

遅い周期的環境における人口の絶滅の確率について

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër¹ Claude Lobry² Tewfik Sari³

¹ Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes
Institut de Recherche pour le Développement
Les Cordeliers、パリ、フランス、nicolas.bacaer @ ird.fr

² フランス、ニース、lobrinria @ wanadoo.fr

³ ITAP、モンペリエ大学、INRAE、Institut Agro、モンペリエ、フランス、tewfik.sari @ irstea.fr

概要

係数の周期が非常に大きい場合の周期的な環境でのいくつかのタイプの出生と死亡の線形プロセスの消滅確率に興味があります。この確率は、低速で高速な動的システムのアヒルに関連する不連続性を限界まで示す可能性があります。2種類の個人の例では、不連続点を正確に特定します。

キーワード：生死プロセス、周期的環境、スローファストシステム

1.はじめに

人口の絶滅の確率の推定は、特に保全の生物学と疫学に介入する問題です。この2番目のケースでは、人口とは感染した人口を意味します。この種の問題を研究するための古典的な数学モデルは、1つ以上のタイプの個人の誕生と死の線形プロセスのモデルです (Méléard, 2016)。ただし、多くの状況では、環境の季節性を考慮に入れる必要があります。これにより、出生および死亡係数が時間の周期関数である場合にこれらのプロセスを調査できます (BacaërおよびAit Dads, 2014)。特定の母集団または特定の伝染病には、年間の季節性と比較して時間スケールが比較的短い係数があります。したがって、係数の周期が非常に大きい場合の制限を検討するように求められます。1年の一部 (好ましくない季節) に重要なパラメーターが垂臨界である場合、プロセスの開始の季節の関数としての絶滅の確率は不連続な制限に収束します (Carmona and Gandon, 2019)。不連続のポイントは、不利なシーズンの開始前です。

バカエル (2019) は本質的に単一タイプの個人の場合にこの研究を続けており、特に絶滅の確率の不連続性は「カモ」、すなわち、反発的アークを追跡する前に、一定の時間、魅力的なアークを追跡する軌道の I_e (たとえば、Lobry (2018, 第5章を参照))。ベクトル媒介性疾患の伝染のモデルに触発された2種類の個人の例を検討するために、以下を提案します。絶滅確率の不連続点を正確に決定します。この問題は未解決のままでした (Carmona and Gandon, 2019; Bacaër, 2019)。

セクション2では、人口のモデル、つまり、いくつかのタイプの個人の周期的な係数を使用した線形の誕生と死亡のプロセスのモデルを示します。絶滅の確率は常微分方程式系に関連していると説明されている。周期が無限大に収束すると、変数の変化により、このシステムは一定の周期を持つ低速のシステムに変わります。

セクション3では、2種類の個人の例を示します。数値シミュレーションは、消滅確率が不連続限界に収束し、不連続点が特定の行列の支配的な固有値の積分を含む条件によって決定されることを示唆して

います。セクション4では、非標準分析のツールを使用して、実際に不連続点を決定するのがこの条件であることを示します。

セクション5では、別の例を示します。今回は4種類の個人を使用します。数値シミュレーションは、同じタイプの条件が不連続点を決定することを示唆しています。ただし、個人のタイプの数が厳密に2より大きい場合は、これを一般的なフレームワークで実証することに成功していません。結論として、コロナウイルスの流行のケースに私たちの結果を適用する可能性について説明します。

2.モデル

私たちは、との誕生と死の線形プロセス考える k タイプ (k は、定期的な環境で ≥ 1)。 $T > 0$ は、環境の周期です。2つの行列関数を与える $A(t) = (A_{i,j}(t))$ そして $B(t) = (B_{i,j}(t))$ サイズ k と周期 T の次の仮定

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$ タイプ j の個体がタイプ i の新しい個体を生成する速度を表す
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$ タイプ j の個体がタイプ i の個体に変換する速度
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$ タイプ j の個体がタイプを変えるか死ぬ割合を表し、 $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- もし $U(t)$ システムソリューションです $dU/dt = -B(t)U(t)$ 初期状態で $U(0) = I$ (単位行列)、次に行列のスペクトル半径 $U(T)$ 、つまり主要なFloquet乗数は、 $\rho(U(T)) < 1$
- マトリックス $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ すべての t について既約です。

より正確には、(Bacaërand Ait Dads, 2014) のように、

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$ 持つ確率 N_i 時間 t におけるタイプ i の個人 ($1 \leq i \leq k$)
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ 対応するジェネレータ関数。

その後、

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

当時は t_0 有る $n_i \geq 0$ タイプ i 個人 (n_i 整数です $1 \leq i \leq k$) と $\sum_i n_i \geq 1$ 。私たちはそれを仮定することができ $0 \leq t_0 < T$ 。(Bacaërand Ait Dads, 2014) によれば、確率は $p(t_0, t_1)$ 人口はこの2番目の瞬間に絶滅している、つまり、異なるタイプの個人が残っていないということは、

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ 差動システムのソリューションです

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

初期状態で $z_i(0) = 0 \forall i$ 。

型の個体数の期待私の時間のトンのはのソリューションです

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

そして $E_i(t_0) = n_i \forall i$ 。私たちは定義します

- $V(t)$ システムソリューション $dV/dt = C(t)V(t)$ 初期状態で $V(0) = I$ 。

- $F = \rho(V(T))$ 主要なFloquet乗数。

もし $F < 1$

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

$F > 1$ の場合、この確率は厳密に1未満の限界に向かって収束します。これは、 t_0 (BacaërおよびAit Dads、2014年)。

とする

- T に関係なく、周期1の2つの周期行列関数があります。 $a(s)$ そして $b(s)$ 、

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$ 固定数です
- $t_1 = t_0 + mT$ ここで、 $m \geq 1$ は固定整数です。

私たちの目標は限界を研究することです

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

の面では s_0 、 $0 \leq s_0 < 1$ 。また、

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

これは、タイプ i の単一の個体から開始した場合に、 m 期間後に消滅する確率です。

私たちは定義します

- $\varepsilon = 1/T$ 、
- $c(s) = a(s) - b(s)$ 、
- $x(s) = z(t)$ 。

その後、

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

と $x_i(0) = 0 \forall i$ 。また、 $z(t_1 - t_0) = x(m)$ 。また、 $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$, $0 \leq s \leq m$ (BacaërおよびAit Dads、2014年)。

$T \rightarrow \infty$ に収束する場合、つまり $\varepsilon \rightarrow 0$ 、システム (2.1) は、 k 個の高速変数を持つ低速高速自律システムとして記述できます。 $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) そして遅い変数 $x_{k+1}(s) = s$ と $dx_{k+1}/ds = 1$ 。

ささいな定常解について $x_i = 1 \forall i$ 、システムの右側のヤコビ行列 (2.1) は、 $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ 。 \tilde{c} は、行列 c の転置行列を示します。対角線の外側の係数がすべて正またはゼロである既約行列のペロンとフロベニウスの定理の帰結によると (Allaire et al.、2018、remark 6.2.13)、行列 $c(s)$ そして $\tilde{c}(s)$ 共通の支配的な実固有値を持つ $\Lambda(s)$ 、他のすべての固有値の実数部分よりも厳密に大きい。

3.例

取る

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

と $\alpha(s) > 0$ 、 $\beta > 0$ 、 $\gamma > 0$ そして $\delta > 0$ 。 $\alpha(s)$ は、期間1の周期的な連続関数です。この確率モデルは、(Bacaër, 2007, Section 4.1) のベクトル病の線形化された決定論的モデルから発想を得ています。

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

感染したベクターはタイプ1です。感染した人はタイプ2です。パラメーター $\alpha(s)$ 感染した人が噛まれたときに感染をベクターに感染させる割合です。健康なベクターの個体数も一定であるため、この割合は定期的です。パラメータ β は、ベクトルが死ぬ速度です。パラメータ γ は、ベクトルが噛む速度です。パラメータ δ は、感染した人々が回復する速度です。次にシステム (2.1) が作成されます

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

次の2つのケースでは、右側が互いに打ち消し合うことに注意してください。 $x_1(s) = 1$ そして $x_2(s) = 1$ 、または

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

行列の2つの固有値 $c(s)$ 実数です：

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

支配的な固有値は $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ 。我々は持っています $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ 。

伝染病の伝染に好ましくない季節があるとしましょう。 $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$ と

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

さらにそれを仮定します

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

例として、 $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ と $\bar{\alpha} > 0$ 、 $|\kappa| < 1$ そして

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

この最後の条件は、実際に好ましくない季節があることを保証します。より具体的には、選択してみましょう $\bar{\alpha} = 3$ 、 $\kappa = 0,75$ 、 $\beta = 2$ 、 $\gamma = 1$ そして $\delta = 1$ 。これらの値はあまり現実的ではありませんが、現象を明確に示しています。その後、 $s_1 \simeq 0,323$ そして $s_2 \simeq 0,677$ 。条件 (3.8) が検証されたことを数

値で検証できます。私たちも取りましょう $T = 1000$ 、 $m = 3$ そして $s_0 = 0,25$ 。図1は、初期状態でのシステム (3.2) - (3.3) のソリューションを表しています $x_1(0) = x_2(0) = 0$ 。Scilabソフトウェアを使用し、 $\log(1 - x_1(s))$ そして $\log(1 - x_2(s))$ 。次に、初期変数に戻りました。また、1に等しい定数関数と曲線 (3.4) をプロットしました。次の点に注意してください。

- 近所で $s = 0$ 、曲線はほぼ垂直です (図には表示されていません)。
- $x_1(s)$ そして $x_2(s)$ 周期解に収束します。
- 漸近的に、 $x_1(s)$ そして $x_2(s)$ 値のために非常に近い1にしているので $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ 、特に $s \in]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ [だけでなく、 $s \in]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ と $s_2 - 1 < s^* < s_1$ 。後者の場合、 $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ 。「あひる」があります。

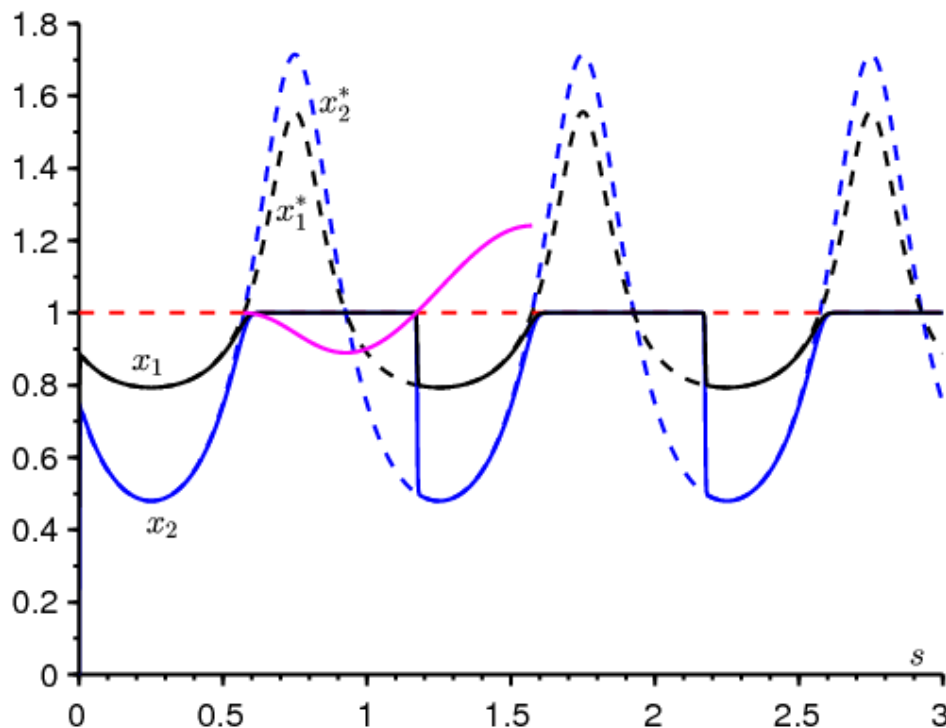


図1. s の関数としての曲線 $x_1(s)$ (黒) と $x_2(s)$ (青色) および緩やかな曲線 $x_1^*(s)$ (点線の黒)、 $x_2^*(s)$ (点線の青) と1 (点線の赤)。ピンク、機能の一部

$$s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du.$$

図2は、関心のある量、 m 期間後の消滅確率を示しています。 $x_1(m)$ そして $x_2(m)$ によって異なります s_0 . On a aussi tracé les courbes déduites de (3.4) :

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

図2は、 $x_1(m)$ そして $x_2(m)$ 収束するとき $T \rightarrow +\infty$ 、1に等しい限界に向かって $s_0 \in]s^*, s_2[$ 。 $s_0 = s^*$ 限界の不連続です。問題は、この点を決定することです。

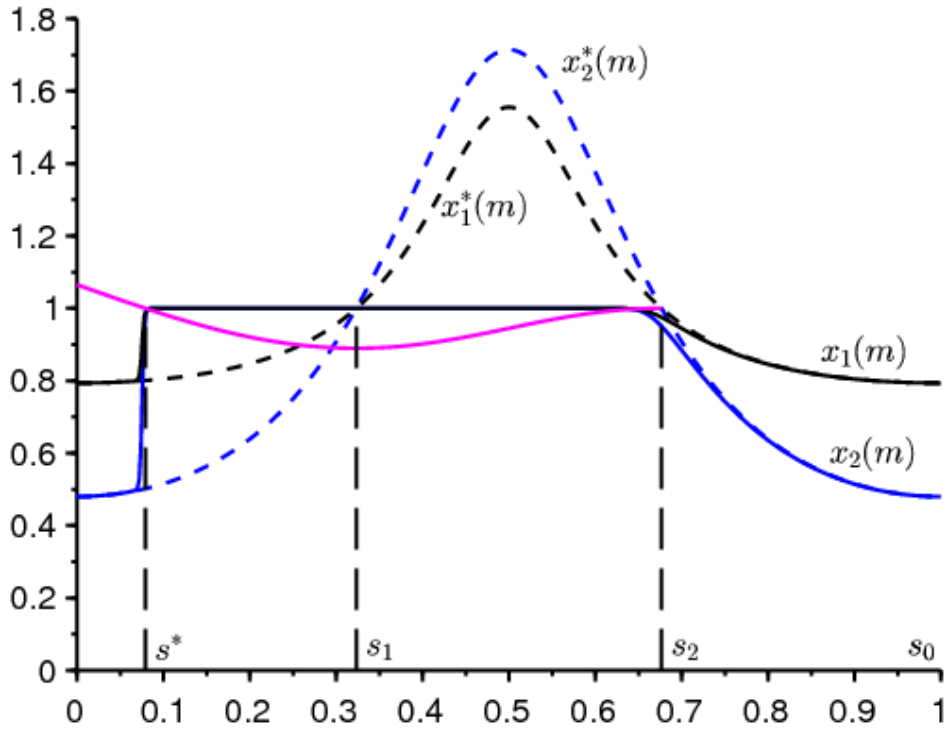


図2.後の絶滅確率 m 期間 $x_1(m)$ (黒) と $x_2(m)$ (紺色) s_0 。の式 $x_1^*(m)$ そして $x_2^*(m)$ 点線です。ピンク、機能の一部 $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^s \Lambda(s) ds$ 。

次のセクションでは、ソリューションが $x_1(s)$ そして $x_2(s)$ 図1では、1に非常に近い $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ 、突然1の近傍から逸脱します $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ と

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

つまり、これらの解は、点 $s = q$ で1の近傍から逸脱します。また、 $q = s_0 + 1 - s^*$ そして

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

決定するのはこの方程式です s^* ユニークな方法で。確かに $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ なので、

- $\phi(s_1) < 0$ 条件 (3.6) のため、
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ 条件のため (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

条件 (3.8) のため。

したがって、固有の実数があります $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ と $\phi(s^*) = 0$ 。この例では、数値的に $s^* \simeq 0,079$ 。

注意。 条件 (3.8) は、システム (3.1) の可能な超臨界特性とは関係ありません。フロケの理論でもよく知られています。確かに、例えば $c = 0,7$ の代わりに $c = 1$ 、数値的には、主要なFloquet乗数が $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ ながら $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ 。

4. トランスクリティカル分岐の入出力関数

不連続点について述べたことを正当化するために、(3.2) - (3.3) のように、2つの高速次元と1つの低速次元を持つ低速高速フィールドをより一般的に検討します。高速ダイナミクスには、2つの異なる実固有値を持つ特異点があり、そのうちの1つは常に負で、2つ目は負、次に正です。したがって、それは、急速なダイナミクスの平衡状態が安定したノードであり、次に鞍点である超臨界分岐です。

安定した特異点に近い解は、不安定になるとすぐにその近傍を離れませんが、しばらくの間その近傍にとどまります。目標は、この超臨界分岐の入出力関数を計算することです。つまり、解が特異点から離れる瞬間（出力モーメント）を、それが s' であるところから従って定義します（入り口時間）。「分岐の遅れ」という名前でも知られているこの現象は、アヒルの解決策と不安定性の概念に関連しています。

入出力関数の概念とダックソリューションの概念は、1980年代の初めに非標準の分析方法で最初に研究されました。レビュー記事を参照してください（Benoît et al.、1981; Cartier、1982; Zvonkin and Shubin、1984）。入出力関数は、最初にファンデルポールの方程式（Benoît、1981; Benoît et al.、1981）からアヒルについて計算され、その後、飛行機の低速高速システム（DienerおよびDiener、1983）。

その後、アヒルの解の存在は、漸近展開の古典的な方法（Eckhaus、1983）と特異摂動の幾何学理論（Dumortier and Roussarie、1996）によって発見されました。平面のシステムの入出力関数は、特異摂動の幾何学理論によっても得られています（De Maesschalck and Schecter、2016）。

アヒルと分岐の遅延の問題に対するフランスの非配電学校の貢献の詳細については、読者が相談できます（Cartier、1982; Fruchard and Schäfke、2008）。特異障害の理論におけるさまざまなアプローチのより完全な見方については、最近のモノグラフ（Kuehn、2015）と、アヒルに関する記事（Wechselberger、2007）を参照してください。分岐部の過度の安定性と遅延の概念については、（Benoît、1991、2015; Benoît et al.、1998; Wallet、1990、1994）とそれらに含まれる参考文献も参照してください。

次元2の遅い高速のフィールドの特定のケースは、魅力的で反発的な次元1の高速ダイナミクスでよく理解されています（Diener and Diener、1983）。2つの固有値が複素共役であり、その実部変化の符号であるHopf分岐のケースは、何人かの著者によって検討されています（Benoît、2009; Callot、1993; Diener and Diener、1995; Lobry、1992; Neishtadt、1987年、1988年、Wallet、1986年）。最近のモノグラフ（Kuehn、2015年、第12章）の完全で教育的なプレゼンテーションも参照してください。

上の差動システムを考えます $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 遅い変数で $s \in \mathbb{R}$ 2つの高速変数 $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は微分可能な関数です (s, x) 、および $\varepsilon > 0$ 無限に小さいです。非標準分析の語彙を使用します（Diener and Reeb、1989）またはLobry（2018、第5章）を参照してください。とする $f(s, 0) = 0 \forall s$ 。

$x = 0$ は、システムの遅い曲線（4.1）だけではなく、方程式の解でもあります。 $f(s, x) = 0$ だけでなく、システム特定のソリューション（4.1）。正方形行列 2×2 を定義します

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

と思う $M(s)$ 2つの異なる固有値があります。 $\lambda_1(s)$ そして $\lambda_2(s)$ そのうちの1つは常にネガティブなままで、他の変化は兆候です。と $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ 、我々は持っています：

- $\lambda_1(s) < 0$ そして $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ 、
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ そして $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in]\sigma_1, \sigma_2]$ 。

特異摂動の幾何学的理論では、拡張位相空間でシステム (4.1) を研究します。 (x, ε) 。方程式を追加します $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ 。急速なダイナミクスの一の固有値は符号を変更します。この状況は、拡張システムの中央多様体での還元により、平面内のシステムの場合に戻すことができます ((4.1) 、 $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) 平衡点で $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 。詳細については、 (Boudjellaba and Sari, 2009; Krupa and Szmolyan, 2001) を参照してください。この縮小により、符号が変化する固有値の積分によって入出力関数が与えられる平面システムが得られます (DienerおよびDiener, 1983) 。

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

この方程式では、 p は入口時間、 q は出口時間です。減少は、入出力関数が式 (4.3) によって局所的に、臨界超過分岐値の近くで与えられることを予測します。合計入出力関数を計算するために、以下のことを提案します。 (Boudjellaba and Sari, 2009) では、高速で分離されたダイナミックを備えた3次元の低速高速フィールドの特定のケースが検討されました。

非標準分析の語彙を使用します。この理論が正確に何であるかは、この記事を理解する上でそれほど重要ではありません。読者は、極小言語の直感を覚えておくことができ、非標準分析が無限に小さな概念と無限に大きな概念の厳密な基盤を提供することを理解することに慣れます。非標準分析の概要については、 (Diener and Reeb, 1989) を参照してください。微分方程式の理論における非標準分析の使用の詳細については、 (Cartier, 1982) 、 (Zvonkin and Shubin, 1984) 、 (Kuehn, 2015、セクション 19.5) または (Lobry, 2018、第5章) 。

したがって、 (4.1) のパラメーター ε は無限に小さいと仮定します。ソリューション $x(s) = 0$ それは魅力的であるため、「アヒル」です $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ (そしてのための忌避剤 $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$)。目標は、この解に限りなく近いシステムの解 (4.1) を研究することです。高速ダイナミクスはインターバル全体で魅力的です $[\sigma_0, \sigma_1[$ 。私たちは取る $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ 。引力の流域が0の初期条件を持つシステム (4.1) の解は、遅い曲線 $x = 0$ に向かって急速に進み、次の条件を満たす限り無限に近くなります。 $s < \sigma_1$ 。解は、現時点では0の極小近傍を残さず、間隔全体にわたって0を回避し続けます。瞬間 $q > \sigma_1$ そのため $x(s)$ が無限に0に近づくことはなくなり、終了時間と呼ばれます。目的は機能を決定することです $p \mapsto q$ 。 q が式 (4.3) で定義されることを示します。より正確には、次の結果が得られます。

定理

私たちは定義します

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ 引力が0の盆地にあるが、固有値に対応する高速ダイナミクスの不変の多様性に限りなく近い初期条件 $\lambda_1(p)$ 。
- 式 (4.3) による q

そう $\forall s \in]p, q[$ p または q に無限に近いわけではありません。 $x(s) \simeq 0$ 。また、 $x(q)$ は、無限に0に近いわけではありません。 p では、 $x(s)$ 高速力学軌道に沿って0に近づく

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

通り過ぎる人 $x(p)$ 。では、 Q 、 $x(s)$ 高速ダイナミクスのために、 0 の不安定なセパレーターに沿って 0 から離れる

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

証明。我々は持っています $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ 。 $M(s)$ は行列 (4.2) です。我々は持っています

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

システム (4.1) は

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

マトリックス $M(s)$ 2つの異なる固有値があります。したがって、可逆微分可能行列があります。 $P(s)$ と

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

変数を変更して式 (4.5) を変換します。 $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

この方程式を拡大鏡で変換します $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon}P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$

条件 (4.4) は、 $g(s, x)$ 。だから私たちは

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

そして $g_1(s, U, \varepsilon)$ 連続関数です。したがって、

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$ 連続関数です。ベクトルのコンポーネントを定義します。

$U = (U_1, U_2)$ そして $h = (h_1, h_2)$ 。システムは

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

このシステムは、2つの弱結合方程式で構成されています。変数の変化

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

システムを

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

と

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

$k_2 r = 0$ での連続関数です。 $h_1 = O(r)$ そして $h_2 = O(r)$ 。我々が選択しました r_0 と $0 < r_0 < 1$ そして中心 0 と半径のボールが r_0 起源の魅力の盆地に含まれています。変数の変更を適用する $v = \varepsilon \ln(r)$ 地域へ $0 < r < r_0$ によって定義された領域に送信されます $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ 。私たちはシステムを手に入れます：

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.6}$$

これは、ゆっくりと変化する2つの平面 $\theta = 0$ および $\theta = \pi/2$ の和集合である、特異的に乱されたシステムです。なぜなら $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ すべての s について、平面 $\theta = \pi/2$ は魅力的であり、平面 $\theta = 0$ は反発的です。反発平面に無限に近くない点から生じるすべての解は、無限に短い時間で魅力平面に無限に近くなります。忌避面に非常に近い点から来る解は、遠ざかる前にこの面に長時間留まることができます。ティホノフの定理が適用されます (Lobry et al.、1998; Tihonov、1952)。我々が選択しました $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ そして $x(p)$ 引力 0 の盆地にある初期条件ですが、不変の高速ダイナミクスに無限に近いわけではありません

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

固有値に対応 $\lambda_1(p)$ 。高速ダイナミクスは、対応する解を無限に 0 に近づけます。 (U_1, U_2) 遅い品種に限りなく近い $U_2 = 0$ 、したがって、平面 $\theta = 0$ の。したがって、解はすぐに平面 $\theta = \pi/2$ に近づき、遅いシステムの解で近似されます。

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

私たちはそれを推測します

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

したがって、再び $r(s) = r_0$ 、つまり $v(s)$ s が (4.3) で定義される q に漸近的に等しい場合、無限に小さい。この q の値の場合、原点は高速ダイナミクスの鞍点です

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

したがって、解は不安定なセパレーターに沿ってサドルポイントからポイント q で移動します。ここで使用したのは、時間 p で解が遅い多様体 $\theta = \pi/2$ に無限に近くないことです。これは、解が平面に到着しなかったことを変換します。 (U_1, U_2) に非常に近い $U_1 = 0$ 。これで証明は終わりです。

例 (3.2) - (3.3) に戻りましょう。私たちは定義します $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ 。次の高速システムでは、 s はパラメーターと見なされます。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

2つの平衡点があります（準定常状態） $(x_1, x_2) = (1, 1)$ そして $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ (3.4) で与えられる。 $(1, 1)$ のヤコビ行列は $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ 。すでに見てきたように、2つの固有値は常に異なり、それらは実数です。2つの固有値が負の場合は、 $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ 。したがって、特異点 $(1, 1)$ の値のための魅力的なノードであり、 S のために $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ 、そしてサドルポイント $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ 。固有値は $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ そして $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ (3.5) で与えられる。

と $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ 、ヤコビ行列を取得します

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

我々は持っています

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

固有値は、以下の場合にのみ負の実数部を持ちます $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ 。したがって、 $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ 、次の2つの平衡が満たされ、それらの安定性を交換するため、超臨界分岐があります。 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ そして $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ 。

我々は持っています

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ もし $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[\text{ modulo } 1$
- $\lambda_2(s) > 0$ もし $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[\text{ modulo } 1$ 。

セクション2で行ったように、定理を適用して入出力関数を計算できます。

5.汎化

この研究は間違いなく、2つ以上の高速方程式と1つの低速方程式の問題にまで及びます。たとえば、(Bacaër, 2007, Section 4.2) の4つの高速方程式をもつ線形化システムを考えます。

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

とする $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ 、 $\gamma > 0$ 、 $\delta > 0$ 、 $\mu > 0$ 。 $\psi(\cdot) > 0$ これは、期間1の周期関数です。これは、ベクター媒介性疾患の伝染のモデルでもあります。最初の2つのコンポーネントは潜伏期と感染期に感染したベクターを表し、最後の2つのコンポーネントは潜伏期と感染期に感染した人を表します。システム (2.1) は、 $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

推測は、入出力関数が式 (4.3) で与えられるというものです。 $\lambda_2(s)$ 支配的な実固有値で置き換える必要があります $\Lambda(s)$ マトリックスの $c(s)$ 、数値例でそれを確認することができます (図3)。パラメータ値は $\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$ 、 $\gamma = 1$ 、 $\delta = 1$ 、 $\mu = 1$ 、 $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ 、 $m = 3$ そして $T = 2000$ 。行列の固有値 λ の特性方程式があります $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

私たちはそれを推測します $\Lambda(s) < 0$ もしそうなら

$$\frac{\beta \gamma \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

どうなりますか $s_1 < s < s_2$ と $s_1 \simeq 0,323$ そして $s_2 \simeq 0,677$ 、セクション3の数値例のように (単純な一致)。一方、式 (4.3) では、 $s^* \simeq 0,047$ 。これは、図3の消滅確率の急上昇とよく一致しているようです。

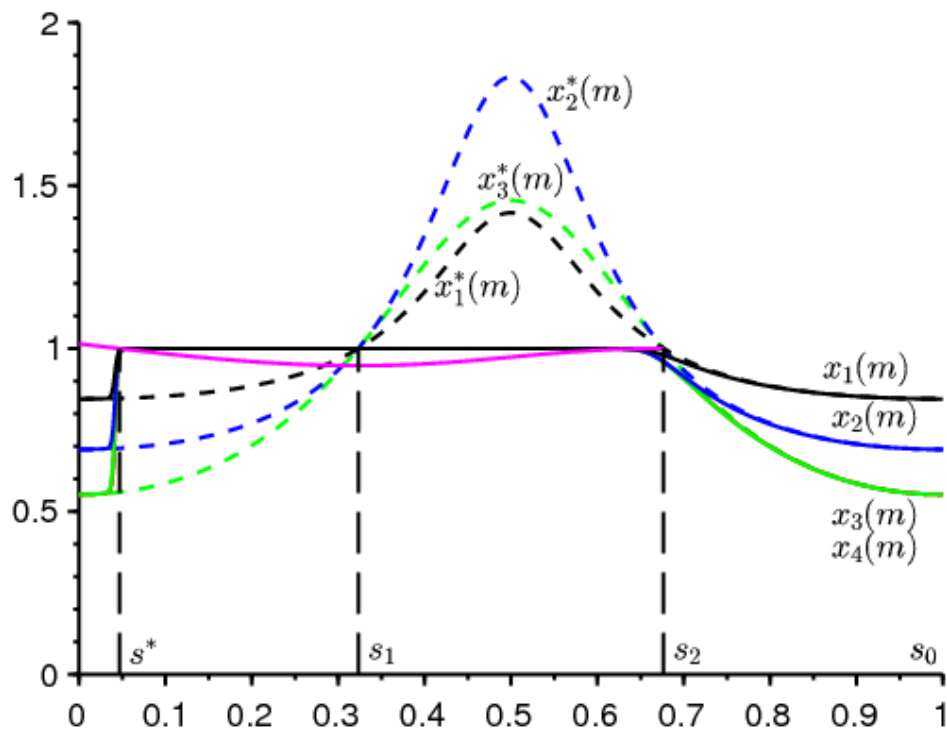


図3. m 期間後の絶滅確率 $x_1(m)$ (黒で)、 $x_2(m)$ (青) だけでなく $x_3(m)$ そして $x_4(m)$ (緑色で、区別がつかない) s_0 。点線の遅いカーブ。ピンクで、私たちは関数の一部を描きました $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ 。

5. 結論

この記事では、ベクター媒介性疾患の定期的なモデルを例として取り上げています。しかし、セクション4の結果は、たとえば、直接伝播する疾患をモデル化する定期的なSEIRモデルにも適用されます。線形近似では、潜伏期の人々と感染者を表す2つの感染した区画EとIのみが介入します。このモデルは、フランスでのコロナウイルスの流行の始まり (バカエル、2020b) に使用されましたが、季節性はありませんでした。インフルエンザと同様に、季節性がこのコロナウイルスの蔓延に役割を果たすと予想されます。絶滅の問題は、流行の終わりに向かって発生します。

覚えておくともう1つの重要な点は、システムの動作に関する私たちの結果には、区間上の固有値の積分が含まれるということです。特に、特定の時間におけるこの固有値の値は、システムの動作に関する直接的な情報を提供しません。フロケの理論では、周期系はいつでも負の固有値しか持つことができず、不安定になることもよく知られています。ただし、コロナウイルスの流行時には、毎日の再現性に関する発表が定期的に聞かれました (R_0)、これは瞬間固有値のもう1つの形式です。

参考文献

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal : 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi : 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal : 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi : 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal : 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal : 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci., Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.

- C. Lobry (1992)
A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ». *Ann. I. Fourier* 42, 327–351.
- C. Lobry (2018)
La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998)
On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. *Electron. J. Differ. Eq.* 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. *Differ. Equations Translations* 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. *Differ. Equations Translations* 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952)
Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. *Mat. Sborn.* 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. *Ann. I. Fourier* 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. *Ann. I. Fourier* 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France* 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. *Scholarpedia* 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984)
Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk* 39, 77–127.