

MODÉLISATION INTERFACIALE DE CHOCS DANS LES SUSPENSIONS

Nicolas Jamet, Roger Prud'homme & Louis Gottesdiener

*LMM (UMR 7607/CNRS/UPMC)
8 rue du Capitaine Scott-75015 Paris*

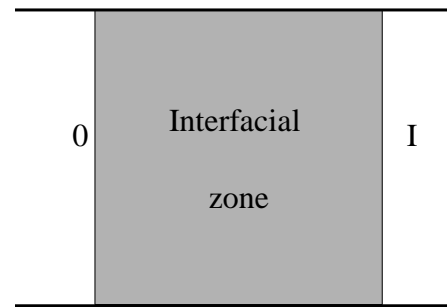
L'onde de choc faible dans une suspension diluée et la zone de relaxation amont seront considérées comme des milieux interfaciaux. Les transferts de quantité de mouvement et d'énergie seront analysés par la thermodynamique des processus irréversibles. La singularité au voisinage du régime sonique sera étudiée au moyen de développements asymptotiques.

ÉQUATIONS DE BILAN D'UNE INTERFACE DE DISCONTINUITÉ UNIDIMENSIONNELLE STATIONNAIRE

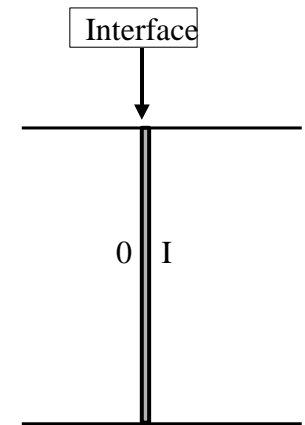
$$\boxed{[[J + \rho\psi(V - W_S)]] = \rho_a \phi_S}$$

ψ unité de masse de la grandeur considérée, J son flux, ϕ_S sa production, ρ masse volumique, ρ_a masse surfacique, V vitesse matérielle, W_S vitesse d'interface, $[[f]] = f_{II} - f_I$, saut de f à la traversée de l'interface.

Zone interfaciale et interface : le même phénomène observé à deux échelles différentes



a)



b)

TAUX DE PRODUCTION D'ENTROPIE PAR UNITÉ D'AIRE

$$\Delta_a = \mathcal{A}_{vS} \mathcal{J}_{vS} + \mathcal{A}_{TS} \mathcal{J}_{TS}$$

TPI linéarisée :

$$\mathcal{J}_v = L_v \mathcal{A}_v, \quad \mathcal{J}_T = L_v \mathcal{A}_T$$

L'ONDE DE CHOC EN TANT QU'INTERFACE

$$[[\rho u]] = [[\dot{m}]] = 0 \text{ (masse),}$$

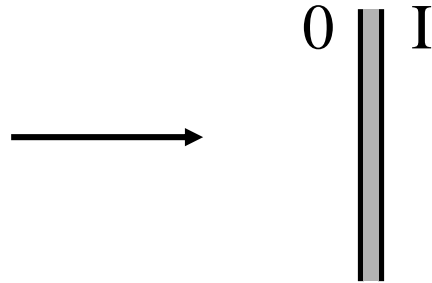
$$\dot{m}[[u]] + [[p]] = 0 \text{ (quantité de mouvement),}$$

$$\dot{m}\left[[h + \frac{u^2}{2}]\right] = 0 \text{ (énergie totale)}$$

$$\dot{m}[[s]] = \Delta_a \geq 0 \text{ (entropie)}$$

$$\text{gaz idéal : } \Delta_a = \dot{m} c_v \ln(\tilde{p} \tilde{v}^\gamma)$$

$$\text{avec } \tilde{v} = \rho_0 / \rho_I, \quad \tilde{p} = p_I / p_0, \quad \gamma = c_p / c_v = \text{Cte}$$



Ondes de choc faibles (proche équilibre) :

$$\Delta_a \cong \dot{m} c \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2} \varepsilon^3$$

avec $M_0^2 - 1 = \varepsilon \ll 1$, $M_0 = u_0/a_0$, $a_0 = \sqrt{\gamma r T}$, $r = R/M$

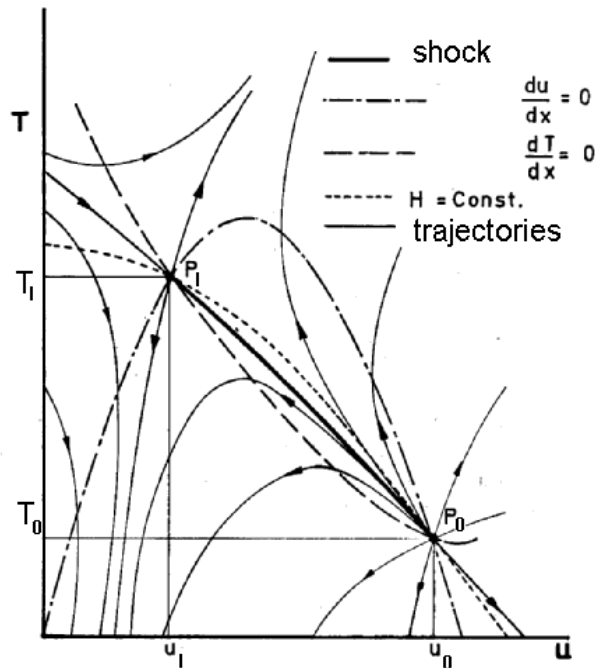
Force généralisée : $\mathcal{A}_S = \llbracket u \rrbracket$

$$\Delta_a = \mathcal{A}_S J_S \quad \Rightarrow \quad J_S = \frac{\Delta_a}{\mathcal{A}_S} = -\frac{\rho_0(\gamma+1)}{12T_0} \mathcal{A}_S^2$$

C'est un comportement non linéaire, du point de vue de la Thermodynamique des processus irréversibles.

On peut séparer les dissipations thermique et visqueuse en procédant comme suit.

Structure d'une onde de choc faible (Smolderen 1971)



$$\Delta_{aT} = \int_0^I \frac{k}{T^2} \frac{dT}{dx} dT$$

$$\Delta_{av} = \int_0^I \frac{4\mu}{3T} \frac{du}{dx} du$$

On admet :

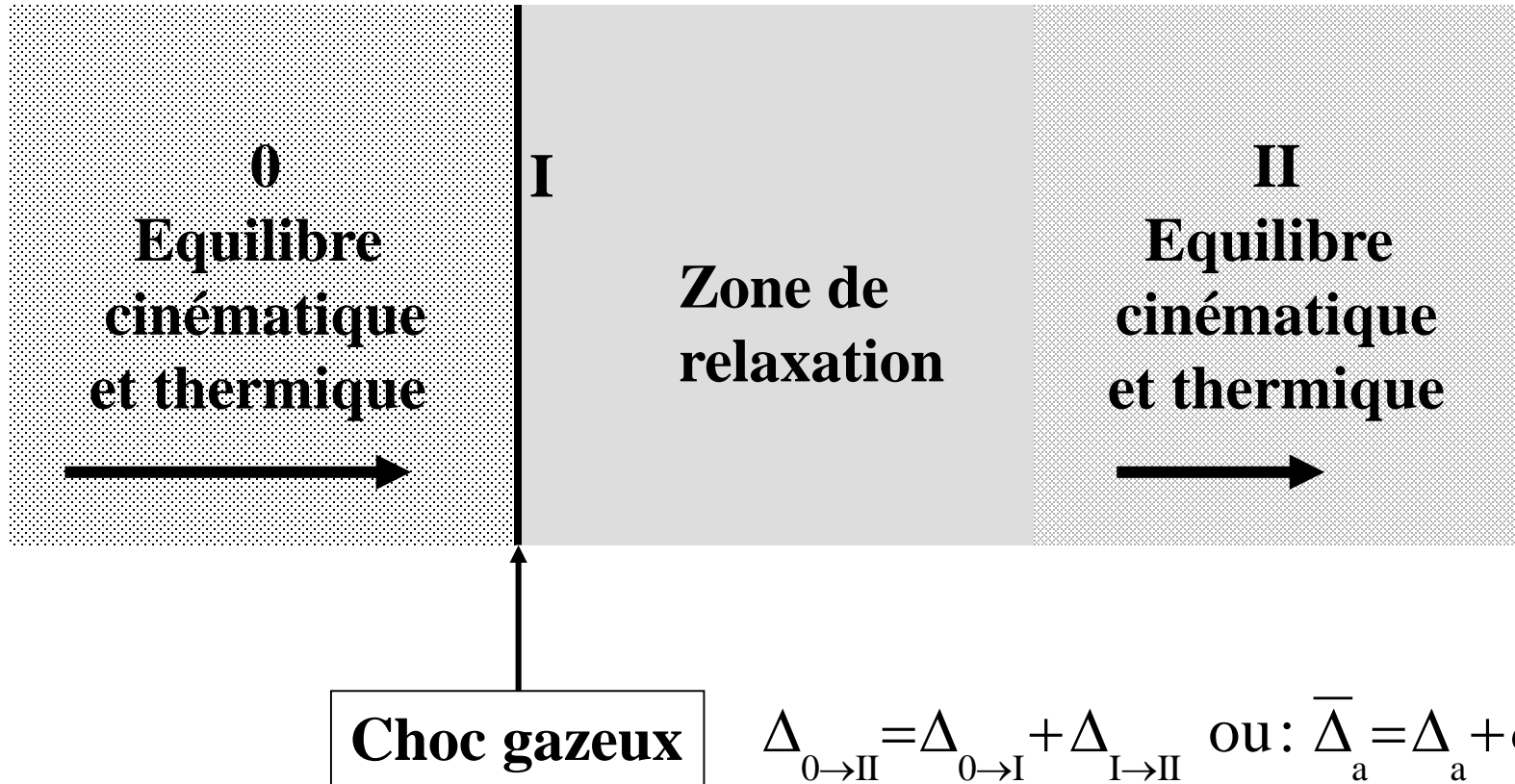
$$h + u^2/2 \cong E = \text{Cte}, \quad dT/du \cong -u/c_p$$

→ $\Delta_a = \Delta_{aT} + \Delta_{av}, \quad \Delta_{aT} \cong \frac{\gamma-1}{Pr'} \Delta_{av}, \quad Pr' = 4\mu c_p / 3k$

(Gatignol et Prud'homme, 2001)

ONDE DE CHOC DANS UNE SUSPENSION DILUÉE

Structure d'une onde de choc en écoulement diphasique




Bilans volumiques simplifiés pour une suspension diluée (cas stationnaire) (Marble 1970)


$$\frac{\rho_p u_p}{\rho u} = \frac{\dot{m}_p}{\dot{m}} = K = \text{Cte}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \dot{m} \frac{du_p}{dx} + \dot{m} \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \\ K \dot{m} \frac{d(e_p + u_p^2/2)}{dx} + \dot{m} \frac{d(e + u^2/2)}{dx} + \frac{d(pu)}{dx} = 0 \\ \frac{du_p}{dx} = \frac{u - u_p}{l_v}, \quad \frac{dT_p}{dx} = \frac{T - T_p}{l_T} \end{array} \right.$$

Suspension diluée à l'équilibre

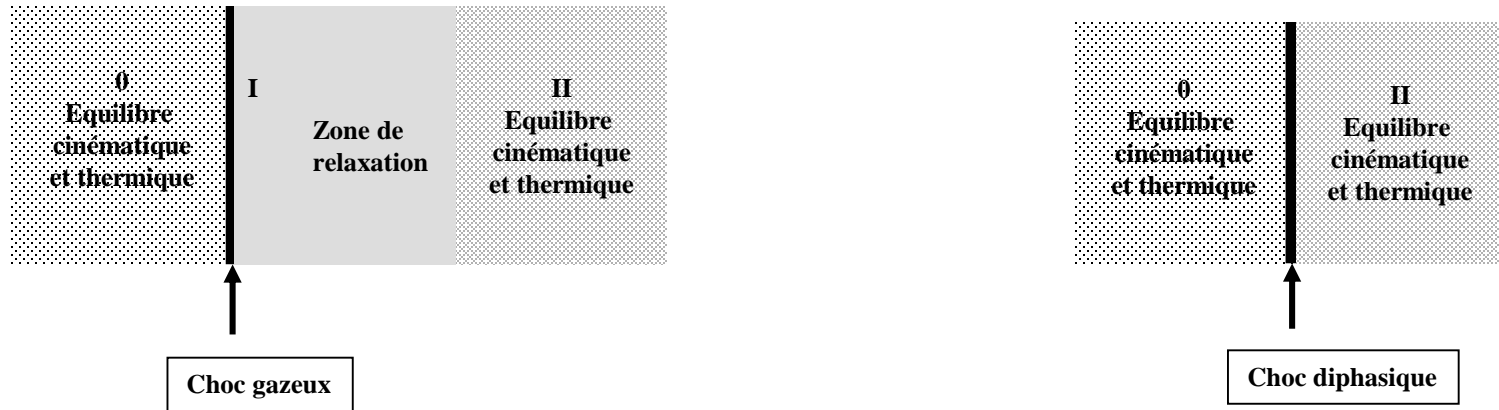
$T_p = T$, $u_p = u$  gaz idéal effectif :

$$\bar{p} = p, \quad \bar{\rho} = \rho + \rho_p, \quad \bar{T} = T, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{\rho} \bar{e} = \rho e + \rho_p e_p, \quad \bar{p} = p = \bar{\rho} \bar{r} T, \quad \bar{m} = \dot{m} + \dot{m}_p$$


$$\bar{\rho} = \rho(1+K), \quad \bar{m} = \dot{m}(1+K), \quad \bar{c}_p = c_p, \quad \bar{c}_v = c_v \frac{1+K\gamma}{1+K},$$

$$\bar{\gamma} = \gamma \frac{1+K}{1+K\gamma}, \quad \bar{r} = \frac{r}{1+K}, \quad \bar{c}^2 = \frac{c^2}{1+\gamma K}, \quad \bar{M}^2 = u^2 / \bar{c}^2 = (1+K\gamma) M^2$$

L'onde de choc diphasique en tant qu'interface



Choc gazeux + Zone de relaxation = Choc diphasique

Gaz équivalent \longrightarrow idem choc monophasique

On pose : $\bar{\varepsilon} = \bar{M}_0^2 - 1 \ll 1 \longrightarrow \bar{\Delta}_a \cong \bar{m} \bar{c}_v \frac{2\bar{\gamma}(\bar{\gamma}-1)}{3(\bar{\gamma}+1)^2} \bar{\varepsilon}^3$

L'onde de choc diphasique en tant qu' interface (suite)

Cas des suspensions diluées : $K \ll 1$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon(1 + \gamma K) + \gamma K \quad \longrightarrow \quad \text{Singularité en } \varepsilon \text{ et } K$$

On pose : $\varepsilon = \alpha^{-1} K^p$ avec $p > 0$

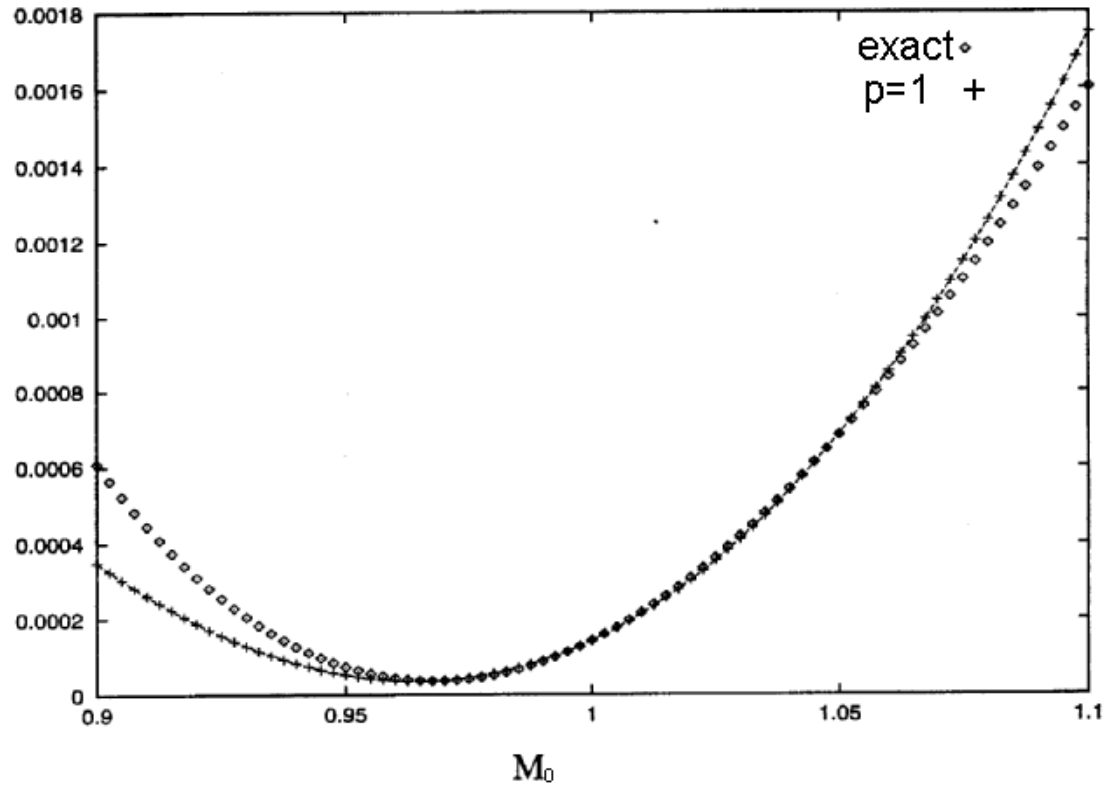
Pour $p=1$ (moins dégénérescence) :

$$\bar{\Delta}_a \cong \dot{m} c_v \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2} (\varepsilon + \gamma K)^3$$

COMPORTEMENT DE LA ZONE DE RELAXATION

$$\delta_a = \bar{\Delta}_a - \Delta_a \cong mc_v \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2} \gamma K (\gamma^2 K^2 + 3\gamma K \varepsilon + 3\varepsilon^2) \geq 0$$

$$\varepsilon = M_0^2 - 1, \quad K \text{ fixé}$$



Production d'entropie réduite en fonction
du nombre de Mach amont M_0 (Jamet 1998)

Relation flux généralisé -force généralisée

On montre que :

$$\delta_a \cong \dot{m} c_v \frac{\gamma(\gamma-1)}{6u_0^2} \gamma K \left[(u_0 - u_I)^2 + (u_0 - u_{II})^2 + (u_0 - u_I)(u_0 - u_{II}) \right]$$

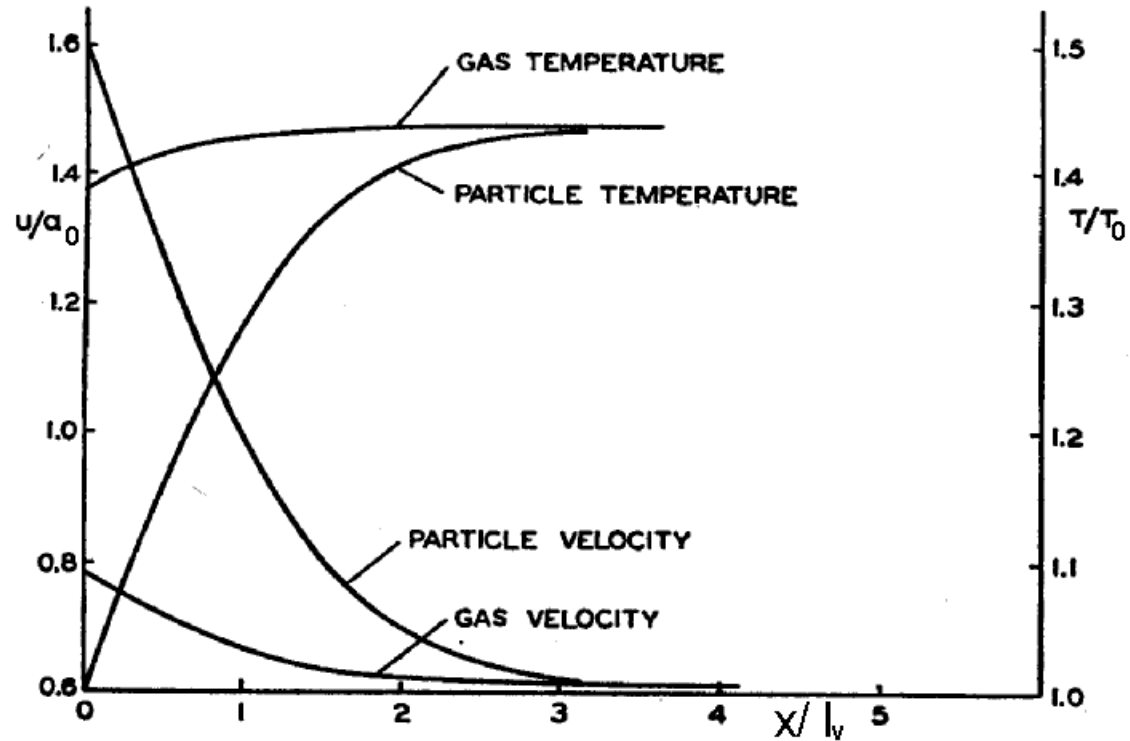
En posant, pour la force généralisée :

$$\mathcal{A}_S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(u_0 - u_I)^2 + (u_0 - u_{II})^2 + (u_0 - u_I)(u_0 - u_{II})}{3}}$$

On obtient une relation linéaire flux généralisé - force généralisée :

$$\mathcal{J}_S = \frac{\delta_a}{\mathcal{A}_S} \cong \dot{m} c_v \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{u_0^2} K \mathcal{A}_S$$

Structure interne de la zone de relaxation



Spatial structure of shock relaxation zone:(Marble 1970)

$$\delta_a = \int_I^{\Pi} \Delta dx = \int_I^{\Pi} \left[Q \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T} \right) + \frac{F}{T} (u - u_p) \right] dx, \text{ avec : } \begin{cases} F = \rho_p u_p \frac{u - u_p}{l_v} \\ Q = \rho_p u_p c_p \frac{T - T_p}{l_T} \end{cases}$$

On pose :

$$\delta_{aT} = \int_I^{\Pi} Q \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T} \right) dx, \quad \delta_{av} = \int_I^{\Pi} \frac{F}{T} (u - u_p) dx$$

Si l'on admet : $c_p T + \frac{u^2}{2} \cong \frac{E}{\dot{m}} = \text{Cte}$, ainsi que : $\frac{dT_p}{dx} \cong \frac{dT}{dx}$

et $\frac{du_p}{dx} \cong \frac{du}{dx}$, on obtient : $\frac{\delta_{aT}}{\delta_{av}} \cong \frac{\Delta_T}{\Delta_v} \cong \frac{3(\gamma-1)}{2} \text{Pr} \cong \text{Cte}$

CONCLUSION

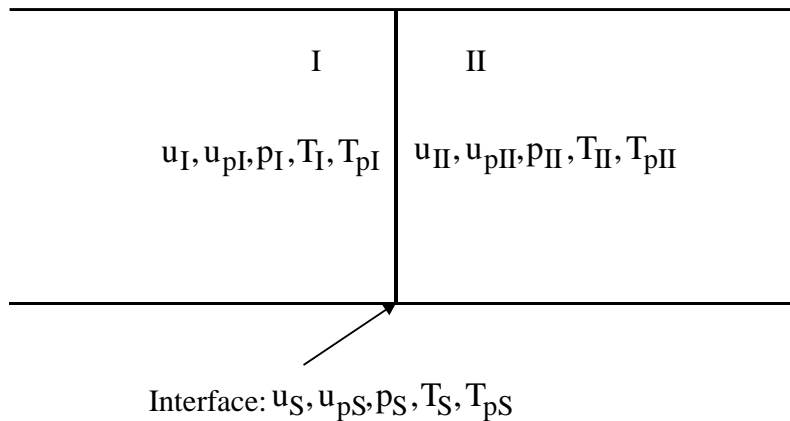
La théorie linéaire des interfaces diphasiques avait conduit à une divergence des coefficients phénoménologiques (Jamet, N., Prud'homme, R. et Gottesdiener, L., *13ème Congrès Français de Mécanique*, Poitiers, 1997) .

Cette divergence a été levée en traitant la singularité transsonique par la théorie des développements asymptotiques à deux petits paramètres.

De nouvelles expressions des forces et des flux généralisés ont pu être déduites.

Le raccordement entre les deux théories peut être fait.

Interface plane en écoulement unidimensionnel : théorie linéaire



$$\left\{ \begin{array}{l} [[\dot{m} + \dot{m}_p]] = 0 \\ [[\dot{m}u + \dot{m}_p u_p]] = 0 \\ [[\dot{m} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \dot{m}_p \left(e_{ps} + \frac{u_p^2}{2} \right) + pu]] = 0 \end{array} \right.$$

$$[[\dot{m}s + \dot{m}_p s_p]] = \delta_a \geq 0$$

Bilans des particules

$$u_{pS} = \frac{u_{pI} + u_{pII}}{2}$$

$$\begin{cases} [[\dot{m}_p]] = 0 & \dot{m}_p [[\frac{u_p^2}{2}]] = F_a u_{pS} \\ \dot{m}_p [[u_p]] = F_a & \\ \dot{m}_p [[e_p]] = Q_a & \dot{m}_p [[e_p + \frac{u_p^2}{2}]] = Q_a + F_a u_{pS} \end{cases}$$

Bilans du gaz

$$u_S = \frac{u_I + u_{II}}{2}$$

$$\begin{cases} [[\dot{m}]] = 0 \\ \dot{m} [[u]] + [[p]] = -F_a \\ \dot{m} [[e + \frac{u^2}{2}]] + [[pu]] = -Q_a - F_a u_{pS} \end{cases}$$

Linéarisation de la relation de Gibbs

$$T_S = \frac{T_I + T_{II}}{2}, T_{pS} = \frac{T_{pI} + T_{pII}}{2}, p_S = \frac{p_I + p_{II}}{2}$$

$$[[s]] = \frac{[[e]]}{T_S} + \frac{p_S}{T_S} [[v]]$$

$$[[s_p]] = \frac{[[e_p]]}{T_S}$$

Production d'entropie

$$\delta_a = Q_a \left(\frac{1}{T_{pS}} - \frac{1}{T_S} \right) + \frac{1}{T_S} F_a (u_S - u_{pS})$$

Relations d'Onsager

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_a = L_{11S} \left(\frac{1}{T_{pS}} - \frac{1}{T_S} \right) + L_{12S} (u_S - u_{pS}) \\ \frac{F_a}{T_S} = L_{21S} \left(\frac{1}{T_{pS}} - \frac{1}{T_S} \right) + L_{22S} (u_S - u_{pS}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_a = L_{TS} \left(\frac{1}{T_{pS}} - \frac{1}{T_S} \right), \quad \frac{F_a}{T_S} = L_{vS} (u_S - u_{pS}) \\ Q_a = \mathcal{L}_{TS} (T_S - T_{pS}), \quad F_a = \mathcal{L}_{vS} (u_S - u_{pS}) \end{array} \right.$$

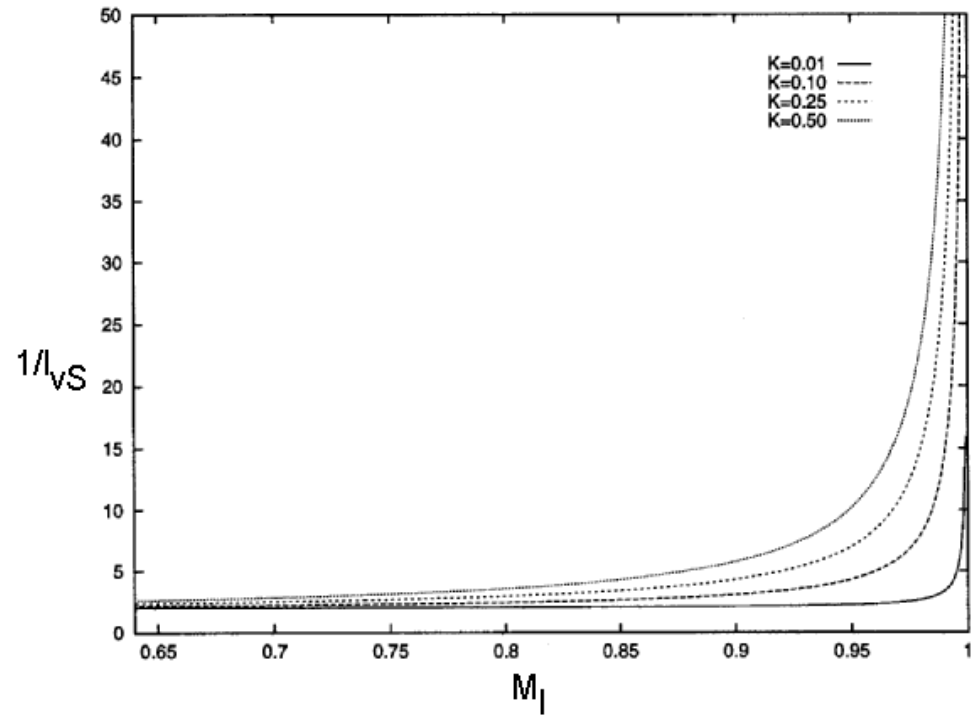
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_p [u_p] \\ \dot{m}_p [e_p] \end{array} \right. = \begin{array}{l} \mathcal{L}_{vS} (u_S - u_{pS}) \\ \mathcal{L}_{TS} (T_S - T_{pS}) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{L}_{vS}, \mathcal{L}_{TS} \quad \text{et} \\ l_{vS} = \frac{\dot{m}_p}{\mathcal{L}_{vS}}, l_{TS} = \frac{c \dot{m}_p}{\mathcal{L}_{TS}} \end{array}$$

Exemple du transfert de quantité de mouvement en théorie linéaire

$$[[u_p]] = \frac{u_s - u_{pS}}{1_{vS}}$$

$$u_s = \frac{u_I + u_{II}}{2}$$

$$u_{pS} = \frac{u_{pI} + u_{pII}}{2} = \frac{u_0 + u_{II}}{2}$$



Coefficient réduit de transfert de quantité de mouvement en fonction du nombre de Mach amont de l'interface de relaxation

Résultat de la théorie linéaire et expression asymptotique à deux termes :

$$\delta_a \cong \dot{m} c_v \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2} \gamma K (3\gamma \varepsilon + 3\varepsilon^2)$$

