où l'on se souvient que $\Gamma(G) = \mathrm{Norm}_\Gamma(G)$ et son complété agit sur $G$ par conjugaison dans $\widehat{\Gamma}$.

*Remarque 4.2.* — Il y a là une subtilité concernant les complétions. La monodromie géométrique est en fait à définir comme la complétion de $\Gamma(G)$ *dans* $\widehat{\Gamma}$ et c'est donc *a priori* un *quotient* de la complétion profinie $\widehat{\Gamma}(G)$. Il paraît là aussi difficile de montrer (sauf en genre petit ou dans des cas très particuliers) la coïncidence de ces groupes, et on nous pardonnera ce qui est plus qu'un abus de notation ; disons que $\widehat{\Gamma}(G)$ agit *a priori* sur $G$ à travers un quotient.

Nous supposerons désormais $G$ cyclique d'ordre $N > 1$ pas nécessairement premier et noterons $\gamma$ un générateur : $G = \langle\gamma\rangle \simeq \mathbb{Z}/N$. Ces données équivalent à celle de $\gamma$, élément de torsion d'ordre $N$ de $\Gamma$, considéré à conjugaison près. Il est temps de plus de choisir un point base pour les groupes fondamentaux. Nous choisirons celui qui s'offre naturellement, à savoir le point générique du lieu spécial envisagé. Autrement dit soit comme ci-dessus $\mathcal{M}(G)$ le lieu spécial attaché à $G$, $\xi = \xi(G)$ son point générique, $\bar{\xi}$ un point géométrique au-dessus de $\xi$. On a

$$G \subset \mathrm{Aut}(\xi)(= \mathrm{Aut}(\bar{\xi})) \subset \pi_1^{geom}(\mathcal{M}, \bar{\xi}) \simeq \widehat{\Gamma}\,.$$

La proposition suivante est maintenant facile :

Proposition 4.3. — *Avec les notations ci-dessus, supposons que* $\mathrm{Aut}(\xi) = G$, *et soit* $k = k(G)$ *le corps de définition arithmétique du lieu spécial* $\mathcal{M}(G)$. *Il existe alors un caractère* $c : \mathrm{Gal}(k) \to (\mathbb{Z}/N)^\times$ *tel que l'action arithmétique basée au point* $\xi = \xi(G)$ *soit donnée, pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(k)$, *par*

$$\rho(\sigma)(\gamma) = \gamma^{c(\sigma)} \qquad \mathrm{mod}\ \widehat{\Gamma}(G)\,.$$

*Démonstration.* — On constate d'abord que le point $\xi$ étant défini sur $k$, $G = \mathrm{Aut}(\xi)$ est globalement préservé par l'action galoisienne, et $G$ étant cyclique celle-ci prend *ipso facto* la forme donnée dans l'énoncé. Enfin on se souvienda que géométriquement parlant $\Gamma(G) = \pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}(G)}, \bar{\xi})$ et que l'on pourrait diviser par le facteur $G$ pour retrouver $\Gamma(G)/G = \tilde{\mu}^{top} = \pi_1^{orb}(\widetilde{\mathcal{M}(G)}_{(red)}, \bar{\xi})$. □

*Remarque 4.4.* — On sait qu'un changement de point base donne lieu à une conjugaison dans $\widehat{\Gamma}$, ce qui est hautement non trivial. Plus précisément, soit $\xi$ et $\eta$ deux points (non nécessairement fermés et éventuellement tangentiels) du champ, ici $\mathcal{M}$. On dispose d'un espace $\pi_1(\mathcal{M}; \xi, \eta)$ (idem pour la version géométrique) de « chemins » de $\xi$ à $\eta$, autrement dit d'isomorphismes entre les foncteurs fibres attachés respectivement à $\xi$ et $\eta$ ; il s'agit d'un bitorseur, à gauche sous le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{M}, \xi)$ basé en $\xi$, à droite sous celui basé en $\eta$ ($\pi_1(\mathcal{M}, \eta)$). Revenant à notre situation, on peut par exemple prendre $\xi = \xi(G)$ comme plus haut et $\eta$ tel que son corps de définition arithmétique soit contenu dans celui de $\xi = \mathrm{Spec}(k(G)) = \mathrm{Spec}(k)$. On a alors une action de $\mathrm{Gal}(k)$ sur le bitorseur des chemins $\pi_1(\mathcal{M}; \xi, \eta)$. Celle-ci, qui entre en principe dans le champ de la géométrie anabélienne, est très riche et difficile à appréhender. On trouvera dans [28] l'une des rares études concrètes disponibles en dimension $> 1$.

Il faut aussi remarquer qu'il semble très difficile d'évaluer la taille de l'image de $\Gamma(G)$ dans $\mathrm{Aut}(G)$. C'est là essentiellement un problème de théorie des groupes discrets : étant donné $G \subset \Gamma$ un sous-groupe fini, disons abélien, du groupe de Teichmüller, comment évaluer l'image de $\mathrm{Norm}_\Gamma(G) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ agissant par conjugaison ? Il semble que le seul résultat de disjonction de l'action galoisienne et de la monodromie dont nous disposions à l'heure actuelle soit le théorème 1.1 de [30], qui malheureusement ne s'applique pas ici.

Par contre on peut choisir un autre point base $\eta \in \mathcal{M}(G)$, éventuellement tangentiel, et la proposition restera valable avec des groupes fondamentaux basés en $\eta$. Le corps de définition arithmétique, soit $k(\eta)$, augmente ($k(G) \subset k(\eta)$) mais on peut chercher un point « rationnel » (*i.e.* tel que $k(\eta) = k(G)$). En revanche la monodromie et son image dans $\mathrm{Aut}(G)$ ne peut que diminuer, et en ce sens l'énoncé obtenu peut être *plus* précis que celui de la proposition.

Afin de spécialiser encore, notons $\pi : C \to D = C/G$ le revêtement galoisien induit, avec $C = C_\xi$ la courbe au point générique, ou même $C = C_\eta$ pour un point $\eta \in \mathcal{M}(G)$ suffisamment général. Si $\pi$ est *étale*, c'est-à-dire ici non ramifié, il paraît très difficile d'aller au-delà de la conclusion générale de la proposition 4.3. Dans le cas contraire on peut par contre utiliser le résultat suivant :

Théorème 4.5. — *Si $G \subset \Gamma$ est un groupe* cyclique *tel que le revêment $\pi$ associé ne soit* pas *étale, alors le lieu spécial $\mathcal{M}(G)$ est défini sur $\mathbb{Q}$ (*i.e. *$k(G) = \mathbb{Q}$).*

Cet énoncé est en fait un corollaire immédiat d'un résultat qui a une longue histoire. Celui-ci affirme que sous les hypothèses ci-dessus, les données de ramification du revêtement $\pi$, données non triviales puisque $\pi$ n'est pas étale, suffisent à déterminer le type topologique du revêtement. Nous n'essaierons pas de détailler ce dernier énoncé, nous contentant d'indications, en particulier bibliographiques. Pour la définition des données de ramification, on se reportera par exemple à [3]. Le résultat qui nous intéresse revient à dire qu'un certain espace de Hurwitz est connexe. Dans le cas sans points marqués ($g > 1$, $n = 0$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_g$), il remonte semble-t-il à Nielsen (voir [5, Proposition 2.3.9] ; voir aussi [17], difficile à pénétrer mais qui vaudrait d'être « revisité »). Toujours dans le cas non marqué, on pourra se reporter également à [14] et [7]. Enfin [11, théorème 4.3] détaille l'argument supplémentaire qui permet de tenir compte du marquage. On obtient de la sorte :

Corollaire 4.6. — *Sous les hypothèses de la proposition 4.3, et si l'on suppose de plus que le revêtement $\pi : C \to C/G$ n'est* pas *étale, alors $k = \mathbb{Q}$ et $c = r\chi$ avec $r \in \mathbb{Z}/N$ et $\chi$ le caractère cyclotomique (considéré à valeurs dans $(\mathbb{Z}/N)^\times$).*

*Démonstration.* — Les seuls caractères de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$ sont les puissances du caractère cyclotomique. Ces caractères sont ici considérés modulo l'ordre $N$ du groupe cyclique $G$. □

L'entier $r$ est un peu l'analogue d'un twist de Tate dans le cas divisoriel, sauf qu'ici il est à considérer modulo l'ordre du groupe. Il nous reste seulement à exploiter l'action galoisienne sur l'inertie (dans le cas des courbes) pour voir que l'on peut dans certains cas montrer que $r = 1$.

Reprenons le revêtement galoisien $\pi : C \to C/G = D$, avec pour un instant $G$ un groupe fini quelconque. Il se décompose sous la forme $C/B/D$ où $C/B$ est galoisien de groupe $H \subset G$, celui-ci étant défini comme la clôture normale des sous-groupes d'inertie du revêtement $C/D$ (définis à conjugaison près). Le revêtement quotient $B/D$ est lui étale. On dira que $\pi$ est *totalement ramifié* si $H = G$ (et donc $B = D$), autrement dit si les sous-groupes d'inertie de $\pi$ engendrent normalement le groupe de Galois géométrique $G$. On peut alors énoncer :

Proposition 4.7. — *Sous les hypothèses de la proposition 4.3, et si l'on suppose de plus que le revêtement $\pi : C_\xi \to C_\xi/G$ est totalement ramifié, le corps de définition arithmétique du lieu spécial $\mathcal{M}(G)$ est égal à $\mathbb{Q}$ et l'action galoisienne basée en son point générique est cyclotomique : pour*

*tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$

$$\rho(\sigma)(\gamma) = \gamma^{\chi(\sigma)} \qquad \mathrm{mod}\ \ \widehat{\Gamma}(G)\,.$$

*Démonstration.* — Le corollaire 4.6 s'applique et il suffit donc de montrer que $r = 1 \pmod N$. Le paragraphe précédent (§4.1) nous permet d'utiliser l'action galoisienne sur le revêtement $\pi$ pour trancher la question. D'après [23] ou plus modestement, en dimension 1, le « branch cycle argument » (voir par exemple [13]), cette action est bien cyclotomique sur les sous-groupes d'inertie, autrement dit on a $r = 1 \pmod d$ si $d$ est l'ordre d'un tel sous-groupe. De ce que ces sous-groupes engendrent $G$ on déduit alors que $r = 1 \pmod N$. □

Bien entendu si l'ordre $N$ du groupe, c'est-à-dire de son générateur $\gamma$, est premier, alors ou bien le revêtement $\pi$ est étale et on ne peut que s'en tenir aux conclusions de la proposition 4.3, ou alors il est totalement ramifié et la proposition 4.7 s'applique. Si par contre $N$ n'est pas premier, on peut se trouver dans un cas intermédiaire ($B \neq C$ et $D \neq B$) et ceux-ci pourraient être intéressants à étudier. Peut-on en ce cas avoir $r \neq 1$ ? Noter qu'alors $H \subsetneq G$, $\mathcal{M}(G) \subset \mathcal{M}(H)$ avec inégalité en général et, dans le cas d'égalité, $\xi(H) = \xi(G)$ et $\mathrm{Aut}(\xi(G)) = G$ par hypothèse, d'où $\mathrm{Aut}(\xi(H)) = G \neq H$.

## Annexe A. Inertie singulière et inertie champêtre

Cet appendice a été inspiré par une lecture d'un article déjà ancien de Herbert Popp ([34]), dont il donne une version algébrique partielle. Comme mentionné dans l'introduction, il s'agit d'explorer comment la stratification inertielle d'un champ de Deligne–Mumford (sur un corps et toujours dans un contexte modéré) se reflète sur les singularités de son espace des modules, dont [24] ou [12] assure l'existence. En un mot, nous avons en vue une sorte de *réciproque partielle du classique théorème de pureté de la ramification*, qui conduit entre autres à définir ce que nous nommerons l'*inertie singulière*, mesurée par des sous-groupes des groupes d'inertie attachés aux idéaux de hauteurs $> 1$. Ces phénomènes étant de nature essentiellement locale nous nous bornerons à une étude de ce type après avoir rappelé un certains nombre de notions classiques, ne serait-ce que pour les notations, ce qui explique la relative longueur de cet appendice. Pour ne pas y ajouter encore, nous avons réduit les références au minimum. Les notions utilisées sont excellemment exposées dans de nombreux textes facilement accessibles ; exemple qui n'est sans doute pas le plus économique : combiner le livre de J-P. Serre ([39]), et les passages pertinents des EGA et SGA (spécialement [20, IV] et [21]). Passer de l'étude locale à des énoncés géométriques globaux n'est pas en principe difficile dans la mesure où les objets considérés sont suffisamment

canoniques pour se recoller naturellement. Il serait cependant intéressant de détailler tous ces points ; on se reportera d'abord à [34], qui rappelle en particulier la notion pertinente de stratification au sens de Zariski.

Commençons donc avec quelques notions très classiques, ce qui permettra entre autres de fixer les notations, tout aussi classiques. Rappelons d'abord la définition de la ramification dans un cadre général : étant donnés $A$ et $B$ deux anneaux et $\phi : A \to B$ un morphisme de type fini, soit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ un idéal premier de $B$ et $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ :

Définition A.1. — *Le morphisme $\phi$ est* non ramifié *en $\mathfrak{q}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ *;*
(2) $k(\mathfrak{q}) = B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ *est une extension séparable finie de* $k(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Le *lieu de ramification* $\mathrm{Ram}(\phi)$ est l'ensemble des points de $\mathrm{Spec}(B)$ en lesquels le morphisme $\phi$ est ramifié (*i.e.* n'est *pas* non ramifié). Si l'on suppose $A$ (et donc $B$) noethérien, ce qui sera toujours le cas dans la suite, ce lieu de ramification est un fermé de $B$. On dira alors que $\phi$ est non ramifié en codimension $i$ si $\mathrm{Ram}(\phi)$ est de codimension $> i$.

Soient maintenant $A$ et $B$ deux anneaux noethériens normaux (*i.e.* intègres et intégralement clos dans leurs corps des fractions). On suppose que l'on a une extension d'anneaux $A \hookrightarrow B$, qui fait de $B$ un $A$-module fini, autrement dit un revêtement fini $Y = \mathrm{Spec}(B) \to X = \mathrm{Spec}(A)$. Le théorème de pureté de Zariski, Nagata, Auslander, Grothendieck, etc. affirme alors la chose suivante :

Théorème A.2 (pureté de la ramification). — *Si $A$ est un anneau régulier et si l'extension $B/A$ est non ramifiée en codimension 1, alors elle est non ramifiée.*

On notera que l'extension $B/A$ (ou le revêtement affine $Y \to X$) est alors automatiquement plate donc étale parce que les anneaux $A$ et $B$ sont supposés normaux. Pour énoncer la réciproque partielle que nous avons en vue, nous aurons besoin d'hypothèses supplémentaires. On supposera en particulier, quitte à localiser, que l'anneau $A$ est local et donc $B$ semi-local. Rassemblons nos hypothèses :

Hypothèses A.3.

(1) *l'extension $B/A$ est une extension de degré fini $n$ d'anneaux noethériens normaux ;*
(2) *$A$ est un local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et c'est une $k$-algèbre de type fini, où $k = A/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel de $A$ ;*

(3) *l'extension $B/A$ est galoisienne, de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(B/A) = \mathrm{Aut}(Y/X)$ de cardinal $|G| = n$ ; en particulier $G$ agit sur $B$ et $A$ est l'anneau des invariants : $A = B^G$ ;*
(4) *la caractéristique de $k$ est première au cardinal $n$ de $G$.*

*Remarques.*

- Si $K$ et $L$ sont les corps des fractions respectifs de $A$ et $B$, l'hypothèse de normalité (1) implique que $B$ est la clôture intégrale de $A$ dans $L$ et l'hypothèse (3) entraîne que $L$ est une extension galoisienne de $K$ de groupe de Galois $G$.
- Les phénomènes qui nous intéressent ici étant locaux par rapport à $A$, nous suppons cet anneau local (cf. (2)), d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. L'anneau $B$ est alors semi-local et on note $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_g$ ses idéaux maximaux, où $g \geqslant 1$ divise le degré $n$ du revêtement.

  De plus nous nous plaçons dans la situation géométrique où $A$ contient son corps résiduel ce qui implique en particulier que $A$ est *excellent*, et l'anneau $B$ qui est de type fini sur $A$ l'est aussi. On rappelle si $R$ est un anneau local excellent, donc en particulier si $R$ est comme ici une $k$-algèbre locale essentiellement de type fini (c'est-à-dire localisée d'une $k$-algèbre de type fini), où $k$ est un corps quelconque, $R$ est régulier *si* et seulement si $\widehat{R}$ l'est.
- L'hypothèse (4) est bien sûr essentielle. C'est celle d'une situation « première à $p$ » mais le théorème A.5 ci-dessous s'étend à un contexte modéré plus général, en supposant seulement que les groupes d'inertie des points fermés sont de cardinaux premiers à la caractéristique. Le lecteur vérifiera que la démonstration ci-dessous s'étend sans peine à ce contexte.

Soit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ et $\mathfrak{p}$ son image dans $\mathrm{Spec}(A)$ : $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Le groupe $G$ agit transitivement sur les idéaux premiers $\mathfrak{q}'$ de $B$ au dessus de $\mathfrak{p}$ et on note $G^d(\mathfrak{q}) \subset G$ le groupe de *décomposition* de $\mathfrak{q}$, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments de $G$ qui préservent $\mathfrak{q}$, $G^i(\mathfrak{q})$ le sous-groupe d'*inertie*, à savoir le sous-groupe normal de $G^d(\mathfrak{q})$ formé des éléments qui induisent l'identité sur l'anneau $B/\mathfrak{q}$. Rappelons que les $G^d(\mathfrak{n}_i)$ sont conjugés dans $G$, de même que les $G^i(\mathfrak{n}_i)$. On note $e$ le cardinal commun des $G^i(\mathfrak{n}_i)$, $f$ celui des quotients $G^d(\mathfrak{n}_i)/G^i(\mathfrak{n}_i)$, autrement dit le degré séparable de l'extension de corps résiduels en $\mathfrak{n}_i$, et on a l'égalité $efg = n$.

Il sera nécessaire plus loin de compléter, de manière à pouvoir localiser également la situation par rapport à $B$. Rappelons d'abord un lemme classique et pour ce faire, *choisissons* l'un des $\mathfrak{n}_i$, noté désormais simplement $\mathfrak{n}$. On introduit alors $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{B}$) la complétion $\mathfrak{m}$-adique de $A$ (resp. $\mathfrak{n}$-adique de $B$), ce qui induit une injection continue $\widehat{A} \hookrightarrow \widehat{B}$. Les anneaux $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$

sont locaux noethériens et normaux parce que $A$ et $B$ sont excellents. On a alors :

Lemme A.4. — *L'extension $\widehat{B}/\widehat{A}$ est une extension finie galoisienne de groupe $\widehat{G} = \mathrm{Gal}(\widehat{B}/\widehat{A})$ égal au groupe de décomposition $G^d = G^d(\mathfrak{n})$, et le groupe d'inertie de $\mathfrak{n}\widehat{B}$ est égal au groupe d'inertie $G^i = G^i(\mathfrak{n})$.*

*Démonstration.* — Elle est classique et on a en fait le résultat plus fort suivant : si $A^h$ et $B^h$ sont les hensélisés respectifs des anneaux locaux $(A, \mathfrak{m})$ et $(B_\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, l'extension $B^h/A^h$ est galoisienne de groupe de Galois $G^d(\mathfrak{n})$. Soient $\overline{K}$ une clôture séparable de $K$ contenant $L$, $C$ la fermeture intégrale de $A$ dans $\overline{K}$ et $\mathfrak{r}$ un idéal maximal de $C$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{n}$. Notons $G^d_K = G^d(\mathfrak{r}, C/A)$ (resp. $G^d_L = G^d(\mathfrak{r}, C/B)$) le groupe de décomposition de $\mathfrak{r}$ pour l'extension $C/A$ (resp. $C/B$), c'est un sous-groupe du groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (resp. $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$). On donc une suite de décomposition :

$$1 \to G^d_L \to G^d_K \to G^d(\mathfrak{n}) \to 1.$$

Soit $A'$ (resp. $B'$) l'anneau des invariants de $C$ sous l'action de $G^d_K$ (resp. $G^d_L$), $A' = C^{G^d_K}$ (resp. $B' = C^{G^d_L}$), et $\mathfrak{m}'$ (resp. $\mathfrak{n}'$) la trace de $\mathfrak{r}$ sur $A'$ (resp. $B'$), on déduit de la suite exacte que $B'$ est une extension galoisienne de $A'$ de groupe $G^d(\mathfrak{n})$. On définit le hensélisé $A^h$ (resp. $B^h$) comme le localisé de $A'$ (resp. $B'$) : $A^h = A'_{\mathfrak{m}'}$ (resp. $B^h = B'_{\mathfrak{n}'}$). Par construction $\mathfrak{n}'$ est l'unique idéal maximal de $B'$ au-dessus de $\mathfrak{m}'$. Il en résulte que $B^h/A^h$ est encore une extension galoisienne de groupe $G^d(\mathfrak{n})$, avec d'ailleurs l'égalité $B^h = B' \otimes_{A'} A^h$, ce qui démontre la première assertion du lemme. Enfin les extensions résiduelles associées aux extensions $A^h/A$ et $B^h/B$ sont triviales, et donc le groupe d'inertie de l'extension $B^h/A^h$ est isomorphe à $G^i(\mathfrak{n})$, d'où la seconde assertion. □

Étant donné un anneau $R$, soit $\mathrm{Spec}^{(p)}(R)$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur $p$ ; nous nous intéresserons plus loin au cas $p = 1$. Considérons à nouveau les deux anneaux $A$ et $B$ vérifiant les hypothèses A.3. Étant donné toujours $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_i$ comme ci-dessus un idéal maximal de $B$, on considère les $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}^{(1)}(B_\mathfrak{n})$, autrement dit les idéaux de hauteur 1 de $B$ contenus dans $\mathfrak{n}$. On définit alors $H_a = H_a(\mathfrak{n})$ comme le sous-groupe de $G$ engendré par les $G^i(\mathfrak{q})$. On a l'inclusion $H_a(\mathfrak{n}) \subset G^i(\mathfrak{n})$ et les différents $H_a(\mathfrak{n}_i)$ sont conjugués. Géométriquement, le groupe $H_a$ correspond aux *hypersurfaces algébriques* passant par le point fermé $\mathfrak{n}$ et fixées point par point par des éléments du groupe $G$. Comme noté plus haut il nous faudra compléter et donc considérer l'analogue formel du sous-groupe $H_a$ : On considère donc à nouveau $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_i$ un idéal maximal de $B$, les complétés correspondant $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, ainsi que le groupe de décomposition $G^d(\mathfrak{n}) = \mathrm{Gal}(\widehat{B}/\widehat{A})$. On note alors $H_f = H_f(\mathfrak{n})$ le sous-groupe de $G^d(\mathfrak{n})$ engendré par les sous-groupes d'inertie

$G^i(\mathfrak{q})$ où $\mathfrak{q}$ parcourt $\mathrm{Spec}^{(1)}(\widehat{B})$. Le groupe $H_f$ correspond aux *hypersurfaces formelles* passant par le point fermé $\mathfrak{n}$ et fixées ponctuellement par des éléments du groupe de Galois $G$.

On voit facilement que $H_a(\mathfrak{n})$ et $H_f(\mathfrak{n})$ sont des sous-groupes normaux dans $G^d(\mathfrak{n})$, avec des inclusions successives :

$$H_a(\mathfrak{n}) \subset H_f(\mathfrak{n}) \subset G^i(\mathfrak{n}) \subset G^d(\mathfrak{n}) \subset G\,.$$

Soulignons que la première de ces inclusions n'est *pas* nécessairement une égalité et le résultat ci-dessous, analogue d'un résultat démontré dans [34] dans le cas où $k = \mathbb{C}$, nécessite de considérer le groupe $H_f$. Il conviendrait également, dans la situation de [34], de distinguer $H_f$ et $H_a$, ce qui n'est pas fait explicitement. Ajoutons que les différents $H_f(\mathfrak{n}_i)$ et $H_a(\mathfrak{n}_i)$ sont conjugués dans $G = \mathrm{Gal}(B/A)$ et que bien entendu, dans le cas où les anneaux $A$ et $B$ sont complets et donc tous deux locaux, on a l'égalité $H_f = H_a$. Nous pouvons finalement énoncer le résultat local sous la forme suivante :

Théorème A.5. — *Sous les hypothèses A.3 ci-dessus, si $\widehat{B}$ est régulier et $H_f = G^i$, alors $\widehat{A}$ est régulier.*

Remarquons aussi avant d'en venir à la preuve qu'il s'agit bien d'une réciproque partielle du théorème de pureté. Plus précisément, plaçons-nous pour simplifier dans la situation où $A$ et $B$ sont tous les deux locaux et complets d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$, et où l'extension résiduelle est triviale, autrement dit $B/\mathfrak{n} \simeq A/\mathfrak{m} = k$. Dans la notation précédente, on a donc $G = \widehat{G} = G^d = G^i$. L'extension intermédiaire de $A$ de groupe $G/H$, avec ici $H = H_f = H_a$, est non ramifiée en codimension 1, donc si l'on *suppose* que $A$ est régulier, cette extension est étale d'après le théorème de pureté. Or elle est aussi totalement ramifiée (en l'idéal maximal) puisque $B/A$ l'est, donc elle est triviale, d'où $H = G$. Autrement dit, dans la situation ci-dessus, on a l'égalité $H = G$ *si et seulement si* $A$ est régulier. Le théorème de pureté (théorème A.2 ci-dessus) montre que cette condition est suffisante, tandis que le théorème A.5 affirme qu'elle est aussi nécessaire. On verra dans la preuve ci-dessous que le recours aux complétions s'impose à travers l'usage du théorème de structure de Cohen sur les anneaux complets réguliers.

Tirons d'abord pour illustration les conséquences de cet énoncé avant complétion en notant d'ailleurs que les hypothèses A.3 sont locales sur $A$ mais que l'on pourrait considérer une situation (affine) globale et commencer par localiser. Ceci dit on a le

Corollaire A.6. — *Sous les hypothèses A.3 ci-dessus, on suppose que $H_a(\mathfrak{n}) = G^i(\mathfrak{n})$ pour l'un des (et donc tous les) idéaux de $B$ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ ; alors $A$ est régulier.*

*Démonstration du corollaire.* — C'est une conséquence facile du théorème et du lemme A.4 : on commence par compléter $A$ et $B$ relativement à $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ ; le complété $\widehat{B}$ est régulier puisque $B$ l'est et le théorème, joint au fait que l'inertie formelle contient l'inertie algébrique ($H_a(\mathfrak{n}) \subset H_f(\mathfrak{n})$) implique que $(\widehat{B})^{\widehat{G}}$ est régulier. D'après le lemme A.4 cet anneau n'est autre que $\widehat{A}$, qui est donc régulier. Enfin $A$ lui-même est régulier car excellent. □

*Démonstration du théorème.* — Nous allons essentiellement profiter de la complétude des anneaux considérés pour linéariser l'action du groupe, puis nous appuyer sur un théorème classique originellement dû à Chevalley (voir par ex. [4, §5]) pour traiter le cas d'une action linéaire. Nous supposons donc ici $A$ et $B$ complets (et donc $B$ local), autrement dit $\widehat{A} = A$ et $\widehat{B} = B$. De plus, quitte à remplacer $A$ par une extension finie étale, ce qui ne change rien à l'hypothèse ni à la conclusion, nous pouvons supposer que l'extension de corps résiduels est triviale, autrement dit que $B/\mathfrak{n} \simeq A/\mathfrak{m} = k$. Finalement on suppose donc que $G = \widehat{G} = G^d = G^i$.

Étant donnés $B$ un anneau noethérien et $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de $B$, on dispose de l'espace tangent de $B$ en $\mathfrak{n}$, défini comme l'algèbre symétrique $T_{\mathfrak{n}}B$ sur le $k$ espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$, $T_{\mathfrak{n}}B = Sym(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \simeq k[x_1, \ldots, x_t]$, où $t$ est la dimension de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$. Nous noterons encore $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal homogène de $T_{\mathfrak{n}}B$ formé des éléments de degré strictement positif. Si $(B, \mathfrak{n})$ est un anneau local régulier de dimension $d$, l'espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ est de dimension $d$, et si de plus $B$ est complet, il est isomorphe à la complétion $\mathfrak{n}$-adique de l'algèbre $T_{\mathfrak{n}}B$ ($B \simeq \widehat{T_{\mathfrak{n}}B}$), d'après un théorème classique de Cohen, caractéristique de la situation « géométrique » dans laquelle nous nous plaçons. On notera alors $TB = T_{\mathfrak{n}}B$.

Donnons un sens algébrique à la notion d'action linéaire et de linéarisation dans ce contexte. Si $(A, \mathfrak{m})$ et $(B, \mathfrak{n})$ sont deux anneaux locaux et $h\colon A \to B$ un morphisme local de $A$ dans $B$, $h$ induit une application linéaire $Dh$ de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$, le morphisme tangent à $h$ (au point fermé). On note encore $Dh : TA \to TB$ le morphisme induit. Si $A$ et $B$ sont complets et réguliers, $h$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme tangent l'est.

Inversement, supposons $(B, \mathfrak{n})$ local régulier complet et soit $D$ un morphisme de $TB$ dans lui-même tel que $D(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$. En particulier un tel morphisme est induit naturellement par un morphisme du $k$-espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$, puisque $TB = Sym(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$. Étant donné un tel $D$, nous pouvons le prolonger en un morphisme $\tilde{D}$ de $B$ dans lui-même, dont le morphisme tangent est précisément $D$. Nous dirons alors qu'un morphisme local de $B$ dans $B$ est *linéaire* s'il est égal au morphisme associé à son morphisme tangent, $h = \widetilde{Dh}$. Le lemme classique de linéarisation s'exprime alors sous la forme suivante :

Lemme A.7. — *Avec les notations précédentes, soit $G$ un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique du corps $k$ si celle-ci est positive, agissant sur l'anneau $B$. Pour tout $g \in G$ notons encore $g$ l'isomorphisme de $B$ dans $B$ correspondant à l'action de $g$.*

*Alors il existe un automorphisme $\phi\colon B \to B$ tel que pour tout $g \in G$, le morphisme $\phi \circ g \circ \phi^{-1}$ soit linéaire. De plus on peut choisir $\phi$ tangente à l'identité ($D\phi = id$).*

*Démonstration du lemme.* — Pour tout $g \in G$, notons $\widetilde{Dg}$ le morphisme de $B$ dans $B$ associé comme ci-dessus au le morphisme tangent $Dg$ de $TB$ dans $TB$ associé à $g$. Il suffit alors de poser pour tout $x \in B$ :

$$\phi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\widetilde{Dg})^{-1}(gx)\,.$$

Le morphisme tangent associé à $\widetilde{Dg}$ étant égal à $Dg$, le morphisme tangent $D\phi$ est égal à l'identité et $\phi$ est bien un automorphisme de $B$ dans $B$. De plus, pour tout $h$ dans $G$ :

$$\widetilde{Dh}\big(\phi(x)\big) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\widetilde{Dh})(\widetilde{Dg})^{-1}(gx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (\widetilde{Dg'})^{-1}(g'hx) = \phi\big(h(x)\big)\,.$$

Le morphisme $\phi \circ h \circ \phi^{-1}$ est donc bien linéaire, égal à $\widetilde{Dh}$. On notera que, très classiquement encore, c'est le procédé de moyennisation qui nécessite d'inverser le cardinal de $G$, supposé premier à la caractéristique. Cependant, toutes réductions faites, nous avons supposé que $G = G^i$ et si l'on part d'une situation (affine) globale, ce sont en fait les groupes d'inertie (des points fermés) dont on inverse les cardinaux. □

Nous pouvons maintenant achever la preuve du théorème. L'anneau des invariants $B^{G_\phi}$ de $B$ sous l'action de $G$ transmuée par $\phi$ est isomorphe à l'anneau des invariants $A = B^G$ puisque $x \in B^G$ si et seulement si $\phi(x) \in B^{G_\phi}$. Nous pouvons donc supposer que l'action de $G$ est linéaire. Le groupe $G$ peut alors être considéré comme un sous-groupe linéaire de $\mathrm{GL}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$, qui induit une action sur l'algèbre $TB$ fixant l'idéal maximal $\mathfrak{n}$.

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $B$ de hauteur 1 et soit $T\mathfrak{q}$ la trace de $\mathfrak{q}$ sur $TB$ ; comme $B$ est la complétion $\mathfrak{n}$-adique de $TB$, $T\mathfrak{q}$ est un idéal premier de $TB$ de hauteur 1 contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Le groupe d'inertie de $\mathfrak{n}$ pour l'extension $A = B^G \hookrightarrow B$ est égal au groupe d'inertie de $T\mathfrak{q}$ pour l'extension $TA = (TB)^G \hookrightarrow TB$. En effet si $h$ appartient à $G^i(\mathfrak{q})$ alors pour tout $x \in B$ , $hx - x \in \mathfrak{q}$, et donc pour tout $x \in TB$ , $hx - x \in T\mathfrak{q} = TB \cap \mathfrak{q}$, de sorte que $h$ appartient à $G^i(T\mathfrak{q})$. Par conséquent si $A \hookrightarrow B$ est ramifiée en $\mathfrak{q}$, $TA \hookrightarrow TB$ est ramifiée en $T\mathfrak{q}$, et d'après le lemme 4 de [4] (§5.5, Compléments), le

groupe d'inertie $G^i(T\mathfrak{q})$ est engendré par une pseudo-réflexion de l'espace vectoriel $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$.

L'hypothèse du théorème, soit $\widehat{H} = G^i(= G)$ entraîne donc que le groupe $G$ est engendré par des pseudo-réflexions et d'après le théorème 4 de [4] (*loc. cit.*), l'anneau des invariants $(TB)^G$ est un anneau de polynômes, en particulier est régulier. Passant au complété, on voit donc que l'anneau $\widehat{(TB)^G}$ est régulier. Le théorème résultera alors de l'égalité $\widehat{(TB)^G} = \widehat{TB}^G$. En effet, en admettant cette égalité (voir lemme A.8 ci-dessous) on peut écrire : $A = B^G = \widehat{TB}^G = \widehat{(TB)^G}$, ce qui assure bien que $A$ est régulier. Enfin l'égalité $\widehat{(TB)^G} = \widehat{TB}^G$ est conséquence du lemme plus général ci-dessous (appliqué à $R = TB$), dont la démonstration terminera donc aussi celle du théorème.

Lemme A.8. — *Soient $R$ est un anneau noethérien, $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de $R$ et $\widehat{R}$ la complétion $\mathfrak{n}$-adique de $R$. Soit $G$ un groupe fini de cardinal premier à la caractéristique de $R$ qui fixe l'idéal $\mathfrak{n}$ : notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau des invariants $R^G$ au dessous de $\mathfrak{n}$ et $\widehat{R^G}$ la complétion $\mathfrak{m}$-adique de $R^G$. Alors $G$ agit sur $\widehat{R}$ et nous avons l'isomorphisme $\widehat{R}^G \simeq \widehat{R^G}$.*

*Démonstration du lemme.* — Il suffit de montrer que $\widehat{R}^G \subset \widehat{R^G}$, l'inclusion inverse étant évidente. Soit $u = (u)_j \in \widehat{R}^G$ un élément représenté par une suite de Cauchy : $u_k - u_j \in \mathfrak{m}^j$ si $k \geqslant j$. On peut lui associer $v \in \widehat{R}$ défini par la suite $v = (v_j)$ où $v_j = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g u_j$. On obtient ainsi $v \in \widehat{R^G}$. Il suffit de montrer que $v = u$. Or, dire que $u \in \widehat{R}^G$ équivaut à dire que pour tout $g \in G$ et tout $j \geqslant 0$ il existe $k \geqslant 0$ tel que $g u_k - u_k \in \mathfrak{m}^j$. On en déduit bien, puisque $G$ est fini, que pour tout $j \geqslant 0$ on peut trouver $k$ tel que $v_k - u_k \in \mathfrak{m}^j$, autrement dit que $v = u$. □

Le théorème A.5 invite à prendre en considération les quotients $G^i(\mathfrak{n})/H_a(\mathfrak{n})$ et $G^i(\mathfrak{n})/H_f(\mathfrak{n})$, et à poser pour ce faire la définition suivante :

Définition A.9. — *Soient $A$ et $B$ deux anneaux vérifiant les hypothèses A.3 et soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $B$ au-dessus de l'idéal $\mathfrak{m}$ de $A$. On appellera* inertie singulière algébrique *et on notera $G^{isa}(\mathfrak{n})$ le quotient $G^i(\mathfrak{n})/H_a(\mathfrak{n})$ ; on appellera* inertie singulière formelle *(ou simplement* inertie singulière*) et on notera $G^{isf}(\mathfrak{n})$ (ou simplement $G^{is}(\mathfrak{n})$) le quotient $G^i(\mathfrak{n})/H_f(\mathfrak{n})$.*

*Ces groupes ont été introduits par H. Popp (dans* [34, Definition 1]*) dans le cas complexe, sans toutefois distinguer $G^{isa}$ et $G^{is}$. D'autre part, si $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ sont deux idéaux maximaux au-dessus de $\mathfrak{m}$, les groupes d'inertie $G^i(\mathfrak{n})$ et $G^i(\mathfrak{n}')$ sont conjugués : il existe $\tau$ dans $G$ tel que $\mathfrak{n}' = \tau\mathfrak{n}$ et $G^i(\mathfrak{n}') = \tau G^i(\mathfrak{n})\tau^{-1}$. De même $H_f(\mathfrak{n}') = \tau H_f(\mathfrak{n})\tau^{-1}$ et les groupes d'inertie singulière $G^{is}(\mathfrak{n})$ et $G^{is}(\mathfrak{n}')$ sont isomorphes. On a donc défini un groupe qui ne dépend*

*que de l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* $A$ *à isomorphisme (explicite) près et on s'y réfèrera à l'occasion comme au groupe d'inertie singulière en* $\mathfrak{m}$ *associé à l'extension* $B/A$ *; on le notera alors* $G^{is}(\mathfrak{m})$ *ou* $G^{is}_{B/A}(\mathfrak{m})$.

Les groupes d'inertie singulière possèdent d'autres agréables propriétés de fonctorialité. Ainsi, soit $B/A$ une extension galoisienne de groupe $G$, $F$ un sous-groupe normal de $G$. L'anneau $B' = B^F$ est donc extension galoisienne de $A$ de groupe $G' = G/F$, et si pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de $B$, on note $\mathfrak{q}'$ sa trace sur $B'$ ($\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} \cap B'$) on dispose des suites exactes :

$$1 \longrightarrow G^d_{B/B'}(\mathfrak{q}) \longrightarrow G^d_{B/A}(\mathfrak{q}) \longrightarrow G^d_{B'/A}(\mathfrak{q}') \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow G^i_{B/B'}(\mathfrak{q}) \longrightarrow G^i_{B/A}(\mathfrak{q}) \longrightarrow G^i_{B'/A}(\mathfrak{q}') \longrightarrow 1,$$

avec les égalités :

$$G^d_{B/B'}(\mathfrak{q}) = G^d_{B/A}(\mathfrak{q}) \cap F \quad \text{et} \quad G^i_{B/B'}(\mathfrak{q}) = G^i_{B/A}(\mathfrak{q}) \cap F.$$

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de $B$ de hauteur $h$, l'idéal premier $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} \cap B'$ de $B'$ est aussi de hauteur $h$, et réciproquement tous les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de $B$ au-dessus d'un idéal premier $\mathfrak{q}'$ de $B'$ de hauteur $h$ sont aussi de hauteur $h$. On en déduit que pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $B$, l'application de $G^i_{B/A}(\mathfrak{n})$ dans $G^i_{B'/A}(\mathfrak{q}')$ induit une application surjective de $H_{a,B/A}(\mathfrak{n})$ dans $H_{a,B'/A}(\mathfrak{n}')$. De plus le sous-groupe $H_{a,B/B'}(\mathfrak{n})$ de $G^i_{B/B'}(\mathfrak{n})$ est inclus dans $H_{a,B/A}(\mathfrak{n}) \cap F$, mais il n'y a pas égalité en général, ni donc de suite exacte reliant les sous-groupes $H_a$. En passant au complétés nous trouvons ces résultats pour les groupes d'inertie formelle $H_f$, c'est-à-dire une suite exacte :

$$1 \longrightarrow H_{f,B/A}(\mathfrak{n}) \cap F \longrightarrow H_{f,B/A}(\mathfrak{n}) \longrightarrow H_{f,B'/A}(\mathfrak{n}') \longrightarrow 1,$$

et l'inclusion :

$$H_{f,B/B'}(\mathfrak{n}) \subset H_{f,B/A}(\mathfrak{n}) \cap F.$$

Supposons maintenant que $(A, \mathfrak{m})$ est l'anneau local d'une singularité quotient, c'est-à-dire qu'il existe un anneau local régulier $(B, \mathfrak{n})$ et un groupe fini $G$ agissant sur $B$ tels que $A$ soit l'anneau des invariants $A = B^G$. Nous avons alors défini le groupe d'inertie singulière $G^{is}_{B/A}(\mathfrak{n}) = G^{is}_{B/A}(\mathfrak{m})$ comme associé à l'extension galoisienne $B/A$, mais on va déduire du théorème de pureté que ce groupe est en fait plus intrinsèquement un invariant de l'anneau local $(A, \mathfrak{m})$. Le résultat précis est le suivant :

Proposition A.10. — *Soient* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local,* $(B, \mathfrak{n})$, $(B', \mathfrak{n}')$ *deux anneaux locaux* réguliers *et* $G$, $G'$ *deux groupes finis, agissant respectivement sur* $B$ *et* $B'$ *tels que* $A = B^G = B'^{G'}$ *(*$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{n}' \cap A$*). Alors les groupes d'inertie singulière* $G^{is}_{B/A}(\mathfrak{m})$ *et* $G^{is}_{B'/A}(\mathfrak{m})$ *associés respectivement aux extensions* $B/A$ *et* $B'/A$ *sont isomorphes.*

*Démonstration.* — Étant données les extensions galoisiennes normales (intégralement closes) $B/A$ et $B'/A$, on peut trouver $C/A$ galoisienne qui les dominent toutes deux ($A \subset B \subset C$ et $A \subset B' \subset C$). Il suffit d'ailleurs de prendre pour $C$ la clôture intégrale de $A$ dans une extension galoisienne finie du corps des fractions de $A$ contenant les corps des fractions de $B$ et $B'$.

Ceci permet (après changement de notations) de se restreindre au cas où $A \subset B' \subset B$, avec $(B', \mathfrak{n}')$, anneau local régulier ; $B/A$ est une extension galoisienne de groupe $G$, $B/B'$ une extension galoisienne de groupe $F$ avec $F$ sous-groupe normal de $G$, et $B'/A$ est une extension galoisienne de groupe $G' = G/F$. On peut supposer de plus que les anneaux $A$, $B'$ et $B$ sont complets.

L'anneau $B'$ étant régulier, le théorème de pureté implique l'égalité $H_{f,B/B'}(\mathfrak{n}) = G^i_{B/B'}(\mathfrak{n})$, d'où des inclusions :

$$H_{f,B/B'}(\mathfrak{n}) \subset H_{f,B/A}(\mathfrak{n}) \cap F \subset G^i_{B/A}(\mathfrak{n}) \cap F = G^i_{B/B'}(\mathfrak{n}),$$

qui montrent l'égalité $H_{f,B/A}(\mathfrak{n}) \cap F = G^i_{B/B'}(\mathfrak{n})$. On déduit alors des suites exactes données ci-dessus l'isomorphisme cherché : $G^{is}_{B/A}(\mathfrak{m}) \simeq G^{is}_{B'/A}(\mathfrak{m})$. □

Il a déjà été mentionné que l'on peut étendre ces considérations à une situation affine non locale. Pour le dire plus précisément, si $B/A$ est une extension galoisienne d'anneaux non nécessairement locaux et si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de $B$, on peut naturellement définir le groupe d'inertie singulière $G^{is}(\mathfrak{q})$ (ainsi que le groupe $G^{isa}(\mathfrak{q})$) en $\mathfrak{q}$ associé à l'extension $B/A$ comme le groupe d'inertie singulière associé à l'extension d'anneaux locaux $B_{\mathfrak{q}}/A_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. En fait on peut aussi le définir directement, sans localisation préalable, comme le sous-groupe $H_f(\mathfrak{q})$ du sous-groupe d'inertie $G^i(\mathfrak{q})$ engendré par les groupes d'inertie $G^i(\mathfrak{r})$, où $\mathfrak{r}$ parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de $\widehat{B}^{\mathfrak{q}}$, complété de $B$ pour la topologie $\mathfrak{q}$-adique, contenus dans $\mathfrak{q}\widehat{B}^{\mathfrak{q}}$. Ce groupe $H_f(\mathfrak{q})$ est alors encore un sous-groupe normal de $G^i(\mathfrak{q})$ et le groupe d'inertie singulière $G^{is}(\mathfrak{q})$ est dééfini comme le groupe quotient $G^i(\mathfrak{q})/H_f(\mathfrak{q})$. Comme précédemment ce groupe ne dépend pas, à conjugaison près, de l'idéal premier $\mathfrak{q}$ de $B$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ et on peut le noter aussi $G^{is}_{B/A}(\mathfrak{p})$. On laissera au lecteur le soin de préciser en quoi il est également en un sens indépendant de $B$ si celui-ci peut être pris régulier en $\mathfrak{q}$, autrement dit dans le cas des singulariés quotients.

Ceci clôt une étude locale qui pourrait d'ailleurs se poursuivre. Comme indiqué dans l'introduction à cet appendice, nous ne nous engagerons pas dans le détail du passage au point de vue global mais terminerons cependant avec quelques indications rapides à ce sujet. Soit donc à nouveau $\mathcal{X}/k$ un champ de Deligne–Mumford de présentation finie, séparé et régulier sur un

corps $k$. On note $X = \mathcal{X}_{\mathrm{mod}}$ son espace des modules et on peut supposer pour simplifier que $X$ est un schéma quasiprojectif ; il est muni de l'application modulaire $\pi : \mathcal{X} \to X$. Sur le champ $\mathcal{X}$ on dispose de la stratification inertielle naturelle $\Sigma_{in}(\mathcal{X})$ induite par les groupes (finis) d'inertie (champêtre) des points de $\mathcal{X}$ (cf. §2 ci-dessus), dont on supposera que les ordres sont premier à la caractéristique du corps de base $k$.

D'autre part, le champ $\mathcal{X}$ étant supposé régulier, les singularités de $X$ sont des singularités quotients. À chaque point $x$ (non nécessairement fermé) de $X$ on attache alors un groupe d'inertie singulière $G_X^{is}(x)$, défini à isomorphisme près et obtenu en appliquant la définition locale au complété $\hat{\mathcal{O}}_X(x)$ de l'anneau local en $X$. On construit ensuite une « stratification » $\Sigma_{is}(X)$ de $X$ telle que le long des strates (ouvertes) le groupe d'inertie singulière est constant. Sous de larges hypothèses, qui seraient à préciser en s'inspirant du Chapitre II de [34], cette stratification mérite bien son nom en ce qu'elle représente une stratification au sens de Zariski, le trait essentiel étant une propriété d'*équisingularité* le long des strates de $\Sigma_{is}(X)$, qui en ce sens décrit donc bien la topographie des singularités de $X$.

Ceci posé mais qui serait à détailler, il est naturel de s'interroger sur la correspondance de ces deux stratifications suivant l'application modulaire $\pi$. Il est clair que la stratification $\Sigma_{is}(X)$ sur l'espace des modules « ne voit pas », par définition, les lieux à automorphismes de codimension 1 (ou 0 ; autrement dit dans le cas où un point générique n'est pas schématique). Il est presque aussi clair que les deux stratifications se correspondent en dehors de ces lieux ($\pi(\Sigma_{in}(\mathcal{X})) = \Sigma_{is}(X)$) puisqu'alors l'inertie singulière coïncide avec l'inertie toute entière. Modulo les lieux à automorphismes de codimension 1 (ou 0), on peut ainsi « lire » sur les singularités de l'espace des modules $X$ la stratification inertielle du champ $\mathcal{X}$. Il serait intéressant peut-être de chercher à comprendre en quel sens on peut « reconstruire » $\mathcal{X}$ connaissant $X = \mathcal{X}_{\mathrm{mod}}$ et $\Sigma_{is}(X)$, du moins en l'absence de lieux à automorphismes de codimension 1. Revenons enfin à ce propos aux champs de modules des courbes $\mathcal{M}_{g,n}$ ; en ce cas il est facile de voir que si $g = 3$, le seul lieu de codimension 1 (ou 0) est le lieu hyperelliptique avec $n = 0$ (courbes non marquées), tandis que pour $g > 3$, il n'y a plus aucun tel lieu. Hors quelques cas bien compris et de petites dimensions, tous les lieux à automorphismes sont donc de codimensions au moins 2 et ce qui précède s'applique directement.

## Bibliographie

[1] D. Abramovich & A. Vistoli, « Compactifying the space of stable maps », *J. Am. Math. Soc.* **15** (2002), n° 1, p. 27-75.

[2] F. Bars, « Automorphism groups of genus 3 curves », Number Theory Seminar UAB-UB-UPC, Barcelona, January 2005, `mat.uab.es/~francesc/mates/autgen3.pdf`.

[3] J. Bertin & M. Romagny, *Champs de Hurwitz*, Mém. Soc. Math. Fr., vol. 125–126, Société Mathématique de France, 2011, 219 pages.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 5*, Éléments de Mathematique, Masson, 1981.

[5] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer, 1982, x+306 pages.

[6] E. Bujalance, F. J. Cirre, J. M. Gamboa & G. Gromadzki, *Symmetries of Compact Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2007, Springer, 2010, xx+158 pages.

[7] F. Catanese, « Irreducibility of the space of cyclic covers of algebraic curves of fixed numerical type and the irreducible components of $\mathrm{Sing}(\overline{\mathfrak{M}_g})$ », in *Advances in geometric analysis*, Advanced Lectures in Mathematics, vol. 21, Higher Education Press, 2012, p. 281-306.

[8] B. Collas, « Action of a Grothendieck-Teichmüller group on torsion elements of full Teichmüller modular groups of genus one », *Int. J. Number Theory* **8** (2012), n° 3, p. 763-787.

[9] ———, « Action of the Grothendieck-Teichmüller group on torsion elements of full Teichmüller modular groups in genus zero », *J. Théor. Nombres Bordx.* **24** (2012), n° 3, p. 605-655.

[10] B. Collas & S. Maugeais, « On Galois action on stack inertia of moduli spaces of curves », `https://arxiv.org/abs/1412.4644`, 2014.

[11] ———, « Composantes irréductibles de lieux spéciaux d ?espaces de modules de courbes, action galoisienne en genre quelconque », *Ann. Inst. Fourier* **65** (2015), n° 1, p. 245-276.

[12] B. Conrad, « The Keel-Mori theorem via stacks », `math.stanford.edu/~conrad/papers/coarsespace.pdf`, 2005.

[13] K. Coombes & D. Harbater, « Hurwitz families and arithmetic Galois groups », *Duke Math. J.* **52** (1985), p. 821-839.

[14] M. Cornalba, « On the locus of curves with automorphisms », *Ann. Mat. Pura Appl.* **149** (1987), p. 135-151.

[15] P. Dèbes & M. Emsalem, « On fields of moduli of curves », *J. Algebra* **211** (1999), n° 1, p. 42-56.

[16] P. Deligne & D. Mumford, « The irreducibility of the space of curves of given genus », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **36** (1969), p. 75-109.

[17] A. L. Edmonds, « Surface symmetry I », *Mich. Math. J.* **29** (1982), p. 171-183.

[18] H. M. Farkas & I. Kra, *Riemann surfaces*, 2nd éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer, 1992, xvi+363 pages.

[19] G. González-Díez & W. J. Harvey, « Moduli of Riemann surfaces with symmetry », in *Discrete groups and geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 173, Cambridge University Press, 1992, p. 75-93.

[20] A. Grothendieck, « Éléments de géométrie algébrique. I–IV », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960–1967), Rédigé avec la collaboration de Jean Dieudonné.

[21] ——— (éd.), *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz loceaux et globeaux (SGA 2)*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 2, North-Holland, 1968, 287 pages.

[22] ——— (éd.), *Revêtements Etales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer, 1971, xxii+447 pages.

[23] A. Grothendieck & J. P. Murre, *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 208, Springer, 1971, viii+133 pages.

[24] S. Keel & S. Mori, « Quotients by groupoids », *Ann. Math.* **145** (1997), n° 1, p. 193-213.

[25] G. Laumon & L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 39, Springer, 2000, xii+208 pages.

[26] P. Lochak, « On arithmetic curves in the moduli spaces of curves », *J. Inst. Math. Jussieu* **4** (2005), n° 3, p. 443-508.

[27] ———, « Results and conjectures in profinite Teichmüller theory », in *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 63, Mathematical Society of Japan, 2012, p. 263-335.

[28] P. Lochak, H. Nakamura & L. Schneps, « Eigenloci of 5 points configurations on the Riemann sphere and the Grothendieck-Teichmüller group », *Math. J. Okayama Univ.* **46** (2004), p. 39-75.

[29] K. Magaard, T. Shaska, S. V. Shpectorov & H. Völklein, « The locus of curves with prescribed automorphism group », *RIMS Kokyuroku* **1267** (2002), p. 112-141.

[30] M. Matsumoto & A. Tamagawa, « Mapping class group action versus Galois action on profinite fundamental groups », *Am. J. Math.* **122** (2000), n° 5, p. 1017-1026.

[31] B. Noohi, « Fundamental groups of algebraic stacks », Thèse, M.I.T. (USA), 2000.

[32] ———, « Fundamental groups of algebraic stacks », *J. Inst. Math. Jussieu* **3** (2004), n° 1, p. 69-103.

[33] F. Orgogozo, « Altérations et groupe fondamental premier à $p$ », *Bull. Soc. Math. Fr.* **131** (2003), n° 1, p. 123-147.

[34] H. Popp, « Stratifikation von Quotientenmannigfaltigkeiten und insbesondere der Modulmannigfaltigkeiten für Kurven », *J. Reine Angew. Math.* **250** (1971), p. 12-41.

[35] M. Romagny, « Group actions on stacks and applications », *Mich. Math. J.* **53** (2005), n° 1, p. 209-236.

[36] ———, « Composantes connexes et irréductibles en familles », *Manuscr. Math.* **136** (2011), n° 1-2, p. 1-32.

[37] L. Schneps, « Special loci in moduli spaces of curves », in *Galois groups and fundamental groups*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 41, Cambridge University Press, 2003, p. 217-275.

[38] ———, « Automorphisms of curves and their role in Grothendieck-Teichmüller theory », *Math. Nachr.* **279** (2006), n° 5-6, p. 656-671.

[39] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1296, Hermann, 1962, 243 pages.

[40] W. P. Thurston, « Geometry and topology of three-manifolds », `http://library.msri.org/books/gt3m/`, 1979.

[41] A. Vistoli, « Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces », *Invent. Math.* **97** (1989), n° 3, p. 613.670.

[42] V. Zoonekynd, « The fundamental group of an algebraic stack », `https://arxiv.org/abs/math/0111071`, 2001.

[43] ———, « Théorème de Van Kampen pour les champs algébriques », *Ann. Math. Blaise Pascal* **9** (2002), n° 1, p. 101-145.