



HAL
open science

Les conditionnels

Francesca Poggiolesi

► **To cite this version:**

Francesca Poggiolesi. Les conditionnels. Précis de Philosophie de la Logique, Vol. 1, Editions de la Sorbonne, A paraître. hal-02390490v1

HAL Id: hal-02390490

<https://hal.science/hal-02390490v1>

Submitted on 3 Dec 2019 (v1), last revised 5 Dec 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

7 Les conditionnels

Francesca Poggiolesi

Considérons les énoncés suivants :

1. si cette figure est un carré, alors ses côtés sont égaux ;
2. s'il pleut, alors Thomas prend son parapluie ;
3. si Thomas n'avait pas cuisiné, alors Marie l'aurait fait ;
4. si l'allumette n'avait pas été grattée, alors elle ne se serait pas allumée.

Chacun de ces énoncés est de la forme « si A , alors B » et donne l'exemple de ce que les grammairiens nomment des énoncés « *hypothétiques* ». Nous suivons cependant ici l'usage des logiciens qui désignent ces énoncés par le substantif « conditionnels », du mot anglais « *conditionals* ». Dans le conditionnel « si A , alors B », A occupe la place de l'*antécédent*, tandis que B tient celle du *conséquent*.

Suivant une distinction classique et en utilisant encore une fois deux anglicismes, un conditionnel peut être *indicatif* (par exemple 1 et 2) ou *contrefactuel* (par exemple 3 et 4). Les deux catégories diffèrent avant tout par le rôle de l'antécédent. Dans le premier cas, la vérité et la fausseté de celui-ci sont également envisageables. Au contraire, dans le second, l'antécédent est supposé faux. Pour notre part, nous désignerons simplement par « conditionnels » ceux du premier genre, car notre étude leur est principalement consacrée. Seule la fin du chapitre accordera une place conséquente aux contrefactuels, et nous le spécifierons alors clairement.

Les conditionnels jouent un rôle de premier rang dans nos raisonnements ; un large nombre d'actions et interactions avec le monde qui nous entoure vient de notre capacité de penser de façon conditionnelle ; il serait assez inutile de reconnaître qu'il pleut si cette observation n'était pas accompagnée par le raisonnement conditionnel selon lequel si on n'ouvre pas son parapluie, on va être trempé. De manière analogue, l'utilité de connaître la loi de la gravitation peut consister dans le raisonnement conditionnel qui dit qu'on tombe si

l'on se jette du haut d'un grand immeuble. Nous pouvons nous tromper dans l'usage des conditionnels et souvent assigner une fonction erronée à l'antécédent ainsi qu'au conséquent mais, en règle générale, nous savons les utiliser sans difficulté; les conditionnels jouent même un rôle central dans nos pratiques quotidiennes.

Lorsqu'il s'agit d'élaborer une théorie des conditionnels qui explique quels jugements conditionnels sont acceptables ou quelles inférences impliquant les conditionnels sont de bonnes inférences, le sujet se fait très controversé et malgré le long et patient travail développé au cours des siècles, il n'y a toujours pas de vrai consensus. Trois principales interrogations sont aux fondements de toute théorie du conditionnel : celles des conditions pour qu'un conditionnel soit *vrai*, pour qu'un conditionnel puisse être *déduit*, et enfin pour qu'un conditionnel soit *cru*. Le premier questionnement a longtemps régné au sein des études sur le sujet. En effet, la sémantique des conditionnels occupe une place privilégiée dans l'histoire de la logique depuis les Mégariques (voir par exemple ?), tandis que la théorie de la démonstration pour les conditionnels ainsi que la théorie doxastique des conditionnels ont émergé plus récemment, respectivement dans les travaux d'?? et de ?.

Ce chapitre vise à présenter certaines des réponses les plus célèbres à ces trois questionnements. Nous débuterons par les deux premiers, en réfléchissant aux conditions de vérité et de déductibilité des conditionnels. Ce travail sera réalisé dans la section 1. Il s'amorcera par la présentation de l'analyse classique des conditionnels : l'interprétation matérielle (sous-section 1. 1). Nous soulignerons les qualités de cette approche tout en révélant des limites que nous chercherons alors à dépasser par différents biais. Le premier sera proprement sémantique, basé sur l'implication stricte de C. I. Lewis (section 1. 2). Le second se localisera au niveau syntaxique, impliquant les logiques de la pertinence et la notion de variable partagée (section 1. 3).

La Section 2. sera consacrée au troisième questionnement puisqu'elle traitera des conditions de croyance aux conditionnels. Nous y présenterons notamment le test de Ramsey ainsi que la théorie d'Adams induite par ce test (section 2. 1) et formalisée par la logique d'Adams (section 2. 2).

La Section 3. constituera le point de contact des trois questionnements. Nous verrons la manière dont Stalnaker utilise le test de Ramsey afin d'établir de nouvelles conditions de vérité pour les conditionnels (section 3. 1), puis nous exposerons les théories de Lewis et de Nute qui généralisent ce résultat (section 3. 2). Le chapitre s'achèvera alors par une rapide description de la théorie de la

démonstration pour les logiques de Stalnaker, Lewis et Nute (section 3. 3).

Bien que de nombreux articles d'excellente qualité traitent déjà du thème des conditionnels (par exemple ???), la plupart des recherches récentes sont concentrées sur leur analyse sémantique et sur leurs conditions de croyance, négligeant les aspects relatifs à la théorie de la démonstration. L'originalité de notre approche tient justement dans la tentative d'impliquer – et d'accorder – les trois approches.

1. Conditionnels : conditions de vérité et conditions de déductibilité

Cette section est consacrée à deux importantes questions de logique : comment assigner une valeur de vérité à un conditionnel et comment établir qu'un conditionnel peut être déduit. Si les deux interrogations sont fortement liées, c'est d'abord la première qui s'est imposée (voir ?). L'approche vérifonctionnelle qui était déjà présente dans l'Antiquité (voir ? ou bien ?) et qui établit la valeur de vérité d'un conditionnel exclusivement en fonction de la valeur de vérité des énoncés plus simples qui le constituent, a longtemps dominé l'histoire de la logique et est exposée en détail dans la section 1. 1. Plus récemment, au début du vingtième siècle, elle a aussi trouvé son pendant en théorie de la démonstration dans les règles d'introduction et d'élimination de l'implication en déduction naturelle, élaborées par Gentzen¹ (voir ?). Il fallut attendre que Lewis soulève à nouveau la question des paradoxes de l'implication matérielle (voir ?), qui avaient animé les discussions des philosophes logiciens à Mégare et chez les premiers Stoïciens, pour voir vaciller ce cadre traditionnel. En effet, les problèmes posés par les paradoxes de l'implication touchaient directement au conditionnel et exigeaient de nouvelles réponses. Sur le plan sémantique, Lewis introduisit l'implication stricte, formulant ainsi la thèse exposée dans la section 1. 2. Une propriété importante de celle-ci tient dans son caractère non véri-fonctionnelle, car la détermination de la valeur de vérité d'un conditionnel requiert des éléments qui excèdent les seules valeurs de vérité des énoncés qui le composent. Sur le plan syntaxique, les logiciens de la pertinence se sont inspirés des idées d'Ackermann pour rechercher des substituts aux règles standards pour l'implication, lesquels sont présentés en section 1. 3.

1. Nous simplifions ici à attribuer la paternité des règles d'introduction et d'élimination de l'implication à Gentzen. Voir le chapitre 2 de Fichot et Naibo pour une reconstruction détaillée de l'introduction de ces règles.

1. 1 L'implication matérielle

L'analyse sémantique vérifonctionnelle du conditionnel est à la fois la plus ancienne et la plus célèbre. Les sources dont nous disposons la font remonter à Philon de Mégare (voir par exemple ?). Bien plus tard, elle fut reprise par des logiciens contemporains aussi influents que ?, ? et ?. Selon cette interprétation, la valeur de vérité d'un conditionnel est une fonction booléenne des valeurs de vérité de son antécédent et de son conséquent.

Philon disait que le conditionnel est vrai lorsqu'il ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux : de sorte qu'il y a pour ce conditionnel trois façons d'être vrai et une d'être faux (?).

En termes contemporains, nous dirons qu'un conditionnel est vrai si, et seulement si, l'antécédent est faux ou le conséquent est vrai. Cela signifie que si l'antécédent et le conséquent sont vrais, alors le conditionnel est vrai ; si l'antécédent est vrai et le conséquent faux, alors le conditionnel est faux ; si l'antécédent est faux, alors le conditionnel est vrai – que le conséquent soit vrai ou faux. Ces combinaisons sont formalisées dans la table suivante :

	A	B	$A \rightarrow B$
a.	V	V	V
b.	V	F	F
c.	F	V	V
d.	F	F	V

Cette analyse veri-fonctionnelle du connecteur \rightarrow définit ce qu'on appelle l'*interprétation matérielle* du conditionnel.

L'interprétation matérielle est peut-être la « première surprise logique² » à laquelle est confronté un étudiant dans cette discipline. En effet, le fait que l'implication soit évaluée comme vraie dans le cas où l'antécédent est faux peut s'avérer particulièrement déroutant. Tentons d'éclaircir cette situation en expliquant chaque alinéa de la table de vérité.

Dans les cas *a* et *b*, l'antécédent est vrai. Nous sommes donc en position de tester le conditionnel : si le conséquent est vrai, le conditionnel est vrai, si le conséquent est faux, le conditionnel est faux. Considérons par exemple l'énoncé : « s'il pleut, alors Thomas prend son parapluie », et supposons qu'il pleuve. S'il pleut et que Thomas prend son parapluie, alors le conditionnel

2. Selon l'expression d'?

est vrai : s'il pleut mais que Thomas ne prend pas son parapluie, alors le conditionnel est faux.

Examinons maintenant les cas *c* et *d* dans lesquels l'antécédent d'un conditionnel de la forme « si *A*, alors *B* » est faux. Cette fois, le conditionnel ne peut pas être testé et plusieurs alternatives sont possibles. En épousant l'interprétation matérielle, nous adoptons la plus généreuse d'entre elles : nous laissons au conditionnel le bénéfice du doute en le considérant comme vrai. Reprenons notre exemple sous l'hypothèse qu'il ne pleut pas. Le fait que Thomas prenne ou non son parapluie n'a alors aucun lien avec ce que dit le conditionnel. Considérer que, dans cette situation précise, celui-ci est toujours vrai – quoi qu'il en soit du parapluie – est donc l'attitude la plus « bienveillante » à son égard.

Il existe plusieurs arguments en faveur de l'interprétation matérielle du conditionnel. Tout d'abord, si nous reconnaissons deux valeurs de vérité et si nous analysons le connecteur \rightarrow comme une fonction booléenne des valeurs de vérité de l'antécédent et du conséquent, alors il existe seize différentes fonctions parmi lesquelles choisir. Or, à cet égard, celle qui correspond à l'interprétation matérielle est sans aucun doute la plus convaincante. En d'autres termes, l'interprétation matérielle s'impose naturellement dès lors que nous optons pour une analyse vérifonctionnelle du conditionnel. En effet, selon cette interprétation, la formule $A \rightarrow B$ est équivalente à la disjonction $\neg A \vee B$, ainsi qu'à la conjonction $\neg(A \wedge \neg B)$.

Une autre raison d'adopter cette position tient à sa simplicité et à sa clarté. Il est vrai que l'interprétation matérielle du conditionnel ne représente pas exactement l'usage de la locution « si ..., alors ... » du langage naturel. Mais celui-ci est flou et confus et l'adoption d'un connecteur, précisément défini, présente l'avantage d'une tentative de clarification conceptuelle. Ce fut assurément la position de Frege qui se préoccupait surtout de bâtir un système logique formulé dans un langage idéalisé et adéquat pour conduire le raisonnement mathématique (voir ?). Et dans le cadre des mathématiques, l'implication matérielle ne donne pas lieu aux malheureuses conséquences que nous pouvons observer dans le langage naturel, et que nous allons bientôt décrire.

Troisièmement, l'interprétation matérielle des conditionnels valide des schémas d'inférence qui sont de façon standard considérés comme corrects – à la fois pour les conditionnels indicatifs et contrefactuels. Utilisons l'expression ' $M \models A$ ' pour signifier que tout modèle qui rend vrais toutes les formules appartenant à l'ensemble *M* rend aussi vraie la formule *A*³. Nous obtenons

3. À ce sujet, le lecteur pourra aussi se référer au Chapitre 1.

alors :

- $A \rightarrow B, A \models B$ (*modus ponens*⁴)
- $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$ (*modus tollens*)
- $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (import-export)
- $A \vee B \models \neg A \rightarrow B$

Les *modus ponens* et *modus tollens* sont des schémas d'inférence acceptés dans la plupart des systèmes logiques (logique classique, intuitionniste, modale, etc.). Par ailleurs, Gibbard a démontré qu'aucune interprétation du conditionnel faisant peser des conditions de vérité plus fortes que celles de l'implication matérielle ne validait l'équivalence *import-export* (voir ?). Pourtant, il suffit de considérer quelques énoncés du langage naturel pour se convaincre de sa validité. « Si Thomas va au marché, alors, si Lucie a envie de pommes, Thomas pourra en acheter » et « Si Thomas va au marché et Lucie a envie de pommes, Thomas pourra en acheter » semblent bien être deux conditionnels équivalents, et la loi d'*import-export* se prononce dans ce sens. Enfin, il semble tout aussi difficile d'exhiber un contre-exemple au dernier schéma d'inférence qui lie la disjonction et l'implication.

L'interprétation matérielle possède donc de solides avantages, mais elle génère aussi de profondes critiques dont, parmi les plus célèbres, celles de C. I. Lewis (voir ? et ?). Considérons les deux schémas d'inférence suivants :

- $\neg A \models A \rightarrow B$ (fausseté de l'antécédent)
- $B \models A \rightarrow B$ (vérité du conséquent)

Alors que le premier schéma nous dit que dans tous les modèles où $\neg A$ est vrai, $A \rightarrow B$ est vrai aussi, le second nous dit que dans tous les modèles où B est vrai, $A \rightarrow B$ l'est aussi. On réalise rapidement le caractère contre-intuitif de cette situation. Selon le premier schéma, nous avons que dans tous les modèles où « la lune n'est pas verte » est vrai, le conditionnel « si la lune est verte, alors les tomates sont rouges » est vrai aussi; ou encore, selon le deuxième schéma, nous avons que dans tous les modèles où « $2 + 2 = 4$ » est vrai, le conditionnel « si les tomates sont rouges, alors $2+2 = 4$ » est aussi vrai. Pourtant, les antécédents et conséquents de ces conditionnels paraissent dénués de tout rapport ou connexion de sens.

4. Nous signalons entre parenthèses, ici et dans le reste du chapitre, les appellations usuelles de ces schémas.

Les deux schémas ci-dessus sont réunis sous le nom de *paradoxes de l'implication matérielle* aux côtés d'un troisième, aussi mis en lumière par Lewis et basé sur le schéma selon lequel n'importe quel énoncé peut être déduit d'une contradiction :

- $A, \neg A \models B$ (*ex falso sequitur quodlibet*)

Comme nous le verrons dans les prochaines sous-sections, plusieurs systèmes logiques ont été créés afin d'éviter ces paradoxes qui, soulignons-le, ne se limitent pas à la forme de conséquences logiques que nous leur avons conférée ci-dessus, mais peuvent aussi épouser la forme purement implicative suivante :

- $\models (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ (fausseté de l'antécédent)
- $\models (B \rightarrow (A \rightarrow B))$ (vérité du conséquent)
- $\models ((A \wedge \neg A) \rightarrow B)$ (*ex falso sequitur quod libet*)

En logique classique, l'équivalence de ces deux formulations se montre aisément : de la forme implicative à la forme de conséquence logique, via le fait que *modus ponens* est une règle valide ; l'inverse se montre par induction sur la forme du conséquent.

D'autres schémas validés par l'interprétation matérielle s'avèrent problématiques⁵ :

- $A \rightarrow B \models \neg B \rightarrow \neg A$ (contraposition)
- $A \rightarrow B \models (A \wedge C) \rightarrow B$ (renforcement de l'antécédent)
- $A \rightarrow C, C \rightarrow B \models A \rightarrow B$ (transitivité)

Voici quelques exemples d'inférences malheureuses basées sur ces schémas :

- *Contraposition, ?*. De « si Goethe avait vécu au-delà de 1832, il ne serait plus en vie aujourd'hui », nous pouvons conclure que « si Goethe était encore en vie aujourd'hui, il n'aurait pas vécu au-delà de 1832 ».
- *Renforcement de l'antécédent, ?*. De « si Thomas gratte l'allumette, elle s'allumera », nous pouvons conclure que « si Thomas gratte l'allumette et qu'il la plonge dans un verre d'eau, elle s'allumera ».
- *Transitivité, ?*. De « si Thomas laisse son travail, Thomas ne pourra pas payer son loyer » et « si Thomas gagne un million à la loterie, Thomas

5. Cette fois encore, nous les présentons sous l'angle de la conséquence logique, mais ils peuvent être traduits sous celui de la pure implication

laisse son travail », nous pouvons conclure que « si Thomas gagne un million à la loterie, Thomas ne pourra pas payer son loyer ».

Un dernier défaut de l'interprétation matérielle provient de ses interactions avec la négation et la conjonction. En ce qui concerne la négation, nous employons souvent les expressions « ce n'est pas le cas que si A alors B » et l'expression « si A, alors non B » de manières équivalentes dans la langue naturelle. Pourtant, selon l'interprétation matérielle, $\neg(A \rightarrow B) \models A \rightarrow \neg B$, mais $A \rightarrow \neg B \not\models \neg(A \rightarrow B)$.

En ce qui concerne la conjonction, l'interprétation matérielle permet d'établir l'équivalence entre $\neg(A \rightarrow B)$ et $A \wedge \neg B$, bien que l'inférence de $A \wedge \neg B$ à partir de $\neg(A \rightarrow B)$ présente des instances problématiques. Par exemple, à partir de « Dieu existe et les personnes vertueuses ne vont pas au paradis », il semble surprenant de conclure : « ce n'est pas le cas que si Dieu existe, alors les personnes vertueuses vont au paradis ».

Égré et Cozic expliquent que la question de l'origine sémantique ou pragmatique des problèmes de l'interprétation matérielle reste ouverte, voir ? . Quine fut le premier à considérer les paradoxes de l'implication matérielle (ainsi que d'autres inférences problématiques) comme des anomalies purement pragmatiques (voir ?). Cette position fut reprise et approfondie par Grice, dans ?. À ses yeux, les paradoxes de l'implication matérielle peuvent être expliqués suivant l'*adage de la quantité*, selon lequel ce que nous affirmons doit être aussi informatif que possible. Puisque $A \rightarrow C$ est moins informatif que C, il est étrange de l'inférer (et de l'affirmer à partir) de C. Pour Edgington (voir ?), l'explication de Grice, quoique pertinente, ne s'applique pas à l'implication mais seulement à la disjonction et à la négation de la conjonction. Grice admet lui-même que les relations entre implication et négation posent un sérieux problème à sa théorie. Comme nous l'avons vu, l'interprétation matérielle valide l'inférence de $A \rightarrow \neg B$ à partir de $\neg(A \rightarrow B)$, tout en invalidant la réciproque. Ceci signifie que $A \rightarrow \neg B$ est logiquement plus faible, et ainsi moins informatif, que $\neg(A \rightarrow B)$. Pourtant, l'inférence de $A \rightarrow \neg B$ à partir de $\neg(A \rightarrow B)$ ne pose aucun problème du point de vue pragmatique, ce qui semble ainsi contredire l'*adage de la quantité*.

1.2 L'implication stricte

C. I. Lewis fut le premier à tenter de résoudre les paradoxes de l'implication matérielle en proposant de formaliser l'expression « si A , alors B » à l'aide du connecteur $A \rightarrow B$, communément appelé *implication stricte*. Il envisagea d'interpréter $A \rightarrow B$ par « il est *nécessaire* que si A , alors B ». En représentant l'expression « il est nécessaire que » par le symbole \Box , cela donne :

$$A \rightarrow B := \Box(A \rightarrow B)$$

Bien qu'il ait uniquement recherché la formalisation la plus adéquate du conditionnel, Lewis fit ainsi un grand pas vers la construction de la *logique modale* qui s'occuperait bientôt de formaliser les concepts de nécessité et de possibilité (voir par exemple ?). Les énoncés de cette logique sont souvent interprétés à l'aide de la sémantique des mondes possibles, laquelle occupe dans la logique contemporaine un rôle central et nous sera utile dans cette section et dans la section 3. Nous allons donc y consacrer quelques mots, limités par le fait que cette sémantique couvre un domaine très vaste et que sa présentation complète mériterait un chapitre entier. Le lecteur qui souhaiterait en apprendre davantage peut se référer à ? et au chapitre 6 du présent volume.

Voici comment traduire le concept de nécessité en termes de mondes possibles⁶. Une formule de la forme « il est nécessaire que A » est vraie lorsque A est vraie dans n'importe quelle situation. Ce dernier point exige non seulement que A soit vraie dans le monde actuel, mais aussi dans les autres mondes possibles. Formellement, l'ensemble des mondes possibles $\{i, j, k, \dots\}$ est noté W , et ces mondes sont liés entre eux par une relation d'accessibilité R . Par ailleurs, une fonction de vérité v assigne à chaque formule atomique, et dans chaque monde possible, une unique valeur de vérité (soit le vrai soit le faux). Un modèle de mondes possibles \mathfrak{M} est donc un triplet (W, R, v) ; une formule $\Box A$ est vraie dans un monde i de \mathfrak{M} si, et seulement si, dans tout monde j en relation R avec i , A est vraie. Formellement :

$$i \models_{\mathfrak{M}} \Box A \text{ si, et seulement si, } \forall j \text{ (si } iRj, \text{ alors } j \models_{\mathfrak{M}} A)$$

Venons-en au conditionnel strict $A \rightarrow B$ défini par $\Box(A \rightarrow B)$. Interprété en termes de mondes possibles, $A \rightarrow B$ est vrai dans un monde i d'un modèle \mathfrak{M} si, et seulement si, dans tout monde j en relation R avec i , si A est vrai, alors B

6. Une technique similaire s'applique au concept de possibilité, qu'il serait néanmoins superflu de présenter ici.

est aussi vrai. Formellement :

$$i \models_{\mathcal{M}} A \rightarrow B \text{ si, et seulement si, } \forall j (\text{si } iRj, \text{ alors } (j \not\models_{\mathcal{M}} A \text{ ou } j \models_{\mathcal{M}} B))$$

Cette analyse du conditionnel évite en partie les paradoxes de l'implication matérielle. En effet :

- $\not\models (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ (fausseté de l'antécédent)
- $\not\models (B \rightarrow (A \rightarrow B))$ (vérité du conséquent)

Pour comprendre que la fausseté de A n'implique plus la vérité d'une implication dont A est l'antécédent, il suffit de réaliser que $\neg A$ peut être vraie dans un monde j (accessible par la relation R à partir du monde i) tandis que A est vraie et B fausse dans un monde z accessible par la relation R à partir de j . D'autre part, pour comprendre que la vérité de B n'implique plus celle d'une implication dont B est le conséquent, il suffit de réaliser que B peut être vraie dans un monde j (accessible par la relation R à partir du monde i) tandis que A est vraie et B fausse dans un monde z accessible par la relation R à partir de j .

Néanmoins, les paradoxes de l'implication matérielle resurgissent à travers le prisme de la conséquence logique, car les schémas suivants restent valides :

- $\neg A \models A \rightarrow B$
- $B \models A \rightarrow B$
- $A, \neg A \models B$

Voici d'autres exemples de schémas responsables de certains paradoxes de l'interprétation matérielle qui demeurent valides pour l'implication stricte :

- $A \rightarrow B \models \neg B \rightarrow \neg A$
- $A \rightarrow B \models (A \wedge C) \rightarrow B$
- $A \rightarrow C, C \rightarrow B \models A \rightarrow B$

Nous pouvons donc conclure que, si l'implication stricte représente une amélioration de l'implication matérielle, il ne règle pas un certain nombre de problèmes pourtant cruciaux.

1.3 Les logiques de la pertinence

L'interprétation matérielle est verifonctionnelle : elle assigne la valeur faux au conditionnel si, et seulement si, l'antécédent est vrai et le conséquent faux. En théorie de la démonstration, en particulier en déduction naturelle, deux règles décrivent l'implication suivant cette interprétation. Une règle sert à l'introduire (voir ?) :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I$$

et une autre permet de l'éliminer :

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow E$$

La règle d'introduction autorise, lorsque B est dérivable à partir de A , à déduire la formule $A \rightarrow B$ en retranchant A des hypothèses de la dérivation. La règle d'élimination permet de déduire B à partir de $A \rightarrow B$ et A . L'adjonction de règles structurales, notamment celle de l'affaiblissement, entraîne la démonstration de tous les principes, « désirables » et « indésirables », liés à l'implication matérielle et introduits dans la sous-section 1. Nous en proposons ici une présentation syntaxique, en écrivant $M \vdash A$ pour indiquer qu'il existe une dérivation de l'ensemble de prémisses M à A :

- $A \rightarrow B, A \vdash B$ (*modus ponens*)
- $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ (*modus tollens*)
- $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ ⁷ (import-export)
- $A \vee B \vdash \neg A \rightarrow B$

Parmi les principes indésirables nous avons :

- $\neg A \vdash A \rightarrow B$ (fausseté de l'antécédent)
- $B \vdash A \rightarrow B$ (vérité du conséquent)
- $A \wedge \neg A \vdash B$ (*ex falso sequitur quodlibet*)

7. Par le symbole \vdash nous indiquons le fait que $(A \wedge B) \rightarrow C$ est dérivable de $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$, mais que aussi $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ est dérivable de $(A \wedge B) \rightarrow C$.

- $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ (contraposition)
- $A \rightarrow B \vdash A \wedge C \rightarrow B$ (renforcement de l'antécédent)
- $A \rightarrow C, C \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ (transitivité)

Comme dans le cadre sémantique, le contexte syntaxique autorise deux formulations : celle qui vient d'être donnée et une en forme implicative. L'équivalence entre les deux formulations est garantie par le théorème de déduction, l'un des plus importants de la logique classique (et d'autres logiques, voir ?).

Envisageons désormais de bloquer les principes indésirables de l'implication matérielle sans agir sur les valeurs de vérité, *i.e.* sur le versant sémantique, mais en altérant les règles qui définissent le connecteur de l'implication (entre autres règles, éventuellement), donc en jouant sur la théorie de la démonstration. Afin d'appréhender les modifications exigées, il convient d'examiner en détail les démonstrations des principes que nous venons d'énumérer. En guise d'exemple, considérons la dérivation de B à partir de $A \wedge \neg A$. Celle-ci se trouve notamment chez Langford et Tennant (voir ??). Mais, comme Anderson, Belnap et Dunn le remarquent dans ?, elle était déjà chez Alexander Neckam,⁸ Albert de Saxe et d'autres logiciens du Moyen-Âge.

1. de $A \wedge \neg A$ nous pouvons obtenir A (par élimination de la conjonction),
2. de $A \wedge \neg A$ nous pouvons obtenir $\neg A$ (par élimination de la conjonction),
3. de A nous pouvons obtenir $A \vee B$ (par introduction de la disjonction),
4. de $\neg A$ et $A \vee B$ nous pouvons obtenir B (par syllogisme disjonctif),
5. donc de $A \wedge \neg A$ nous obtenons B (par transitivité).

Pour empêcher la dérivation de B à partir de $A \wedge \neg A$, il nous incombe de choisir l'une des règles employées lors de cette dérivation et de motiver son exclusion. Ces règles sont au nombre de quatre :

- l'élimination de la conjonction,
- l'introduction de la disjonction,
- le syllogisme disjonctif,
- la transitivité.

Les deux premières possibilités sont bien peu convaincantes, car on voit mal sur quelle base remettre en question l'introduction de la disjonction ou l'élimination de la conjonction. Seuls restent donc sur la sellette le syllogisme disjonctif et la transitivité. Chacun d'entre eux – particulièrement le premier

8. Voir par exemple ?, p. 31.

– a déjà été pris pour cible, et son rejet engendre divers systèmes formels dits « logiques de la pertinence » (voir ?). Nous allons en examiner deux : la logique *R* d’Anderson et Belnap (voir ??) et la logique *CR* de Tennant ?? . *R* est probablement la logique la plus représentative du rejet du syllogisme disjonctif, tout comme *CR* est la plus représentative du rejet de la transitivité.

Ces logiques possèdent bien entendu des différences notables, mais elles partagent aussi un important point commun qui justifie l’appellation « logiques de la pertinence » : il s’agit du « principe de la variable commune » (voir par exemple ?). Selon les logiciens de la pertinence, le problème inhérent à certains paradoxes de l’interprétation matérielle provient de l’absence de lien pertinent entre l’antécédent et le conséquent, chacun d’entre eux concernant des domaines très différents. Néanmoins, la logique est la science de la forme et non celle d’un quelconque contenu particulier. L’enjeu est donc de forcer *formellement* un lien de contenu entre antécédent et conséquent. Le principe de la variable commune joue ce rôle. Il exige, pour qu’une formule de la forme $A \rightarrow B$ soit dérivable dans une logique de la pertinence, que *A* et *B* aient au moins une variable commune. Sur le même modèle, il est requis de toute dérivation que ses prémisses et sa conclusion partagent au moins une variable propositionnelle. La logique *R* et la logique *CR* respectent le principe de la variable commune.

Amorçons notre étude depuis le calcul de la déduction naturelle classique⁹ afin d’y apporter les modifications qui conduisent à la logique *R*. Voici la formalisation de la déduction de *B* à partir de $A \wedge \neg A$ dans ce cadre initial.

- Les étapes 1. et 3. deviennent¹⁰ :

$$\frac{A \wedge \neg A}{A} \wedge E$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I$$

9. Le calcul de déduction naturelle peut être pensé comme incluant deux règles pour la négation, celle qui l’introduit et celle qui l’élimine, à savoir :

$$\frac{\begin{array}{c} \beta \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg B} \neg I$$

$$\frac{\begin{array}{c} \neg \beta \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{B} RAA$$

La règle d’introduction autorise, lorsque l’absurde est déductible à partir de *B*, à déduire la formule $\neg B$ en retranchant *B* des hypothèses de la dérivation, alors que la règle de *reductio ad absurdum* autorise, lorsque l’absurde est déductible à partir de $\neg B$, à déduire la formule *B* en retranchant $\neg B$ des hypothèses de la dérivation.

10. On utilise ici les règles standards munies de leurs noms standards, voir par exemple ?.

- Les étapes 2. et 4. deviennent :

$$\frac{A \vee B \quad \frac{\frac{\neg A \quad A}{\perp} \neg I \quad \frac{\perp}{B} RAA}{\cancel{B}} \cancel{B} \vee E}{B}$$

Par transitivité nous obtenons :

$$\frac{\frac{A \wedge \neg A}{A} \wedge E \quad \frac{\frac{A \wedge \neg A}{\neg A} \wedge E \quad \frac{\perp}{B} RAA}{\cancel{B}} \cancel{B} \neg I \quad \frac{A \vee B}{A} \vee I}{B} \vee E$$

L'idée principale de la logique R consiste à proscrire cette déduction en bloquant le syllogisme disjonctif, autrement dit la dérivation de B à partir de $\neg A$ et $A \vee B$. Dans cette dérivation, c'est la règle RAA qui permet de dériver B à partir de l'absurde *sans décharger d'hypothèse*. Pour remédier à cette situation, la logique R exige qu'*au moins une hypothèse soit déchargée* lorsqu'une nouvelle formule est introduite *via* les règles pour la négation (à savoir les règles $\neg I$ et RAA) ou *via* la règle qui introduit l'implication (à savoir la règle $\rightarrow I$). Formellement, le tour de force est accompli à l'aide d'indices. Chaque formule possède un ensemble de nombres en indice. Quand une nouvelle hypothèse est introduite, elle vient avec son propre nouveau nombre en indice; quand une formule déjà présente dans la dérivation est réitérée, ses indices sont réitérés avec elle; quand une règle utilise une ou plusieurs hypothèses, les indices des hypothèses sont réunis en indices de la conclusion; enfin, quand une hypothèse est déchargée, ses indices sont retranchés des indices de la conclusion¹¹. Par exemple, les hypothèses A munie de l'indice $\{1\}$ et $\neg A$ munie de l'indice $\{2\}$ permettent de déduire $\neg \neg A$ muni de l'indice $\{1\}$, lequel est issu du retrait du nombre 2 de l'ensemble $\{1, 2\}$ dû au fait que la formule $\neg A$ a été déchargée. Au contraire, la déduction de B à partir de A et $\neg A$ est bloquée par le fait que B ne contient ni l'indice de A ni l'indice de $\neg A$.

$$\frac{A_{\{1\}} \quad \cancel{\neg A_{\{2\}}} \wedge I}{\frac{\perp_{\{1,2\}}}{\neg \neg A_{\{1\}}} \neg E} \quad \frac{A_{\{1\}} \quad \cancel{\neg A_{\{2\}}} \wedge I}{\frac{\perp_{\{1,2\}}}{B_{\{?\}}} \text{NON!}}$$

11. Il importe de remarquer que même les règles d'introduction et d'élimination de la conjonction sont modifiées par la présence des indices.

Grâce aux indices, la logique *R* évite plusieurs paradoxes de l'implication matérielle, notamment « la vérité de l'antécédent », « la fausseté du conséquent » et « le renforcement de l'antécédent »¹², qu'ils soient exprimés sous la forme de déductions ou d'implications. En revanche, la « contraposition » et la « transitivité » restent des théorèmes. Il demeure en outre possible de démontrer $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$. La pertinence de cette implication est pourtant discutable, car on voit mal en quoi la vérité de la formule *A* contribue à celle de la formule $(A \rightarrow B) \rightarrow B$.

Passons désormais à la logique *CR* introduite et développée par Tennant dans ?? suivant un angle d'approche légèrement différent de celui d'Anderson et Belnap. Alors que ces derniers sont avant tout motivés par la résolution des paradoxes de l'interprétation matérielle sur un plan implicatif, Tennant se concentre sur le plan déductif, poursuivant la formalisation d'une notion pertinente de dérivation. Il entreprend de bloquer la dérivation de *B* à partir de la prémisse $A \wedge \neg A$ non pas, comme Anderson et Belnap, en excluant le syllogisme disjonctif, mais en épousant une vision non transitive de la déduction. Son rejet de la transitivité est extrêmement subtil, et il vaut la peine de lui consacrer quelques lignes.

Un important résultat du calcul de déduction naturelle est le *théorème de normalisation* (voir par exemple ?), selon lequel toute déduction contenant un détour (c'est-à-dire toute déduction *non-normale*) peut être réduite à une déduction qui n'en contient aucun (c'est-à-dire à une déduction *normale*). Typiquement un détour se crée au niveau déductif lorsqu'une règle d'introduction est suivie de la règle d'élimination correspondante. On dit que cette combinaison de règles crée un détour, ou bien elle est redondante, parce qu'elle permet d'introduire une formule qui se voit immédiatement éliminée sans avoir joué aucun rôle et donc en se révélant superflue pour la dérivation de la formule finale. La logique *CR* est caractérisée par le rejet de toute transitivité engendrant des déductions non-normales, c'est-à-dire contenant des détours. Considérons à nouveau la déduction de *B* à partir de $A \wedge \neg A$. Nous pouvons constater que les deux dérivations normales suivantes :

$$\frac{\frac{A \wedge \neg A}{A} \wedge E}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{\frac{\frac{A \wedge \neg A}{\neg A} \wedge E}{\perp} \perp E}{B} \vee E$$

12. Ce dernier est évité grâce aux nouvelles règles d'élimination de la conjonction.

peuvent être liées dans la dérivation ci-dessous :

$$\frac{\frac{\frac{A \wedge \neg A}{A} \wedge E}{A \vee B} \vee I \quad \frac{\frac{\frac{A \wedge \neg A}{\neg A} \wedge E}{\perp} \perp I}{\perp} \perp E}{B} \vee E$$

Mais cette dérivation n'est pas en forme normale, car la règle qui introduit la disjonction est immédiatement suivie de la règle qui l'élimine. En d'autres termes, la disjonction $A \vee B$ est introduite sans qu'elle n'ait aucun rôle à jouer dans la dérivation de B . Une telle dérivation est donc bloquée dans la logique CR , ainsi que le paradoxe qu'elle engendre.

La logique CR parvient aussi à bloquer d'autres paradoxes tels la « fausseté de l'antécédent » et la « vérité du conséquent ». En effet, elle exige aussi que chaque utilisation d'une règle de calcul permettant une décharge d'hypothèse soit effectivement accompagnée d'une telle décharge. Elle se rapproche en cela de la logique R , mais sans s'encombrer d'un système d'indices, impliquant seulement une clause externe aux règles. Cette économie aboutit à un calcul en déduction naturelle simple et élégant.

Dans la logique CR , ni le renforcement de l'antécédent ni la contraposition – ni même la transitivité sous forme implicative examinée dans la sous-section 1. 1– ne sont bloqués. Par ailleurs, la relation de déduction n'est ni monotone ni transitive :

- de $M \vdash A$ ne suit pas $M, B \vdash A$
- de $M \vdash A$ et $A \vdash Q$ ne suit pas $M \vdash Q$

Tout ceci traduit l'intérêt de Tennant pour une relation pertinente de déduction qui ne tient pas compte du connecteur d'implication. Sous cet angle, Tennant est très proche du grand logicien bohémien Bernard Bolzano qui avait, bien avant l'heure, conçu l'idée d'une relation pertinente de conséquence logique (voir par exemple ?).

2. Conditionnels et conditions de croyance

Dans la section précédente, nous nous sommes concentrés sur la sémantique et la syntaxe, au sens de la théorie de la démonstration, des conditionnels. Dans cette section, nous allons questionner les attitudes de croyance rationnelle à

leur égard. En effet, aucun panorama complet du problème des conditionnels en logique ne peut être dressé sans aborder cette question qui, de plus, va s'avérer très utile dans la section 3.

2. 1 Croyances et probabilités

Oublions donc provisoirement les conditions de vérité ou de dérivabilité au profit des conditions de croyance. Tentons de comprendre ce que signifie le fait de croire en un conditionnel. Par exemple, quelles conditions permettent d'être plus ou moins sûr que Thomas cuisinera si Marie décide de ne pas le faire. La réponse la plus célèbre fut apportée par Ramsey :

Si deux personnes sont en train de discuter de « si A , alors B » et si ces deux personnes doutent de A , alors ils ajoutent hypothétiquement A à leurs connaissances et, sur cette base, discutent de B : [...] ils fixent leurs degrés de croyance en B étant donné A (?).

Considérons par exemple l'énoncé conditionnel « s'il pleut, alors Thomas prend son parapluie » en supposant que, bien qu'indécis sur la vérité de l'énoncé « il pleut », nous décidons de l'ajouter à notre ensemble de croyances que nous révisons ensuite. Dans ce nouvel état de croyances, nous évaluons alors l'énoncé « Thomas prend son parapluie ». Ces opérations mentales correspondent au *test de Ramsey*, c'est-à-dire à la procédure décrite par Ramsey afin d'évaluer un énoncé conditionnel.

Pour formaliser ce test, il faut un modèle capable de représenter adéquatement non seulement les croyances proprement dites mais aussi les changements rationnels de croyances. Celles-ci peuvent être divisées entre croyances *pleines* – par exemple « Thomas croit que A », « Thomas croit que $\neg A$ » ou encore « Thomas ne croit pas que A » – et croyances *graduées* – par exemple « Thomas croit que A au degré r » ou « Thomas croit que A est probable ». Deux théories se dégagent alors, conformément à cette classification. D'une part, la *théorie de la révision des croyances*, qui se concentre sur les changements des croyances pleines (voir par exemple ?), et d'autre part, la *théorie bayésienne des croyances* qui formalise les révisions des croyances graduées en termes de probabilités. Dans cette sous-section, nous présenterons seulement la seconde approche, sans doute plus répandue, laissant de côté la première¹³.

13. Parmi les développements les plus récents de la théorie de la révision des croyances, aussi

Considérons un énoncé B et supposons n'être certains ni de B ni de $\neg B$. Un large éventail d'attitudes épistémiques se présente. Il est possible d'être presque certain de B , d'être assez sûr que B , de penser que B n'est pas le cas. Pour refléter cette graduation des croyances, on représente les croyances d'un agent par une fonction qui assigne à chaque énoncé un nombre entre 0 et 1 : son *degré de croyance* envers l'énoncé. On peut ainsi rendre la différence entre les cas où on est totalement sûr de B – degré de croyance 1 –, assez sûr – degré 0.9 par exemple – assez sûr qu'il est faux – 0.2 disons – et ainsi de suite. Une thèse centrale de la théorie bayésienne est que les degrés de croyances d'un agent rationnel doivent être conforme aux lois de probabilités (voir ?). Ainsi, sur le plan mathématique, la fonction qui représente les croyances rationnelles d'un agent est simplement une fonction de probabilité. On utilise les symbole p pour la dénoter, et on parle, comme cela est courant dans les discussions de probabilités, en termes de pourcentages plutôt que de fractions : une probabilité de 90% correspond à 0.9 et ainsi de suite¹⁴.

Muni de la représentation des croyances en termes de probabilité, on peut mobiliser des concepts de la théorie des probabilités dont celui, central pour la suite, de *probabilité conditionnelle*. La notion de probabilité conditionnelle a été introduite par Bayes en théorie des probabilités dans sa considération de la probabilité d'une conjonction (voir ?). La probabilité d'une conjonction n'est rien d'autre que le produit de la probabilité du premier conjoint et la probabilité du deuxième conjoint conditionnellement au premier. Par exemple, supposons que dans le tiroir de Thomas 60% des chaussettes sont noires et que les 30% des chaussettes noires ont aussi des petits pois blancs. Alors, la probabilité que Thomas trouve par hasard une chaussette noire à petits pois blancs est évaluée à 30% de 60% ; c'est-à-dire 18%.

Formellement, si l'on dénote par $p(A)$ la probabilité de A , et de même pour $p(A \wedge B)$ et par $p_A(B)$, à savoir la probabilité de B conditionnelle sur A , nous avons que :

$$p(A \wedge B) = p(A) \times p_A(B)$$

Dans la théorie bayésienne, où les probabilités représentent des degrés de croyances, $p(A)$ dénote « le degré de croyance en A », et $p_A(B)$ « le degré de

dite *théorie de Gärdenfors*, on peut mentionner ??.

14. Le bayésiannisme épouse ainsi une interprétation spécifique des probabilités – l'interprétation dite « subjective », où les probabilités sont conçues comme des représentations des degrés de croyances. Pour la discussion du rapport avec d'autres interprétations, voir ?.

croissance en B sachant que A ». Pour illustrer le rôle de la probabilité conditionnelle dans ce cadre, supposons que Thomas soit sûr à 50% que demain il y aura du soleil, aussi qu'il soit sûr à 90% que demain il ira à la mer sous l'hypothèse qu'il y a du soleil. Le degré de croyance de Thomas dans le fait que demain il y aura du soleil et qu'il ira à la mer est de 45%. En effet en indiquant avec $p(D \wedge E)$ le degré de cette dernière croyance, nous avons que celui-ci est égal à $p(D) \times p_D(E) = 50\% \times 90\% = 45\%$.

En ce qui concerne les conditionnels, Adams prit au sérieux l'expression de Ramsey « les degrés de croyance en B étant donné A », qu'il formalisa grâce à la notion de probabilité conditionnelle de « B sachant que A », à savoir $p_A(B)$. Cette idée est désormais connue comme la thèse d'Adams :

L'hypothèse fondamentale derrière ce travail est la suivante : la probabilité d'un conditionnel indicatif de la forme « si A , alors B » est une probabilité conditionnelle (?).

En convenant d'écrire $p(A \Rightarrow B)$ pour dénoter le degré de croyance dans le conditionnel « si A , alors B » et en remaniant ce qui a été dit pour le degré de croyance en une conjonction, nous avons que :

$$p(A \Rightarrow B) = p_A(B) = p(A \wedge B)/P(A), \text{ en supposant que } p(A) > 0$$

Procédons à une analyse détaillée de cette thèse. Considérons l'ensemble d'énoncés $\{A \wedge B, A \wedge \neg B, \neg A\}$, et supposons que Thomas croit que $\neg A$ est probable à 50% (donc aussi que A l'est à 50%), que $A \wedge B$ l'est à 30% et que $A \wedge \neg B$ l'est à 20% – pour que la distribution des degrés de croyances soit conforme, il faut de plus que la somme des degrés de $A \wedge B$ et de $A \wedge \neg B$ soit égale à la probabilité de A , autrement dit à 50%. Comment Thomas évalue-t-il le conditionnel « si A , alors B » ? Selon la thèse d'Adams, il l'évalue comme il évaluerait B sous l'hypothèse que l'antécédent A est vrai, donc il élimine la possibilité $\neg A$ pour obtenir une nouvelle distribution de degrés de croyance dans laquelle Thomas évalue proportionnellement $A \wedge B$. Il aura donc un degré de croyance en « si A , alors B » de 60%, car 60 est dans le même rapport à 100 que 30 à 50.

Que penser de l'évaluation de la probabilité d'un conditionnel en termes de probabilités conditionnelles ? Comparons $p_A(B)$ d'une part avec $p(A \rightarrow B)$ – c'est-à-dire avec la probabilité d'un conditionnel interprété matériellement – et d'autre part avec $p(A \wedge B)$. Notons d'abord que, puisque $A \rightarrow B$ est logiquement équivalent à $(\neg A) \vee (A \wedge B)$, et que $\neg A$ et $A \wedge B$ sont exclusifs, il suit des lois de

probabilité que $p(A \rightarrow B) = p(\neg A) + p(A \wedge B)$. Dans deux cas particuliers, $p_A(B)$ et $p(A \rightarrow B)$ ont la même valeur. Cela survient lorsque $p(A \wedge \neg B) = 0$ (et $p(A) \neq 0$), car dans ce cas $p_A(B) = p(A \rightarrow B) = 100\%$, et lorsque $p(A) = 100\%$, car dans ce cas $p(A \rightarrow B) = p_A(B) = p(B)$. Dans tous les autres cas, $p_A(B) < p(A \rightarrow B)$. Illustrons ce point en reprenant la partition $\{A \wedge B, A \wedge \neg B, \neg A\}$ associée aux degrés de croyances relatives de Thomas. Nous savons que, dans cette situation, $p_A(B) = 60\%$. En revanche, $p(A \rightarrow B) = p(\neg A) + p(A \wedge B) = 50\% + 30\% = 80\%$. Par conséquent, $p_A(B) < p(A \rightarrow B)$. Il importe de souligner que l'interprétation matérielle du conditionnel ne transgresse pas seulement la thèse d'Adams, elle fait aussi violence à nos intuitions sur les probabilités – et peut-être ces deux points sont-ils liés.

Par ailleurs, en comparant $p_A(B)$, défini comme $p(A \wedge B)/p(A)$, et $p(A \wedge B)$, nous obtenons l'inégalité suivante : $p(A \wedge B) \leq p_A(B)$. Celle-ci n'est une égalité que dans le cas où $p(A) = 1$. Dans les autres cas, il s'agit d'une inégalité stricte. Par exemple, dans l'exemple de Thomas, $p_A(B) = 60\%$ tandis que $p(A \wedge B) = 30\%$. Ainsi $p(A \wedge B) < p_A(B)$.

Les deux comparaisons sont synthétisées par la relation suivante (que nous retrouverons dans la prochaine section) :

$$p(A \wedge B) \leq p(A \Rightarrow B) \leq p(A \rightarrow B)$$

Comme D. Lewis l'a démontré dans ?, il n'existe aucun connecteur binaire vérifonctionnel \star tel que, étant donné deux formules A et B , la probabilité de $A \star B$, à savoir $p(A \star B)$, est telle que $p(A \star B) = p_A(B)$. Par conséquent, il n'est pas possible d'analyser la croyance en « si A , alors B » à la fois en termes de probabilité de B sous l'hypothèse A et en termes d'une certaine proposition composée de A et de B . Si la thèse d'Adams est correcte, le conditionnel ne peut donc plus être conçu comme une composition vérifonctionnelle de l'antécédent et du conséquent. Au contraire il faut concevoir un conditionnel comme impliquant deux propositions différentes jouant deux rôles distincts : l'une est le contenu d'une hypothèse, l'autre est le contenu propositionnel réalisé sous cette hypothèse.

2.2 La logique d'Adams

Comme nous venons de le voir, Adams propose une analyse de nos croyances dans les énoncés conditionnels basée sur les probabilités et dans laquelle la probabilité d'un conditionnel est une probabilité conditionnelle. Afin d'offrir un cadre rigoureux à sa théorie, Adams développe une logique aujourd'hui connue comme « la logique d'Adams » (voir ???). Celle-ci est basée sur une notion de conséquence logique qui préserve, non pas la vérité, mais la probabilité. Pour cette raison, elle se rapproche de la plupart de nos inférences quotidiennes, lesquelles procèdent typiquement à partir de prémisses qui ne sont pas certaines. Nous allons consacrer la présente sous-section à une brève exposition de cette logique.

Introduisons un langage formel \mathcal{L} contenant les énoncés propositionnels : p_0, p_1, p_2, \dots , ainsi que les connecteurs \neg, \wedge et \Rightarrow . L'ensemble des formules factuelles F du langage \mathcal{L} est donné par la règle suivante : $A = p \mid \neg A \mid A \wedge B$. Le symbole \rightarrow , interprété selon l'interprétation matérielle, est défini de manière standard grâce à la conjonction et la négation. L'ensemble F' de formules conditionnelles simples du langage \mathcal{L} est défini par : $F' \cup \{A \Rightarrow B \mid A, B \in F\}$. Ainsi, dans les formules du langage \mathcal{L} , le symbole \Rightarrow est uniquement en position de connecteur principal.

Donnons-nous un ensemble de prémisses M , formulées dans le langage \mathcal{L} , à la vérité desquelles nous croyons sans en être absolument sûrs. Nous nous intéressons au degré de croyance que nous sommes susceptibles d'avoir d'une conclusion A inférée à partir de M . Selon Adams, pour que A soit inférable de M , A doit être au moins aussi probable que M : en d'autres termes, dans une inférence, la probabilité d'une conclusion n'est jamais inférieure à la probabilité de ses prémisses, au pire elle est la même. Une explication plus précise de cette idée requiert de définir l'improbabilité d'un énoncé comme la différence entre 1 et sa probabilité – en symboles : $U(A) = 1 - p(A)$. La stratégie d'Adams peut être présentée de la manière suivante. Si A est une conclusion d'une inférence valide à partir de M , alors il n'existe aucune fonction de probabilité dans laquelle l'improbabilité de A excède la somme des improbabilités des prémisses M :

$$M \models_p A \text{ si, et seulement si, } \forall U, U(A) \leq U(B_1) + U(B_2) + \dots + U(B_n)$$

où $M = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.

Cette relation de « conséquence probabiliste » appelle plusieurs remarques. D'une part, la restriction des formules apparaissant à gauche et à droite du symbole \models_p aux formules factuelles fait coïncider la conséquence probabiliste, définie à l'aide des probabilités, avec la relation de conséquence logique, définie à l'aide des valeurs de vérité (voir Chapitre 11). En d'autres termes, pour tout A et pour tout $M \in F$ (et non pas $\in F'$!):

$$M \models A \text{ si, et seulement si, } M \models_p A$$

D'autre part, puisque $p_A(B) \leq p(A \rightarrow B)$, alors $A \Rightarrow B \models_p A \rightarrow B$. En effet, l'antécédent n'est jamais moins probable que le conséquent. Ainsi, si une dérivation qui procède à partir d'une prémisses contenant \rightarrow vers une conclusion factuelle est valide selon la conséquence logique classique, alors elle demeure valide selon la conséquence probabiliste, même en remplaçant \rightarrow par le connecteur plus fort \Rightarrow . Les inférences suivantes restent donc valides :

- $A, A \Rightarrow B \models_p B$ (*modus ponens*)
- $\neg B, A \Rightarrow B \models_p \neg A$ (*modus tollens*)
- $A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \models_p C$

Dans chaque cas, il n'est pas possible d'avoir les prémisses fortement probables et la conclusion fortement improbable.

En revanche, plusieurs inférences valides du point de vue classique avec l'implication matérielle sont invalides du point de vue probabiliste – à la fois avec la conséquence logique probabiliste et avec l'analyse probabiliste du conditionnel. Par exemple, $A \Rightarrow B$ n'est plus conséquence de B (vérité de l'antécédent). En effet, il est cohérent d'être presque certain que Thomas est au travail en ce moment tout en estimant très improbable que, si Thomas a eu un accident de voiture sur la route pour le travail, alors il est au travail en ce moment. Voici les schémas invalidés par la perspective probabiliste :

- $B \not\models_p A \Rightarrow B$ (vérité du conséquent)
- $\neg A \not\models_p A \Rightarrow B$ (fausseté de l'antécédent)
- $A \Rightarrow \neg B \not\models_p B \Rightarrow \neg A$ (contraposition)
- $A \Rightarrow B \not\models_p A \wedge C \Rightarrow B$ (renforcement de l'antécédent)
- $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \not\models_p A \Rightarrow C$ (transitivité)

Voici, dans le cadre probabiliste, un contre-exemple à chacun de ces schémas – autrement dit une situation dans laquelle la prémisse est très probable et la conclusion très improbable :

- *Fausseté du conséquent.* De manière cohérente, nous pouvons être presque certains que Thomas n'ira pas au travail demain, mais penser qu'il est assez improbable que, si Thomas va au travail demain, alors Thomas ira skier demain.
- *Contraposition.* De manière cohérente, nous pouvons croire probable que si si Goethe avait vécu au-delà de 1832, il ne serait plus en vie aujourd'hui, mais penser qu'il est assez improbable que si Goethe était encore en vie aujourd'hui, il n'aurait pas vécu au-delà de 1832.
- *Renforcement de l'antécédent.* De manière cohérente, nous pouvons être presque certains qu'en grattant une allumette, celle-ci s'allumera, mais penser qu'il est assez improbable qu'en grattant une allumette puis en la plongeant dans un verre d'eau, elle s'allumera.
- *Transitivité.* Nous pouvons estimer qu'il est très probable que si Thomas gagne à la loterie, Thomas ne travaille plus et que si Thomas ne travaille plus, Thomas n'a pas beaucoup d'argent. Néanmoins, nous pouvons simultanément estimer de manière cohérente qu'il est improbable que si Thomas gagne à la loterie, Thomas n'a pas beaucoup d'argent.

Il importe de remarquer que chacun des schémas de conséquences probabilistes invalides ci-dessus est rendu valide par la substitution du symbole \rightarrow d'implication matérielle au symbole \Rightarrow de probabilité conditionnelle.

3. Les conditions de vérité repensées à l'aune des conditions de croyance

Nous allons maintenant utiliser les résultats de la section 2. pour donner une autre réponse au problème posé dans la section 1. En d'autres termes, dans cette section, nous allons proposer des conditions de vérité pour le conditionnel compatibles avec le test de Ramsey et la thèse d'Adams. À cette fin, nous exposerons les logiques de Stalnaker, D. Lewis et Nute qui utilisent et raffinent la notion de monde possible déjà introduite pour l'implication stricte (voir ?, ? et ?). La section s'achèvera par une introduction de la théorie de la démonstration pour ces logiques.

3. 1 Stalnaker et l'usage du test de Ramsey

Dans cette sous-section, nous revenons à la sémantique des énoncés conditionnels en questionnant à nouveau les conditions qui doivent être satisfaites pour que ce soit le cas, par exemple, que Thomas cuisine si Marie décide de ne pas le faire. Une réponse nouvelle, car profondément influencée par la théorie de la validité d'Adams, est contenue dans l'article ?. Stalnaker entreprend d'adapter au cas des valeurs de vérité les intuitions de Ramsey, qui a montré comment évaluer les croyances pour les énoncés conditionnels. Sa solution est construite à l'aide de la notion de monde possible, laquelle représente l'analogie ontologique des croyances hypothétiques. Dans le cadre des croyances, il convenait d'ajouter l'antécédent du conditionnel à l'ensemble des croyances afin d'évaluer ensuite le conséquent. Dans le contexte de la sémantique, l'idée est de se déplacer dans le monde possible le plus proche du monde actuel dans lequel l'antécédent est vrai pour y évaluer le conséquent.

Considérons un monde possible dans lequel A est vrai et qui diffère de manière minimale du monde actuel. « Si A , alors B » est vrai (respectivement faux) dans le cas où B est vrai (resp. faux) dans ce monde (?).

Considérons le conditionnel « s'il ne pleuvait pas, alors Thomas ne prendrait pas son parapluie » et supposons que dans le monde actuel il pleuve. Afin d'évaluer ce conditionnel, Stalnaker nous suggère de nous déplacer dans le monde le plus similaire au monde actuel où il ne pleut pas. Si dans ce monde, Thomas ne prend pas son parapluie, alors le conditionnel « s'il ne pleuvait pas, alors Thomas ne prendrait pas son parapluie » est vrai.

La sémantique des mondes possibles développée par Stalnaker reprend celle de Kripke à laquelle il ajoute une fonction de sélection qui associe à tout monde i les mondes qui sont les plus proches de i . Dans la section précédente, en modifiant notre état de croyance, nous désirions procéder à un changement (rationnel et) minimal. De même, dans le cadre des valeurs de vérité, nous souhaitons changer de monde possible de manière minimale en choisissant le monde possible le plus proche du monde actuel, autrement dit celui qui en diffère le moins. Avant de rentrer dans les détails formels de la sémantique de Stalnaker, soulignons que celle-ci est mieux adaptée aux conditionnels contre-factuels qu'aux conditionnels indicatifs. Par conséquent, au contraire de ce qui fut réalisé jusqu'à présent, nous allons désormais nous concentrer sur les conditionnels contrefactuels.

Donnons-nous un langage $\mathcal{L}_>$ qui étend le langage propositionnel en y ajoutant le symbole $>$, qui formalise le conditionnel contrefactuel. L'ensemble $F_>$ des formules de $\mathcal{L}_>$ est donné par la règle suivante $A = p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid A > B$. Notons que dans ce langage le symbole \rightarrow , correspondant à l'implication matérielle, est défini de manière standard grâce aux connecteurs de la négation et de la conjonction. Dans la sous-section 1. 2, les modèles de mondes possibles \mathfrak{M} furent introduits comme triplets constitués d'un ensemble W de mondes possibles, d'une relation R et d'une fonction de vérité v . Ces modèles sont maintenant élargis. D'une part, W est enrichi du « monde absurde » (auquel aucun monde possible n'a accès et qui ne peut accéder à aucun monde possible) dénoté par le symbole λ . D'autre part, on ajoute une fonction de sélection $f : W \times \mathcal{P}(W)$ vers W , à savoir une fonction qui va des paires de mondes et formules vers des mondes¹⁵ et qui satisfait les propriétés suivantes :

- (p1) $\forall i(f(i, A) \models_{\mathfrak{M}} A)$
- (p2) $f(i, A) = \lambda$ si et seulement si il n'existe aucun j tel que iRj et $j \models_{\mathfrak{M}} A$
- (p3) $\forall i$ (si $i \models_{\mathfrak{M}} A$, alors $f(i, A) = i$)
- (p4) $\forall i$ (si $f(i, A) \models_{\mathfrak{M}} B$ et $f(i, B) \models_{\mathfrak{M}} A$, alors $f(i, A) = f(i, B)$)

La relation de satisfaction d'une formule A dans un monde i d'un modèle \mathfrak{M} est définie de la manière suivante :

- $i \models_{\mathfrak{M}} p$ si, et seulement si, $v(i, p) = 1$
- $i \models_{\mathfrak{M}} \neg A$ si, et seulement si, $i \not\models_{\mathfrak{M}} A$
- $i \models_{\mathfrak{M}} A \wedge B$ si, et seulement si, $i \models_{\mathfrak{M}} A$ et $i \models_{\mathfrak{M}} B$
- $i \models_{\mathfrak{M}} A \rightarrow B$ si, et seulement si, si $i \models_{\mathfrak{M}} A$, alors $i \models_{\mathfrak{M}} B$
- $i \models_{\mathfrak{M}} A > B$ si, et seulement si, $f(i, A) \models_{\mathfrak{M}} B$

Examinons en premier lieu les propriétés p1-p4. La première correspond à l'axiome $A > A$ tandis que p3 correspond à l'axiome $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$. p4 assure une cohérence dans l'ordre induit par la fonction de sélection, et correspond à l'axiome $((A > B) \wedge (B > A)) \rightarrow ((A > C) \rightarrow (B > C))$. Enfin, la définition de f , en tant que fonction, garantit l'existence et l'unicité du monde le plus proche d'un monde i relativement à une formule A . Sous l'autorité de p2, c'est λ qui joue le rôle de ce monde lorsqu'aucun monde accessible depuis i ne valide A . En d'autres termes, f prend la valeur de l'absurde lorsque l'antécédent du contrefactuel est impossible. Notons aussi que l'existence et l'unicité du monde le plus proche, garantis par la définition de f , correspondent à l'axiome $(A > B) \vee (A > \neg B)$.

15. Dorénavant dans les fonctions des sélections nous indiquerons les formules comme les ensembles de mondes dans lesquels elles sont vrais.

Concernant la relation de satisfaction, notons qu'elle propose un traitement standard des connecteurs classiques, tandis que tout contrefactuel (de la forme $A > B$) est satisfait dans un monde i d'un modèle \mathfrak{M} si, et seulement si, le monde j le plus proche de i qui satisfait la formule A satisfait aussi la formule B . Considérons l'énoncé « Si Thomas n'avait pas cuisiné, Marie l'aurait fait » et supposons que, dans le monde actuel, Thomas ait cuisiné. L'antécédent est donc faux. Afin d'évaluer ce contrefactuel, il convient d'identifier le monde le plus proche dans lequel Thomas n'a pas cuisiné puis de vérifier si, dans ce monde, Marie a effectivement cuisiné. Si c'est le cas, alors le contrefactuel est vrai.

Notons tout d'abord que dans la logique de Stalnaker nous pouvons définir l'implication stricte introduite dans la Section 1. 2 ; nous rappelons que l'implication stricte correspond au symbole \rightarrow et elle est défini de la manière suivante $A \rightarrow B := \Box(A \rightarrow B)$. Puisque la logique de Stalnaker est au niveau sémantique une extension de la sémantique des mondes possibles de Kripke, dans la logique de Stalnaker il est possible d'introduire et interpréter le symbole \Box . De plus, comme nous l'avons vu auparavant, la logique de Stalnaker est fondée sur un langage propositionnel où nous pouvons définir l'implication matérielle \rightarrow . Donc dans la logique de Stalnaker nous pouvons aussi définir l'implication stricte \rightarrow . Nous pouvons alors démontrer¹⁶ que le contrefactuel $>$ de Stalnaker se situe à mi-chemin entre implication stricte et implication matérielle, et qu'il se trouve aussi à mi-chemin entre la conjonction et l'implication matérielle.

Par ailleurs, aucun des principes problématiques pour le conditionnel n'est valide dans la logique de Stalnaker :

- $\neg A \not\llbracket_{\mathfrak{M}} A > B$ (fausseté de l'antécédent)
- $B \llbracket_{\mathfrak{M}} A > B$ (vérité du conséquent)
- $A > B \not\llbracket_{\mathfrak{M}} \neg B > \neg A$ (contraposition)
- $A > B \not\llbracket_{\mathfrak{M}} A \wedge C > B$ (renforcement de l'antécédent)
- $A > B, B > C \not\llbracket_{\mathfrak{M}} A > C$ (transitivité)

En guise d'exemple, bâtissons un modèle \mathfrak{M} de Stalnaker qui invalide le renforcement de l'antécédent. Posons $\mathfrak{M} = \{W, R, f, v\}$ tel que $W = \{i, j, k\}$, $R = \{iRj, iRk\}$, $f(i, p) = j$ et $f(i, p \wedge q) = k$. La fonction v est définie de la manière suivante (en indiquant seulement les cas dans lesquels elle assigne la valeur de vérité 1, elle prend donc la valeur 0 dans tous les autres) :

- $v(j, p) = v(k, p) = 1$

16. De manière standard, la démonstration consiste à montrer que les formules $(A \rightarrow B) \rightarrow (A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ et $(A \wedge B) \rightarrow (A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ sont valides dans les modèles de Stalnaker.

- $v(j, r) = 1$
- $v(k, q) = 1$

Le monde i de ce modèle \mathfrak{M} satisfait la formule $p > r$. En effet, r est satisfaite dans le monde le plus proche de i qui satisfait p , à savoir dans j . En revanche, le monde i ne satisfait pas la formule $p \wedge q > r$, car r n'est pas satisfaite dans le monde le plus proche de i qui satisfait $p \wedge q$, à savoir le monde k . Donc $p \wedge q > r$ n'est pas une conséquence logique de la formule $p > r$.

Dans la sémantique de Stalnaker les principes suivants sont valides :

- $A, A > B \models_{\mathfrak{M}} B$ (*modus ponens*)
- $\neg \Box \neg A \models_{\mathfrak{M}} \neg(A > B) \leftrightarrow (A > \neg B)$

Le lecteur aura peut-être remarqué la forte similitude entre les principes validés par la sémantique de Stalnaker et ceux corroborés par la logique d'Adams – par exemple le *modus ponens* –, ainsi que ceux qui sont bloqués par les deux logiques – notamment la transitivité et le renforcement de l'antécédent. Un des résultats les plus remarquables dans la littérature contemporaine sur les conditionnels tient dans la preuve de la coïncidence de la conséquence probabiliste d'Adams et de la conséquence logique de la sémantique de Stalnaker sur leur domaine commun (voir ???). En termes plus formels, cela signifie que pour tout $M \cup A \in F'$ de \mathcal{L} (voir section 2. 2) et pour toute traduction δ associant à chaque formule de la forme $A \Rightarrow B$ la formule correspondante $A > B$ du langage $\mathcal{L}_{>}$, alors :

$$M \models_p A \text{ si, et seulement si, } (M)^\delta \models (A)^\delta$$

où la relation \models est définie par la sémantique de Stalnaker. La démonstration de ce théorème est extrêmement complexe et utilise un résultat de Van Fraassen (voir ?) portant sur l'algèbre des propositions factuelles enrichie d'une fonction de probabilité.

Pour conclure, soulignons que la sémantique de Stalnaker s'adapte aussi aux conditionnels indicatifs. Néanmoins, dans ce cadre, une contrainte pragmatique pèse sur la fonction de sélection, prenant en compte les contextes qui apparaissent naturellement dans nos conversations et qui, selon Stalnaker même (voir ?), sont au cœur de l'évaluation des conditionnels indicatifs.

3. 2 Les approches de Lewis et de Nute

Dans cette section, nous allons présenter deux célèbres variantes de la sémantique de Stalnaker : celle de D. Lewis (voir ?) et celle de Nute (voir ?). Nous reviendrons sur les trois approches dans la dernière section.

Commençons par la sémantique de Lewis, née d'une double critique de celle de Stalnaker. Dans cette dernière, Lewis critique en premier lieu l'hypothèse d'unicité. Il s'oppose à l'idée que, pour tout monde i , il ne puisse exister qu'un monde qui soit le plus proche de i relativement à une formule. Parallèlement, il critique aussi l'hypothèse d'existence, s'opposant à l'idée que, pour tout monde i , il existe toujours un monde qui soit le plus proche de i relativement à une formule. Contrairement à Stalnaker, Lewis estime donc qu'il peut n'exister aucun monde ou exister plusieurs mondes qui soient les plus proches d'un monde i relativement à une formule. Tentons de comprendre davantage ces deux critiques en les analysant en détail, et commençons par la première.

À cette fin, considérons les énoncés suivants : « si Bizet et Verdi avaient été compatriotes, ils auraient été français » et « si Bizet et Verdi avaient été compatriotes, ils auraient été italiens ». Selon le modèle de Stalnaker, grâce à la clause d'unicité qui correspond à l'axiome $(A > B) \vee (A > \neg B)$, l'un de ces conditionnels est vrai. Pourtant on peut avoir l'intuition que les deux conditionnels sont faux : s'ils avaient été compatriotes, ils auraient pu aussi bien être italiens que français. Motivé par cette intuition, Lewis redéfinit la fonction de sélection f de la sémantique de Stalnaker comme une fonction allant de $W \times \mathcal{P}(W)$ dans $\mathcal{P}(W)$, à savoir une fonction allant des paires mondes et énoncés aux *ensembles* de mondes, et non plus aux mondes. Lewis adapte ensuite à cette modification la relation de satisfaction d'une formule contrefactuelle dans un monde i d'un modèle \mathfrak{M} de la manière suivante :

$$i \models_{\mathfrak{M}} A > B \text{ si, et seulement si, } \forall j \text{ (si } j \in f(i, A), \text{ alors } j \models_{\mathfrak{M}} B)$$

Lewis est ainsi en mesure de construire un modèle qui falsifie les deux énoncés concernant Verdi et Bizet. Soit $W = \{i, j, k\}$, $R = \{iRj, iRk\}$ et $f(i, C) = \{j, k\}$, où la formule C formalise l'énoncé « Verdi et Bizet sont compatriotes. » La fonction v est alors définie de la manière suivante :

- $v(j, C) = v(k, C) = 1$
- $v(j, F) = v(k, I) = 1$

où F formalise l'énoncé « Verdi et Bizet sont français » et I l'énoncé « Verdi et

Bizet sont italiens. » Dans ce modèle \mathfrak{M} , le monde i ne satisfait ni la formule $C > F$ ni la formule $C > I$. En effet, il est faux que, dans tous les mondes les plus proches de i qui satisfont C – à savoir j et k –, la formule F est satisfaite : et la même conclusion s’applique à la formule I . Notons de plus que ni la formule $(C > F) \vee (C > \neg F)$ ni la formule $(C > I) \vee (C > \neg I)$ ne sont vrais au monde i , car il est faux que dans tous les mondes les plus proches de i qui satisfont C la formule F est satisfaite ou que la formule $\neg F$ est satisfaite. Le même raisonnement vaut pour I .

Venons-en à la critique de l’hypothèse d’existence. Considérons une ligne longue d’un mètre et formulons l’énoncé suivant : « si cette ligne était longue de plus d’un mètre, alors ... ». Pour évaluer ce conditionnel contrefactuel dans un modèle de Stalnaker, il faut se placer dans le monde j le plus proche du monde actuel i validant l’antécédent – donc dans lequel la ligne mesure plus d’un mètre. Lewis explique qu’en réalité, le choix d’un tel monde j est impossible puisqu’il existera toujours un monde k contenant une ligne plus courte que celle de j mais plus longue que celle de i , donc un monde k qui sera plus proche de i que j et dans lequel l’antécédent du conditionnel sera vrai. Par exemple, si la ligne mesure 1,01m dans j , il suffit de considérer k dans lequel elle mesure 1,005m. La solution de Lewis consiste à tenir compte de *tous* les mondes contenant une ligne plus longue qu’un mètre et plus courte que, par exemple, 1,01m : puis de vérifier que le conséquent est vrai dans *tous* ces mondes. Si c’est le cas, alors le contrefactuel est vrai.

Afin de formaliser cette idée, Lewis introduit explicitement une relation de similitude entre mondes. La formule $i \leq_j k$ exprime que i est plus proche de j que k . Muni de cette relation d’ordre large, transitive et totale, ainsi que d’autres suppositions sur le monde actuel et sur la relation d’accessibilité, Lewis définit la satisfaction d’un contrefactuel $A > B$ dans un monde i d’un modèle \mathfrak{M} de la manière suivante : soit il n’existe aucun monde possible qui satisfait A , soit il existe au moins un monde j satisfaisant A et B tel qu’il n’existe aucun monde plus proche de i que j et qui satisfait A et $\neg B$.

$$i \models_{\mathfrak{M}} A > B \text{ si, et seulement si, } \neg \exists j(iRj \text{ et } j \models_{\mathfrak{M}} A) \text{ ou } \exists j(iRj \text{ et } j \models_{\mathfrak{M}} A \wedge B \text{ et } \neg \exists k(iRk \text{ et } k \leq_i j \text{ et } k \models_{\mathfrak{M}} A \wedge \neg B))$$

Il importe de souligner deux points centraux à propos des sémantiques de Stalnaker et de Lewis. D’une part, celle de Lewis fut obtenue à partir de celle de Stalnaker en éliminant les hypothèses d’unicité et d’existence. Elle correspond à un système formel aujourd’hui connu sous le nom de « VC ». D’autre part, pour poursuivre la comparaison entre les deux approches, soulignons que si

celle de Lewis est plus générale, elle n'est pas toujours adéquate. Par exemple, dans la sémantique de Lewis, la négation du conditionnel ne correspond plus à la négation conditionnelle du conséquent, formellement :

$$\neg \Box \neg A \not\equiv_{\mathfrak{M}} \neg(A > B) \leftrightarrow (A > \neg B)$$

Examinons maintenant la sémantique de Nute qui se distingue par sa simplicité. Un modèle de Nute est obtenu à partir d'un modèle de Stalnaker en éliminant le monde absurde λ et la relation d'accessibilité entre mondes, et en adoptant la fonction de sélection de Lewis qui prend pour valeur un ensemble de mondes plutôt qu'un seul monde. Précisément, un modèle de Nute \mathfrak{M} est composé d'un ensemble de mondes possibles W , d'une fonction de sélection $f : W \times \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$ (à savoir une fonction allant des paires mondes et formules vers les ensembles de mondes), et d'une fonction d'évaluation v standard. La relation de satisfaction d'une formule A dans un monde i du modèle \mathfrak{M} est définie de la manière suivante :

- $i \models_{\mathfrak{M}} p$ si et seulement si $v(i, p) = 1$
- $i \models_{\mathfrak{M}} \neg A$ si et seulement si $i \not\models_{\mathfrak{M}} A$
- $i \models_{\mathfrak{M}} A \wedge B$ si et seulement si $i \models_{\mathfrak{M}} A$ et $i \models_{\mathfrak{M}} B$
- $i \models_{\mathfrak{M}} A \rightarrow B$ si et seulement si : si $i \models_{\mathfrak{M}} A$, alors $i \models_{\mathfrak{M}} B$
- $i \models_{\mathfrak{M}} A > B$ si et seulement si $\forall j$ (si $j \in f(i, A)$, alors $j \models_{\mathfrak{M}} B$)

Notons que la fonction f satisfait seulement la « condition de normalité » :

pour toute formule A et B , si $A \leftrightarrow B$ est valide dans la classe des modèles de Nute, alors $f(i, A) = f(i, B)$.

Cette condition correspond syntaxiquement à la validité des deux règles d'inférence suivantes :

- (RCEA)

$$\frac{A \leftrightarrow B}{(A > C) \leftrightarrow (B > C)}$$

- (RCK)

$$\frac{(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B}{(C > A_1 \wedge \dots \wedge C > A_n) \rightarrow (C > B)}$$

La classe des modèles de Nute ainsi définie caractérise le système axiomatique connu sous le nom de « CK ». D'autres modèles de Nute, ainsi que les

systèmes axiomatiques correspondants, peuvent être obtenus en remplaçant f par d'autres fonctions qui satisfont une ou plusieurs des propriétés p1-p4. L'hypothèse d'unicité elle-même peut être réintroduite en intégrant la propriété suivante : $|f(i, A)| \leq 1$.

Enfin, notons que certains principes des conditionnels traditionnellement considérés comme valides sont perdus dans les sémantiques de Stalnaker, Lewis et Nute, à savoir :

- $(A > (B > C)) \neq A \wedge B > C$ (import-export)
- $(A \vee B > C) \neq (A > C) \wedge (B > C)$ (antécédent disjonctif)
- $A \vee B \neq \neg A \rightarrow B$ (syllogisme disjonctif)

3.3 La théorie de la démonstration pour les logiques de Stalnaker, Lewis et Nute

Dans ce chapitre, nous avons introduit plusieurs interprétations sémantiques pour le conditionnel : l'interprétation matérielle, l'interprétation correspondant à l'implication stricte et les sémantiques de Stalnaker, Lewis et Nute. Si ces présentations furent accompagnées de systèmes axiomatiques pour lesquels il est possible de démontrer des théorèmes d'adéquation et de complétude avec ces sémantiques, rien n'a été dit sur la théorie de la démonstration – exception faite de l'interprétation matérielle pour laquelle nous avons introduit les règles de déduction naturelle correspondantes. À vrai dire, pendant plusieurs décennies, un pessimisme général a dominé ce domaine de recherche, conséquence directe du scepticisme relatif à la théorie de la démonstration pour la logique modale (voir par exemple ?). S'il s'avérait difficile de construire des systèmes de preuves pour les principaux systèmes de logique modale, comment pouvait-on espérer bâtir de tels systèmes pour les théories des conditionnels qui ne sont que des extensions de la logique modale ?

Cette tendance s'est inversée au début des années 2000, lorsque différents calculs des séquents pour les principaux systèmes de logique modale ont été mis au jour (voir ?). À l'instar de la sémantique pour la logique modale qui étend la sémantique pour la logique classique en introduisant un ensemble de mondes possibles, les différents calculs de preuves pour la logique modale étendent les calculs de preuves classiques en introduisant des éléments nouveaux. Dans certains calculs, on travaille simultanément avec plusieurs séquents qu'on dispose de manière à former un arbre – *arbres-hyperséquents* (voir

par exemple ?); d'autres calculs utilisent des indices sur les séquents (voir par exemple ?); d'autres encore intègrent plusieurs symboles syntaxiques (un panorama détaillé de ces systèmes peut être trouvé dans ?). En général, il s'agit de calculs des séquents permettant d'obtenir d'importants résultats tels que l'élimination des coupures, l'admissibilité de plusieurs règles structurelles ou encore la décidabilité. Ces calculs ont comblé une lacune significative dans le domaine en chassant définitivement tout scepticisme relatif à la théorie de la démonstration pour la logique modale.

Ces dernières années, des études très intéressantes ont été menées afin de développer des calculs des séquents et des calculs en déduction naturelle pour les théories du conditionnel, en particulier pour les sémantiques de Stalnaker, Lewis et Nute. En ce qui concerne la sémantique de Lewis et son système VC, nous disposons désormais de plusieurs calculs des séquents : un qui utilise les hyperséquents (voir ?), un qui utilise des blocs (voir ?) et un qui utilise des restrictions de contextes dans les règles (voir ?). Il a en outre été démontré que le troisième calcul pouvait être plongé dans le deuxième.

En ce qui concerne la sémantique de Nute, nous disposons cette fois de deux résultats différents. D'une part, il existe des calculs des séquents employant des arbres-hyperséquents (voir ?). D'autre part, il existe des calculs des séquents ainsi que des calculs en déduction naturelle qui utilisent des indices sur les formules (voir ?). Les deux types de calculs ont été démontrés équivalents.

Enfin, certains calculs ont été mis au jour pour les sémantiques des conditionnels de Stalnaker, donc adaptés à une fonction de sélection qui prend un seul monde pour valeur. Certains d'entre eux se basent encore sur une structure d'arbres (voir ?). D'autres sont élaborés par ? en clôturant un ensemble de règles par la règle de coupure.