

Sobre a probabilidade de extinção de uma população em um ambiente periódico lento

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër¹ Claude Lobry² Tewfik Sari³

¹ Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes
Institut de Recherche pour le Développement
Les Cordeliers, Paris, França, nicolas.bacaer@ird.fr

² Nice, França, lobrinria@wanadoo.fr

³ ITAP, Universidade de Montpellier, INRAE, Instituto Agro, Montpellier, França, tewfik.sari@irstea.fr

resumo

Estamos interessados na probabilidade de extinção de um processo linear de nascimento e morte com vários tipos em um ambiente periódico, quando o período dos coeficientes é muito grande. Essa probabilidade pode apresentar no limite uma descontinuidade relacionada a um pato em um sistema dinâmico lento-rápido. Determinamos com precisão o ponto de descontinuidade em um exemplo com dois tipos de indivíduos.

Palavras-chave: processo de nascimento e morte, ambiente periódico, sistema lento-rápido

1. Introdução

A estimativa da probabilidade de extinção de uma população é uma questão que intervém em particular na biologia da conservação e na epidemiologia. Neste segundo caso, por população entende-se população infectada. Um modelo matemático clássico para estudar esse tipo de problema é o dos processos lineares de nascimento e morte com um ou mais tipos de indivíduos (Méléard, 2016). No entanto, em muitas situações, a sazonalidade do ambiente deve ser levada em consideração, o que leva ao estudo desses processos quando os coeficientes de nascimento e morte são funções periódicas do tempo (Bacaër e Ait Dads, 2014). Certas populações ou certas epidemias têm coeficientes cuja escala de tempo é relativamente curta em comparação com a sazonalidade anual; portanto, somos levados a considerar o limite em que o período dos coeficientes é muito grande. Quando parâmetros vitais são sub-críticos durante parte do ano (a estação desfavorável), a probabilidade de extinção em função da estação de início do processo converge para um limite descontínuo (Carmona e Gandon, 2019). O ponto da descontinuidade é antes do início da temporada desfavorável.

Bacaër (2019) prosseguiu este estudo essencialmente no caso de um único tipo de indivíduos, observando, em particular, que a descontinuidade na probabilidade de extinção estava ligada à presença em um sistema dinâmico lento-rápido de um "pato" ». Ou seja (ver, por exemplo, Lobry (2018, capítulo 5)) de uma trajetória que segue um arco atraente por um certo tempo antes de seguir um arco repulsivo. Propomos abaixo estudar um exemplo com dois tipos de indivíduos inspirados em um modelo de transmissão de uma doença transmitida por vetores. Determinamos com precisão o ponto de descontinuidade da probabilidade de extinção. Esse problema permaneceu sem solução (Carmona e Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

Na seção 2, apresentamos o modelo para a população, ou seja, o processo linear de nascimento e morte com coeficientes periódicos com vários tipos de indivíduos. É explicado que a probabilidade de extinção está relacionada a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Quando o período converge para o infinito, uma mudança na variável transforma esse sistema em um sistema lento-rápido com um período fixo.

Na seção 3, apresentamos um exemplo com dois tipos de indivíduos. Simulações numéricas sugerem que a probabilidade de extinção converge para um limite descontínuo e que o ponto de descontinuidade é determinado por uma condição que envolve a integral do autovalor dominante de uma determinada matriz. Na seção 4, demonstramos com as ferramentas da análise não-padrão que é realmente essa condição que determina o ponto da descontinuidade.

Na seção 5, apresentamos outro exemplo, desta vez com quatro tipos de indivíduos. A simulação numérica sugere que uma condição do mesmo tipo ainda determine o ponto de descontinuidade. No entanto, não conseguimos demonstrar isso em uma estrutura geral quando o número de tipos de indivíduos é estritamente maior que dois. Na conclusão, discutimos as possibilidades de aplicar nossos resultados ao caso da epidemia de coronavírus.

2. O modelo

Nós consideramos um processo linear de nascimento e morte com k tipos ($k \geq 1$) em um ambiente periódica. $T > 0$ é o período do ambiente. Nós nos damos duas funções matriciais $A(t) = (A_{i,j}(t))$ e $B(t) = (B_{i,j}(t))$ de tamanho ke período T com as seguintes premissas:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$ representa a taxa na qual indivíduos do tipo j geram novos indivíduos do tipo i
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$ é a taxa na qual indivíduos do tipo j se transformam em indivíduos do tipo i
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$ representa a taxa na qual indivíduos do tipo j mudam de tipo ou morrem e $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- E se $U(t)$ é solução do sistema $dU/dt = -B(t)U(t)$ com a condição inicial $U(0) = I$ (a matriz de identidade), então o raio espectral da matriz $U(T)$, ou seja, o multiplicador Floquet dominante, é $\rho(U(T)) < 1$
- o Matrix $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ é irredutível para todos os t .

Mais precisamente, como em (Bacaër e Ait Dads, 2014), definimos

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$ a probabilidade de ter N_i indivíduos do tipo i no momento t ($1 \leq i \leq k$)
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ a função correspondente do gerador.

Temos então

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Supõe-se que no momento t_0 há sim $n_i \geq 0$ indivíduos do tipo i (o n_i são inteiros, $1 \leq i \leq k$) com $\sum_i n_i \geq 1$. Podemos supor que $0 \leq t_0 < T$. Segundo (Bacaër e Ait Dads, 2014), a probabilidade $p(t_0, t_1)$ que a população está extinta neste segundo instante, ou seja, que nenhum indivíduo dos diferentes tipos permanece, é dado por

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ é a solução do sistema diferencial

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

com a condição inicial $z_i(0) = 0 \forall i$.

A expectativa do número de indivíduos do tipo i no momento t é uma solução de

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

e $E_i(t_0) = n_i \forall i$. Nós definimos

- $V(t)$ a solução do sistema $dV/dt = C(t)V(t)$ com a condição inicial $V(0) = I$.
- $F = \rho(V(T))$ o multiplicador dominante de Floquet.

Se $F \leq 1$,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Se $F > 1$, essa probabilidade converge, ao contrário, para um limite estritamente menor que 1. É uma função periódica de t_0 (Bacaër e Ait Dads, 2014).

Nós presumimos

- existem duas funções matriciais periódicas do período 1, independentes de T , $a(s)$ e $b(s)$ com

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$ é um número fixo
- $t_1 = t_0 + mT$, onde $m \geq 1$ é um número inteiro fixo.

Nosso objetivo é estudar o limite

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

em termos de s_0 com $0 \leq s_0 < 1$. Nós também temos

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

qual é a probabilidade de extinção após m períodos ao iniciar a partir de um único indivíduo do tipo i .

Nós definimos

- $\varepsilon = 1/T$,
- $c(s) = a(s) - b(s)$,
- $x(s) = z(t)$.

Temos então

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s)x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

com $x_i(0) = 0 \forall i$. Além disso, $z(t_1 - t_0) = x(m)$. Nós também temos $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$, $0 \leq s \leq m$ (Bacaër e Ait Dads, 2014).

Se T convergir para ∞ , em outras palavras, se $\varepsilon \rightarrow 0$, o sistema (2.1) pode ser escrito como um sistema autônomo lento-rápido com k variáveis rápidas $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) e uma variável lenta $x_{k+1}(s) = s$ com $dx_{k+1}/ds = 1$.

Para a solução estacionária trivial $x_i = 1 \forall i$, a matriz jacobiana do lado direito do sistema (2.1) é $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. \tilde{c} denota a matriz transposta da matriz c . De acordo com um corolário do teorema de Perron e Frobenius para matrizes irredutíveis cujos coeficientes fora da diagonal são todos positivos ou zero (Allaire et al., 2018, observação 6.2.13), as matrizes $c(s)$ e $\tilde{c}(s)$ tem um autovalor real dominante comum $\Lambda(s)$, estritamente maior que a parte real de todos os outros autovalores.

3. um exemplo

Leva

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

com $\alpha(s) > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ e $\delta > 0$. $\alpha(s)$ é uma função contínua periódica do período 1. Esse modelo estocástico é inspirado no modelo determinístico linearizado para uma doença vetorial de (Bacaër, 2007, Seção 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Os vetores infectados são do tipo 1. As pessoas infectadas são do tipo 2. O parâmetro $\alpha(s)$ é a taxa na qual as pessoas infectadas transmitem sua infecção a vetores quando picadas. Essa taxa é periódica porque a população de vetores saudáveis também é. O parâmetro β é a taxa na qual os vetores morrem. O parâmetro γ é a taxa na qual os vetores mordem. O parâmetro δ é a taxa na qual as pessoas infectadas se recuperam. O sistema (2.1) é então gravado

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Observe que o lado direito se cancela em dois casos: $x_1(s) = 1$ e $x_2(s) = 1$ ou

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Os dois valores próprios da matriz $c(s)$ são números reais:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

O autovalor dominante é $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$. Nós temos $\lambda_-(s) < 0 \forall s$.

Suponha que exista uma estação desfavorável para a transmissão da epidemia, ou seja $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$ com

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Suponha ainda que

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Como exemplo, vamos dar $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ com $\bar{\alpha} > 0$, $|\kappa| < 1$ e

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Esta última condição garante que haja de fato uma estação desfavorável. Mais especificamente, vamos escolher $\bar{\alpha} = 3$, $\kappa = 0,75$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ e $\delta = 1$. Esses valores não são muito realistas, mas demonstram claramente o fenômeno. Temos então $s_1 \simeq 0,323$ e $s_2 \simeq 0,677$. Podemos verificar numericamente se a condição (3.8) está verificada. Vamos também $T = 1000$, $m = 3$ e $s_0 = 0,25$. A figura 1 representa a solução do sistema (3.2) - (3.3) com a condição inicial $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Utilizamos o software Scilab e resolvemos o sistema diferencial para $\log(1 - x_1(s))$ e $\log(1 - x_2(s))$. Em seguida, retornamos às variáveis iniciais. Também plotamos a função constante igual a 1 e as curvas (3.4). Observe o seguinte:

- no bairro de $s = 0$, as curvas são quase verticais (não visíveis nas figuras);
- $x_1(s)$ e $x_2(s)$ convergir para uma solução periódica;
- assintoticamente, $x_1(s)$ e $x_2(s)$ estão muito próximos de 1 para os valores de s com $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$, especialmente para $s \in]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$, mas também para $s \in]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ com $s_2 - 1 < s^* < s_1$. Neste último caso, temos $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$. Há um "pato".

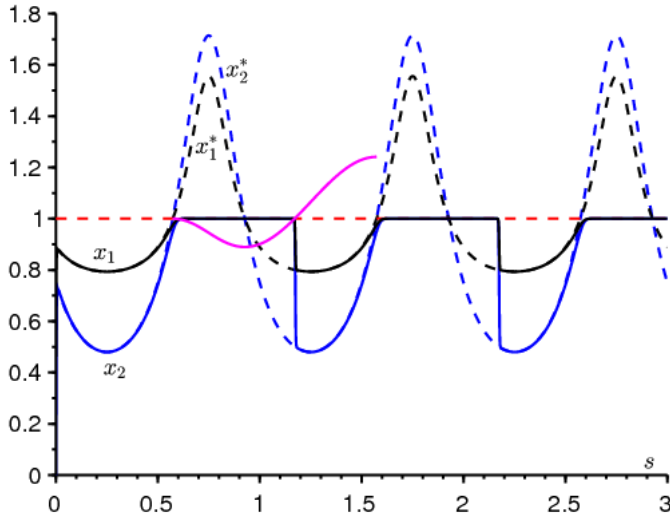


Figura 1. Em função de s , as curvas $x_1(s)$ (em preto) e $x_2(s)$ (em azul), bem como curvas lentas $x_1^*(s)$ (preto pontilhado), $x_2^*(s)$ (azul pontilhado) e 1 (vermelho pontilhado). Em rosa, uma parte da função $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$.

A Figura 2 mostra como as quantidades que nos interessam, as probabilidades de extinção após m períodos $x_1(m)$ e $x_2(m)$, variar dependendo da s_0 . Também traçamos as curvas deduzidas de (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

A Figura 2 sugere que $x_1(m)$ e $x_2(m)$ convergir, quando $T \rightarrow +\infty$, para limites iguais a 1 se $s_0 \in]s^*, s_2[$. $s_0 = s^*$ é uma descontinuidade de limites. O problema é determinar este ponto.

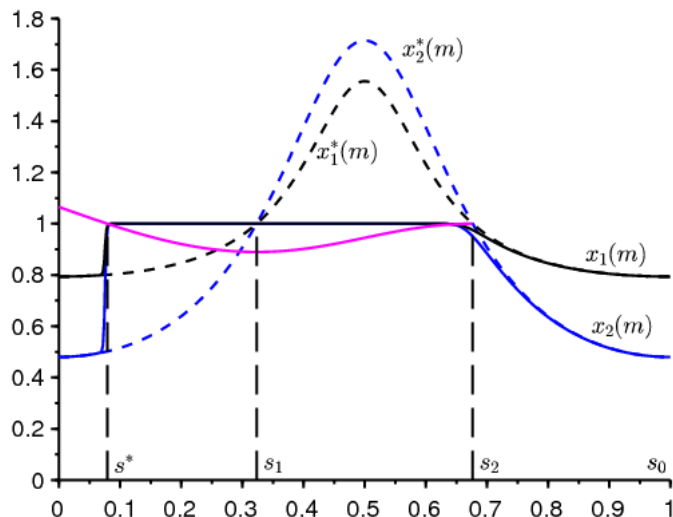


Figura 2. As probabilidades de extinção após m períodos $x_1(m)$ (em preto) e $x_2(m)$ (em azul escuro) dependendo da s_0 . As fórmulas para $x_1^*(m)$ e $x_2^*(m)$ são pontilhadas. Em rosa, uma parte da função $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

Demonstraremos na seção a seguir que as soluções $x_1(s)$ e $x_2(s)$ na Figura 1, que são muito próximas de 1 para $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$, desviar-se repentinamente do bairro 1 para $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ com

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Em outras palavras, essas soluções se desviam da vizinhança de 1 no ponto $s = q$. Além disso, $q = s_0 + 1 - s^*$ e

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

É essa equação que determina s^* de uma maneira única. De fato, se $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$, então nós temos

- $\phi(s_1) < 0$ por causa da condição (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ por causa da condição (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

por causa da condição (3.8).

Existe, portanto, um número real único $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ com $\phi(s^*) = 0$. No exemplo, encontramos numericamente $s^* \simeq 0,079$.

Nota. A condição (3.8) não tem conexão com um possível caráter supercrítico do sistema (3.1). Também é bem conhecido na teoria de Floquet. De fato, se tomarmos, por exemplo, $c = 0,7$ ao invés de $c = 1$, descobrimos numericamente que o multiplicador Floquet dominante é $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ enquanto $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$.

4. A função de entrada e saída para uma bifurcação transcítica

Para justificar o que foi dito sobre o ponto de descontinuidade, geralmente consideramos um campo lento-rápido com duas dimensões rápidas e uma dimensão lenta, como (3.2) - (3.3). Supõe-se que a dinâmica rápida tenha um ponto singular com dois autovalores reais distintos, sendo um sempre negativo e o segundo negativo e depois positivo. Portanto, é uma bifurcação transcítica em que o estado de equilíbrio da dinâmica rápida é um nó estável e depois um ponto de sela.

Uma solução próxima ao ponto singular estável não deixará sua vizinhança assim que se tornar instável, mas continuará a permanecer próxima por algum tempo. O objetivo é calcular a função de entrada e saída para essa bifurcação transcítica, ou seja, definir o momento em que a solução se afasta do ponto singular (momento de saída), de acordo com o local onde está 'é abordado (horário de entrada). Este fenômeno conhecido sob o nome de "atraso na bifurcação" está ligado à noção de soluções de pato e de superestabilidade.

A noção de função de entrada e saída e o conceito de solução de pato foram estudados no início da década de 1980 com métodos de análise não padronizados. Veja os artigos de revisão (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin e Shubin, 1984). A função de entrada e saída foi calculada primeiro para patos da equação de Van der Pol (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) e depois estendida a qualquer sistema lento-rápido do avião (Diener e Diener, 1983).

Mais tarde, a existência de soluções de pato foi encontrada com os métodos clássicos de expansões assintóticas (Eckhaus, 1983) e pela teoria geométrica de perturbações singulares (Dumortier e Roussarie, 1996). A função de entrada-saída para um sistema do avião também foi obtida pela teoria geométrica de perturbações singulares (De Maesschalck e Schechter, 2016).

Para obter mais detalhes sobre a contribuição da escola francesa não-central para o problema dos patos e o atraso na bifurcação, o leitor pode consultar (Cartier, 1982; Fruchard e Schäfer, 2008). Para uma visão mais completa das várias abordagens na teoria das perturbações singulares, consulte a monografia recente (Kuehn, 2015), bem como o artigo (Wechselberger, 2007) dedicado aos patos. Para a noção de sobrestabilidade e atraso na bifurcação, consulte também (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Wallet, 1990, 1994) e as referências que elas contêm.

O caso particular de um campo lento-rápido na dimensão dois, com uma dinâmica rápida da dimensão um que é atraente e depois repulsiva, é bem compreendido, veja (Diener e Diener, 1983). O caso da bifurcação de Hopf, onde dois autovalores são conjugados complexos e sua parte real muda de sinal, foi considerado por vários autores (ver Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener e Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Veja também a apresentação completa e educacional na monografia recente (Kuehn, 2015, capítulo 12).

Considere um sistema diferencial em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ com uma variável lenta $s \in \mathbb{R}$ e com duas variáveis rápidas $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável em (s, x) e $\varepsilon > 0$ é infinitamente pequeno. Utilizamos o vocabulário da análise não-padrão, ver (Diener e Reeb, 1989) ou Lobry (2018, capítulo 5). Nós presumimos $f(s, 0) = 0 \forall s$.

$x = 0$ não é apenas uma curva lenta do sistema (4.1), isto é, uma solução da equação $f(s, x) = 0$, mas também uma solução específica do sistema (4.1). Definimos a matriz quadrada 2×2

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Supomos que $M(s)$ tem dois autovalores distintos, $\lambda_1(s)$ e $\lambda_2(s)$ um dos quais permanece sempre negativo e o outro muda de sinal. Com $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$, temos :

- $\lambda_1(s) < 0$ e $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ e $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in]\sigma_1, \sigma_2]$.

Na teoria geométrica das perturbações singulares estudamos o sistema (4.1) no espaço de fase estendido (x, ε) . Nós adicionamos a equação $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$. Um único autovalor da dinâmica rápida muda de sinal. Esta situação pode ser trazida de volta ao caso dos sistemas no avião, pela redução no coletor central do sistema aumentado ((4.1), $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) no seu ponto de equilíbrio $(x, \varepsilon) = (0, 0)$. Para mais detalhes, consulte (Boudjellaba e Sari, 2009; Krupa e Szmolyan, 2001). Com essa redução, obtemos um sistema plano cuja função de entrada e saída é dada pela integral do valor próprio que altera o sinal (Diener e Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

Nesta equação, p é o tempo de entrada e q é o tempo de saída. A redução prediz que a função de entrada e saída é dada pela fórmula (4.3) localmente, próximo ao valor da bifurcação transcítica. Propomos a seguir o cálculo da função total de entrada e saída. O caso particular de um campo lento-rápido na dimensão três com uma dinâmica desacoplada rápida foi considerado em (Boudjellaba e Sari, 2009).

Usamos o vocabulário da análise não padronizada. O que exatamente é essa teoria não é muito importante para a compreensão deste artigo. O leitor pode ter em mente o significado intuitivo da linguagem infinitesimal e se confortar ao saber que a análise não-padrão fornece uma base rigorosa para os conceitos de infinitamente pequeno e infinitamente grande. Para uma introdução à análise não padronizada, consulte (Diener e Reeb, 1989). Para obter mais informações sobre o uso da análise não-padrão na teoria das equações diferenciais, consulte (Cartier, 1982), (Zvonkin e Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, seção 19.5) ou (Lobry, 2018, capítulo 5).

Portanto, assumimos que o parâmetro ε em (4.1) é infinitamente pequeno. A solução $x(s) = 0$ é um "pato", pois é atraente para $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ e repelente por $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$. O objetivo é estudar as soluções do sistema (4.1) infinitamente próximas a essa solução. Dinâmicas rápidas são atraentes durante o intervalo $[\sigma_0, \sigma_1[$. Nós levamos $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$. Uma solução do sistema (4.1) com uma condição inicial na bacia de atração 0 avança rapidamente em direção à curva lenta $x = 0$ e permanece infinitamente próxima a ela desde que $s < \sigma_1$. A solução não deixa a vizinhança infinitesimal de 0 neste momento, mas continua a contornar o 0 durante um intervalo inteiro. O momento $q > \sigma_1$ para qual $x(s)$ não é mais infinitamente próximo de 0 é chamado de tempo de saída. O objetivo é determinar a função $p \mapsto q$. Mostraremos que q é definido pela equação (4.3). Mais precisamente nós temos o seguinte resultado:

Teorema

Nós definimos

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ uma condição inicial localizada na bacia de atração 0, mas que não é infinitamente próxima da variedade invariante da dinâmica rápida correspondente ao valor próprio $\lambda_1(p)$.
- q pela equação (4.3).

assim $\forall s \in]p, q[$ não infinitamente próximo de p ou q , temos: $x(s) \simeq 0$. Além disso, $x(q)$ não é infinitamente próximo de 0. Em p , $x(s)$ se aproxima de 0 ao longo da órbita da dinâmica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

quem passa $x(p)$. Em q , $x(s)$ se afasta de 0 ao longo do separador instável de 0 para dinâmica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Prova. Nós temos $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$. $M(s)$ é a matriz (4.2). Nós temos

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

O sistema (4.1) torna-se

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

O Matrix $M(s)$ possui dois valores próprios distintos. Existe, portanto, uma matriz diferenciável invertível $P(s)$ com

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Transformamos a equação (4.5) com a mudança da variável $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Transformamos essa equação com a lupa $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon}P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$

As condições (4.4) são verificadas por $g(s, x)$. Então nós temos

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

e $g_1(s, U, \varepsilon)$ é uma função contínua. Portanto, temos

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$ é uma função contínua. Definimos os componentes dos vetores: $U = (U_1, U_2)$ e $h = (h_1, h_2)$. O sistema se torna

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Este sistema é composto de duas equações fracamente acopladas. A mudança de variáveis

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

transforma o sistema em

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r[\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

k_2 é uma função contínua em $r=0$ porque $h_1 = O(r)$ e $h_2 = O(r)$. Nós escolhemos r_0 com $0 < r_0 < 1$ e para que a bola com centro 0 e raio r_0 está incluído na bacia de atração da origem. Aplique a alteração da variável $v = \varepsilon \ln(r)$ para a região $0 < r < r_0$, que é enviado para a região definida por $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$. Temos o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.6)$$

É um sistema singularmente perturbado, cuja variedade lenta é a união dos dois planos $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. Porque $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ para todos os s , o plano $\theta = \pi/2$ é atraente e o plano $\theta = 0$ é repulsivo. Qualquer solução resultante de um ponto não infinitamente próximo ao plano repulsivo torna-se infinitamente próximo ao plano atraente em um tempo infinitamente pequeno. As soluções que vêm de um ponto muito próximo ao plano repulente podem permanecer perto deste plano por um longo tempo antes de se afastar dele. O teorema de Tihonov se aplica (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Nós escolhemos $p \in [\sigma_0, \sigma_1]$ e $x(p)$ uma condição inicial localizada na bacia de atração 0, mas que não é infinitamente próxima da variedade invariante da dinâmica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

correspondente ao valor próprio $\lambda_1(p)$. A dinâmica rápida leva a solução correspondente infinitamente perto de 0. No plano (U_1, U_2) não é infinitamente próximo da variedade lenta $U_2 = 0$ e, portanto, do plano $\theta = 0$. Portanto, a solução se aproxima rapidamente do plano $\theta = \pi/2$ e é aproximada pela solução do sistema lento

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Deduzimos que

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Portanto, temos novamente $r(s) = r_0$, isto é, $v(s)$ infinitamente pequeno, quando s é assintoticamente igual a q definido por (4.3). Para esse valor de q , a origem é um ponto de sela para dinâmicas rápidas

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Portanto, a solução se afasta no ponto q do ponto de sela ao longo de seu separador instável. Usamos aqui que no momento p a solução não estava infinitamente próxima da variedade lenta $\theta = \pi/2$, o que traduz o fato de que a solução não chegou ao plano (U_1, U_2) estar muito perto de $U_1 = 0$. Isso termina a prova.

Vamos voltar ao exemplo (3.2) - (3.3). Nós definimos $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$. O seguinte sistema rápido, em que s é considerado um parâmetro,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

tem dois pontos de equilíbrio (estados quase-estacionários) $(x_1, x_2) = (1, 1)$ e $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ dada por (3.4). A matriz jacobiana em $(1, 1)$ é $\tilde{\alpha}(s_0 + m - s)$. Como já vimos, os dois valores próprios são sempre distintos, são números reais. Os dois valores próprios são negativos se e somente se $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$. Portanto, o ponto singular $(1, 1)$ é um nó atraente para os valores de s para os quais $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ e um ponto de sela se $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Os autovalores são $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ e $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$, dado por (3.5).

Com $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$, obtemos a matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Nós temos

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Os autovalores têm uma parte real negativa se e somente se $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Portanto, nos pontos em que $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$, existem bifurcações transcíticas, porque os dois equilíbrios a seguir atendem e trocam suas estabilidades: $(x_1, x_2) = (1, 1)$ e $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$.

Nós temos

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ E se $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[$ modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$ E se $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[$ modulo 1.

Podemos aplicar o teorema e calcular a função de entrada e saída, como fizemos na seção 2.

5. Generalização

Sem dúvida, este estudo se estende a problemas com mais de duas equações rápidas e uma lenta. Considere, por exemplo, o sistema linearizado com quatro equações rápidas de (Bacaër, 2007, Seção 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Nós presumimos $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$. $\psi(\cdot) > 0$ é uma função periódica do período 1. É também um modelo para a transmissão de doenças transmitidas por vetores. Os dois primeiros componentes representam os vetores infectados na fase latente e na fase infecciosa, enquanto os dois últimos componentes representam as pessoas infectadas na fase latente e na fase infecciosa. O sistema (2.1) torna-se, com $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

A conjectura é que a função entrada-saída é dada pela fórmula (4.3), onde $\lambda_2(s)$ deve ser substituído pelo valor próprio real dominante $\Lambda(s)$ da matriz $c(s)$, como se pode verificar em um exemplo numérico (Figura 3). Os valores dos parâmetros são $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$, $m = 3$ e $T = 2000$. Temos a equação característica para os autovalores λ da matriz $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

Deduzimos que $\Lambda(s) < 0$ se e apenas se

$$\frac{\beta \gamma \delta \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

o que acontece se $s_1 < s < s_2$ com $s_1 \simeq 0,323$ e $s_2 \simeq 0,677$, como no exemplo numérico na seção 3 (coincidência simples). Com a fórmula (4.3), encontramos por outro lado $s^* \simeq 0,047$. Isso parece corresponder bem ao salto acentuado na probabilidade de extinção na Figura 3.

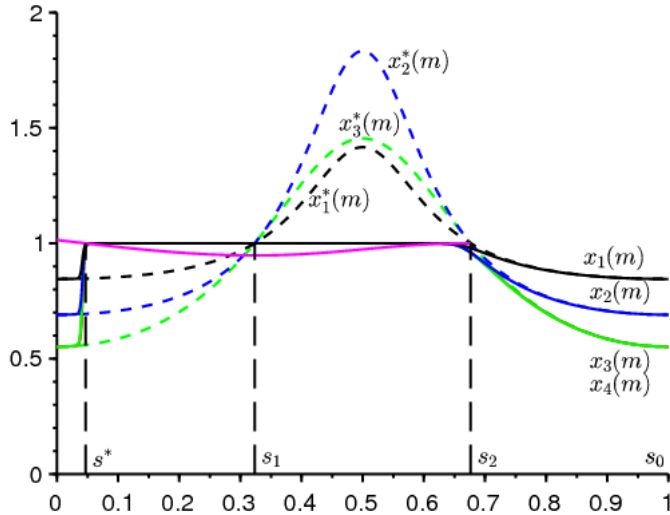


Figura 3. As probabilidades de extinção após m períodos $x_1(m)$ (de preto), $x_2(m)$ (em azul), bem como $x_3(m)$ e $x_4(m)$ (em verde, indistinguível), dependendo da s_0 . Pontilhada, curvas lentas. Em rosa, desenhamos uma parte da função $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

5. Conclusão

Neste artigo, modelos periódicos para doenças transmitidas por vetores foram tomados como exemplos. Mas o resultado da seção 4 também se aplica, por exemplo, aos modelos SEIR periódicos que modelam uma doença com transmissão direta. Na aproximação linear, apenas os dois compartimentos E e I infectados intervêm, representando pessoas na fase latente e pessoas infecciosas. Esse modelo foi utilizado para o início da epidemia de coronavírus na França (Bacaër, 2020b), mas sem a sazonalidade. Tal como acontece com a gripe, espera-se que a sazonalidade tenha um papel na disseminação desse coronavírus. A questão da extinção surgirá no final da epidemia.

Outro ponto importante que é bom lembrar é que nossos resultados sobre o comportamento do sistema envolvem integrais de um autovalor em intervalos. Em particular, o valor desse valor próprio em um determinado momento não fornece informações diretas sobre o comportamento do sistema. Também é bem conhecido

na teoria de Floquet que um sistema periódico pode ter apenas autovalores negativos a qualquer momento e, no entanto, ser instável. No entanto, durante a epidemia de coronavírus, ouvimos regularmente anúncios sobre a reprodutibilidade diária (R_0), que é apenas outra forma do autovalor instantâneo.

Referências bibliográficas

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal: 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi: 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal: 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi: 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal: 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal: 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn.–S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci., Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des " bifurcations dynamiques ". Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.