

# Over de kans op uitsterven van een populatie in een langzame periodieke omgeving

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes  
Institut de Recherche pour le Développement  
Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Nice, Frankrijk, lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP, Universiteit van Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Frankrijk, tewfik.sari@irstea.fr

## Overzicht

We zijn geïnteresseerd in de kans op uitsterven van een lineair proces van geboorte en dood met verschillende typen in een periodieke omgeving wanneer de periode van de coëfficiënten erg groot is. Deze kans kan op de limiet een discontinuïteit met betrekking tot een eind in een langzaam-snel dynamisch systeem presenteren. We bepalen precies het punt van discontinuïteit in een voorbeeld met twee soorten individuen.

Sleutelwoorden: geboorte- en sterfproces, periodieke omgeving, langzaam-snel systeem

## 1. Inleiding

Het schatten van de kans op uitsterven van een populatie is een vraag die met name intervenueert in de biologie van natuurbehoud en in de epidemiologie. In dit tweede geval wordt met populatie geïnfecteerde populatie bedoeld. Een klassiek wiskundig model om dit soort problemen te bestuderen, is dat van de lineaire processen van geboorte en dood met een of meer soorten individuen (Méléard, 2016). Desalniettemin moet in veel situaties rekening worden gehouden met de seizoensgebondenheid van het milieu, wat leidt tot de studie van deze processen wanneer de geboorte- en doodscoëfficiënten periodieke tijdfuncties zijn (Bacaër en Ait Dads, 2014). Bepaalde populaties of bepaalde epidemieën hebben coëfficiënten waarvan de tijdschaal relatief kort is in vergelijking met de jaarlijkse seizoensinvloeden; we worden daarom ertoe gebracht de limiet te overwegen waar de periode van de coëfficiënten erg groot is. Wanneer vitale parameters een deel van het jaar (het ongunstige seizoen) subkritisch zijn, convergeert de waarschijnlijkheid van uitsterven als functie van het begin van het proces naar een discontinue limiet (Carmona en Gandon, 2019). Het punt van discontinuïteit is voor aanvang van het ongunstige seizoen.

Bacaër (2019) had deze studie hoofdzakelijk voortgezet in het geval van een enkel type individu, waarbij hij met name opmerkte dat de discontinuïteit van de kans op uitsterven verband hield met de aanwezigheid in een langzaam-snel dynamisch systeem van een "eend" », Dat wil zeggen (zie bijvoorbeeld Lobry (2018, hoofdstuk 5)) van een traject dat gedurende een bepaalde tijd een aantrekkelijke boog volgt alvorens een afstotende boog te volgen. We stellen hieronder voor om een voorbeeld te bestuderen met twee soorten individuen geïnspireerd door een model van overdracht van een door vectoren overgedragen ziekte. We bepalen nauwkeurig het punt van discontinuïteit van de extinctiekans. Dit probleem was onopgelost gebleven (Carmona en Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

In paragraaf 2 presenteren we het model voor de populatie, namelijk dat van lineaire geboorte- en sterfprocessen met periodieke coëfficiënten met verschillende typen individuen. Er wordt uitgelegd dat de kans op uitsterven verband houdt met een systeem van gewone differentiaalvergelijkingen. Wanneer de periode convergeert naar oneindig, verandert een verandering in variabele dit systeem in een langzaam-snel systeem met een vaste periode.

In paragraaf 3 presenteren we een voorbeeld met twee soorten individuen. Numerieke simulaties suggereren dat de extinctiekans convergeert naar een discontinue limiet en dat het discontinuïteitspunt wordt bepaald door een conditie die de integraal van de dominante eigenwaarde van een bepaalde matrix omvat. In paragraaf 4 demonstreren we met de tools van niet-standaard analyse dat het inderdaad deze voorwaarde is die het punt van discontinuïteit bepaalt.

In paragraaf 5 presenteren we een ander voorbeeld, dit keer met vier soorten individuen. Numerieke simulatie suggereert dat een toestand van hetzelfde type nog steeds het punt van discontinuïteit bepaalt. Het is ons echter niet gelukt om dit in een algemeen kader aan te tonen wanneer het aantal soorten individuen strikt groter is dan twee. In de conclusie bespreken we de mogelijkheden om onze resultaten toe te passen op het geval van de coronavirusepidemie.

## 2. Het model

We beschouwen een lineair proces van geboorte en dood met  $k$ -types ( $k \geq 1$ ) in een periodieke omgeving.  $T > 0$  is de periode van de omgeving. We geven onszelf twee matrixfuncties  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  en  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  van maat  $k$  en periode  $T$  met de volgende aannames:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  vertegenwoordigt de snelheid waarmee individuen van type  $j$  nieuwe individuen van type  $i$  genereren
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  is de snelheid waarmee individuen van type  $j$  veranderen in individuen van type  $i$
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  staat voor de snelheid waarmee individuen van type  $j$  van type veranderen of sterven, en  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- als  $U(t)$  is een systeemoplossing  $dU/dt = -B(t)U(t)$  met de beginconditie  $U(0) = I$  (de identiteitsmatrix), dan de spectrale straal van de matrix  $U(T)$ , d.w.z. de dominante Floquet-multiplier, is  $\rho(U(T)) < 1$
- de matrix  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  is onherleidbaar voor alle  $t$ .

Meer precies, zoals in (Bacaër en Ait Dads, 2014), definiëren we

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  de kans om te hebben  $N_i$  individuen van type  $i$  op tijdstip  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  de bijbehorende generatorfunctie.

We hebben dan

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i] [B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t) Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Aangenomen wordt dat op dat moment  $t_0$  er is  $n_i \geq 0$  type  $i$  individuen (de  $n_i$  zijn gehele getallen,  $1 \leq i \leq k$ ) met  $\sum_i n_i \geq 1$ . We kunnen dat veronderstellen  $0 \leq t_0 < T$ . Volgens (Bacaër en Ait Dads, 2014), de waarschijnlijkheid  $p(t_0, t_1)$  dat de populatie op dit tweede moment is uitgestorven, dat wil zeggen dat er geen individu van de verschillende typen overblijft, gegeven door

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  is de oplossing van het differentieel systeem

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t) z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

met de beginconditie  $z_i(0) = 0 \forall i$ .

De verwachting van het aantal individuen van type  $i$  op tijdstip  $t$  is een oplossing van

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

en  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ . We definiëren

- $V(t)$  de systeemoplossing  $dV/dt = C(t)V(t)$  met de beginconditie  $V(0) = I$ .
- $F = \rho(V(T))$  de dominante Floquet-multiplier.

Als  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow[t_1 \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Als  $F > 1$ , deze waarschijnlijkheid convergeert naar een limiet die strikt lager is dan 1. Het is een periodieke functie van  $t_0$  (Bacaër en Ait Dads, 2014).

Wij nemen aan

- er zijn twee periodieke matrixfuncties van periode 1, onafhankelijk van  $T$ ,  $a(s)$  en  $b(s)$ , met

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  is een vast nummer

- $t_1 = t_0 + mT$ , waarbij  $m \geq 1$  een vast geheel getal is.

Ons doel is om de limiet te bestuderen

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

aangaande met  $s_0$ , met  $0 \leq s_0 < 1$ . We hebben ook

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

dat is de kans op uitsterven na  $m$  perioden bij het starten van een enkel individu van type  $i$ .

We definiëren

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ .

We hebben dan

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

met  $x_i(0) = 0 \forall i$ . Bovendien,  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ . We hebben ook  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$ ,  $0 \leq s \leq m$  (Bacaër en Ait Dads, 2014).

Als  $T$  convergeert naar  $\infty$ , met andere woorden als  $\varepsilon \rightarrow 0$  kan het systeem (2.1) worden geschreven als een langzaam-snel autonoom systeem met  $k$  snelle variabelen  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) en een langzame variabele  $x_{k+1}(s) = s$  met  $dx_{k+1}/ds = 1$ .

Voor de triviale stationaire oplossing  $x_i = 1 \forall i$  is de Jacobiaanse matrix aan de rechterkant van het systeem (2.1)  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ .  $\tilde{c}$  geeft de getransponeerde matrix van de matrix  $c$  aan. Volgens een uitvloeisel van de stelling van Perron en Frobenius voor onherleidbare matrices waarvan de coëfficiënten buiten de diagonaal allemaal positief of nul zijn (Allaire et al., 2018, opmerking 6.2.13), zijn de matrices  $c(s)$  en  $\tilde{c}(s)$  een gemeenschappelijke dominante reële eigenwaarde hebben  $\Lambda(s)$ , strikt groter dan het reële deel van alle andere eigenwaarden.

### 3. Een voorbeeld

Nemen

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

met  $\alpha(s) > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  en  $\delta > 0$ .  $\alpha(s)$  is een periodieke continue functie van periode 1. Dit stochastische model is geïnspireerd op het gelineariseerde deterministische model voor een vectorziekte van (Bacaër, 2007, Sectie 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Geïnfecteerde vectoren zijn type 1. Geïnfecteerde mensen zijn type 2. De parameter  $\alpha(s)$  is de snelheid waarmee geïnfecteerde mensen hun infectie doorgeven aan vectoren wanneer ze worden gebeten. Dit percentage is periodiek omdat de populatie van gezonde vectoren dat ook is. De parameter  $\beta$  is de snelheid waarmee vectoren afsterven. De parameter  $\gamma$  is de snelheid waarmee de vectoren bijten. De parameter  $\delta$  is de snelheid waarmee geïnfecteerde mensen herstellen. Het systeem (2.1) wordt dan geschreven

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Merk op dat de rechterkant elkaar in twee gevallen opheft:  $x_1(s) = 1$  en  $x_2(s) = 1$ , of

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

De twee eigenwaarden van de matrix  $c(s)$  zijn echte cijfers:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

De dominante eigenwaarde is  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ . Men heeft  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ .

Stel dat er een ongunstig seizoen is voor de overdracht van de epidemie, dat wil zeggen  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  met

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Stel verder dat

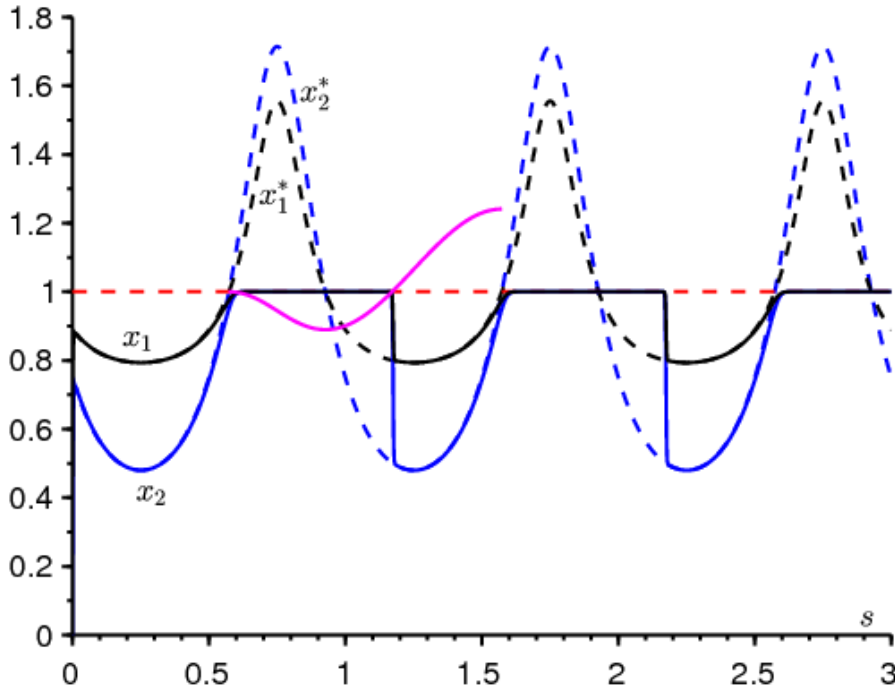
$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Laten we als voorbeeld nemen  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  met  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $|\kappa| < 1$  en

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Deze laatste voorwaarde zorgt ervoor dat er inderdaad een ongunstig seizoen is. Laten we meer in het bijzonder kiezen  $\bar{\alpha} = 3$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  en  $\delta = 1$ . Deze waarden zijn niet erg realistisch, maar ze tonen het fenomeen duidelijk aan. We hebben dan  $s_1 \simeq 0,323$  en  $s_2 \simeq 0,677$ . We kunnen numeriek verifiëren dat voorwaarde (3.8) is geverifieerd. Laten we ook nemen  $T = 1000$ ,  $m = 3$  en  $s_0 = 0,25$ . Figuur 1 vertegenwoordigt de oplossing van het systeem (3.2) - (3.3) met de beginvoorwaarde  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . We hebben de Scilab-software gebruikt en het differentieel systeem opgelost  $\log(1 - x_1(s))$  en  $\log(1 - x_2(s))$ . Daarna keerden we terug naar de oorspronkelijke variabelen. We hebben ook de constante functie uitgezet die gelijk is aan 1 en de curven (3.4). Let op het volgende:

- in de buurt van  $s = 0$ , de curven zijn bijna verticaal (niet zichtbaar in de figuren);
- $x_1(s)$  en  $x_2(s)$  convergeren naar een periodieke oplossing;
- asymptotisch,  $x_1(s)$  en  $x_2(s)$  liggen zeer dicht bij 1 voor de waarden van  $s$  met  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ , speciaal voor  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ , maar ook voor  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  met  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ . In het laatste geval hebben we  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . Er is een "eend".

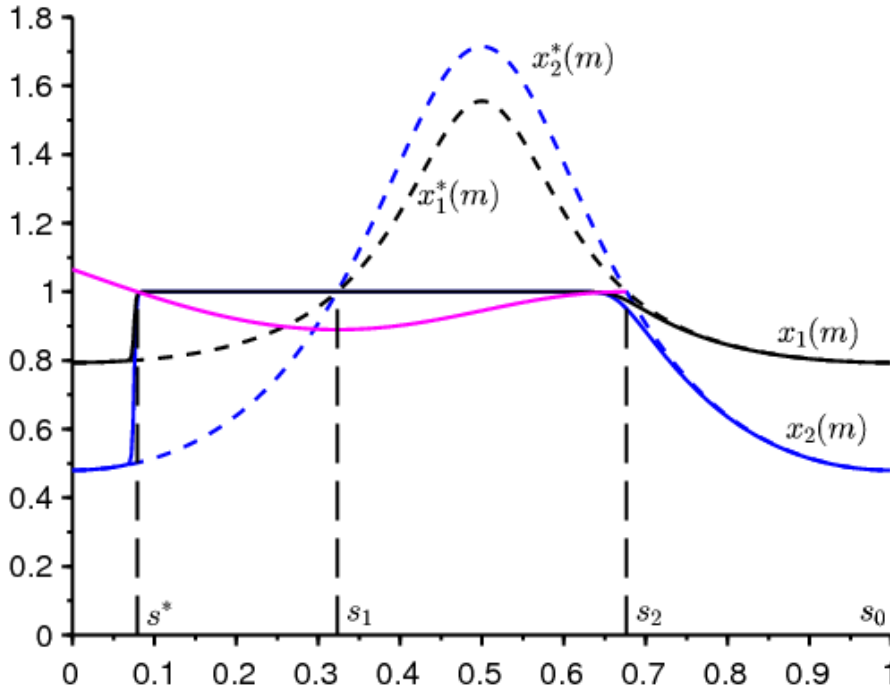


Figuur 1. Als functie van  $s$ , de curven  $x_1(s)$  (in zwart) en  $x_2(s)$  (in blauw) evenals langzame bochten  $x_1^*(s)$  (zwart gestippeld),  $x_2^*(s)$  (gestippeld blauw) en 1 (gestippeld rood). In roze, een stukje van de functie  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ .

Figuur 2 laat zien hoe de grootheden die ons interesseren, de extinctiekansen na  $m$  periodes  $x_1(m)$  en  $x_2(m)$  variëren afhankelijk van  $s_0$ . We hebben ook de curven uitgezet die zijn afgeleid van (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

Figuur 2 suggereert dat  $x_1(m)$  en  $x_2(m)$  convergeren, wanneer  $T \rightarrow +\infty$ , naar limieten gelijk aan 1 als  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ .  $s_0 = s^*$  is een discontinuïteit van limieten. Het probleem is om dit punt te bepalen.



Figuur 2. De extinctiekansen daarna  $m$  periodes  $x_1(m)$  (in zwart) en  $x_2(m)$  (in donkerblauw) afhankelijk van  $s_0$ . De formules voor  $x_1^*(m)$  en  $x_2^*(m)$  zijn gestippeld. In roze, een stukje van de functie  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

We zullen in de volgende sectie laten zien dat de oplossingen  $x_1(s)$  en  $x_2(s)$  in Figuur 1, die heel dicht bij 1 staan voor  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , wijken plotseling af van de buurt van 1 voor  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  met

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Deze oplossingen wijken met andere woorden af van de buurt van 1 op een punt  $s = q$ . Bovendien,  $q = s_0 + 1 - s^*$  en

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Het is deze vergelijking die bepaalt  $s^*$  op een unieke manier. Inderdaad, als  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ , Dus we hebben

- $\phi(s_1) < 0$  vanwege conditie (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  vanwege de conditie (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

vanwege conditie (3.8).

Er is dus een uniek echt nummer  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  met  $\phi(s^*) = 0$ . In het voorbeeld vinden we numeriek  $s^* \simeq 0,079$ .

**Notitie.** Conditie (3.8) heeft geen verband met een mogelijk superkritisch karakter van het systeem (3.1). Dit is ook bekend in de theorie van Floquet. Inderdaad, als we bijvoorbeeld nemen  $c = 0,7$  in plaats van  $c = 1$  vinden we numeriek dat de dominante Floquet-multiplier is  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  terwijl  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ .

## 4. De input-output functie voor een transkritische splitsing

Om te rechtvaardigen wat zojuist is gezegd over het punt van discontinuïteit, beschouwen we meer in het algemeen een langzaam-snel veld met twee snelle dimensies en één langzame dimensie, zoals (3.2) - (3.3). Aangenomen wordt dat de snelle dynamica een enkelvoudig punt heeft met twee verschillende reële eigenwaarden, waarvan de ene altijd negatief is

en de tweede negatief en dan positief. Het is daarom een transkritische vertakking waarbij de evenwichtstoestand van de snelle dynamiek een stabiel knooppunt is en dan een zadelpunt.

Een oplossing die dicht bij het stabiele singuliere punt ligt, verlaat de buurt niet zodra deze onstabiel wordt, maar blijft er wel een tijdje dicht bij. Het doel is om de input-outputfunctie voor deze transkritische splitsing te berekenen, d.w.z. om het moment te definiëren waarop de oplossing weggaat van het singuliere punt (outputmoment), volgens dat waar het is ' wordt benaderd (ingangstijd). Dit fenomeen dat bekend staat onder de naam "vertraging in splitsing" houdt verband met het idee van eendenoplossingen en van overstabiliteit.

Het idee van de input-outputfunctie en het concept van eendenoplossing werden voor het eerst aan het begin van de jaren tachtig bestudeerd met behulp van niet-standaard analysemethoden. Zie de overzichtsartikelen (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin en Shubin, 1984). De invoer-uitvoerfunctie werd eerst berekend voor eenden uit de Van der Pol-vergelijking (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) en vervolgens uitgebreid tot elk langzaam-snel systeem van het vliegtuig (Diener en Diener, 1983).

Later werd het bestaan van eendoplossingen gevonden met de klassieke methoden van asymptotische uitbreidingen (Eckhaus, 1983) en door de geometrische theorie van singuliere verstoringen (Dumortier en Roussarie, 1996). De input-outputfunctie voor een systeem van het vliegtuig is ook verkregen door de geometrische theorie van singuliere verstoringen (De Maesschalck en Schechter, 2016).

Voor meer details over de bijdrage van de Franse niet-schakelschool aan het probleem van eenden en de vertraging bij de splitsing, kan de lezer raadplegen (Cartier, 1982; Fruchard en Schäfke, 2008). Voor een volledig beeld van de verschillende benaderingen in de theorie van singuliere verstoringen, zie de recente monografie (Kuehn, 2015) en het artikel (Wechselberger, 2007) over eenden. Zie ook (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Wallet, 1990, 1994) en de referenties die ze bevatten voor het idee van overstabiliteit en vertraging bij splitsing.

Het specifieke geval van een langzaam-snel veld in dimensie twee, met een snelle dynamiek van dimensie één die aantrekkelijk is en vervolgens afstotend, is goed begrepen, zie (Diener en Diener, 1983). Het geval van de Hopf-splitsing, waarbij twee eigenwaarden complexe conjugaten zijn en hun werkelijke deel verandert van teken, is door verschillende auteurs overwogen, zie (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener en Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Zie ook de volledige en educatieve presentatie in de recente monografie (Kuehn, 2015, hoofdstuk 12).

Overweeg een differentieel systeem aan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  met een langzame variabele  $s \in \mathbb{R}$  en met twee snelle variabelen  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is een differentieerbare functie in  $(s, x)$ , en  $\varepsilon > 0$  is oneindig klein. We gebruiken de vocabulaire van niet-standaard analyse, zie (Diener en Reeb, 1989) of Lobry (2018, hoofdstuk 5). Wij nemen aan  $f(s, 0) = 0 \forall s$ .

$x = 0$  is niet alleen een langzame curve van het systeem (4.1), d.w.z. een oplossing van de vergelijking  $f(s, x) = 0$ , maar ook een specifieke oplossing van het systeem (4.1). We definiëren de vierkante matrix  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

We veronderstellen dat  $M(s)$  heeft twee verschillende eigenwaarden,  $\lambda_1(s)$  en  $\lambda_2(s)$  een daarvan blijft altijd negatief en de andere verandert teken. Met  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ , men heeft :

- $\lambda_1(s) < 0$  en  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1]$  en  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ .

In de geometrische theorie van singuliere verstoringen bestuderen we het systeem (4.1) in de uitgebreide faseruimte  $(x, \varepsilon)$ . We voegen de vergelijking toe  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ . Een enkele eigenwaarde van het teken voor snelle dynamiek verandert. Deze situatie kan worden teruggebracht naar het geval van systemen in het vliegtuig door reductie op het centrale spruitstuk van het augmented systeem ((4.1),  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) op het evenwichtspunt  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ . Zie voor meer details (Boudjellaba en Sari, 2009; Krupa en Szmolyan, 2001). Met deze reductie verkrijgen we een vlak systeem waarvan de invoer-uitvoerfunctie wordt gegeven door de integraal van de eigenwaarde die van teken verandert (Diener en Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

In deze vergelijking is  $p$  de ingangstijd en  $q$  de uitgangstijd. De reductie voorspelt dat de invoer-uitvoerfunctie lokaal wordt gegeven door formule (4.3), dichtbij de transkritische vertakkingswaarde. We stellen in het volgende voor om de totale invoer-uitvoerfunctie te berekenen. Het specifieke geval van een langzaam-snel veld in dimensie drie met een snel ontkoppelde dynamiek werd overwogen in (Boudjellaba en Sari, 2009).

We gebruiken de woordenschat van niet-standaard analyse. Wat precies deze theorie is, is niet erg belangrijk voor het begrijpen van dit artikel. De lezer kan de intuïtieve betekenis van oneindig kleine taal in gedachten houden en er gerust op zijn dat niet-standaard analyse een rigoureuze basis biedt voor de concepten van het oneindig kleine en het oneindig grote. Zie (Diener en Reeb, 1989) voor een inleiding tot niet-standaard analyse. Voor meer informatie over het gebruik van niet-standaard analyse in de theorie van differentiaalvergelijkingen, zie (Cartier, 1982), (Zvonkin en Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, sectie 19.5) of (Lobry, 2018, hoofdstuk 5).

We nemen daarom aan dat de parameter  $\varepsilon$  in (4.1) oneindig klein is. De oplossing  $x(s) = 0$  is een "eend" aangezien het aantrekkelijk is voor  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  en afstotend voor  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ . Het doel is om de oplossingen van het systeem (4.1) te bestuderen die oneindig dicht bij deze oplossing liggen. Snelle dynamiek is aantrekkelijk gedurende het interval  $[\sigma_0, \sigma_1[$ . We nemen  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ . Een oplossing van het systeem (4.1) met een beginvoorwaarde in het aantrekkingsbekken van 0 gaat snel in de richting van de langzame curve  $x = 0$  en blijft er oneindig dichtbij, zolang als  $s < \sigma_1$ . De oplossing verlaat op dit moment niet de oneindig kleine buurt van 0, maar blijft de 0 over een heel interval omzeilen. Het moment  $q > \sigma_1$  waarvoor  $x(s)$  is niet langer oneindig dicht bij 0 wordt de uitgangstijd genoemd. Het doel is om de functie te bepalen  $p \mapsto q$ . We zullen laten zien dat  $q$  wordt gedefinieerd door vergelijking (4.3). Meer precies hebben we het volgende resultaat:

## Stelling

*We definiëren*

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  een beginvoorwaarde in het aantrekkingsbekken van 0 maar die niet oneindig dicht bij de invariante verscheidenheid van de snelle dynamiek komt die overeenkomt met de eigenwaarde  $\lambda_1(p)$ .
- $q$  door vergelijking (4.3).

*Dus  $\forall s \in ]p, q[$  niet oneindig dicht bij  $p$  of  $q$ , we hebben:  $x(s) \simeq 0$ . Bovendien,  $x(q)$  is niet oneindig dicht bij 0. In  $p$ ,  $x(s)$  benadert 0 langs de snelle dynamische baan*

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

*die voorbij komt  $x(p)$ . In  $q$ ,  $x(s)$  beweegt weg van 0 langs het onstabiele scheidingsteken 0 voor snelle dynamiek*

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

*Bewijs.* Men heeft  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ .  $M(s)$  is de matrix (4.2). Men heeft

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Het systeem (4.1) wordt

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

De matrix  $M(s)$  heeft twee verschillende eigenwaarden. Er is dus een omkeerbare differentieerbare matrix  $P(s)$  met

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

We transformeren vergelijking (4.5) met de verandering van variabele  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

We zetten deze vergelijking om met het vergrootglas  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$



De voorwaarden (4.4) worden gecontroleerd door  $g(s, x)$ . Dus we hebben

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

en  $g_1(s, U, \varepsilon)$  is een continue functie. Daarom hebben we

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$  is een continue functie. We definiëren de componenten van de vectoren:  $U = (U_1, U_2)$  en  $h = (h_1, h_2)$ . Het systeem wordt

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Dit systeem bestaat uit twee zwak gekoppelde vergelijkingen. De verandering van variabelen

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

verandert het systeem in

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

$k_2$  is een continue functie bij  $r = 0$  omdat  $h_1 = O(r)$  en  $h_2 = O(r)$ . We kiezen  $r_0$  met  $0 < r_0 < 1$  en zodat de bal met middelpunt 0 en straal  $r_0$  is opgenomen in het aantrekkingsgebied van de oorsprong. Pas de verandering van variabele toe  $v = \varepsilon \ln(r)$  naar de regio  $0 < r < r_0$ , die wordt verzonden naar de regio die is gedefinieerd door  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ . We krijgen het systeem:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Het is een bijzonder verstoord systeem waarvan de langzame variatie de vereniging is van de twee vlakken  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi / 2$ . Omdat  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  voor alle  $s$  is het vlak  $\theta = \pi / 2$  aantrekkelijk en het vlak  $\theta = 0$  is weerszinwekkend. Elke oplossing die het gevolg is van een punt dat niet oneindig dicht bij het afstotende vlak ligt, wordt in oneindig weinig tijd oneindig dicht bij het aantrekkelijke vlak. De oplossingen die van een punt heel dicht bij het afstotende vlak komen, kunnen lange tijd dicht bij dit vlak blijven voordat ze ervan weggaan. De stelling van Tihonov is van toepassing (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). We kiezen  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$  en  $x(p)$  een beginvoorwaarde in het aantrekkingsbekken van 0, maar die niet oneindig dicht bij de onveranderlijke verscheidenheid van de snelle dynamiek ligt

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

overeenkomend met de eigenwaarde  $\lambda_1(p)$ . De snelle dynamiek leidt de bijbehorende oplossing oneindig dichtbij 0. In het vliegtuig  $(U_1, U_2)$  het is niet oneindig dicht bij de langzame variëteit  $U_2 = 0$ , en dus van het vlak  $\theta = 0$ . Daarom nadert de oplossing snel het vlak  $\theta = \pi / 2$  en wordt dan benaderd door de oplossing van het langzame systeem

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

We leiden dat af

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Daarom hebben we weer  $r(s) = r_0$ , dat wil zeggen  $v(s)$  oneindig klein, wanneer  $s$  asymptotisch gelijk is aan  $q$  gedefinieerd door (4.3). Voor deze waarde van  $q$  is de oorsprong een zadelpunt voor snelle dynamiek

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Daarom beweegt de oplossing weg bij punt  $q$  van het zadelpunt langs zijn onstabiele scheider. We gebruiken hier dat op tijd  $p$  de oplossing niet oneindig dicht bij de langzame variant  $\theta = \pi / 2$  lag, wat het feit vertaalt dat de oplossing niet in het vliegtuig aankwam ( $U_1, U_2$ ) heel dichtbij zijn  $U_1 = 0$ . Dit beëindigt het bewijs.

Laten we teruggaan naar voorbeeld (3.2) - (3.3). We definiëren  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ . Het volgende snelle systeem, waarbij  $s$  als een parameter wordt beschouwd,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,\end{aligned}$$

heeft twee evenwichtspunten (quasi-stationaire toestanden)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  en  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  gegeven door (3.4). De Jacobiaanse matrix in  $(1, 1)$  is  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ . Zoals we al hebben gezien, zijn de twee eigenwaarden altijd verschillend, het zijn reële getallen. De twee eigenwaarden zijn negatief als en alleen als  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . Daarom is het singuliere punt  $(1, 1)$  een aantrekkelijk knooppunt voor de waarden van  $s$  waarvoor  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ , en een zadelpunt als  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . De eigenwaarden zijn  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  en  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , gegeven door (3.5).

Met  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ , krijgen we de Jacobiaanse matrix

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Men heeft

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

De eigenwaarden hebben een negatief reëel deel als en alleen als  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Daarom op de punten waar  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ , er zijn transkritische splitsingen, omdat de volgende twee evenwichten elkaar ontmoeten en hun stabiliteit uitwisselen:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  en  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ .

Men heeft

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  als  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[$  modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$  als  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[$  modulo 1.

We kunnen de stelling toepassen en de invoer-uitvoerfunctie berekenen zoals we deden in sectie 2.

## 5. Generalisatie

Deze studie strekt zich ongetwijfeld uit tot problemen met meer dan twee snelle vergelijkingen en één langzame vergelijking. Beschouw bijvoorbeeld het gelineariseerde systeem met vier snelle vergelijkingen van (Bacaër, 2007, paragraaf 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Wij nemen aan  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$ .  $\psi(\cdot) > 0$  is een periodieke functie van periode 1. Het is ook een model voor de overdracht van door vectoren overgedragen ziekten. De eerste twee componenten vertegenwoordigen de vectoren die zijn geïnfecteerd in de latente fase en in de infectieuze fase, terwijl de laatste twee componenten de geïnfecteerde personen vertegenwoordigen in de latente fase en in de infectieuze fase. Het systeem (2.1) wordt, met  $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\
\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\
\varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\
\varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s).
\end{aligned}$$

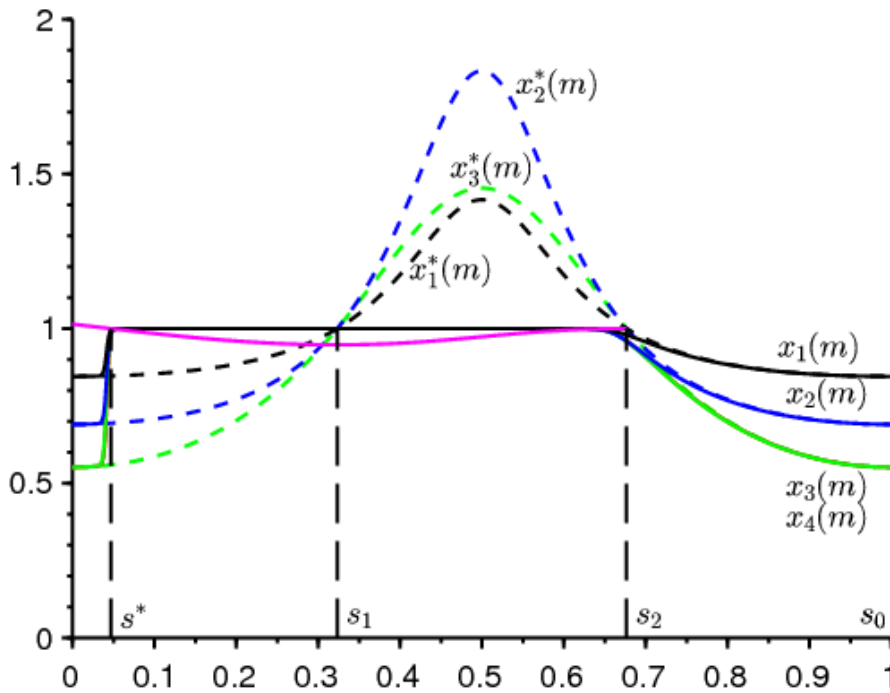
Het vermoeden is dat de input-outputfunctie wordt gegeven door formule (4.3), waar  $\lambda_2(s)$  moet worden vervangen door de dominante reële eigenwaarde  $\Lambda(s)$  van de matrix  $c(s)$ , zoals men het zou kunnen verifiëren aan de hand van een numeriek voorbeeld (Figuur 3). De parameterwaarden zijn  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ ,  $m = 3$  en  $T = 2000$ . We hebben de karakteristieke vergelijking voor de eigenwaarden  $\lambda$  van de matrix  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

We leiden dat af  $\Lambda(s) < 0$  als en alleen als

$$\frac{\beta \gamma \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

wat gebeurt er als  $s_1 < s < s_2$  met  $s_1 \simeq 0,323$  en  $s_2 \simeq 0,677$ , zoals in het numerieke voorbeeld in sectie 3 (eenvoudig toeval). Met formule (4.3) vinden we daarentegen  $s^* \simeq 0,047$ . Dit lijkt goed overeen te komen met de scherpe sprong in de kans op uitsterven in figuur 3.



Figuur 3. De extinctiekansen na  $m$  periodes  $x_1(m)$  (in het zwart),  $x_2(m)$  (in blauw) evenals  $x_3(m)$  en  $x_4(m)$  (in groen, niet te onderscheiden) afhankelijk van  $s_0$ . Gestippelde, langzame bochten. In roze hebben we een stukje van de functie getekend  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

## 5. Conclusie

In dit artikel zijn periodieke modellen voor door vectoren overgedragen ziekten als voorbeeld genomen. Maar het resultaat van paragraaf 4 is bijvoorbeeld ook van toepassing op periodieke SEIR-modellen die een ziekte met directe transmissie modelleren. In de lineaire benadering komen alleen de twee geïnfecteerde compartimenten E en I tussenbeide, die mensen in de latente fase en besmettelijke mensen vertegenwoordigen. Dit model werd gebruikt voor het begin van de coronavirusepidemie in Frankrijk (Bacaër, 2020b), maar zonder seizoensinvloeden. Evenals bij griep wordt verwacht dat

seizoensinvloeden een rol spelen bij de verspreiding van dit coronavirus. De kwestie van uitsterven zal tegen het einde van de epidemie ontstaan.

Een ander belangrijk punt dat goed te onthouden is, is dat onze resultaten over het gedrag van het systeem integralen van een eigenwaarde op intervallen omvatten. Met name de waarde van deze eigenwaarde op een bepaald moment geeft geen directe informatie over het gedrag van het systeem. Het is ook algemeen bekend in de theorie van Floquet dat een periodiek systeem op elk moment alleen negatieve eigenwaarden kan hebben en toch instabiel kan zijn. Tijdens de coronavirusepidemie hoorden we echter regelmatig aankondigingen over dagelijkse reproduceerbaarheid ( $R_0$ ), wat gewoon een andere vorm is van de momentane eigenwaarde.

## Bibliografische referenties

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal: 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi: 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal: 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi: 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal: 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal: 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay — the case of the sequence : stable focus — unstable focus — unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfer, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming — pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci., Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfer (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ». Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur — modélisation mathématique. ISTE, Londres.

- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998)  
On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems.  
Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I.  
Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II.  
Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952)  
Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées.  
Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1.  
Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2.  
Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984)  
Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations.  
Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.