

# Sulla probabilità di estinzione di una popolazione in un ambiente periodico lento

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes  
Institut de Recherche pour le Développement  
Les Cordeliers, Parigi, Francia, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Nizza, Francia, lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP, Università di Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Francia, tewfik.sari@irstea.fr

## riassunto

Siamo interessati alla probabilità di estinzione di un processo lineare di nascita e morte con diversi tipi in un ambiente periodico quando il periodo dei coefficienti è molto grande. Questa probabilità può presentare al limite una discontinuità correlata a un'anatra in un sistema dinamico lento-veloce. Determiniamo con precisione il punto di discontinuità in un esempio con due tipi di individui.

Parole chiave: processo di nascita e morte, ambiente periodico, sistema lento-veloce

## 1. Introduzione

La stima della probabilità di estinzione di una popolazione è una domanda che interviene in particolare nella biologia della conservazione e nell'epidemiologia. In questo secondo caso, per popolazione si intende popolazione infetta. Un modello matematico classico per studiare questo tipo di problema è quello dei processi lineari di nascita e morte con uno o più tipi di individui (Méléard, 2016). Tuttavia, in molte situazioni, la stagionalità dell'ambiente deve essere presa in considerazione, il che porta allo studio di questi processi quando i coefficienti di nascita e morte sono funzioni periodiche del tempo (Bacaër e Ait Dads, 2014). Alcune popolazioni o determinate epidemie hanno coefficienti la cui scala temporale è relativamente breve rispetto alla stagionalità annuale; siamo quindi portati a considerare il limite in cui il periodo dei coefficienti è molto grande. Quando i parametri vitali sono subcritici durante una parte dell'anno (la stagione sfavorevole), la probabilità di estinzione in funzione della stagione di avvio del processo converge a un limite discontinuo (Carmona e Gandon, 2019). Il punto di discontinuità è prima dell'inizio della stagione sfavorevole.

Bacaër (2019) aveva continuato questo studio essenzialmente nel caso di un singolo tipo di individui, rilevando in particolare che la discontinuità nella probabilità di estinzione era legata alla presenza in un sistema dinamico a lenta velocità di un "papero" », Vale a dire (vedi ad esempio Lobry (2018, capitolo 5)) di una traiettoria che segue un arco attraente per un certo tempo prima di seguire un arco repulsivo. Di seguito proponiamo di studiare un esempio con due tipi di individui ispirati a un modello di trasmissione di una malattia trasmessa da vettori. Determiniamo con precisione il punto di discontinuità della probabilità di estinzione. Questo problema era rimasto irrisolto (Carmona e Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

Nella sezione 2, presentiamo il modello per la popolazione, ovvero quello dei processi lineari di nascita e morte con coefficienti periodici con diversi tipi di individui. Si spiega che la probabilità di estinzione è correlata a un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Quando il periodo converge all'infinito, un cambiamento nella variabile trasforma questo sistema in un sistema lento-veloce con un periodo fisso.

Nella sezione 3, presentiamo un esempio con due tipi di individui. Le simulazioni numeriche suggeriscono che la probabilità di estinzione converge in un limite discontinuo e che il punto di discontinuità è determinato da una condizione che coinvolge l'integrale dell'autovalore dominante di una certa matrice. Nella sezione 4, dimostriamo con gli strumenti di analisi non standard che è proprio questa condizione a determinare il punto di discontinuità.

Nella sezione 5, presentiamo un altro esempio, questa volta con quattro tipi di individui. La simulazione numerica suggerisce che una condizione dello stesso tipo determina ancora il punto di discontinuità. Tuttavia, non siamo riusciti a dimostrarlo in un quadro generale quando il numero di tipi di individui è strettamente maggiore di due. In conclusione, discutiamo delle possibilità di applicare i nostri risultati al caso dell'epidemia di coronavirus.

## 2. Il modello

Consideriamo un processo lineare di nascita e morte con  $k$  tipi ( $k \geq 1$ ) in un ambiente periodico.  $T > 0$  è il periodo dell'ambiente. Ci diamo due funzioni di matrice  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  e  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  di dimensione  $k$  e periodo  $T$  con le seguenti ipotesi:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  rappresenta la velocità con cui gli individui di tipo  $j$  generano nuovi individui di tipo  $i$
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  è la velocità con cui gli individui di tipo  $j$  si trasformano in individui di tipo  $i$
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  rappresenta la velocità con cui gli individui di tipo  $j$  cambiano tipo o muoiono, e  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- Se  $U(t)$  è la soluzione di sistema  $dU/dt = -B(t)U(t)$  con la condizione iniziale  $U(0) = I$  (la matrice dell'identità), quindi il raggio spettrale della matrice  $U(T)$ , ovvero il moltiplicatore Floquet dominante, è  $\rho(U(T)) < 1$
- la matrice  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  è irriducibile per tutte le  $t$ .

Più precisamente, come in (Bacaër e Ait Dads, 2014), definiamo

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  la probabilità di avere  $N_i$  individui di tipo  $i$  al momento  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  la corrispondente funzione del generatore.

Abbiamo quindi

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i] [B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Si presume che al momento  $t_0$  c'è  $n_i \geq 0$  tipo  $i$  individui (il  $n_i$  sono numeri interi,  $1 \leq i \leq k$ ) con  $\sum_i n_i \geq 1$ . Possiamo supporre che  $0 \leq t_0 < T$ . Secondo (Bacaër e Ait Dads, 2014), la probabilità  $p(t_0, t_1)$  che la popolazione è estinta in questo secondo istante, vale a dire che nessun individuo dei diversi tipi rimane, è dato da

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  è la soluzione del sistema differenziale

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

con la condizione iniziale  $z_i(0) = 0 \forall i$ .

L'aspettativa del numero di individui di tipo  $i$  al momento  $t$  è una soluzione di

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

e  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ . Definiamo

- $V(t)$  la soluzione di sistema  $dV/dt = C(t)V(t)$  con la condizione iniziale  $V(0) = I$ .
- $F = \rho(V(T))$  il moltiplicatore di Floquet dominante.

Se  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow[t_1 \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Se  $F > 1$ , questa probabilità converge al contrario verso un limite strettamente inferiore a 1. È una funzione periodica di  $t_0$  (Bacaër e Ait Dads, 2014).

Assumiamo

- ci sono due funzioni di matrice periodica del periodo 1, indipendente da  $T$ ,  $a(s)$  e  $b(s)$ , con

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  è un numero fisso
- $t_1 = t_0 + mT$ , dove  $m \geq 1$  è un numero intero fisso.

Il nostro obiettivo è studiare il limite

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

in termini di  $s_0$ , con  $0 \leq s_0 < 1$ . Abbiamo anche

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

che è la probabilità di estinzione dopo  $m$  periodi a partire da un singolo individuo di tipo  $i$ .

Definiamo

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ .

Abbiamo quindi

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

con  $x_i(0) = 0 \forall i$ . Più,  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ . Abbiamo anche  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$ ,  $0 \leq s \leq m$  (Bacaër e Ait Dads, 2014).

Se  $T$  converge in  $\infty$ , in altre parole se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il sistema (2.1) può essere scritto come un sistema autonomo lento-veloce con  $k$  variabili veloci  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) e una variabile lenta  $x_{k+1}(s) = s$  con  $dx_{k+1}/ds = 1$ .

Per la banale soluzione stazionaria  $x_i = 1 \forall i$ , la matrice giacobina del lato destro del sistema (2.1) è  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ .  $\tilde{c}$  indica la matrice trasposta della matrice  $c$ . Secondo un corollario del teorema di Perron e Frobenius per le matrici irriducibili i cui coefficienti al di fuori della diagonale sono tutti positivi o zero (Allaire et al., 2018, osservazione 6.2.13), le matrici  $c(s)$  e  $\tilde{c}(s)$  hanno un autovalore reale dominante comune  $\Lambda(s)$ , rigorosamente maggiore della parte reale di tutti gli altri autovalori.

### 3. Un esempio

Prendere

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

con  $\alpha(s) > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  e  $\delta > 0$ .  $\alpha(s)$  è una funzione periodica continua del periodo 1. Questo modello stocastico si ispira al modello deterministico linearizzato per una malattia vettoriale di (Bacaër, 2007, Sezione 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

I vettori infetti sono di tipo 1. Le persone infette sono di tipo 2. Il parametro  $\alpha(s)$  è la velocità con cui le persone infette trasmettono la loro infezione ai vettori quando vengono morse. Questo tasso è periodico perché lo è anche la popolazione di vettori sani. Il parametro  $\beta$  è la velocità con cui muoiono i vettori. Il parametro  $\gamma$  è la velocità con cui mordono i vettori. Il parametro  $\delta$  è la velocità con cui le persone infette guariscono. Il sistema (2.1) viene quindi scritto

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Si noti che i lati di destra si annullano a vicenda in due casi:  $x_1(s) = 1$  e  $x_2(s) = 1$ , o

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

I due autovalori della matrice  $c(s)$  sono numeri reali:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

L'autovalore dominante è  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ . abbiamo  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ .

Supponiamo che ci sia una stagione sfavorevole per la trasmissione dell'epidemia, vale a dire  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  con

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Supponiamo inoltre che

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Ad esempio, prendiamo  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  con  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $|\kappa| < 1$  e

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Quest'ultima condizione assicura che ci sia davvero una stagione sfavorevole. Più specificamente, scegliamo  $\bar{\alpha} = 3$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 1$ . Questi valori non sono molto realistici ma dimostrano chiaramente il fenomeno. Abbiamo quindi  $s_1 \simeq 0,323$  e  $s_2 \simeq 0,677$ . Possiamo verificare numericamente che la condizione (3.8) sia verificata. Prendiamo anche noi  $T = 1000$ ,  $m = 3$  e  $s_0 = 0,25$ . La Figura 1 rappresenta la soluzione del sistema (3.2) - (3.3) con la condizione iniziale  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Abbiamo usato il software Scilab e risolto il sistema differenziale per  $\log(1 - x_1(s))$  e  $\log(1 - x_2(s))$ . Quindi siamo tornati alle variabili iniziali. Abbiamo anche tracciato la funzione costante uguale a 1 e le curve (3.4). Nota quanto segue:

- nel quartiere di  $s = 0$ , le curve sono quasi verticali (non visibili nelle figure);
- $x_1(s)$  e  $x_2(s)$  convergere in una soluzione periodica;
- asintoticamente,  $x_1(s)$  e  $x_2(s)$  sono molto vicini a 1 per i valori di  $s$  con  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ , specialmente per  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ , ma anche per  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  con  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ . In quest'ultimo caso, abbiamo  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . C'è un'anatra.

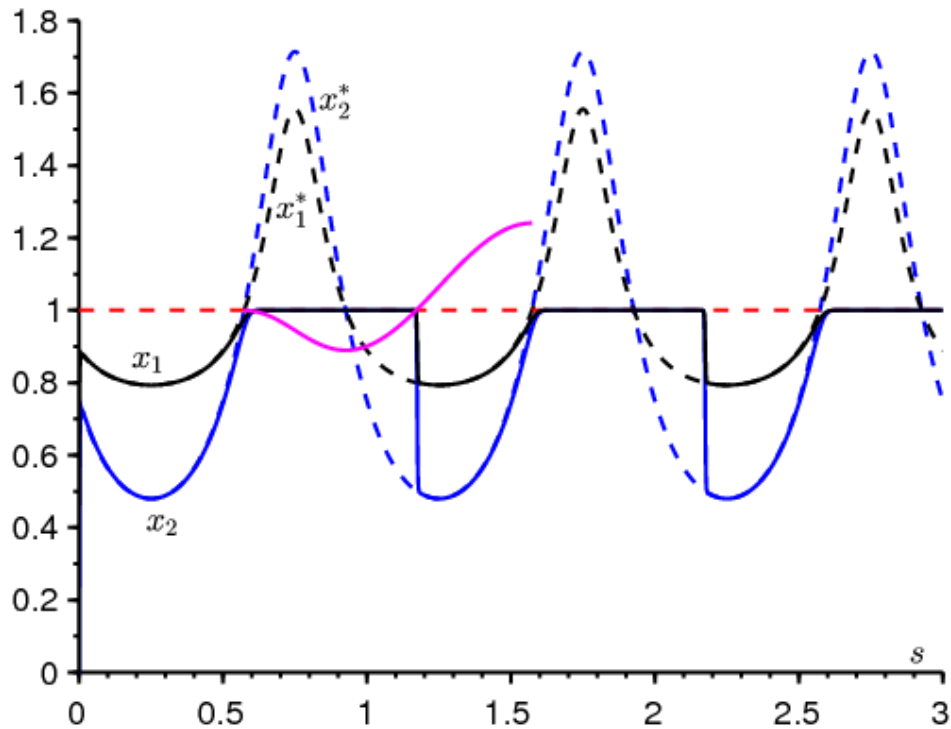


Figura 1. In funzione di  $s$ , le curve  $x_1(s)$  (in nero) e  $x_2(s)$  (in blu) e curve lente  $x_1^*(s)$  (nero punteggiato),  $x_2^*(s)$  (punteggiato di blu) e 1 (punteggiato di rosso). In rosa, un pezzo della funzione  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ .

La Figura 2 mostra come le quantità che ci interessano, le probabilità di estinzione dopo  $m$  periodi  $x_1(m)$  e  $x_2(m)$ , varia in base a  $s_0$ . Abbiamo anche tracciato le curve dedotte da (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

La Figura 2 suggerisce questo  $x_1(m)$  e  $x_2(m)$  convergere, quando  $T \rightarrow +\infty$ , verso limiti pari a 1 se  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ .  $s_0 = s^*$  è una discontinuità di limiti. Il problema è determinare questo punto.

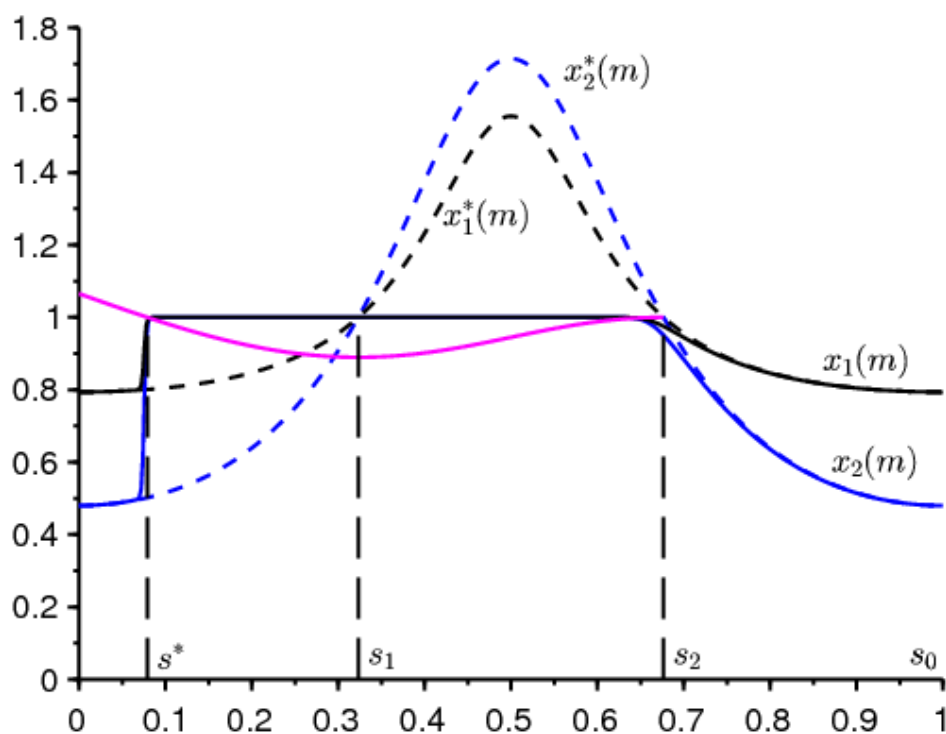


Figura 2. Le probabilità di estinzione dopo  $m$  periodi  $x_1(m)$  (in nero) e  $x_2(m)$  (in blu scuro) a seconda di  $s_0$ . Le formule per  $x_1^*(m)$  e  $x_2^*(m)$  sono punteggiate. In rosa, un pezzo della funzione  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

Dimostreremo nella sezione seguente che le soluzioni  $x_1(s)$  e  $x_2(s)$  in Figura 1, che sono molto vicini a 1 per  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , improvvisamente deviare dal quartiere di 1 per  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  con

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

In altre parole, queste soluzioni si discostano dal vicinato di 1 in un punto  $s = q$ . Più,  $q = s_0 + 1 - s^*$  e

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

È questa equazione che determina  $s^*$  in un modo unico. Anzi, se  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ , quindi abbiamo

- $\phi(s_1) < 0$  a causa della condizione (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  a causa della condizione (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

a causa della condizione (3.8).

Esiste quindi un numero reale univoco  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  con  $\phi(s^*) = 0$ . Nell'esempio, troviamo numericamente  $s^* \simeq 0,079$ .

**Nota.** La condizione (3.8) non ha alcun legame con un possibile carattere supercritico del sistema (3.1). È anche ben noto nella teoria di Floquet. Anzi, se prendiamo ad esempio  $c = 0,7$  invece di  $c = 1$ , troviamo numericamente che il moltiplicatore Floquet dominante è  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  mentre  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ .

#### 4. La funzione input-output per una biforcazione transcritica

Per giustificare ciò che è stato appena detto riguardo al punto di discontinuità, generalmente consideriamo un campo lento-veloce con due dimensioni veloci e una dimensione lenta, come (3.2) - (3.3). Si suppone che la dinamica veloce abbia un punto singolare con due autovalori reali distinti di cui uno è sempre negativo e il secondo è negativo quindi positivo. È quindi una biforcazione transcritica in cui lo stato di equilibrio della dinamica rapida è un nodo stabile quindi un punto di sella.

Una soluzione vicina al punto singolare stabile non lascerà il suo vicinato non appena diventa instabile, ma continuerà a stargli vicino per qualche tempo. L'obiettivo è calcolare la funzione input-output per questa biforcazione transcritica, vale a dire definire il momento in cui la soluzione si allontana dal punto singolare (momento di output), in base a quello in cui è 'viene avvicinato (orario di entrata). Questo fenomeno noto sotto il nome di "ritardo nella biforcazione" è legato alla nozione di soluzioni di anatre e di sovrastabilità.

La nozione di funzione input-output e il concetto di soluzione duck sono stati studiati per la prima volta all'inizio degli anni '80 con metodi di analisi non standard. Vedi gli articoli di recensione (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin e Shubin, 1984). La funzione input-output è stata inizialmente calcolata per le anatre dall'equazione di Van der Pol (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) e quindi estesa a qualsiasi sistema lento dell'aereo (Diener e Diener, 1983).

Più tardi, l'esistenza di soluzioni di anatre fu trovata con i metodi classici di espansioni asintotiche (Eckhaus, 1983) e dalla teoria geometrica delle perturbazioni singolari (Dumortier e Roussarie, 1996). La funzione input-output per un sistema del piano è stata ottenuta anche dalla teoria geometrica delle perturbazioni singolari (De Maesschalck e Schecter, 2016).

Per maggiori dettagli sul contributo della scuola francese non centralizzata al problema delle anatre e sul ritardo della biforcazione, il lettore può consultare (Cartier, 1982; Fruchard e Schäfke, 2008). Per una visione più completa dei vari approcci nella teoria dei disturbi singolari, vedere la recente monografia (Kuehn, 2015) e l'articolo (Wechselberger, 2007) dedicato alle anatre. Per la nozione di overstability e ritardo alla biforcazione, vedere anche (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Wallet, 1990, 1994) e i riferimenti che contengono.

Il caso particolare di un campo lento-veloce nella dimensione due, con una dinamica veloce della dimensione uno che è attraente quindi ripugnante, è ben compreso, vedi (Diener and Diener, 1983). Il caso della biforcazione di Hopf, in cui due autovalori sono coniugati complessi e la loro parte reale cambia segno, è stato preso in considerazione da diversi autori, vedi (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener and Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Vedi anche la presentazione completa ed educativa nella recente monografia (Kuehn, 2015, capitolo 12).

Considera un sistema differenziale acceso  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  con una variabile lenta  $s \in \mathbb{R}$  e con due variabili veloci  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una funzione differenziabile in  $(s, x)$ , e  $\varepsilon > 0$  è infinitamente piccolo. Usiamo il vocabolario di analisi non standard, vedi (Diener and Reeb, 1989) o Lobry (2018, capitolo 5). Assumiamo  $f(s, 0) = 0 \forall s$ .

$x = 0$  non è solo una curva lenta del sistema (4.1), ovvero una soluzione dell'equazione  $f(s, x) = 0$ , ma anche una soluzione particolare del sistema (4.1). Definiamo la matrice quadrata  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Supponiamo che  $M(s)$  ha due autovalori distinti,  $\lambda_1(s)$  e  $\lambda_2(s)$  uno dei quali rimane sempre negativo e l'altro cambia segno. Con  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ , noi abbiamo :

- $\lambda_1(s) < 0$  e  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  e  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ .

Nella teoria geometrica delle perturbazioni singolari studiamo il sistema (4.1) nello spazio delle fasi estese  $(x, \varepsilon)$ . Aggiungiamo l'equazione  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ . Un singolo autovalore della dinamica rapida cambia segno. Questa situazione può essere ricondotta al caso dei sistemi nel piano, mediante riduzione sul collettore centrale del sistema aumentato ((4.1),  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) al suo punto di equilibrio  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ . Per maggiori dettagli vedere (Boudjellaba e Sari, 2009;

Krupa e Szmolyan, 2001). Con questa riduzione, otteniamo un sistema piano la cui funzione input-output è data dall'integrale dell'autovalore che cambia segno (Diener and Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

In questa equazione  $p$  è il tempo di entrata e  $q$  è il tempo di uscita. La riduzione prevede che la funzione input-output sia data dalla formula (4.3) localmente, vicino al valore di biforcazione transcritica. Proponiamo di seguito per calcolare la funzione totale input-output. È stato preso in considerazione il caso particolare di un campo lento-veloce nella dimensione tre con una dinamica di disaccoppiamento rapido (Boudjellaba e Sari, 2009).

Usiamo il vocabolario di analisi non standard. Che cosa sia esattamente questa teoria non è molto importante per la comprensione di questo articolo. Il lettore può tenere presente il significato intuitivo del linguaggio infinitesimale e trarre conforto dal sapere che l'analisi non standard fornisce una base rigorosa per i concetti di infinitamente piccolo e infinitamente grande. Per un'introduzione all'analisi non standard, vedi (Diener and Reeb, 1989). Per ulteriori informazioni sull'uso dell'analisi non standard nella teoria delle equazioni differenziali, vedere (Cartier, 1982), (Zvonkin e Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, sezione 19.5) o (Lobry, 2018, Capitolo 5).

Partiamo quindi dal presupposto che il parametro  $\varepsilon$  in (4.1) sia infinitamente piccolo. La soluzione  $x(s) = 0$  è un'anatra poiché è attrattiva per  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  e repellente per  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ . L'obiettivo è studiare le soluzioni del sistema (4.1) che sono infinitamente vicine a questa soluzione. Le dinamiche veloci sono interessanti nell'intervallo  $[\sigma_0, \sigma_1[$ . Prendiamo  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ . Una soluzione del sistema (4.1) con una condizione iniziale nel bacino di attrazione di 0 va rapidamente verso la curva lenta  $x = 0$  e rimane infinitamente vicina ad essa fintanto che  $s < \sigma_1$ . La soluzione non lascia il vicinato infinitesimale di 0 in questo momento, ma continua a evitare lo 0 per un intero intervallo. Il momento  $q > \sigma_1$  per cui  $x(s)$  non è più infinitamente vicino a 0 è chiamato il tempo di uscita. L'obiettivo è determinare la funzione  $p \mapsto q$ . Mostreremo che  $q$  è definito dall'equazione (4.3). Più precisamente, abbiamo il seguente risultato:

### Teorema

#### Definiamo

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  una condizione iniziale situata nel bacino di attrazione di 0 ma che non è infinitamente vicina alla varietà invariante della dinamica veloce corrispondente all'autovalore  $\lambda_1(p)$ .
- $q$  per equazione (4.3).

Allora  $\forall s \in ]p, q[$  non infinitamente vicino a  $p$  o  $q$ , abbiamo:  $x(s) \simeq 0$ . Più,  $x(q)$  non è infinitamente vicino a 0. In  $p$ ,  $x(s)$  si avvicina a 0 lungo l'orbita della dinamica rapida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

chi passa  $x(p)$ . In  $q$ ,  $x(s)$  si allontana da 0 lungo il separatore instabile di 0 per una dinamica veloce

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Prova . abbiamo  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ .  $M(s)$  è la matrice (4.2). abbiamo

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Il sistema (4.1) diventa

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

La matrice  $M(s)$  ha due autovalori distinti. Esiste quindi una matrice differenziabile invertibile  $P(s)$  con

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$



Trasformiamo l'equazione (4.5) con il cambio di variabile  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Trasformiamo questa equazione con la lente d'ingrandimento  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon}P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$

Le condizioni (4.4) sono verificate da  $g(s, x)$ . Quindi abbiamo

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

e  $g_1(s, U, \varepsilon)$  è una funzione continua. Pertanto, abbiamo

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$  è una funzione continua. Definiamo i componenti dei vettori:  $U = (U_1, U_2)$  e  $h = (h_1, h_2)$ . Il sistema diventa

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Questo sistema è composto da due equazioni debolmente accoppiate. Il cambiamento delle variabili

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

trasforma il sistema in

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

$k_2$  è una funzione continua a  $r = 0$  perché  $h_1 = O(r)$  e  $h_2 = O(r)$ . Noi scegliamo  $r_0$  con  $0 < r_0 < 1$  e in modo che la palla con centro 0 e raggio  $r_0$  è incluso nel bacino di attrazione dell'origine. Applica il cambio di variabile  $v = \varepsilon \ln(r)$  alla regione  $0 < r < r_0$ , che viene inviato alla regione definita da  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ . Otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.6}$$

È un sistema singolarmente disturbato la cui varietà lenta è l'unione dei due piani  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ . Perché  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  per tutti  $s$ , il piano  $\theta = \pi/2$  è attraente e il piano  $\theta = 0$  è repulsivo. Qualsiasi soluzione risultante da un punto non infinitamente vicino al piano repulsivo diventa infinitamente vicina al piano attraente in un tempo infinitamente piccolo. Le soluzioni che arrivano da un punto molto vicino al piano repellente possono rimanere vicine a questo piano per molto tempo prima di allontanarsi da esso. Si applica il teorema di Tihonov (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Noi scegliamo  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$  e  $x(p)$  una condizione iniziale situata nel bacino di attrazione di 0, ma che non è infinitamente vicina alla varietà invariante della dinamica veloce

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

corrispondente all'autovalore  $\lambda_1(p)$ . La dinamica veloce porta la soluzione corrispondente infinitamente vicino a 0. Nel piano  $(U_1, U_2)$  non è infinitamente vicino alla varietà lenta  $U_2 = 0$ , e quindi del piano  $\theta = 0$ . Pertanto la

soluzione si avvicina rapidamente al piano  $\theta = \pi / 2$ , quindi viene approssimata dalla soluzione del sistema lento

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Lo deduciamo

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Pertanto abbiamo di nuovo  $r(s) = r_0$ , cioè  $v(s)$  infinitamente piccolo, quando  $s$  è asintoticamente uguale a  $q$  definito da (4.3). Per questo valore di  $q$ , l'origine è un punto di sella per una dinamica rapida

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Pertanto, la soluzione si allontana nel punto  $q$  dal punto della sella lungo il suo separatore instabile. Abbiamo usato qui che al tempo  $p$  la soluzione non era infinitamente vicina alla varietà lenta  $\theta = \pi / 2$ , che traduce il fatto che la soluzione non è arrivata sul piano  $(U_1, U_2)$  essere molto vicino a  $U_1 = 0$ . Questo termina la prova.

Torniamo all'esempio (3.2) - (3.3). Definiamo  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ . Il seguente sistema veloce, in cui  $s$  è considerato un parametro,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

ha due punti di equilibrio (stati quasi stazionari)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  e  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  dato da (3.4). La matrice giacobina in  $(1, 1)$  è  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ . Come abbiamo già visto, i due autovalori sono sempre distinti, sono numeri reali. I due autovalori sono negativi se e solo se  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . Pertanto il punto singolare  $(1, 1)$  è un nodo attraente per i valori di  $s$  per i quali  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$  e un punto di sella se  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Gli autovalori sono  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  e  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , dato da (3.5).

Con  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ , otteniamo la matrice giacobina

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

abbiamo

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Gli autovalori hanno una parte reale negativa se e solo se  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Pertanto, nei punti in cui  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ , ci sono biforcazioni transcritiche, perché i seguenti due equilibri si incontrano e si scambiano le loro stabilità:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  e  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ .

abbiamo

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  Se  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[$  modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$  Se  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[$  modulo 1.

Possiamo applicare il teorema e calcolare la funzione input-output come abbiamo fatto nella sezione 2.

## 5. Generalizzazione

Questo studio si estende senza dubbio a problemi con più di due equazioni veloci e un'equazione lenta. Consideriamo ad esempio il sistema linearizzato con quattro equazioni veloci di (Bacăr, 2007, Sezione 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Assumiamo  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$ .  $\psi(\cdot) > 0$  è una funzione periodica del periodo 1. È anche un modello per la trasmissione di malattie trasmesse da vettori. I primi due componenti rappresentano i vettori infetti nella fase latente e nella fase infettiva, mentre gli ultimi due componenti rappresentano le persone infette nella fase latente e nella fase infettiva. Il sistema (2.1) diventa, con  $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

La congettura è che la funzione input-output è data dalla formula (4.3), dove  $\lambda_2(s)$  deve essere sostituito dall'autovalore reale dominante  $\Lambda(s)$  della matrice  $c(s)$ , come è possibile verificarlo su un esempio numerico (Figura 3). I valori dei parametri sono  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s)), m = 3$  e  $T = 2000$ . Abbiamo l'equazione caratteristica per gli autovalori  $\lambda$  della matrice  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

Lo deduciamo  $\Lambda(s) < 0$  se e solo se

$$\frac{\beta \gamma \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

cosa succede se  $s_1 < s < s_2$  con  $s_1 \simeq 0,323$  e  $s_2 \simeq 0,677$ , come nell'esempio numerico della sezione 3 (coincidenza semplice). Con la formula (4.3) troviamo invece  $s^* \simeq 0,047$ . Ciò sembra corrispondere bene al brusco salto nella probabilità di estinzione in Figura 3.

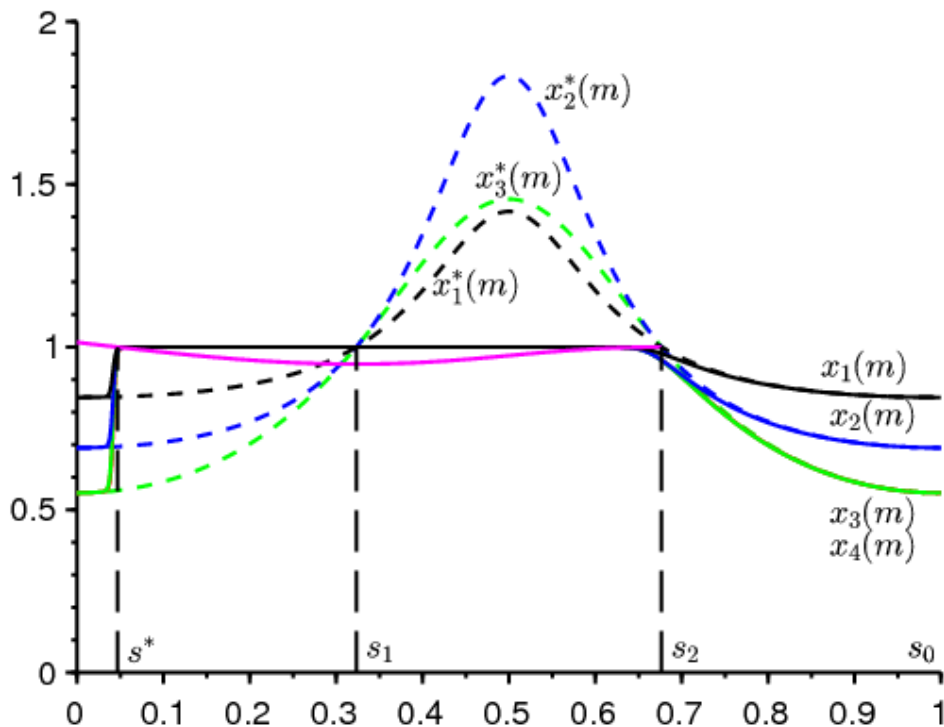


Figura 3. Le probabilità di estinzione dopo  $m$  periodi  $x_1(m)$  (in nero),  $x_2(m)$  (in blu) e  $x_3(m)$  e  $x_4(m)$  (in verde, indistinguibile) a seconda  $s_0$ . Curve tratteggiate e lente. In rosa, abbiamo disegnato un pezzo della funzione  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

## 5. conclusione

In questo articolo, sono stati presi esempi di modelli periodici di malattie trasmesse da vettori. Ma il risultato della sezione 4 si applica, ad esempio, anche ai modelli periodici SEIR che modellano una malattia con trasmissione diretta. Nell'approssimazione lineare, intervengono solo i due compartimenti infetti E e I, che rappresentano le persone in fase latente e le persone infettive. Questo modello è stato utilizzato per l'inizio dell'epidemia di coronavirus in Francia (Bacaër, 2020b), ma senza la stagionalità. Come per l'influenza, la stagionalità dovrebbe comunque avere un ruolo nella diffusione di questo coronavirus. La questione dell'estinzione sorgerà verso la fine dell'epidemia.

Un altro punto importante che è bene ricordare è che i nostri risultati sul comportamento del sistema coinvolgono integrali di un autovalore su intervalli. In particolare, il valore di questo autovalore in un determinato momento non fornisce informazioni dirette sul comportamento del sistema. È anche noto nella teoria di Floquet che un sistema periodico può avere solo autovalori negativi in qualsiasi momento e tuttavia essere instabile. Tuttavia, durante l'epidemia di coronavirus, abbiamo regolarmente ascoltato annunci riguardanti la riproducibilità quotidiana ( $R_0$ ), che è solo un'altra forma di autovalore istantaneo.

## Riferimenti bibliografici

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal: 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi : 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal : 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi : 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal : 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal : 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.

- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. *C. R. Acad. Sci., Série I* 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, *Nonstandard Analysis in Practice*, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) *Analyse non standard*. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) *Canard Cycles and Center Manifolds*. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. *Asymptotic Analysis II*, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, *ARIMA* 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, *Nonlinearity* 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) *Multiple Time Scale Dynamics*. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ». *Ann. I. Fourier* 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) *La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. *Electron. J. Differ. Eq.* 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. *Differ. Equations Translations* 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. *Differ. Equations Translations* 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. *Mat. Sborn.* 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. *Ann. I. Fourier* 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. *Ann. I. Fourier* 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France* 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. *Scholarpedia* 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk* 39, 77–127.