

Sobre la probabilidad de extinción de una población en un entorno periódico lento

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër¹ Claude Lobry² Tewfik Sari³

¹ Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes
Institut de Recherche pour le Développement
Les Cordeliers, Paris, Francia, nicolas.bacaer@ird.fr

² Niza, Francia, lobrinria@wanadoo.fr

³ ITAP, Universidad de Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Francia, tewfik.sari@irstea.fr

resumen

Estamos interesados en la probabilidad de extinción de un proceso lineal de nacimiento y muerte con varios tipos en un entorno periódico cuando el período de los coeficientes es muy grande. Esta probabilidad puede presentar en el límite una discontinuidad relacionada con un pato en un sistema dinámico lento-rápido. Determinamos con precisión el punto de discontinuidad en un ejemplo con dos tipos de individuos.

Palabras clave: proceso de nacimiento y muerte, ambiente periódico, sistema lento-rápido.

1. Introducción

La estimación de la probabilidad de extinción de una población es una cuestión que interviene en particular en biología de la conservación y en epidemiología. En este segundo caso, por población se entiende población infectada. Un modelo matemático clásico para estudiar este tipo de problema es el de los procesos lineales de nacimiento y muerte con uno o más tipos de individuos (Méléard, 2016). Sin embargo, en muchas situaciones, debe tenerse en cuenta la estacionalidad del medio ambiente, lo que conduce al estudio de estos procesos cuando los coeficientes de nacimiento y muerte son funciones periódicas del tiempo (Bacaër y Ait Dads, 2014). Ciertas poblaciones o ciertas epidemias tienen coeficientes cuya escala de tiempo es relativamente corta en comparación con la estacionalidad anual; Por lo tanto, se nos lleva a considerar el límite donde el período de los coeficientes es muy grande. Cuando los parámetros vitales son subcríticos durante parte del año (la temporada desfavorable), la probabilidad de extinción en función de la temporada de inicio del proceso converge en un límite discontinuo (Carmona y Gandon, 2019). El punto de discontinuidad es antes del comienzo de la temporada desfavorable.

Bacaër (2019) había continuado este estudio esencialmente en el caso de un solo tipo de individuos, señalando en particular que la discontinuidad en la probabilidad de extinción estaba vinculada a la presencia en un sistema dinámico lento-rápido de un "pato" ». Es decir (véase, por ejemplo, Lobry (2018, capítulo 5)) de una trayectoria que sigue un arco atractivo durante un cierto tiempo antes de seguir un arco repulsivo. Proponemos a continuación para estudiar un ejemplo con dos tipos de individuos inspirados en un modelo de transmisión de una enfermedad transmitida por vectores. Determinamos con precisión el punto de discontinuidad de la probabilidad de extinción. Este problema había quedado sin resolver (Carmona y Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

En la sección 2, presentamos el modelo para la población, a saber, el de los procesos lineales de nacimiento y muerte con coeficientes periódicos con varios tipos de individuos. Se explica que la probabilidad de extinción está relacionada con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cuando el período converge al infinito, un cambio en la variable convierte este sistema en un sistema lento-rápido con un período fijo.

En la sección 3, presentamos un ejemplo con dos tipos de individuos. Las simulaciones numéricas sugieren que la probabilidad de extinción converge a un límite discontinuo y que el punto de discontinuidad está determinado por una condición que involucra la integral del valor propio dominante de una matriz determinada. En la sección 4, demostramos con las herramientas de análisis no estándar que es esta condición la que determina el punto de discontinuidad.

En la sección 5, presentamos otro ejemplo, esta vez con cuatro tipos de individuos. La simulación numérica sugiere que una condición del mismo tipo aún determina el punto de discontinuidad. Sin embargo, no hemos logrado demostrar esto en un marco general cuando el número de tipos de individuos es estrictamente mayor que dos. En la conclusión, discutimos las posibilidades de aplicar nuestros resultados al caso de la epidemia de coronavirus.

2. El modelo

Consideramos un proceso lineal de nacimiento y muerte con k tipos ($k \geq 1$) en un entorno periódico. $T > 0$ es el período del medio ambiente. Nos damos dos funciones matriciales $A(t) = (A_{i,j}(t))$ y $B(t) = (B_{i,j}(t))$ de tamaño k y período T con los siguientes supuestos:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$ representa la tasa a la cual los individuos del tipo j generan nuevos individuos del tipo i
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$ es la velocidad a la que los individuos de tipo j se transforman en individuos de tipo i
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$ representa la velocidad a la que los individuos de tipo j cambian de tipo o mueren, y $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- Si $U(t)$ es la solución del sistema $dU/dt = -B(t)U(t)$ con la condición inicial $U(0) = I$ (la matriz de identidad), luego el radio espectral de la matriz $U(T)$, es decir, el multiplicador de Floquet dominante, es $\rho(U(T)) < 1$
- la matriz $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ es irreducible para todo t .

Más precisamente, como en (Bacaër y Ait Dads, 2014), definimos

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$ la probabilidad de tener N_i individuos de tipo i en el tiempo t ($1 \leq i \leq k$)
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ La función del generador correspondiente.

Entonces tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i] [B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t) Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Se supone que en ese momento t_0 hay $n_i \geq 0$ individuos tipo i (el n_i son enteros $1 \leq i \leq k$) con $\sum_i n_i \geq 1$. Podemos suponer que $0 \leq t_0 < T$. Según (Bacaër y Ait Dads, 2014), la probabilidad $p(t_0, t_1)$ que la población se extingue en este segundo instante, es decir que no queda ningún individuo de los diferentes tipos, está dada por

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ es la solución del sistema diferencial

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

con la condición inicial $z_i(0) = 0 \forall i$.

La expectativa del número de individuos de tipo i en el tiempo t es una solución de

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

y $E_i(t_0) = n_i \forall i$. Definimos

- $V(t)$ la solución del sistema $dV/dt = C(t)V(t)$ con la condición inicial $V(0) = I$.
- $F = \rho(V(T))$ El multiplicador de Floquet dominante.

Si $F \leq 1$,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Si $F > 1$, esta probabilidad converge por el contrario hacia un límite estrictamente inferior a 1. Es una función periódica de t_0 (Bacaër y Ait Dads, 2014).

Asumimos

- Hay dos funciones de matriz periódicas del período 1, independientes de T , $a(s)$ y $b(s)$, con

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$ es un número fijo
- $t_1 = t_0 + mT$, donde $m \geq 1$ es un entero fijo.

Nuestro objetivo es estudiar el límite.

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

en función de s_0 , con $0 \leq s_0 < 1$. También tenemos

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

cuál es la probabilidad de extinción después de m períodos cuando se comienza con un solo individuo de tipo i .

Definimos

- $\varepsilon = 1/T$,
- $c(s) = a(s) - b(s)$,
- $x(s) = z(t)$.

Entonces tenemos

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s)x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

con $x_i(0) = 0 \forall i$. De más, $z(t_1 - t_0) = x(m)$. También tenemos $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$, $0 \leq s \leq m$ (Bacaër y Ait Dads, 2014).

Si T converge a ∞ , en otras palabras si $\varepsilon \rightarrow 0$, el sistema (2.1) se puede escribir como un sistema autónomo lento-rápido con k variables rápidas $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) y una variable lenta $x_{k+1}(s) = s$ con $dx_{k+1}/ds = 1$.

Para la solución estacionaria trivial $x_i = 1 \forall i$, la matriz jacobiana del lado derecho del sistema (2.1) es $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. \tilde{c} denota la matriz transpuesta de la matriz c . De acuerdo con un corolario del teorema de Perron y Frobenius para matrices irreducibles cuyos coeficientes fuera de la diagonal son todos positivos o cero (Allaire et al., 2018, observación 6.2.13), las matrices $c(s)$ y $\tilde{c}(s)$ tener un valor propio real dominante común $\Lambda(s)$, estrictamente mayor que la parte real de todos los demás valores propios.

3. Un ejemplo

Tomar

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

con $\alpha(s) > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ y $\delta > 0$. $\alpha(s)$ es una función periódica continua del período 1. Este modelo estocástico está inspirado en el modelo determinista linealizado para una enfermedad vectorial de (Bacaër, 2007, Sección 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Los vectores infectados son de tipo 1. Las personas infectadas son de tipo 2. El parámetro $\alpha(s)$ es la velocidad a la que las personas infectadas transmiten su infección a los vectores cuando son mordidas. Esta tasa es periódica porque la población de vectores sanos también lo es. El parámetro β es la velocidad a la que mueren los vectores. El parámetro γ es la velocidad a la que pican los vectores. El parámetro δ es la velocidad a la que las personas infectadas se recuperan. Luego se escribe el sistema (2.1)

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Tenga en cuenta que los lados derechos se cancelan entre sí en dos casos: $x_1(s) = 1$ y $x_2(s) = 1$, o bien

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Los dos valores propios de la matriz $c(s)$ son números reales:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

El valor propio dominante es $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$. Se tiene $\lambda_-(s) < 0 \forall s$.

Supongamos que hay una temporada desfavorable para la transmisión de la epidemia, es decir $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$ con

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Supongamos además que

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Como ejemplo, tomemos $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ con $\bar{\alpha} > 0$, $|\kappa| < 1$ y

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Esta última condición asegura que efectivamente haya una temporada desfavorable. Más específicamente, elijamos $\bar{\alpha} = 3$, $\kappa = 0,75$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ y $\delta = 1$. Estos valores no son muy realistas, pero demuestran claramente el fenómeno. Entonces tenemos $s_1 \simeq 0,323$ y $s_2 \simeq 0,677$. Podemos verificar numéricamente que se verifica la condición (3.8). Tomemos también $T = 1000$, $m = 3$ y $s_0 = 0,25$. La Figura 1 representa la solución del sistema (3.2) - (3.3) con la condición inicial $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Utilizamos el software Scilab y resolvimos el sistema diferencial para $\log(1 - x_1(s))$ y $\log(1 - x_2(s))$. Luego volvimos a las variables iniciales. También hemos trazado la función constante igual a 1 y las curvas (3.4). Tenga en cuenta lo siguiente:

- en el barrio de $s = 0$, las curvas son casi verticales (no visibles en las figuras);
- $x_1(s)$ y $x_2(s)$ convergen a una solución periódica;
- asintóticamente $x_1(s)$ y $x_2(s)$ están muy cerca de 1 para los valores de s con $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$, especialmente para $s \in]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$, pero también para $s \in]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ con $s_2 - 1 < s^* < s_1$. En este último caso, tenemos $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$. Hay un "pato".

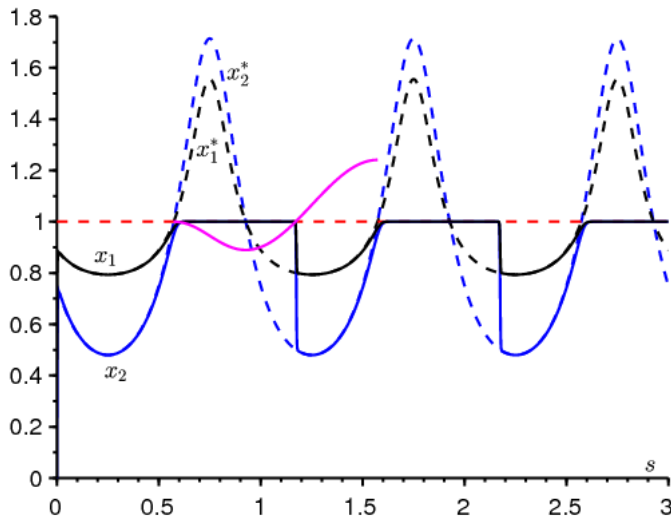


Figura 1. En función de s , las curvas $x_1(s)$ (en negro) y $x_2(s)$ (en azul) así como curvas lentas $x_1^*(s)$ (punteado en negro), $x_2^*(s)$ (azul punteado) y 1 (rojo punteado). En rosa, una parte de la función. $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0+m-u) du$.

La Figura 2 muestra cómo las cantidades que nos interesan, las probabilidades de extinción después de m periodos $x_1(m)$ y $x_2(m)$, varían según s_0 . También hemos trazado las curvas deducidas de (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

La figura 2 sugiere que $x_1(m)$ y $x_2(m)$ convergen, cuando $T \rightarrow +\infty$, hacia límites iguales a 1 si $s_0 \in]s^*, s_2[$. $s_0 = s^*$ Es una discontinuidad de límites. El problema es determinar este punto.

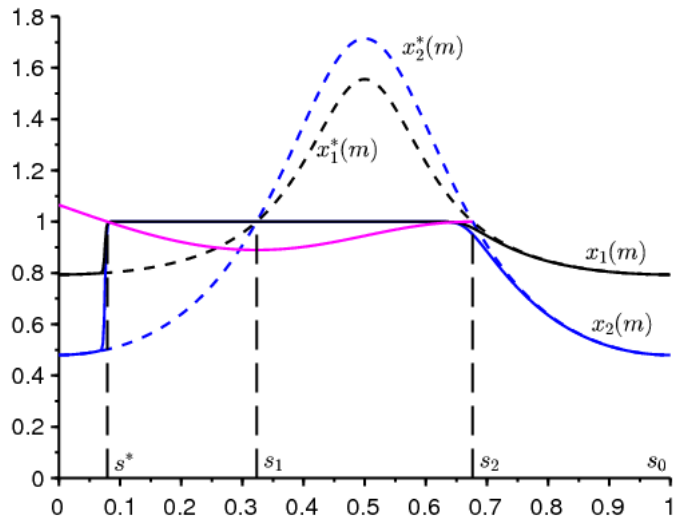


Figura 2. Las probabilidades de extinción después m periodos $x_1(m)$ (en negro) y $x_2(m)$ (en azul oscuro) dependiendo de s_0 . Las fórmulas para $x_1^*(m)$ y $x_2^*(m)$ están punteadas En rosa, una parte de la función. $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^1 \Lambda(s) ds$.

Demostremos en la siguiente sección que las soluciones $x_1(s)$ y $x_2(s)$ en la Figura 1, que están muy cerca de 1 para $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$, de repente se desvían del vecindario de 1 por $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ con

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

En otras palabras, estas soluciones se desvían de la vecindad de 1 en un punto $s = q$. De más, $q = s_0 + 1 - s^*$ y

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Es esta ecuación la que determina s^* de una manera única. De hecho, si $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$, entonces tenemos

- $\phi(s_1) < 0$ debido a la condición (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ por la condición (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2 - 1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

debido a la condición (3.8).

Por lo tanto, hay un número real único $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ con $\phi(s^*) = 0$. En el ejemplo, encontramos numéricamente $s^* \simeq 0,079$.

Nota. La condición (3.8) no tiene conexión con un posible carácter supercrítico del sistema (3.1). También es bien conocido en la teoría de Floquet. De hecho, si tomamos por ejemplo $c = 0,7$ En vez de $c = 1$, encontramos numéricamente que el multiplicador de Floquet dominante es $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ entonces que $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$.

4. La función de entrada-salida para una bifurcación transcítica

Para justificar lo que se acaba de decir sobre el punto de discontinuidad, consideramos más generalmente un campo lento-rápido con dos dimensiones rápidas y una dimensión lenta, como (3.2) - (3.3). Se supone que la dinámica rápida tiene un punto singular con dos valores propios reales distintos, uno de los cuales es siempre negativo y el segundo es negativo y luego positivo. Por lo tanto, es una bifurcación transcítica donde el estado de equilibrio de la dinámica rápida es un nodo estable y luego un punto de silla de montar.

Una solución que esté cerca del punto singular estable no abandonará su vecindario tan pronto como se vuelva inestable, sino que continuará cerca de él por algún tiempo. El objetivo es calcular la función de entrada-salida para esta bifurcación transcítica, es decir, definir el momento en que la solución se aleja del punto singular (momento de salida), de acuerdo con el lugar donde está 'se acerca (hora de entrada). Este fenómeno conocido bajo el nombre de "retraso en la bifurcación" está relacionado con la noción de soluciones de pato y de sobreestabilidad.

La noción de la función de entrada-salida y el concepto de solución de pato se estudiaron por primera vez a principios de la década de 1980 con métodos de análisis no estándar. Véanse los artículos de revisión (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin y Shubin, 1984). La función de entrada-salida se calculó primero para los patos a partir de la ecuación de Van der Pol (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) y luego se extendió a cualquier sistema lento-rápido del avión (Diener y Diener, 1983).

Más tarde, la existencia de soluciones de pato se encontró con los métodos clásicos de expansiones asintóticas (Eckhaus, 1983) y por la teoría geométrica de perturbaciones singulares (Dumortier y Roussarie, 1996). La función de entrada-salida para un sistema del plano también se ha obtenido mediante la teoría geométrica de perturbaciones singulares (De Maesschalck y Schechter, 2016).

Para más detalles sobre la contribución de la escuela francesa sin centralita al problema de los patos y la demora en la bifurcación, el lector puede consultar (Cartier, 1982; Fruchard y Schäfer, 2008). Para una visión más completa sobre los diversos enfoques en la teoría de las perturbaciones singulares, consulte la monografía reciente (Kuehn, 2015), así como el artículo (Wechselberger, 2007) dedicado a los patos. Para la noción de sobreestabilidad y retraso en la bifurcación, ver también (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Wallet, 1990, 1994) y las referencias que contienen.

El caso particular de un campo lento-rápido en la dimensión dos, con una dinámica rápida de la dimensión uno que es atractiva y luego repulsiva, se entiende bien, ver (Diener y Diener, 1983). Varios autores han considerado el caso de la bifurcación de Hopf, donde dos valores propios son conjugados complejos y su parte real cambia de signo, ver (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener y Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Vea también la presentación completa y educativa en la monografía reciente (Kuehn, 2015, capítulo 12).

Considere un sistema diferencial en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ con una variable lenta $s \in \mathbb{R}$ y con dos variables rápidas $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en (s, x) y $\varepsilon > 0$ Es un infinitamente pequeño. Utilizamos el vocabulario de análisis no estándar, ver (Diener y Reeb, 1989) o Lobry (2018, capítulo 5). Asumimos $f(s, 0) = 0 \forall s$.

$x = 0$ no es solo una curva lenta del sistema (4.1), es decir, una solución de la ecuación $f(s, x) = 0$, pero también una solución particular del sistema (4.1). Definimos la matriz cuadrada 2×2

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Suponemos que $M(s)$ tiene dos valores propios distintos, $\lambda_1(s)$ y $\lambda_2(s)$ uno de los cuales siempre permanece negativo y el otro cambia de signo. Con $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$, se tiene :

- $\lambda_1(s) < 0$ y $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ y $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in]\sigma_1, \sigma_2]$.

En la teoría geométrica de perturbaciones singulares, estudiamos el sistema (4.1) en el espacio de fase extendido (x, ε) . Agregamos la ecuación $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$. Un único valor propio de la dinámica rápida cambia de signo. Esta situación se puede devolver al caso de los sistemas en el plano, por reducción en el múltiple central del sistema aumentado ((4.1), $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) en su punto de equilibrio $(x, \varepsilon) = (0, 0)$. Para más detalles ver (Boudjellaba y Sari, 2009; Krupa y Szmolyan, 2001). Con esta reducción, obtenemos un sistema plano cuya función de entrada-salida viene dada por la integral del valor propio que cambia de signo (Diener y Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

En esta ecuación, p es el tiempo de entrada, y q es el tiempo de salida. La reducción predice que la función de entrada-salida viene dada por la fórmula (4.3) localmente, cerca del valor de bifurcación transcítica. Proponemos a continuación calcular la función de entrada-salida total. Se consideró el caso particular de un campo lento-rápido en la dimensión tres con una dinámica desacoplada rápida (Boudjellaba y Sari, 2009).

Usamos el vocabulario de análisis no estándar. Lo que precisamente es esta teoría no es muy importante para la comprensión de este artículo. El lector puede tener en cuenta el sentido intuitivo del lenguaje infinitesimal y sentirse tranquilo al saber que el análisis no estándar proporciona una base rigurosa para los conceptos de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Para una introducción al análisis no estándar, ver (Diener y Reeb, 1989). Para obtener más información sobre el uso del análisis no estándar en la teoría de ecuaciones diferenciales, consulte (Cartier, 1982), (Zvonkin y Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, sección 19.5) o (Lobry, 2018, Capítulo 5).

Por lo tanto, suponemos que el parámetro ε en (4.1) es infinitamente pequeño. La solución $x(s) = 0$ es un "pato" ya que es atractivo para $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ y repelente para $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$. El objetivo es estudiar las soluciones del sistema (4.1) que son infinitamente cercanas a esta solución. La dinámica rápida es atractiva durante el intervalo $[\sigma_0, \sigma_1[$. Se toma $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$. Una solución del sistema (4.1) con una condición inicial en la cuenca de atracción de 0 va rápidamente hacia la curva lenta $x = 0$ y permanece infinitamente cerca de ella mientras $s < \sigma_1$. La solución no deja el vecindario infinitesimal de 0 en este momento, sino que continúa bordeando el 0 durante todo un intervalo. El momento $q > \sigma_1$ por el cual $x(s)$ ya no está infinitamente cerca de 0 se llama tiempo de salida. El objetivo es determinar la función. $p \mapsto q$. Mostraremos que q está definido por la ecuación (4.3). Para ser más precisos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Definimos

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ una condición inicial ubicada en la cuenca de atracción de 0 pero que no está infinitamente cerca de la variedad invariante de la dinámica rápida correspondiente al valor propio $\lambda_1(p)$.
- q por la ecuación (4.3).

Entonces $\forall s \in]p, q[$ no infinitamente cerca de p o q , tenemos: $x(s) \simeq 0$. De más, $x(q)$ no está infinitamente cerca de 0. En p , $x(s)$ se acerca a 0 a lo largo de la órbita de dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

quien pasa $x(p)$. En q , $x(s)$ se aleja de 0 a lo largo del separador inestable de 0 para una dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Prueba . Se tiene $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$. $M(s)$ es la matriz (4.2). Se tiene

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

El sistema (4.1) se convierte

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

La matriz $M(s)$ tiene dos valores propios distintos. Por lo tanto, existe una matriz invertible diferenciable $P(s)$ con

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Transformamos la ecuación (4.5) con el cambio de variable $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Transformamos esta ecuación con la lupa $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

Las condiciones (4.4) son verificadas por $g(s, x)$. Entonces tenemos

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

y $g_1(s, U, \varepsilon)$ Es una función continua. Por lo tanto, tenemos

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$ Es una función continua. Definimos los componentes de los vectores: $U = (U_1, U_2)$ y $h = (h_1, h_2)$. El sistema se convierte

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Este sistema está compuesto por dos ecuaciones débilmente acopladas. El cambio de variables.

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

convierte el sistema en

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

con

$$k_1(s, r, \theta, \varepsilon) = \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon),$$

$$k_2(s, r, \theta, \varepsilon) = -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon).$$

k_2 es una función continua en $r=0$ porque $h_1 = O(r)$ y $h_2 = O(r)$. Nosotros elegimos r_0 con $0 < r_0 < 1$ y para que la pelota con centro 0 y radio r_0 Se incluye en la cuenca de atracción del origen. Aplicar el cambio de variable $v = \varepsilon \ln(r)$ a la región $0 < r < r_0$, que se envía a la región definida por $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$. Obtenemos el sistema:

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \quad (4.6)$$

Es un sistema singularmente perturbado cuya variedad lenta es la unión de los dos planos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Porque $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ para todos los s , el plano $\theta = \pi/2$ es atractivo y el plano $\theta = 0$ es repulsivo. Cualquier solución resultante de un punto no infinitamente cercano al plano repulsivo se vuelve infinitamente cercana al plano atractivo en un tiempo infinitamente pequeño. Las soluciones que provienen de un punto muy cercano al plano repelente pueden permanecer cerca de este plano durante mucho tiempo antes de alejarse de él. Se aplica el teorema de Tihonov (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Nosotros elegimos $p \in [\sigma_0, \sigma_1]$ y $x(p)$ una condición inicial ubicada en la cuenca de atracción de 0, pero que no está infinitamente cerca de la variedad invariante de la dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

correspondiente al valor propio $\lambda_1(p)$. La dinámica rápida lleva la solución correspondiente infinitamente cerca de 0. En el plano (U_1, U_2) no está infinitamente cerca de la variedad lenta $U_2 = 0$, y por lo tanto del plano $\theta = 0$. Por lo tanto, la solución se acerca rápidamente al plano $\theta = \pi/2$ y luego se aproxima por la solución del sistema lento

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Deducimos que

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Por lo tanto tenemos de nuevo $r(s) = r_0$, es decir $v(s)$ infinitamente pequeño, cuando s es asintóticamente igual a q definido por (4.3). Para este valor de q , el origen es un punto de referencia para una dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Por lo tanto, la solución se aleja en el punto q del punto de silla a lo largo de su separador inestable. Aquí utilizamos que en el momento p la solución no estaba infinitamente cerca de la variedad lenta $\theta = \pi/2$, lo que traduce el hecho de que la solución no llegó al plano (U_1, U_2) estar muy cerca de $U_1 = 0$. Esto termina la prueba.

Volvamos al ejemplo (3.2) - (3.3). Definimos $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$. El siguiente sistema rápido, donde s se considera como un parámetro,

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

tiene dos puntos de equilibrio (estados cuasi estacionarios) $(x_1, x_2) = (1, 1)$ y $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ dado por (3.4). La matriz jacobiana en $(1, 1)$ es $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. Como ya hemos visto, los dos valores propios son siempre distintos, son números reales. Los dos valores propios son negativos si y solo si $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$. Por lo tanto, el punto singular $(1, 1)$ es un nodo atractivo para los valores de s para los cuales $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ y un punto de silla si $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Los valores propios son $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ y $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$, dado por (3.5).

Con $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$, obtenemos la matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \bar{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Los valores propios tienen una parte real negativa si y solo si $\bar{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Por lo tanto, en los puntos donde $\bar{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$, hay bifurcaciones transcíticas, porque los dos equilibrios siguientes se encuentran e intercambian sus estabildades: $(x_1, x_2) = (1, 1)$ y $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$.

Se tiene

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ Si $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[$ modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$ Si $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[$ modulo 1.

Podemos aplicar el teorema y calcular la función de entrada-salida como lo hicimos en la sección 2.

5. Generalización

Este estudio, sin duda, se extiende a problemas con más de dos ecuaciones rápidas y una ecuación lenta. Considere, por ejemplo, el sistema linealizado con cuatro ecuaciones rápidas de (Bacaër, 2007, Sección 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Asumimos $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0, \psi(\cdot) > 0$ es una función periódica del período 1. También es un modelo para la transmisión de enfermedades transmitidas por vectores. Los dos primeros componentes representan los vectores infectados en la fase latente y en la fase infecciosa, mientras que los dos últimos componentes representan a las personas infectadas en la fase latente y en la fase infecciosa. El sistema (2.1) se convierte, con $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

La conjetura es que la función de entrada-salida viene dada por la fórmula (4.3), donde $\lambda_2(s)$ debe ser reemplazado por el valor propio real dominante $\Lambda(s)$ de la matriz $c(s)$, como se podría verificar en un ejemplo numérico (Figura 3). Los valores de los parámetros son $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s)), m = 3$ y $T = 2000$. Tenemos la ecuación característica para los valores propios λ de la matriz $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

Deducimos que $\Lambda(s) < 0$ si y solo si

$$\frac{\beta\gamma\delta\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

Qué pasa si $s_1 < s < s_2$ con $s_1 \simeq 0,323$ y $s_2 \simeq 0,677$, como en el ejemplo numérico de la sección 3 (simple coincidencia). Con la fórmula (4.3) encontramos por otro lado $s^* \simeq 0,047$. Esto parece corresponder bien con el brusco salto en la probabilidad de extinción en la Figura 3.

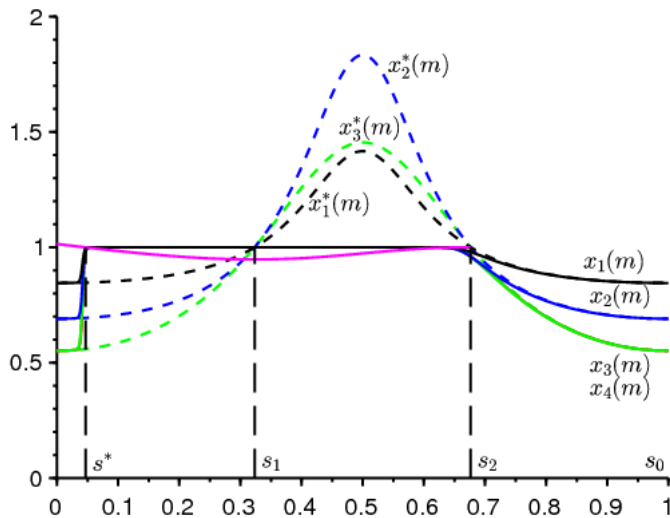


Figura 3. Las probabilidades de extinción después de m periodos $x_1(m)$ (en negro), $x_2(m)$ (en azul) así como $x_3(m)$ y $x_4(m)$ (en verde, indistinguible) dependiendo de s_0 . Punteado, curvas lentas. En rosa, hemos dibujado una parte de la función. $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

5. Conclusión

En este artículo, se han tomado como ejemplos modelos periódicos para enfermedades transmitidas por vectores. Pero el resultado de la sección 4 también se aplica, por ejemplo, a los modelos SEIR periódicos que modelan una enfermedad con transmisión directa. En la aproximación lineal, solo intervienen los dos

compartimentos infectados E e I, que representan a las personas en fase latente y a las personas infecciosas. Este modelo se utilizó para el inicio de la epidemia de coronavirus en Francia (Bacaër, 2020b), pero sin la estacionalidad. Al igual que con la gripe, se espera que la estacionalidad desempeñe un papel en la propagación de este coronavirus. La cuestión de la extinción surgirá hacia el final de la epidemia.

Otro punto importante que es bueno recordar es que nuestros resultados sobre el comportamiento del sistema involucran integrales de un valor propio en intervalos. En particular, el valor de este valor propio en un momento dado no proporciona información directa sobre el comportamiento del sistema. También es bien sabido en la teoría de Floquet que un sistema periódico solo puede tener valores propios negativos en cualquier momento y, sin embargo, ser inestable. Sin embargo, durante la epidemia de coronavirus, escuchamos regularmente anuncios sobre la reproducibilidad diaria (R_0), que es solo otra forma del valor propio instantáneo.

Referencias bibliográficas

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal: 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi: 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal: 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi: 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal: 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal: 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn.–S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci., Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schafke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des " bifurcations dynamiques ". Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.