

О вероятности вымирания населения в медленной периодической среде

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër¹ Claude Lobry² Tewfik Sari³

¹ Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes
Institut de Recherche pour le Développement
Les Cordeliers, Париж, Франция, nicolas.bacaer@ird.fr

² Ницца, Франция, lobrinria@wanadoo.fr

³ ITAP, Университет Монпелье, INRAE, Институт Агро, Монпелье, Франция, tewfik.sari@irstea.fr

резюме

Нас интересует вероятность исчезновения линейного процесса рождения и смерти с несколькими типами в периодической среде, когда период коэффициентов очень велик. Эта вероятность может представлять на пределе разрыв, связанный с уткой в медленно-быстрой динамической системе. Мы точно определяем точку разрыва в примере с двумя типами людей.

Ключевые слова: процесс рождения и смерти, периодическая среда, медленно-быстрая система

1. Введение

Оценка вероятности вымирания популяции - это вопрос, который вмешивается, в частности, в биологию сохранения и эпидемиологию. Во втором случае под населением подразумевается зараженное население. Классическая математическая модель для изучения такого рода проблем - это линейные процессы рождения и смерти с одним или несколькими типами людей (Méléard, 2016). Однако во многих ситуациях необходимо учитывать сезонность окружающей среды, что приводит к изучению этих процессов, когда коэффициенты рождения и смерти являются периодическими функциями времени (Bacaër and Ait Dads, 2014). Определенные группы населения или определенные эпидемии имеют коэффициенты, временная шкала которых относительно мала по сравнению с годовой сезонностью; поэтому мы вынуждены рассмотреть предел, где период коэффициентов очень велик. Когда жизненно важные параметры являются докритическими в течение части года (неблагоприятного сезона), вероятность вымирания в зависимости от сезона начала процесса сходится к прерывистому пределу (Carmona and Gandon, 2019). Точка разрыва - перед началом неблагоприятного сезона.

Васаёг (2019) продолжил это исследование, по существу, в случае особой одного типа, отметив, в частности, что разрыв в вероятности вымирания был связан с присутствием в медленной и быстрой динамической системе «утки». », То есть (см., Например, Лобри (2018, глава 5)) траектории, которая следует за привлекательной дугой в течение определенного времени, прежде чем следовать за отталкивающей дугой. Ниже мы предлагаем изучить пример с двумя типами индивидуумов, вдохновленных моделью передачи трансмиссивной болезни. Мы точно определяем точку разрыва вероятности вымирания. Эта проблема осталась нерешенной (Carmona and Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

В разделе 2 мы представляем модель для населения, а именно модель линейных процессов рождения и смерти с периодическими коэффициентами для нескольких типов людей. Объясняется, что вероятность вымирания связана с системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Когда период сходится к бесконечности, изменение переменной превращает эту систему в медленно-быструю систему с фиксированным периодом.

В разделе 3 мы представляем пример с двумя типами людей. Численное моделирование показывает, что вероятность исчезновения сходится к разрывному пределу и что точка разрыва определяется условием, которое включает в себя интеграл от доминирующего собственного значения определенной матрицы. В

разделе 4 мы демонстрируем с помощью инструментов нестандартного анализа, что именно это условие определяет точку разрыва.

В разделе 5 мы представляем еще один пример, на этот раз с четырьмя типами людей. Численное моделирование предполагает, что условие того же типа все еще определяет точку разрыва. Однако нам не удалось продемонстрировать это в общих рамках, когда число типов людей строго больше двух. В заключение мы обсуждаем возможности применения наших результатов в случае эпидемии коронавируса.

2. Модель

Мы рассматриваем линейный процесс рождения и смерти с k типами ($k \geq 1$) в периодической среде. $T > 0$ - период среды. Мы даем себе две матричные функции $A(t) = (A_{i,j}(t))$ и $B(t) = (B_{i,j}(t))$ размером k и периодом T со следующими допущениями:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$ представляет скорость, с которой люди типа J генерируют новых людей типа I
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$ это скорость, с которой люди типа J превращаются в людей типа I
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$ представляет скорость, с которой люди типа j меняют тип или умирают, и $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- если $U(t)$ это системное решение $dU/dt = -B(t)U(t)$ с начальным условием $U(0) = I$ (единичная матрица), то спектральный радиус матрицы $U(T)$ доминирующим множителем Флоке является $\rho(U(T)) < 1$
- матрица $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ неприводим для всех m .

Точнее, как в (Vasaer and Ait Dads, 2014), мы определяем

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$ вероятность того, что N_i лица типа i в момент времени t ($1 \leq i \leq k$)
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ соответствующая функция генератора.

Затем мы имеем

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Предполагается, что в то время t_0 Там есть $n_i \geq 0$ люди типа i (n_i целые числа, $1 \leq i \leq k$) с участием $\sum_i n_i \geq 1$, Мы можем предположить, что $0 \leq t_0 < T$, Согласно (Vasaer and Ait Dads, 2014), вероятность $p(t_0, t_1)$ что население вымерло в этот второй момент, то есть не осталось ни одного индивида разных типов,

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ является решением дифференциальной системы

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

с начальным условием $z_i(0) = 0 \forall i$,

Ожидание количества особей типа i в момент времени t является решением

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

и $E_i(t_0) = n_i \forall i$, Мы определяем

- $V(t)$ системное решение $dV/dt = C(t)V(t)$ с начальным условием $V(0) = I$,
- $F = \rho(V(T))$ доминирующий множитель Флоке.

Если $F \leq 1$,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Если $F > 1$, эта вероятность наоборот сходится к пределу, строго меньшему 1. Это периодическая функция t_0 (Васаёр and Ait Dads, 2014).

Мы предполагаем

- есть две периодические матричные функции периода 1, независимые от T , $a(s)$ и $b(s)$, с участием

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$ это фиксированное число
- $t_1 = t_0 + mT$ где $m \geq 1$ - фиксированное целое число.

Наша цель - изучить предел

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

с точки зрения s_0 , с участием $0 \leq s_0 < 1$, у нас также есть

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

которая является вероятностью вымирания после m периодов, когда начинается с одного человека типа i .

Мы определяем

- $\varepsilon = 1/T$,
- $c(s) = a(s) - b(s)$,
- $x(s) = z(t)$,

Затем мы имеем

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

с участием $x_i(0) = 0 \forall i$, Более того, $z(t_1 - t_0) = x(m)$, у нас также есть $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$, $0 \leq s \leq m$ (Васаёр and Ait Dads, 2014).

Если T сходится к ∞ , другими словами, если $\varepsilon \rightarrow 0$ система (2.1) может быть записана как медленно-быстрая автономная система с k быстрыми переменными $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) и медленная переменная $x_{k+1}(s) = s$ с участием $dx_{k+1}/ds = 1$,

Для тривиального стационарного решения $x_i = 1 \forall i$ матрица Якоби правой части системы (2.1) имеет вид $\tilde{c}(s_0 + m - s)$, \tilde{c} обозначает транспонированную матрицу матрицы c . Согласно следствию из теоремы Перрона и Фробениуса для неприводимых матриц, все коэффициенты которых вне диагонали положительны или равны нулю (Allaire et al., 2018, примечание 6.2.13), матрицы $c(s)$ и $\tilde{c}(s)$ имеют общее доминантное реальное собственное значение $\Lambda(s)$ строго больше, чем действительная часть всех других собственных значений.

3. Пример

принимать

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

с участием $\alpha(s) > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, $\alpha(s)$ является периодической непрерывной функцией периода 1. Эта стохастическая модель основана на линейризованной детерминированной модели векторной болезни (Васаёр, 2007, раздел 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Зараженные векторы - тип 1. Зараженные люди - тип 2. Параметр $\alpha(s)$ скорость, с которой зараженные люди передают свою инфекцию переносчикам при укусе. Этот показатель является периодическим, потому что популяция здоровых переносчиков также. Параметр β - это скорость, с которой векторы умирают. Параметр γ - это скорость, с которой векторы кусаются. Параметр δ - это скорость выздоровления инфицированных людей. Затем система (2.1) записывается

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Обратите внимание, что правые стороны взаимно отменяют друг друга в двух случаях: $x_1(s) = 1$ и $x_2(s) = 1$, или

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Два собственных значения матрицы $c(s)$ являются действительными числами:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

Доминирующее собственное значение $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$, У нас есть $\lambda_-(s) < 0 \forall s$,

Предположим, что для передачи эпидемии наступил неблагоприятный период, то есть $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$ авес

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Предположим далее, что

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

В качестве примера давайте возьмем $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ с участием $\bar{\alpha} > 0$, $|\kappa| < 1$ и

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Это последнее условие гарантирует, что действительно неблагоприятное время года. Более конкретно, давайте выберем $\bar{\alpha} = 3$, $\kappa = 0,75$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ и $\delta = 1$, Эти значения не очень реалистичны, но они ясно демонстрируют явление. Затем мы имеем $s_1 \simeq 0,323$ и $s_2 \simeq 0,677$, Мы можем численно проверить, что условие (3.8) проверено. Давайте также возьмем $T = 1000$, $m = 3$ и $s_0 = 0,25$, На рисунке 1 представлено решение системы (3.2) - (3.3) с начальным условием $x_1(0) = x_2(0) = 0$, Мы использовали программное обеспечение Scilab и решили дифференциальную систему для $\log(1 - x_1(s))$ и $\log(1 - x_2(s))$, Затем мы вернулись к исходным переменным. Мы также построили постоянную функцию, равную 1, и кривые (3.4). Обратите внимание на следующее:

- в окрестностях $s = 0$ кривые почти вертикальные (на рисунках не видно);
- $x_1(s)$ и $x_2(s)$ сходятся к периодическому решению;
- асимптотически $x_1(s)$ и $x_2(s)$ очень близко к 1 для значений s с $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$, специально для $s \in]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ но и для $s \in]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ с участием $s_2 - 1 < s^* < s_1$, В последнем случае мы имеем $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$, Есть "утка".

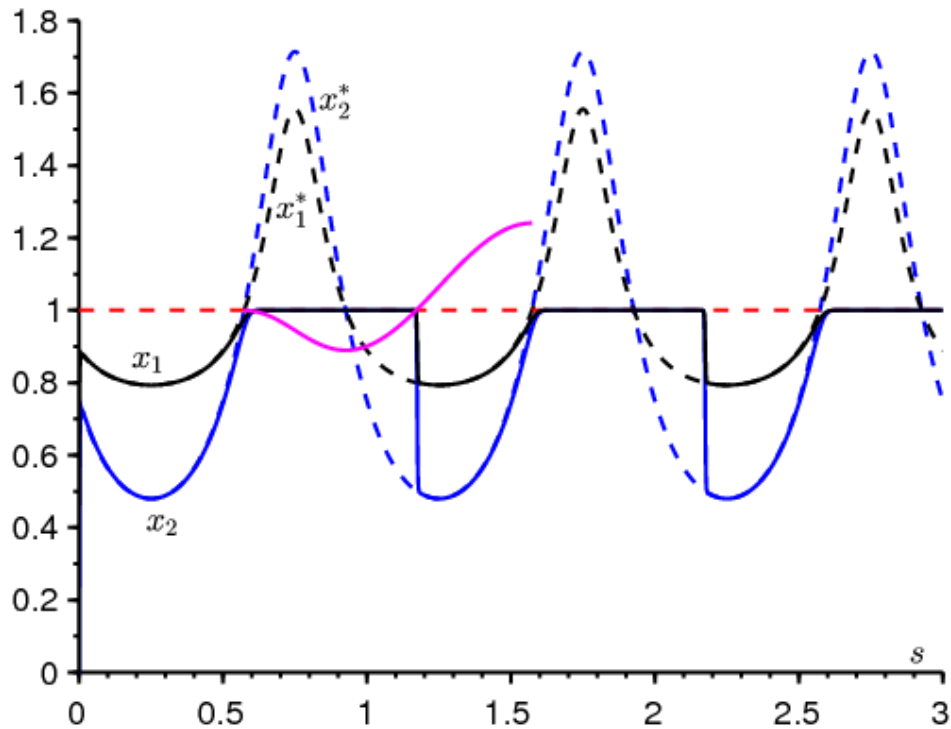


Рисунок 1. В зависимости от s кривые $x_1(s)$ (в черном цвете) и $x_2(s)$ (синим цветом), а также медленные кривые $x_1^*(s)$ (пунктирный черный), $x_2^*(s)$ (пунктирный синий) и 1 (пунктирный красный). В розовом, часть функции $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$,

На рисунке 2 показано, как величины, которые нас интересуют, вероятности вымирания после m периодов $x_1(m)$ и $x_2(m)$, варьируются в зависимости от s_0 . Мы также построили кривые, выведенные из (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

Рисунок 2 предполагает, что $x_1(m)$ и $x_2(m)$ сходятся, когда $T \rightarrow +\infty$, к пределам, равным 1, если $s_0 \in]s^*, s_2[$, $s_0 = s^*$ это разрыв границ. Проблема состоит в том, чтобы определить этот момент.

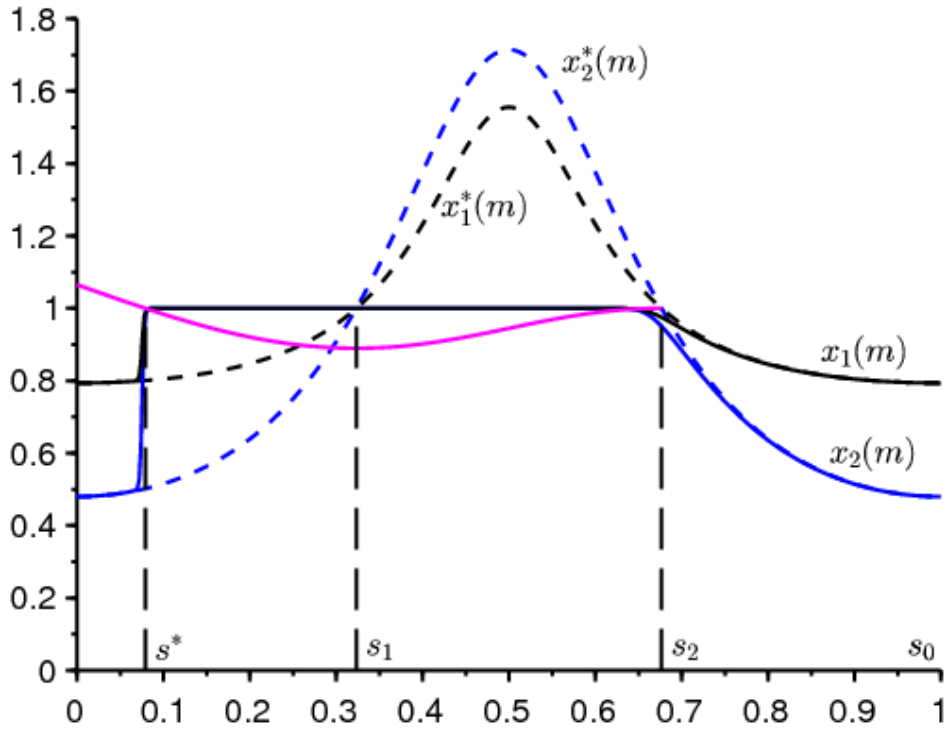


Рисунок 2. Вероятности исчезновения после m периодов $x_1(m)$ (в черном цвете) и $x_2(m)$ (темно-синий) в зависимости от s_0 , Формулы для $x_1^*(m)$ и $x_2^*(m)$ расставлены в розовом, часть функции $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$,

В следующем разделе мы продемонстрируем, что решения $x_1(s)$ и $x_2(s)$ на рисунке 1, которые очень близки к 1 для $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$, неожиданно отклониться от окрестности 1 для $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ с участием

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Другими словами, эти решения отклоняются от окрестности 1 в точке $s = q$. Более того, $q = s_0 + 1 - s^*$ и

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Именно это уравнение определяет s^* уникальным способом. Действительно, если $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ И так, мы имеем

- $\phi(s_1) < 0$ из-за условия (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ из-за условия (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

из-за условия (3.8).

Поэтому существует уникальное действительное число $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ с участием $\phi(s^*) = 0$, В примере мы находим численно $s^* \simeq 0,079$,

Заметка. Условие (3.8) не связано с возможным сверхкритическим характером системы (3.1). Это также хорошо известно в теории Флоке. Действительно, если мы возьмем для примера $c = 0,7$ вместо того $c = 1$ мы находим численно, что доминирующим множителем Флоке является $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ пока $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$,

4. Функция ввода-вывода для транскритической бифуркации

Чтобы оправдать то, что только что было сказано о точке разрыва, мы более широко рассмотрим медленное быстрое поле с двумя быстрыми измерениями и одним медленным измерением, как (3.2) - (3.3). Предполагается, что быстрая динамика имеет особую точку с двумя различными действительными собственными значениями, одно из которых всегда отрицательное, а второе отрицательное, а затем положительное. Следовательно, это транскритическая бифуркация, когда состояние равновесия быстрой динамики является устойчивым узлом, а затем седловой точкой.

Решение, близкое к устойчивой особой точке, не покинет своей окрестности, как только оно станет нестабильным, но продолжит оставаться вблизи нее в течение некоторого времени. Цель состоит в том, чтобы вычислить функцию ввода-вывода для этой транскритической бифуркации, то есть определить момент, когда решение отходит от особой точки (выходного момента), в соответствии с тем, где оно ' приближается (время входа). Это явление, известное под названием «задержка бифуркации», связано с понятием утиных растворов и избыточной устойчивости.

Понятие функции ввода-вывода и концепция решения утки впервые были изучены в самом начале 1980-х годов с использованием нестандартных методов анализа. См. Обзорные статьи (Бенуа и др., 1981; Картье, 1982; Звонкин и Шубин, 1984). Функция ввода-вывода сначала рассчитывалась для уток по уравнению Ван-дер-Поля (Бенуа, 1981; Бенуа и др., 1981), а затем распространялась на любую медленно-быструю систему самолета (Динер и Динер, 1983).

Позднее существование утиных решений было обнаружено с помощью классических методов асимптотических разложений (Eckhaus, 1983) и геометрической теории сингулярных возмущений (Dumortier and Roussarie, 1996). Функция ввода-вывода для системы плоскости также была получена с помощью геометрической теории сингулярных возмущений (De Maeschalck and Schechter, 2016).

Более подробную информацию о вкладе французской школы без коммутатора в проблему уток и задержки бифуркации читатель может проконсультировать (Cartier, 1982; Fruchard and Schäfer, 2008). Для более полного взгляда на различные подходы в теории сингулярных возмущений см. Недавнюю монографию (Kuehn, 2015), а также статью (Wechselberger, 2007), посвященную уткам. Понятие чрезмерной устойчивости и задержки при бифуркации см. Также (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Wallet, 1990, 1994) и ссылки, которые они содержат.

Частный случай медленно-быстрого поля в размерности два, с быстрой динамикой размерности один, которая привлекательна, а затем отталкивающая, хорошо понятна, см. (Diener and Diener, 1983). Случай бифуркации Хопфа, когда два собственных значения являются комплексными сопряженными и их вещественная часть меняет знак, рассматривался несколькими авторами, см. (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener and Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). См. Также полную и образовательную презентацию в недавней монографии (Kuehn, 2015, глава 12).

Рассмотрим дифференциальную систему на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ с медленной переменной $s \in \mathbb{R}$ и с двумя быстрыми переменными $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является дифференцируемой функцией в (s, x) , и $\varepsilon > 0$ бесконечно мало. Мы используем словарь нестандартного анализа, см. (Diener and Reeb, 1989) или Lobry (2018, глава 5). Мы предполагаем $f(s, 0) = 0 \forall s$,

$x = 0$ - это не только медленная кривая системы (4.1), то есть решение уравнения $f(s, x) = 0$, но также частное решение системы (4.1). Определим квадратную матрицу 2×2

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Мы предполагаем, что $M(s)$ имеет два разных собственных значения, $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ один из которых всегда остается отрицательным, а другой меняет знак. С участием $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$, у нас есть :

- $\lambda_1(s) < 0$ и $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ и $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in]\sigma_1, \sigma_2]$,

В геометрической теории сингулярных возмущений мы изучаем систему (4.1) в расширенном фазовом пространстве (x, ε) , Добавляем уравнение $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$, Единое собственное значение быстрой динамики меняет знак. Эта ситуация может быть возвращена к случаю систем на плоскости путем сокращения на центральном многообразии дополненной системы ((4.1), $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) в точке равновесия $(x, \varepsilon) = (0, 0)$, Для получения более подробной информации см. (Boudjellaba and Sari, 2009; Krupa и Szmolyan, 2001). С помощью этого сокращения мы получаем плоскую систему, функция ввода-вывода которой определяется интегралом от собственного значения, которое меняет знак (Diener and Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

В этом уравнении p - время входа, а q - время выхода. Сокращение предсказывает, что функция ввода-вывода задается формулой (4.3) локально, вблизи значения транскритической бифуркации. В дальнейшем мы предлагаем рассчитать суммарную функцию ввода-вывода. Частный случай медленно-быстрого поля в размерности три с быстро развязанной динамикой был рассмотрен в (Boudjellaba and Sari, 2009).

Мы используем словарь нестандартного анализа. Что именно является этой теорией, не очень важно для понимания этой статьи. Читатель может помнить об интуитивном значении бесконечно малого языка и утешаться, зная, что нестандартный анализ обеспечивает строгую основу для понятий бесконечно малых и бесконечно больших. Для введения в нестандартный анализ см. (Diener and Reeb, 1989). Для получения дополнительной информации об использовании нестандартного анализа в теории дифференциальных уравнений см. (Cartier, 1982), (Zvonkin and Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, раздел 19.5) или (Lobry, 2018 Глава 5).

Поэтому мы предполагаем, что параметр ε в (4.1) бесконечно мал. Решение $x(s) = 0$ это "утка", так как она привлекательна для $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ и репеллент для $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$, Цель состоит в том, чтобы изучить решения системы (4.1), бесконечно близкие к этому решению. Быстрая динамика привлекательна на интервале $[\sigma_0, \sigma_1]$, Мы принимаем $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$, Решение системы (4.1) с начальным условием в бассейне притяжения 0 быстро идет к медленной кривой $x = 0$ и остается бесконечно близко к ней до тех пор, пока $s < \sigma_1$, Решение не покидает бесконечно малую окрестность 0 в этот момент, но продолжает обойти 0 в течение всего интервала. Момент $q > \sigma_1$ для которого $x(s)$ больше не бесконечно близко к 0 называется временем выхода. Цель состоит в том, чтобы определить функцию $p \mapsto q$, Покажем, что q определяется уравнением (4.3). Точнее, мы имеем следующий результат:

теорема

Мы определяем

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ начальное условие, расположенное в бассейне притяжения 0, но не бесконечно близко к инвариантному многообразию быстрой динамики, соответствующей собственному значению $\lambda_1(p)$,
- q по уравнению (4.3).

Так $\forall s \in]p, q[$ не бесконечно близко к p или q , имеем: $x(s) \simeq 0$, Более того, $x(q)$ не бесконечно близко к 0. В p , $x(s)$ приближается к 0 по быстрой динамике орбиты

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

кто проходит мимо $x(p)$, В q , $x(s)$ удаляется от 0 вдоль неустойчивого разделителя 0 для быстрой динамики

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Доказательство. У нас есть $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$, $M(s)$ это матрица (4.2). У нас есть

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Система (4.1) становится

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

Матрица $M(s)$ имеет два различных собственных значения. Следовательно, существует обратимая дифференцируемая матрица $P(s)$ с участием

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Преобразуем уравнение (4.5) с заменой переменной $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Мы преобразуем это уравнение с помощью увеличительного стекла $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon}P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$

Условия (4.4) проверяются $g(s, x)$, Итак, мы имеем

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

и $g_1(s, U, \varepsilon)$ это непрерывная функция. Поэтому мы имеем

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$ это непрерывная функция. Определим компоненты векторов: $U = (U_1, U_2)$ и $h = (h_1, h_2)$, Система становится

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Эта система состоит из двух слабосвязанных уравнений. Смена переменных

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

превращает систему в

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

с участием

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

k_2 является непрерывной функцией при $r = 0$, потому что $h_1 = O(r)$ и $h_2 = O(r)$, Мы выбираем r_0 с участием $0 < r_0 < 1$ и так что шар с центром 0 и радиусом r_0 входит в бассейн притяжения происхождения. Применить изменение переменной $v = \varepsilon \ln(r)$ в регион $0 < r < r_0$, который отправляется в регион, определенный $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$, Мы получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Это система с сингулярным возмущением, медленное многообразие которой представляет собой объединение двух плоскостей $\theta = 0$ и $\theta = \pi / 2$. Так как $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ для всех s плоскость $\theta = \pi / 2$ привлекательна, а плоскость $\theta = 0$ отталкивающая. Любое решение, возникающее из точки, не бесконечно близкой к плоскости отталкивания, становится бесконечно близко к плоскости притяжения за бесконечно

малое время. Решения, которые приходят из точки, очень близкой к плоскости отталкивания, могут долго оставаться вблизи этой плоскости, прежде чем отойти от нее. Применяется теорема Тихонова (Лобри и др., 1998; Тихонов, 1952). Мы выбираем $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ и $x(p)$ начальное условие, расположенное в бассейне притяжения 0, но не бесконечно близкое к инвариантному многообразию быстрой динамики

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

соответствует собственному значению $\lambda_1(p)$, Быстрая динамика приводит соответствующее решение бесконечно близко к 0. В плоскости (U_1, U_2) это не бесконечно близко к медленному многообразию $U_2 = 0$ и, следовательно, плоскости $\theta = 0$. Поэтому решение быстро приближается к плоскости $\theta = \pi/2$, после чего аппроксимируется решением медленной системы.

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Мы выводим, что

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Поэтому мы снова $r(s) = r_0$ то есть $v(s)$ бесконечно мал, когда s асимптотически равен q , определяемому (4.3). Для этого значения q начало координат является седловой точкой для быстрой динамики

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Поэтому решение уходит в точку q от седловой точки вдоль своего неустойчивого сепаратора. Мы использовали здесь, что в момент p решение не было бесконечно близко к медленному многообразию $\theta = \pi/2$, что переводит факт, что решение не прибыло в плоскость (U_1, U_2) быть очень близко к $U_1 = 0$, Это заканчивает доказательство.

Вернемся к примеру (3.2) - (3.3). Мы определяем $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$, Следующая быстрая система, где s рассматривается как параметр,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

имеет две точки равновесия (квазистационарные состояния) $(x_1, x_2) = (1, 1)$ и $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ определяется формулой (3.4). Якобиева матрица в $(1, 1)$ имеет вид $\tilde{c}(s_0 + m - s)$, Как мы уже видели, два собственных значения всегда различны, они являются действительными числами. Два собственных значения отрицательны тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$, Поэтому особая точка $(1, 1)$ является привлекательным узлом для значений s , для которых $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ и седловая точка, если $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$, Собственные значения $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ и $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$, определяемый (3.5).

С участием $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ получаем матрицу якобиана

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

У нас есть

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Собственные значения имеют отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$, Поэтому в точках, где $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$, существуют транскритические бифуркации, потому что следующие два равновесия встречаются и обмениваются своей стабильностью: $(x_1, x_2) = (1, 1)$ и $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$,

У нас есть

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ если $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[\text{ modulo } 1$
- $\lambda_2(s) > 0$ если $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[\text{ modulo } 1,$

Мы можем применить теорему и вычислить функцию ввода-вывода, как мы это делали в разделе 2.

5. Обобщение

Это исследование, несомненно, распространяется на проблемы с более чем двумя быстрыми уравнениями и одним медленным уравнением. Рассмотрим, например, линеаризованную систему с четырьмя быстрыми уравнениями (Бакаер, 2007, раздел 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Мы предполагаем $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0, \psi(\cdot) > 0$ является периодической функцией периода 1. Это также модель передачи трансмиссивных болезней. Первые два компонента представляют векторы, инфицированные в латентной фазе и в инфекционной фазе, в то время как последние два компонента представляют людей, инфицированных в латентной фазе и в инфекционной фазе. Система (2.1) становится, $c \varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

Предположение состоит в том, что функция ввода-вывода задается формулой (4.3), где $\lambda_2(s)$ должно быть заменено доминантным реальным собственным значением $\Lambda(s)$ матрицы $c(s)$ Как это можно проверить на численном примере (рисунок 3). Значения параметров $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1,$ $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s)), m = 3$ и $T = 2000,$ Имеем характеристическое уравнение для собственных значений λ матрицы $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

Мы выводим, что $\Lambda(s) < 0$ если и только если

$$\frac{\beta \gamma \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

что будет если $s_1 < s < s_2$ с участием $s_1 \simeq 0,323$ и $s_2 \simeq 0,677,$ как в численном примере в разделе 3 (простое совпадение). С формулой (4.3) находим с другой стороны $s^* \simeq 0,047,$ Похоже, это хорошо согласуется с резким скачком вероятности вымирания на рисунке 3.

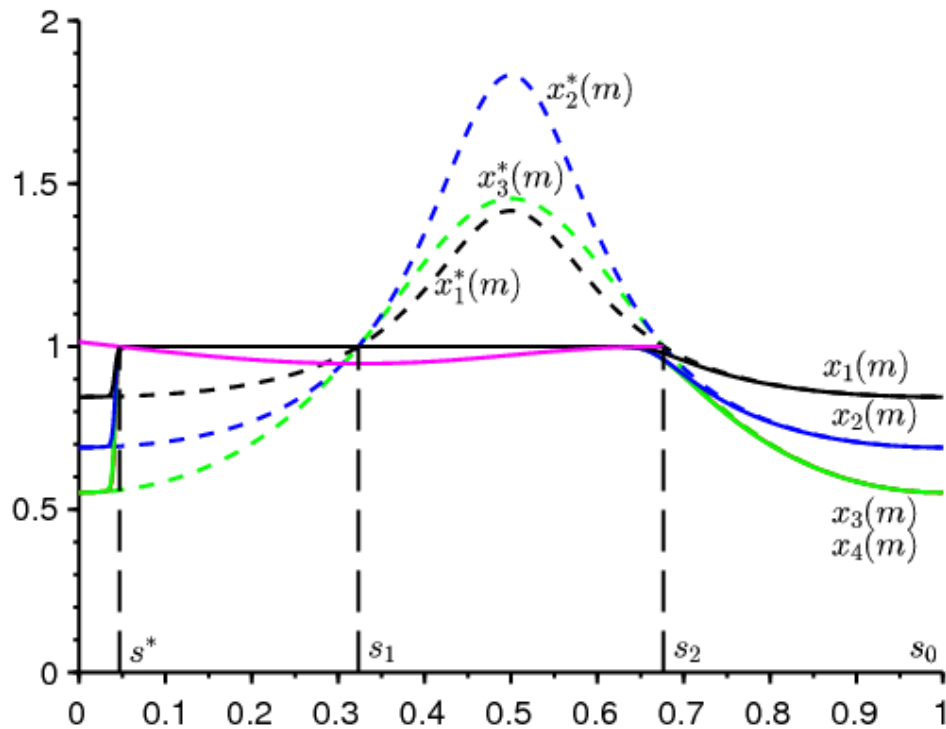


Рисунок 3. Вероятности исчезновения после m периодов $x_1(m)$ (В черном), $x_2(m)$ (синим цветом), а также $x_3(m)$ и $x_4(m)$ (зеленым, неразличимым) в зависимости от s_0 , Пунктирные, медленные кривые. В розовом мы нарисовали кусок функции $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$,

5. Вывод

В этой статье в качестве примеров были взяты периодические модели трансмиссивных заболеваний. Но результат раздела 4 также применим, например, к периодическим моделям SEIR, которые моделируют заболевание с прямой передачей. В линейном приближении вмешиваются только два инфицированных компартмента E и I, которые представляют людей в латентной фазе и заразных людей. Эта модель использовалась для начала эпидемии коронавируса во Франции (Васаёр, 2020b), но без сезонности. Как и в случае с гриппом, сезонность, тем не менее, будет играть роль в распространении этого коронавируса. Вопрос о вымирании возникнет ближе к концу эпидемии.

Еще один важный момент, который следует помнить, состоит в том, что наши результаты о поведении системы включают в себя интегралы от собственного значения на интервалах. В частности, значение этого собственного значения в данный момент времени не дает прямой информации о поведении системы. В теории Флоке также хорошо известно, что периодическая система может иметь только отрицательные собственные значения в любое время и при этом быть нестабильной. Однако во время эпидемии коронавируса мы регулярно слышали объявления о ежедневной воспроизводимости (R_0), что является еще одной формой мгновенного собственного значения.

Библиографические ссылки

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal: 01291211](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi: 10.1007/s00285-019-01447-z](https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z), [hal: 02279038](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi: 10.1051/mmnp/2020015](https://doi.org/10.1051/mmnp/2020015), [hal: 02509142](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal: 01266292](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292)

- E. Benoît (1981) Relation d'entrée– sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293– 296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009)
Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node.
Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911– 929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard.
Collect. Math. 31, 37– 119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998)
Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes– rapides à point tournant.
Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627– 658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009)
Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow– fast predator– prey models.
J. Diff. Eq. 246, 2205– 2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents– rapides complexes à une dimension lente.
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149– 173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019)
Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments,
<https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982)
Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non– standard,
Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92– 93, Soc. Math. France, p. 21– 44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016)
The entry– exit function and geometric singular perturbation theory,
J. Differ. Equations 260, 6697– 6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards.
C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577– 580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results,
Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205– 224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds.
American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks.
Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449– 494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431– 468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001)
Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473– 1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992)
A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ».
Ann. I. Fourier 42, 327– 351.
- C. Lobry (2018)
La relation ressource– consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998)
On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems.
Electron. J. Differ. Eq. 19, 1– 22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I.
Differ. Equations Translations 23, 1385– 1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II.
Differ. Equations Translations 24, 171– 176.
- A. N. Tihonov (1952)
Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées.
Mat. Sborn. 31, 575– 586.
- G. Wallet (1986) Entrée– sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157– 184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1.
Ann. I. Fourier 40, 557– 595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2.
Bull. Soc. Math. France 122, 185– 208.

- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984)
Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations.
Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.