

# 周期性慢环境中种群灭绝的可能性

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes  
Institut de Recherche pour le Développement  
Les Cordeliers, 法国巴黎, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> 法国尼斯 lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP, 蒙彼利埃大学, INRAE, 法国农业研究所, 蒙彼利埃, tewfik.sari@irstea.fr

## 摘要

当系数的周期非常大时, 我们对周期性环境中几种类型的出生和死亡的线性过程的灭绝概率感兴趣。该概率可以极端地呈现与慢-快速动态系统中的鸭子相关的不连续性。在具有两种类型的个体的示例中, 我们精确地确定了不连续点。

关键词: 生与死过程, 周期性环境, 慢速系统

## 1. 简介

估计种群灭绝的可能性是一个特别涉及保护生物学和流行病学的问题。在第二种情况下, 按人口表示感染的人口。研究此类问题的经典数学模型是一种或多种类型个体的出生和死亡的线性过程 (Méléard, 2016)。但是, 在许多情况下, 必须考虑环境的季节性, 当出生和死亡系数是时间的周期性函数时, 就需要研究这些过程 (Bacaër和Ait Dads, 2014)。某些人群或某些流行病具有时间尺度与年度季节性相比相对较短的系数; 因此, 我们被引导考虑系数周期非常大的极限。当关键参数在一年的一部分 (不利的季节) 处于次临界状态时, 根据该过程的开始季节而灭绝的概率收敛到一个不连续的极限 (Carmona and Gandon, 2019)。不连续点是在不利季节开始之前。

Bacaër (2019) 基本上在单一类型个体的情况下继续了这项研究, 特别指出了灭绝概率的不连续性与“鸭”的慢速动态系统的存在有关。»的轨迹 (例如, 参见Lobry (2018年, 第5章)), 该轨迹在遵循排斥弧之前先遵循一段吸引弧。我们建议在下文中研究一个示例, 其中有两种类型的个体受到媒介传播疾病传播模型的启发。我们精确地确定了灭绝概率的不连续点。这个问题尚未解决 (Carmona和Gandon, 2019年; Bacaër, 2019年)。

在第2节中, 我们介绍了人口模型, 即具有几种类型个体的具有周期性系数的线性出生和死亡过程模型。解释了灭绝的概率与常微分方程组有关。当周期收敛到无穷大时, 变量的变化会将系统变成具有固定周期的慢速系统。

在第3节中, 我们提供了一个包含两种类型的个体的示例。数值模拟表明, 灭绝概率收敛到一个不连续的极限, 并且不连续点是由一个条件决定的, 该条件涉及某个矩阵的主导特征值的积分。在第4节中, 我们使用非标准分析工具演示了确定不连续点的确实是这种情况。

在第5节中, 我们提供了另一个示例, 这次有四种类型的个人。数值模拟表明, 相同类型的条件仍然确定不连续点。但是, 当个人类型的数量严格大于两种时, 我们无法在通用框架中证明这一点。最后, 我们讨

论了将我们的结果应用于冠状病毒流行的可能性。

## 2.模型

我们考虑周期性环境中 $k$ 个类型 ( $k \geq 1$ ) 的出生和死亡的线性过程。 $T > 0$ 是环境周期。我们给自己两个矩阵函数  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  和  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  大小 $k$ 和周期 $T$ 的以下假设:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  表示类型 $j$ 的个体生成类型 $i$ 的新个体的速率
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  是 $j$ 型个体转化为 $i$ 型个体的速率
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  表示类型 $j$ 的个体改变类型或死亡的速率, 并且  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- 如果  $U(t)$  是系统解决方案  $dU/dt = -B(t)U(t)$  有初始条件  $U(0) = I$  (单位矩阵), 然后是矩阵的光谱半径  $U(T)$ , 即占主导地位的Floquet乘数是  $\rho(U(T)) < 1$
- 矩阵  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  对于所有 $t$ 都是不可约的。

更准确地说, 如 (Bacaër和Ait Dads, 2014年) 中, 我们定义

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  拥有的可能性  $N_i$  在时间 $t$ 处类型为 $i$ 的个人 ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  相应的生成器功能。

On a alors

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

假设当时  $t_0$  有  $n_i \geq 0$   $i$ 型个人 ( $n_i$  是整数,  $1 \leq i \leq k$ ) 与  $\sum_i n_i \geq 1$ 。我们可以假设  $0 \leq t_0 < T$ 。根据 (Bacaër和Ait Dads, 2014年),  $p(t_0, t_1)$  人口在第二个时刻灭绝了, 也就是说没有不同类型的个体存在

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  是差分系统的解决方案

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

有初始条件  $z_i(0) = 0 \forall i$ 。

在时间 $t$  对类型 $i$ 的个体数量的期望是

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

和  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ 。我们定义

- $V(t)$  系统解决方案  $dV/dt = C(t)V(t)$  有初始条件  $V(0) = I$ 。
- $F = \rho(V(T))$  占主导地位的Floquet乘数。

如果  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

如果  $F > 1$ , 则该概率收敛到严格低于1的极限。这是的周期函数。  $t_0$  (Bacaër和Ait Dads, 2014年)。

我们猜测

- 周期1有两个周期矩阵函数，与 $T$ 无关， $a(s)$ 和 $b(s)$ ，带有

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  是固定数字
- $t_1 = t_0 + mT$ ，其中 $m \geq 1$ 是一个固定整数。

我们的目标是研究极限

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

就.....而言  $s_0$ ，带有  $0 \leq s_0 < 1$ 。我们还有

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

这是从一个 $i$ 型个体开始的 $m$ 个时期后灭绝的概率。

我们定义

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ 。

然后我们有

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

与  $x_i(0) = 0 \forall i$ 。此外， $z(t_1 - t_0) = x(m)$ 。我们还有  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i, 0 \leq s \leq m$  (Bacaër和Ait Dads, 2014年)。

如果 $T$ 收敛到 $\infty$ ，换句话说 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，系统(2.1)可以写成具有 $k$ 个快速变量的慢速自治系统  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 和一个慢变量  $x_{k+1}(s) = s$  与  $dx_{k+1}/ds = 1$ 。

对于平凡的固定解  $x_i = 1 \forall i$ ，系统(2.1)右侧的雅可比矩阵为  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ 。 $\tilde{c}$ 表示矩阵 $c$ 的转置矩阵。根据Perron和Frobenius定理的推论，对角线之外的系数都是正数或零的不可约矩阵 (Allaire等人, 2018, 备注6.2.13)，该矩阵 $c(s)$ 和 $\tilde{c}(s)$ 具有共同的主导实特征值  $\Lambda(s)$ ，严格大于所有其他特征值的实部。

### 3.一个例子

采取

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

与  $\alpha(s) > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  和  $\delta > 0$ 。 $\alpha(s)$ 是周期1的周期性连续函数。此随机模型的灵感来自于媒介疾病的线性确定性模型 (Bacaër, 2007年, 第4.1节)：

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

感染的载体是1型。感染的人是2型。参数  $\alpha(s)$  是被感染的人被咬时将感染传播给媒介的比率。该比率是周期性的，因为健康媒介的种群也是如此。参数  $\beta$  是矢量死亡的速率。参数  $\gamma$  是矢量咬合的速率。参数  $\delta$  是感染者康复的速率。然后编写系统 (2.1)

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta[1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s)[1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta[1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_2(s). \quad (3.3)$$

请注意，在两种情况下，右侧彼此抵消： $x_1(s) = 1$  和  $x_2(s) = 1$ ，要么

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

矩阵的两个特征值  $c(s)$  是实数：

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

主导特征值是  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ 。我们有  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ 。

假设该流行病的传播季节不利，也就是说  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  与

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

进一步假设

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

举个例子  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  与  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $|\kappa| < 1$  和

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

最后的条件确保确实存在不利的季节。更具体地说，让我们选择  $\bar{\alpha} = 3$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  和  $\delta = 1$ 。这些值不是很现实，但它们清楚地证明了这一现象。然后我们有  $s_1 \simeq 0,323$  和  $s_2 \simeq 0,677$ 。我们可以用数字验证条件 (3.8) 是否得到验证。让我们也  $T = 1000$ ,  $m = 3$  和  $s_0 = 0,25$ 。图1表示具有初始条件的系统 (3.2) - (3.3) 的解  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ 。我们使用了Scilab软件并解决了差分系统  $\log(1 - x_1(s))$  和  $\log(1 - x_2(s))$ 。然后我们返回到初始变量。我们还绘制了等于1的常数函数和曲线 (3.4)。请注意以下几点：

- 在...的附近  $s = 0$ ，曲线几乎是垂直的（在图中看不到）；
- $x_1(s)$  和  $x_2(s)$  收敛到周期解；
- 渐近地  $x_1(s)$  和  $x_2(s)$  非常接近于1的值，小号与  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ ，尤其是给  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ ，但也  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  与  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ 。在后一种情况下，我们有  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ 。有一只“鸭子”。

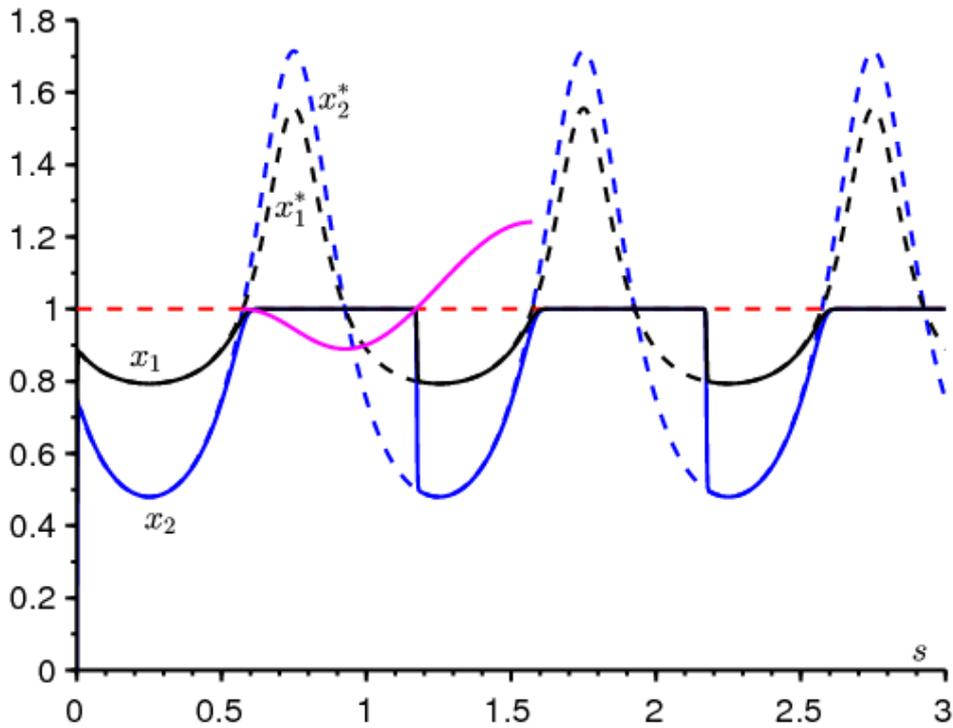


图1.作为 $s$ 的函数, 曲线  $x_1(s)$  (黑色) 和  $x_2(s)$  (以蓝色显示) 以及缓慢的曲线  $x_1^*(s)$  (黑色虚线),  $x_2^*(s)$  (蓝色虚线) 和1 (红色虚线)。粉红色, 功能之一

$$s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du.$$

图2显示了我们感兴趣的量,  $m$  个周期后的灭绝概率  $x_1(m)$  和  $x_2(m)$ , 取决于  $s_0$ 。我们还绘制了从 (3.4) 得出的曲线:

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

图2表明  $x_1(m)$  和  $x_2(m)$  何时收敛  $T \rightarrow +\infty$ , 如果等于1, 则限制为  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ 。  $s_0 = s^*$  是极限的不连续性。问题是要确定这一点。

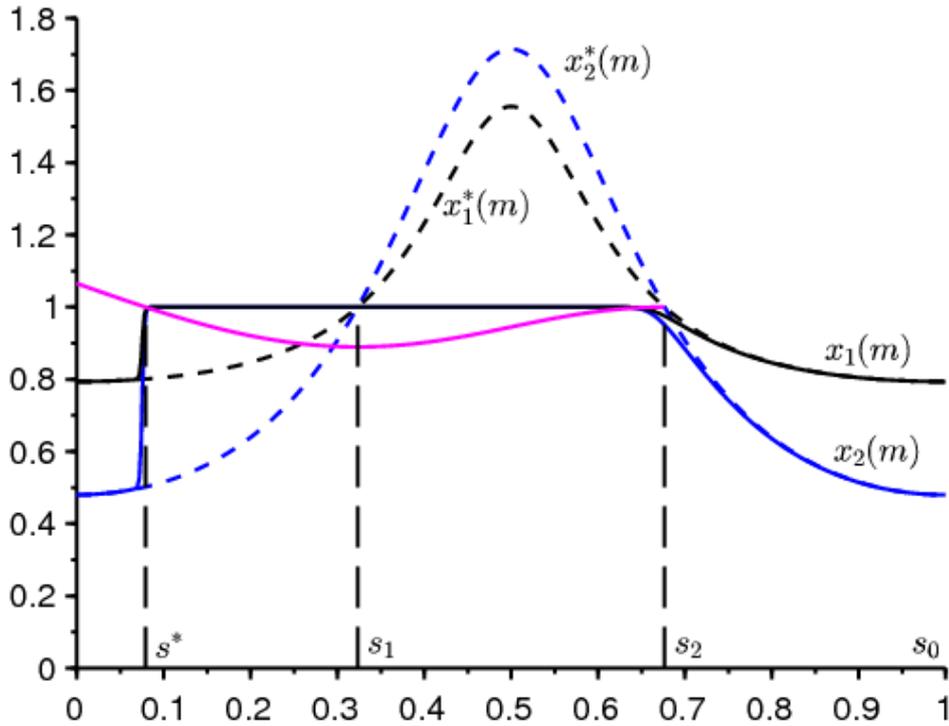


图2.灭绝概率  $m$  期间  $x_1(m)$  (黑色) 和  $x_2(m)$  (深蓝色) 取决于  $s_0$ 。的公式  $x_1^*(m)$  和  $x_2^*(m)$  点缀。粉红色, 功能之一  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^1 \Lambda(s) ds$ 。

我们将在下一节中演示解决方案  $x_1(s)$  和  $x_2(s)$  在图1中, 对于  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , 突然偏离1附近  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  与

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

换句话说, 这些解在点  $s = q$  处偏离1的邻域。此外,  $q = s_0 + 1 - s^*$  和

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

这个方程式决定了  $s^*$  以一种独特的方式。确实, 如果  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ , 所以我们有

- $\phi(s_1) < 0$  由于条件 (3.6) ,
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  由于条件 (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

由于条件 (3.8) 。

因此, 存在唯一的实数  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  与  $\phi(s^*) = 0$ 。在示例中, 我们通过数值找到  $s^* \simeq 0,079$ 。

**注意。**条件 (3.8) 与系统 (3.1) 的可能超临界特性无关。在浮球理论中也是众所周知的。确实, 以我们为例如  $c = 0,7$  代替  $c = 1$ , 我们从数字上发现占主导地位的Floquet乘数为  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  而  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ 。

## 4.跨临界分叉的输入输出功能

为了证明刚才所说的关于不连续点的合理性，我们通常考虑一个具有两个快速维和一个慢维的慢速场，例如 (3.2) - (3.3)。假设快速动力学具有一个奇异点，具有两个不同的真实特征值，其中一个始终为负，第二个为负然后为正。因此，这是跨临界分叉，其中快速动力学的平衡状态是一个稳定的节点，然后是一个鞍点。

接近稳定奇异点的解决方案不会在变得不稳定时立即离开其邻域，而是会继续保持一段时间。目的是计算该跨临界分叉的输入输出函数，即根据解的 $s$ 定义解离开奇异点的时刻（输出矩）。接近（进入时间）。这种现象被称为“分叉延迟”，与鸭子解决方案和过度稳定性有关。

投入产出函数的概念和鸭子解决方案的概念最早是在1980年代初用非标准分析方法研究的。见评论文章 (Benoît等, 1981 ; Cartier, 1982 ; Zvonkin和Shubin, 1984)。首先根据Van der Pol方程 (Benoît, 1981;Benoît等, 1981) 为鸭子计算输入-输出函数，然后将其扩展到飞机的任何慢速系统 (Diener和Diener, 1983)。

后来，通过经典渐近展开法 (Eckhaus, 1983年) 和奇异摄动几何理论 (Dumortier和Roussarie, 1996年) 发现了鸭子解的存在。飞机系统的输入输出功能也已通过奇异摄动的几何理论获得 (De Maesschalck and Schechter, 2016)。

有关法国非总机学校对鸭子问题和分叉延迟问题的贡献的更多详细信息，读者可以咨询 (Cartier, 1982 ; Fruchard和Schäfke, 2008)。有关奇异摄动理论中各种方法的更完整观点，请参见最近的专著 (Kuehn, 2015年) 以及有关鸭子的文章 (Wechselberger, 2007年)。有关分叉时过度稳定和延迟的概念，另请参阅 (Benoît, 1991, 2015 ; Benoît等, 1998 ; Wallet, 1990, 1994) 及其包含的参考文献。

众所周知，在维数为2的慢速场中，具有维数为1的快速动力学是吸引人的然后是排斥的，这种特殊情况是众所周知的 (见Diener和Diener, 1983年)。霍普夫分叉的情况是，两个特征值是复共轭，它们的实部变化是正负号。Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986)。另请参见近期专着中的完整且具有教育意义的演讲 (Kuehn, 2015年, 第12章)。

考虑一个差分系统  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  缓慢的变量  $s \in \mathbb{R}$  并有两个快速变量  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  是一个微分函数  $(s, x)$  和  $\varepsilon > 0$  是无限小。我们使用非标准分析的词汇，请参阅 (Diener和Reeb, 1989) 或Lobry (2018, 第5章)。我们猜测  $f(s, 0) = 0 \forall s$ 。

$x = 0$ 不仅是系统的慢曲线 (4.1)，即方程式的解  $f(s, x) = 0$ ，也是系统的特殊解决方案 (4.1)。我们定义方阵 $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

我们认为  $M(s)$  有两个不同的特征值  $\lambda_1(s)$  和  $\lambda_2(s)$  其中之一始终保持为负，而另一个更改为正负号。用  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ ，我们有：

- $\lambda_1(s) < 0$  和  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  和  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ 。

在奇异摄动的几何理论中，我们研究了扩展相空间中的系统 (4.1)  $(x, \varepsilon)$ 。我们添加等式  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ 。快速动力学的单个特征值改变符号。通过减少增强系统的中央歧管，可以将这种情况带回飞机上的系统 ([4.1],  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) 在平衡点  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 。有关更多详细信息，请参见 (Boudjellaba和Sari, 2009 ; Krupa和Szmolyan, 2001) 。通过这种减少，我们得到一个平面系统，其输入输出功能由改变符号的特征值的积分给出 (Diener and Diener, 1983) :

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

在此等式中， $p$ 是进入时间， $q$ 是退出时间。该减少量预测输入输出函数由跨临界分叉值附近的局部公式 (4.3) 给出。我们建议在以下内容中计算总的输入-输出函数。(Boudjellaba and Sari, 2009) 考虑了三维空间中具有快速解耦动力学的慢速快磁场的特殊情况。

我们使用非标准分析的词汇。对于理解本文而言，该理论究竟具有什么意义并不十分重要。读者可以牢记无穷语言的直觉，并欣慰地知道非标准分析为无限小和无限大的概念提供了严格的基础。有关非标准分析的介绍，请参见 (Diener和Reeb, 1989年) 。有关在微分方程理论中使用非标准分析的更多信息，请参见 (Cartier, 1982) , (Zvonkin and Shubin, 1984) , (Kuehn, 2015, section 19.5) 或 (Lobry, 2018) (第5章) 。

因此，我们假设 (4.1) 中的参数 $\varepsilon$ 无限小。解决方案  $x(s) = 0$  是“鸭子”，因为它对  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  和驱蚊剂  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ 。目的是研究无限接近该解的系统解 (4.1) 。快速动态在这段时间内具有吸引力  $[\sigma_0, \sigma_1[$ 。我们采取  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ 。初始条件为0的吸引池中的系统 (4.1) 的解将快速朝慢曲线 $x = 0$  前进，并一直保持无限接近  $s < \sigma_1$ 。该解决方案此时不会离开0的无穷小邻域，而是会在整个间隔内继续使0变短。此时此刻  $q > \sigma_1$  为此  $x(s)$  不再无限接近0称为退出时间。目的是确定功能  $p \mapsto q$ 。我们将证明 $q$ 由方程式 (4.3) 定义。更准确地说，我们得到以下结果：

## 定理

我们定义

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  初始条件位于吸引盆地 $0$ 中，但并不无限接近于对应于特征值的快速动力学的不变变化  $\lambda_1(p)$ 。
- 用公式 (4.3) 表示 $q$ 。

所以  $\forall s \in ]p, q[$  不是无限接近 $p$ 或 $q$ ，我们有： $x(s) \simeq 0$ 。此外， $x(q)$  不是无限接近 $0$ 。在 $p$ 中， $x(s)$  沿着快速动力学轨道接近 $0$

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

当路过  $x(p)$ 。在 $q$ 中  $x(s)$  沿着 $0$ 的不稳定分隔符从 $0$ 移开以实现快速动态

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

证明。我们有  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ 。  $M(s)$  是矩阵 (4.2) 。我们有

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

系统 (4.1) 变为

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

矩阵  $M(s)$  有两个不同的特征值。因此存在一个可逆的可微矩阵  $P(s)$  与

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

我们用变量的变化来变换方程 (4.5)  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

我们用放大镜变换这个方程  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon}P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$

条件 (4.4) 由  $g(s, x)$ 。所以我们有

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

和  $g_1(s, U, \varepsilon)$  是连续功能。因此, 我们有

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$  是连续功能。我们定义向量的组成部分:  $U = (U_1, U_2)$  和  $h = (h_1, h_2)$ 。系统变成

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

该系统由两个弱耦合方程组成。变量的变化

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

将系统变成

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

$k_2$  是  $r=0$  时的连续函数, 因为  $h_1 = O(r)$  和  $h_2 = O(r)$ 。我们选择  $r_0$  与  $0 < r_0 < 1$  这样球的中心和半径为  $r_0$  包含在原产地的吸引力盆地中。应用变量的变化  $v = \varepsilon \ln(r)$  到该地区  $0 < r < r_0$ , 它被发送到由定义的区域  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ 。我们得到系统:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.6)$$

它是一个奇异的扰动系统, 其慢速变化是两个平面  $\theta=0$  和  $\theta=\pi/2$  的并集。因为  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  对于所有  $s$  而言, 平面  $\theta=\pi/2$  是有吸引力的, 而平面  $\theta=0$  是排斥的。由不无限接近排斥平面的点产生的任何解决方案都将

在无限短时间内无限接近吸引平面。来自非常靠近驱虫剂平面的点的解决方案可以在远离该驱虫剂平面之前停留很长时间。Tihonov定理适用 (Lobry等, 1998; Tihonov, 1952)。我们选择  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$  和  $x(p)$  初始条件位于吸引盆地0中, 但并不无限接近快速动力学的不变变化

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

对应于特征值  $\lambda_1(p)$ 。快速动力学导致相应的解无限接近于零。  $(U_1, U_2)$  它并非无限接近慢速品种  $U_2 = 0$ , 因此平面  $\theta = 0$ 。因此, 该解快速接近平面  $\theta = \pi/2$ , 然后由慢系统的解近似

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

我们推论

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

因此, 我们再次  $r(s) = r_0$ , 也就是说  $v(s)$  无限小, 当  $s$  渐近等于 (4.3) 定义的  $q$  时。对于此  $q$  值, 原点是快速动力学的鞍点

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

因此, 解从鞍点沿着不稳定的分离器在点  $q$  处移开。我们在这里使用的是, 在时间  $p$  处, 解并非无限接近慢变化  $\theta = \pi/2$ , 这说明了解未到达平面的事实  $(U_1, U_2)$  非常接近  $U_1 = 0$ 。这样就结束了证明。

让我们回到示例 (3.2) - (3.3)。我们定义  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ 。以下快速系统, 其中  $s$  被视为参数,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

有两个平衡点 (准平稳状态)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  和  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  由 (3.4) 给出。  $(1, 1)$  中的雅可比矩阵为  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ 。正如我们已经看到的那样, 两个特征值始终是不同的, 它们是实数。当且仅当两个特征值均为负  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ 。因此, 奇异点  $(1, 1)$  是  $s$  的值的吸引节点, 为此  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ , 以及鞍点是否  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ 。特征值是  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  和  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , 由 (3.5) 给出。

用  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ , 得到雅可比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

当且仅当特征值具有负实部  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ 。因此, 在什么地方  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ , 存在跨临界分叉, 因为以下两个平衡点相遇并交换其稳定性:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  和  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ 。

我们有

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  如果  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[$  modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$  如果  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[$  modulo 1。

我们可以像第2节中一样应用定理并计算输入输出函数。

## 5.概括

无疑，这项研究扩展到具有两个以上快速方程和一个缓慢方程的问题。考虑具有四个快速方程的线性化系统（Bacaër, 2007, Section 4.2）

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

我们猜测  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\mu > 0$ 。  $\psi(\cdot) > 0$  是周期1的周期函数。它也是媒介传播疾病传播的模型。前两个成分代表在潜伏期和传染期感染的载体，而后两个成分代表在潜伏期和传染期感染的人。系统 (2.1) 变为  $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

推测是输入输出函数由公式 (4.3) 给出，其中  $\lambda_2(s)$  必须由主导的真实特征值代替  $\Lambda(s)$  矩阵的  $c(s)$ ，因为可以通过一个数字示例进行验证（图3）。参数值是  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ ,  $m = 3$  和  $T = 2000$ 。我们有矩阵特征值  $\lambda$  的特征方程  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

我们推论  $\Lambda(s) < 0$  当且仅当

$$\frac{\beta\gamma\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

如果发生什么情况  $s_1 < s < s_2$  与  $s_1 \simeq 0,323$  和  $s_2 \simeq 0,677$ ，如第3节中的数字示例（简单巧合）。另一方面，通过公式 (4.3)  $s^* \simeq 0,047$ 。这似乎与图3中灭绝概率的急剧上升很好地吻合。

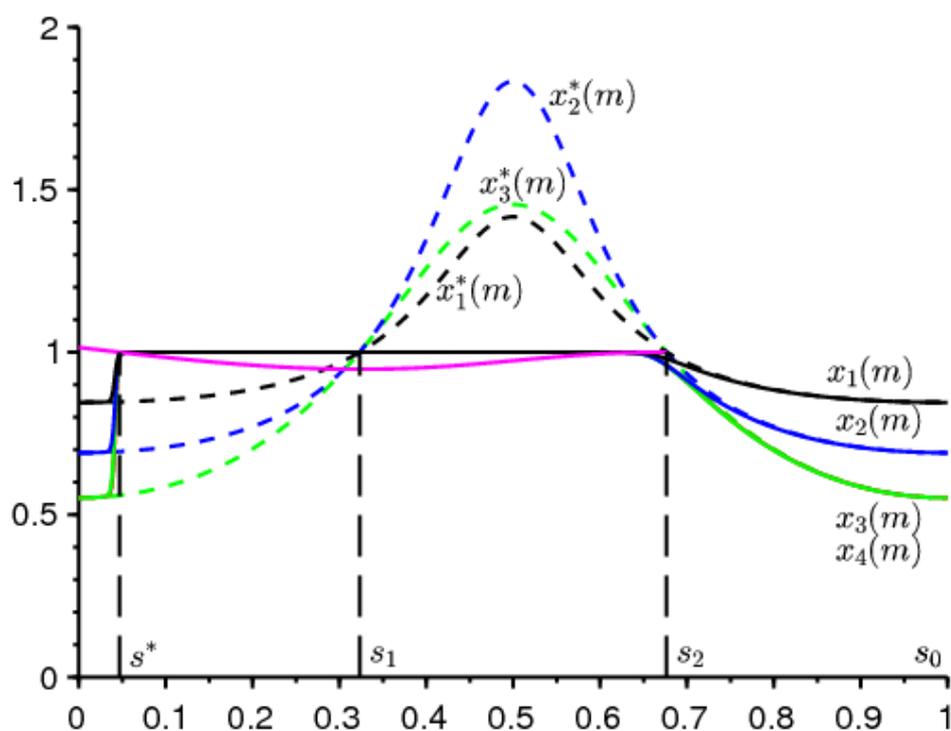


图3.  $m$ 个时期后的灭绝概率  $x_1(m)$  (黑色),  $x_2(m)$  (以蓝色显示) 以及  $x_3(m)$  和  $x_4(m)$  (绿色, 无法区分), 具体取决于  $s_0$ 。虚线缓慢的曲线。用粉红色绘制了一部分功能  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ 。

## 5. 结论

在本文中, 以媒介传播疾病的周期性模型为例。但是第4节的结果也适用于例如周期性SEIR模型, 该模型可以直接传播疾病。在线性近似中, 只有两个感染区E和I介入, 它们代表潜伏期的人和感染性的人。该模型用于法国冠状病毒流行的开始 (Bacaër, 2020b), 但没有季节性。与流感一样, 季节性也有望在这种冠状病毒的传播中发挥作用。灭绝的问题将在流行病即将结束时出现。

值得记住的另一个重要点是, 我们在系统行为方面的结果涉及区间上特征值的积分。特别地, 在给定时间该特征值的值不能提供有关系统行为的直接信息。在Floquet的理论中还众所周知, 周期系统在任何时候都只能具有负特征值, 但仍然不稳定。但是, 在冠状病毒流行期间, 我们经常听到有关每日可重复性的公告 ( $R_0$ ), 这只是瞬时特征值的另一种形式。

## 参考书目

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal : 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi : 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal : 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi : 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal : 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal : 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.

- E. Benoît, éd. (1991) *Dynamic Bifurcations*, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009)  
Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node.  
*Discrete Cont. Dyn. – S 2*, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, *ARIMA* 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard.  
*Collect. Math.* 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998)  
Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant.  
*Ann. Fac. sci. Toulouse* 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009)  
Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models.  
*J. Diff. Eq.* 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente.  
*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019)  
Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments,  
<https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982)  
Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard,  
*Séminaire Bourbaki* 580, *Astérisque* 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016)  
The entry–exit function and geometric singular perturbation theory,  
*J. Differ. Equations* 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards.  
*C. R. Acad. Sci., Série I* 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results,  
*Nonstandard Analysis in Practice*, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) *Analyse non standard*. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) *Canard Cycles and Center Manifolds*.  
American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks.  
*Asymptotic Analysis II*, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, *ARIMA* 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001)  
Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, *Nonlinearity* 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) *Multiple Time Scale Dynamics*. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992)  
A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ».  
*Ann. I. Fourier* 42, 327–351.
- C. Lobry (2018)  
La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998)  
On Tykhonov’s theorem for convergence of solutions of slow and fast systems.  
*Electron. J. Differ. Eq.* 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I.  
*Differ. Equations Translations* 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II.  
*Differ. Equations Translations* 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952)  
Systèmes d’équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées.  
*Mat. Sborn.* 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. *Ann. I. Fourier* 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1.  
*Ann. I. Fourier* 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2.  
*Bull. Soc. Math. France* 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. *Scholarpedia* 2(4), 1356.

- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984)  
Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations.  
Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.