

Über die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Bevölkerung in einer langsamen periodischen Umgebung

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër¹ Claude Lobry² Tewfik Sari³

¹ Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes
Institut de Recherche pour le Développement
Les Cordeliers, Paris, Frankreich, nicolas.bacaer@ird.fr

² Nizza, Frankreich, lobrinria@wanadoo.fr

³ ITAP, Universität Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Frankreich, tewfik.sari@irstea.fr

Zusammenfassung

Wir sind an der Extinktionswahrscheinlichkeit eines linearen Prozesses von Geburt und Tod mit mehreren Typen in einer periodischen Umgebung interessiert, wenn die Periode der Koeffizienten sehr groß ist. Diese Wahrscheinlichkeit kann an der Grenze eine Diskontinuität in Bezug auf eine Ente in einem langsam-schnellen dynamischen System darstellen. Wir bestimmen den Punkt der Diskontinuität in einem Beispiel mit zwei Arten von Individuen genau.

Schlüsselwörter: Geburts- und Todesprozess, periodische Umgebung, langsam-schnelles System

1. Einleitung

Die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Bevölkerung ist eine Frage, die insbesondere in die Biologie des Naturschutzes und in die Epidemiologie eingreift. In diesem zweiten Fall ist unter Bevölkerung eine infizierte Bevölkerung zu verstehen. Ein klassisches mathematisches Modell zur Untersuchung dieser Art von Problem ist das der linearen Prozesse von Geburt und Tod mit einem oder mehreren Arten von Individuen (Méléard, 2016). In vielen Situationen muss jedoch die Saisonalität der Umwelt berücksichtigt werden, was zur Untersuchung dieser Prozesse führt, wenn die Geburts- und Todeskoeffizienten periodische Funktionen der Zeit sind (Bacaër und Ait Dads, 2014). Bestimmte Populationen oder bestimmte Epidemien haben Koeffizienten, deren Zeitskala im Vergleich zur jährlichen Saisonalität relativ kurz ist. Wir werden daher veranlasst, die Grenze zu betrachten, bei der die Periode der Koeffizienten sehr groß ist. Wenn lebenswichtige Parameter während eines Teils des Jahres (der ungünstigen Jahreszeit) unterkritisch sind, konvergiert die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens als Funktion der Jahreszeit des Beginns des Prozesses gegen eine diskontinuierliche Grenze (Carmona und Gandon, 2019). Der Punkt der Diskontinuität liegt vor dem Beginn der ungünstigen Saison.

Bacaër (2019) hatte diese Studie im Wesentlichen für einen einzelnen Typ von Individuen fortgesetzt und insbesondere festgestellt, dass die Diskontinuität in der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens mit dem Vorhandensein einer "Ente" in einem langsam-schnellen dynamischen System zusammenhängt », Dh (siehe zum Beispiel Lobry (2018, Kapitel 5)) einer Flugbahn, die für eine bestimmte Zeit einem attraktiven Bogen folgt, bevor sie einem abstoßenden Bogen folgt. Wir schlagen unten vor, ein Beispiel mit zwei Arten von Individuen zu untersuchen, die von einem Modell der Übertragung einer durch Vektoren übertragenen Krankheit inspiriert sind. Wir bestimmen genau den Punkt der Diskontinuität der Extinktionswahrscheinlichkeit. Dieses Problem war ungelöst geblieben (Carmona und Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

In Abschnitt 2 stellen wir das Modell für die Bevölkerung vor, nämlich das von linearen Geburts- und Todesprozessen mit periodischen Koeffizienten bei verschiedenen Arten von Individuen. Es wird erklärt, dass die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens mit einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zusammenhängt. Wenn die Periode gegen unendlich konvergiert, verwandelt eine Änderung der Variablen dieses System in ein langsam-schnelles System mit einer festen Periode.

In Abschnitt 3 präsentieren wir ein Beispiel mit zwei Arten von Personen. Numerische Simulationen legen nahe, dass die Extinktionswahrscheinlichkeit gegen eine diskontinuierliche Grenze konvergiert und dass der Diskontinuitätspunkt durch eine Bedingung bestimmt wird, die das Integral des dominanten Eigenwerts einer bestimmten Matrix beinhaltet. In Abschnitt 4 zeigen wir mit den Werkzeugen der Nicht-Standard-Analyse, dass tatsächlich diese Bedingung den Punkt der Diskontinuität bestimmt.

In Abschnitt 5 präsentieren wir ein weiteres Beispiel, diesmal mit vier Arten von Personen. Die numerische Simulation legt nahe, dass eine Bedingung des gleichen Typs immer noch den Punkt der Diskontinuität bestimmt. Es ist uns jedoch nicht gelungen, dies in einem allgemeinen Rahmen zu demonstrieren, wenn die Anzahl der Arten von Personen streng größer als zwei ist. Abschließend diskutieren wir die Möglichkeiten, unsere Ergebnisse auf den Fall der Coronavirus-Epidemie anzuwenden.

2. Das Modell

Wir betrachten einen linearen Prozess von Geburt und Tod mit k Typen ($k \geq 1$) in einer periodischen Umgebung. $T > 0$ ist die Periode der Umgebung. Wir geben uns zwei Matrixfunktionen $A(t) = (A_{i,j}(t))$ und $B(t) = (B_{i,j}(t))$ der Größe k und der Periode T mit den folgenden Annahmen:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$ stellt die Rate dar, mit der Individuen vom Typ j neue Individuen vom Typ i erzeugen
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$ ist die Geschwindigkeit, mit der sich Individuen vom Typ j in Individuen vom Typ i verwandeln
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$ stellt die Rate dar, mit der Individuen vom Typ j den Typ ändern oder sterben, und $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- wenn $U(t)$ ist Systemlösung $dU/dt = -B(t)U(t)$ mit dem Ausgangszustand $U(0) = I$ (die Identitätsmatrix), dann der Spektralradius der Matrix $U(T)$ d.h. der dominante Floquet-Multiplikator ist $\rho(U(T)) < 1$
- die Matrix $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ ist für alle t irreduzibel .

Genauer gesagt, wie in (Bacaër und Ait Dads, 2014) definieren wir

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$ die Wahrscheinlichkeit zu haben N_i Individuen vom Typ i zum Zeitpunkt t ($1 \leq i \leq k$)
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ die entsprechende Generatorfunktion.

Wir haben dann

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j} .$$

Es wird davon ausgegangen, dass zu der Zeit t_0 es gibt $n_i \geq 0$ Typ i Individuen (die n_i sind ganze Zahlen, $1 \leq i \leq k$) mit $\sum_i n_i \geq 1$. Das können wir annehmen $0 \leq t_0 < T$. Laut (Bacaër und Ait Dads, 2014) ist die Wahrscheinlichkeit $p(t_0, t_1)$ dass die Bevölkerung in diesem zweiten Moment ausgestorben ist, das heißt, dass

kein Individuum der verschiedenen Typen übrig bleibt, ist gegeben durch

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ ist die Lösung des Differentialsystems

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t) z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

mit dem Ausgangszustand $z_i(0) = 0 \forall i$.

Die Erwartung der Anzahl von Individuen vom Typ i zum Zeitpunkt t ist eine Lösung von

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

und $E_i(t_0) = n_i \forall i$. Wir definieren

- $V(t)$ die Systemlösung $dV/dt = C(t)V(t)$ mit dem Ausgangszustand $V(0) = I$.
- $F = \rho(V(T))$ der dominante Floquet-Multiplikator.

Wenn $F \leq 1$,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Wenn $F > 1$ ist, konvergiert diese Wahrscheinlichkeit im Gegenteil gegen eine Grenze, die streng unter 1 liegt. Sie ist eine periodische Funktion von t_0 (Bacaër und Ait Dads, 2014).

Wir nehmen an

- es gibt zwei periodische Matrixfunktionen der Periode 1, unabhängig von T , $a(s)$ und $b(s)$ mit

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$ ist eine feste Nummer
- $t_1 = t_0 + mT$, wobei $m \geq 1$ eine feste ganze Zahl ist.

Unser Ziel ist es, die Grenze zu studieren

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

bezüglich s_0 mit $0 \leq s_0 < 1$. Wir haben auch

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens nach m Perioden, wenn von einem einzelnen Individuum vom Typ i *ausgegangen* wird.

Wir definieren

- $\varepsilon = 1/T$,
- $c(s) = a(s) - b(s)$,
- $x(s) = z(t)$.

Wir haben dann

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

mit $x_i(0) = 0 \forall i$. Außerdem, $z(t_1 - t_0) = x(m)$. Wir haben auch $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$, $0 \leq s \leq m$ (Bacaër und Ait Dads, 2014).

Wenn T gegen ∞ konvergiert, mit anderen Worten wenn $\varepsilon \rightarrow 0$ kann das System (2.1) als langsam-schnelles autonomes System mit k schnellen Variablen geschrieben werden $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) und eine langsame Variable $x_{k+1}(s) = s$ mit $dx_{k+1}/ds = 1$.

Für die triviale stationäre Lösung $x_i = 1 \forall i$ ist die Jacobi-Matrix auf der rechten Seite des Systems (2.1) $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. \tilde{c} bezeichnet die transponierte Matrix der Matrix c . Nach einer Folgerung aus dem Satz von Perron und Frobenius für irreduzible Matrizen, deren Koeffizienten außerhalb der Diagonale alle positiv oder Null sind (Allaire et al., 2018, Bemerkung 6.2.13), sind die Matrizen $c(s)$ und $\tilde{c}(s)$ haben einen gemeinsamen dominanten reellen Eigenwert $\Lambda(s)$, streng größer als der Realteil aller anderen Eigenwerte.

3. Ein Beispiel

Nehmen

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

mit $\alpha(s) > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ und $\delta > 0$. $\alpha(s)$ ist eine periodische kontinuierliche Funktion von Periode 1. Dieses stochastische Modell ist inspiriert von dem linearisierten deterministischen Modell für eine Vektorkrankheit von (Bacaër, 2007, Abschnitt 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Infizierte Vektoren sind vom Typ 1. Infizierte Personen sind vom Typ 2. Der Parameter $\alpha(s)$ ist die Rate, mit der infizierte Menschen ihre Infektion beim Bissen auf Vektoren übertragen. Diese Rate ist periodisch, da auch die Population gesunder Vektoren vorhanden ist. Der Parameter β ist die Rate, mit der Vektoren sterben. Der Parameter γ ist die Rate, mit der die Vektoren beißen. Der Parameter δ ist die Rate, mit der sich infizierte Personen erholen. Das System (2.1) wird dann geschrieben

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta[1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s)[1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta[1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_2(s). \quad (3.3)$$

Beachten Sie, dass sich die rechten Seiten in zwei Fällen gegenseitig aufheben: $x_1(s) = 1$ und $x_2(s) = 1$, oder

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Die zwei Eigenwerte der Matrix $c(s)$ sind reelle Zahlen:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

Der dominante Eigenwert ist $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$. Wir haben $\lambda_-(s) < 0 \forall s$.

Angenommen, es gibt eine ungünstige Jahreszeit für die Übertragung der Epidemie, das heißt $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$ mit

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Nehmen wir weiter an

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Nehmen wir als Beispiel $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ mit $\bar{\alpha} > 0$, $|\kappa| < 1$ und

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Diese letzte Bedingung stellt sicher, dass es tatsächlich eine ungünstige Jahreszeit gibt. Genauer gesagt, wählen wir $\bar{\alpha} = 3$, $\kappa = 0,75$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ und $\delta = 1$. Diese Werte sind nicht sehr realistisch, zeigen jedoch deutlich das Phänomen. Wir haben dann $s_1 \simeq 0,323$ und $s_2 \simeq 0,677$. Wir können numerisch überprüfen, ob die Bedingung (3.8) überprüft wurde. Nehmen wir auch $T = 1000$, $m = 3$ und $s_0 = 0,25$. Abbildung 1 zeigt die Lösung des Systems (3.2) - (3.3) mit dem Ausgangszustand $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Wir haben die Scilab-Software verwendet und das Differentialsystem für gelöst $\log(1 - x_1(s))$ und $\log(1 - x_2(s))$. Dann kehrten wir zu den ursprünglichen Variablen zurück. Wir haben auch die konstante Funktion gleich 1 und die Kurven (3.4) aufgetragen. Beachte das Folgende:

- in der Nachbarschaft von $s = 0$ sind die Kurven fast vertikal (in den Figuren nicht sichtbar);
- $x_1(s)$ und $x_2(s)$ zu einer periodischen Lösung konvergieren;
- asymptotisch, $x_1(s)$ und $x_2(s)$ sind sehr nahe an 1 für die Werte von s mit $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$, speziell für $s \in]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$, aber auch für $s \in]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ mit $s_2 - 1 < s^* < s_1$. Im letzteren Fall haben wir $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$. Es gibt eine "Ente".

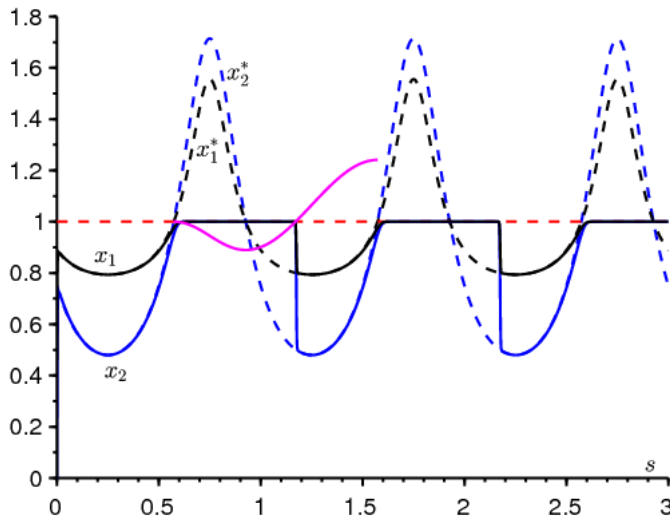


Abbildung 1. In Abhängigkeit von s die Kurven $x_1(s)$ (in schwarz) und $x_2(s)$ (in blau) sowie langsame Kurven $x_1^*(s)$ (schwarz gepunktet), $x_2^*(s)$ (blau gepunktet) und 1 (rot gepunktet). In Pink ein Teil der Funktion $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0+m-u) du$.

Abbildung 2 zeigt, wie die Größen, die uns interessieren, die Extinktionswahrscheinlichkeiten nach m Perioden $x_1(m)$ und $x_2(m)$ variieren je nach s_0 . Wir haben auch die aus (3.4) abgeleiteten Kurven aufgezeichnet:

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

Abbildung 2 legt dies nahe $x_1(m)$ und $x_2(m)$ konvergieren, wenn $T \rightarrow +\infty$ in Richtung Grenzen gleich 1, wenn $s_0 \in]s^*, s_2[$. $s_0 = s^*$ ist eine Diskontinuität von Grenzen. Das Problem besteht darin, diesen Punkt zu bestimmen.

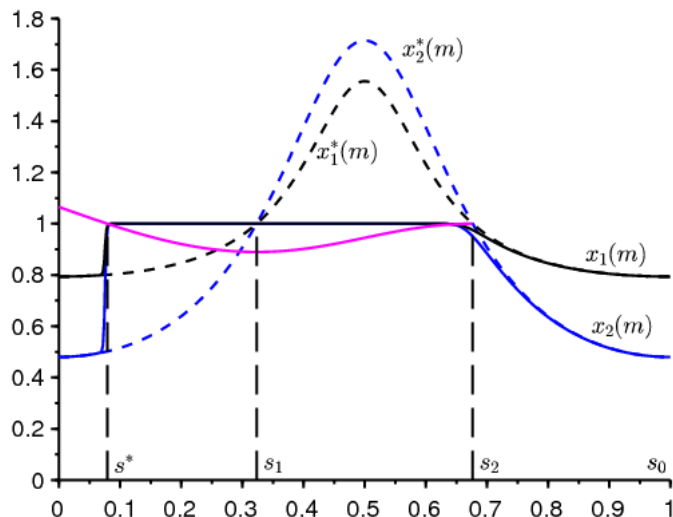


Abbildung 2. Die Extinktionswahrscheinlichkeiten nach m Perioden $x_1(m)$ (in schwarz) und $x_2(m)$ (in dunkelblau) je nach s_0 . Die Formeln für $x_1^*(m)$ und $x_2^*(m)$ sind gepunktet. In Pink ein Teil der Funktion $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, dass die Lösungen $x_1(s)$ und $x_2(s)$ in Abbildung 1, die sehr nahe an 1 für $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$, plötzlich von der Nachbarschaft von 1 abweichen für $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ mit

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Mit anderen Worten, diese Lösungen weichen an einem Punkt $s = q$ von der Nachbarschaft von 1 ab. Außerdem, $q = s_0 + 1 - s^*$ und

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Es ist diese Gleichung, die bestimmt s^* auf einzigartige Weise. In der Tat, wenn $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$, also haben wir

- $\phi(s_1) < 0$ wegen Bedingung (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ wegen der Bedingung (3.7)

$$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

wegen der Bedingung (3.8).

Es gibt also eine eindeutige reelle Zahl $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ mit $\phi(s^*) = 0$. Im Beispiel finden wir numerisch $s^* \simeq 0,079$.

Hinweis. Bedingung (3.8) hat keinen Zusammenhang mit einem möglichen überkritischen Charakter des Systems (3.1). Es ist auch in der Theorie von Floquet bekannt. In der Tat, wenn wir zum Beispiel nehmen $c = 0,7$ anstatt $c = 1$ finden wir numerisch, dass der dominante Floquet-Multiplikator ist $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ während $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$.

4. Die Eingabe-Ausgabe-Funktion für eine transkritische Gabelung

Um zu rechtfertigen, was gerade über den Punkt der Diskontinuität gesagt wurde, betrachten wir allgemein ein langsam-schnelles Feld mit zwei schnellen Dimensionen und einer langsamen Dimension wie (3.2) - (3.3). Es wird angenommen, dass die schnelle Dynamik einen singulären Punkt mit zwei unterschiedlichen realen Eigenwerten hat, von denen einer immer negativ und der zweite negativ und dann positiv ist. Es handelt sich also um eine transkritische Gabelung, bei der der Gleichgewichtszustand der schnellen Dynamik ein stabiler Knoten und dann ein Sattelpunkt ist.

Eine Lösung, die sich in der Nähe des stabilen Singularpunkts befindet, verlässt ihre Nachbarschaft nicht, sobald sie instabil wird, sondern bleibt noch einige Zeit in der Nähe. Das Ziel besteht darin, die Eingabe-Ausgabe-Funktion für diese transkritische Gabelung zu berechnen, dh den Moment zu definieren, in dem sich die Lösung vom singulären Punkt (Ausgabemoment) entfernt, entsprechend dem Moment, in dem sie sich befindet, wird angefahren (Eintrittszeit). Dieses unter dem Namen "Verzögerung der Bifurkation" bekannte Phänomen ist mit dem Begriff der Entenlösungen und der Überstabilität verbunden.

Der Begriff der Input-Output-Funktion und das Konzept der Entenlösung wurden erstmals Anfang der 1980er Jahre mit nicht standardmäßigen Analysemethoden untersucht. Siehe die Übersichtsartikel (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin und Shubin, 1984). Die Eingabe-Ausgabe-Funktion wurde zuerst für Enten aus der Van-der-Pol-Gleichung berechnet (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) und dann auf jedes langsam-schnelle System der Ebene erweitert (Diener und Diener, 1983).

Später wurde die Existenz von Entenlösungen mit den klassischen Methoden der asymptotischen Expansion (Eckhaus, 1983) und mit der geometrischen Theorie singulärer Störungen (Dumortier und Roussarie, 1996) gefunden. Die Eingabe-Ausgabe-Funktion für ein System der Ebene wurde auch durch die geometrische Theorie singulärer Störungen erhalten (De Maesschalck und Schechter, 2016).

Für weitere Einzelheiten über den Beitrag der französischen Schule ohne Telefonzentrale zum Problem der Enten und der Verzögerung der Gabelung kann der Leser konsultieren (Cartier, 1982; Fruchard und Schäfer, 2008). Für eine umfassendere Darstellung der verschiedenen Ansätze in der Theorie der singulären Störungen siehe die aktuelle Monographie (Kuehn, 2015) sowie den Artikel (Wechselberger, 2007) über Enten. Zum Begriff der Überstabilität und Verzögerung bei der Bifurkation siehe auch (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Wallet, 1990, 1994) und die darin enthaltenen Referenzen.

Der spezielle Fall eines langsam-schnellen Feldes in Dimension zwei mit einer schnellen Dynamik der Dimension eins, die attraktiv und dann abstoßend ist, ist gut verstanden, siehe (Diener und Diener, 1983). Der Fall der Hopf-Bifurkation, bei der zwei Eigenwerte komplexe Konjugate sind und deren Realteil das Vorzeichen ändert, wurde von mehreren Autoren betrachtet (siehe (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener und Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Siehe auch die vollständige und lehrreiche Präsentation in der aktuellen Monographie (Kuehn, 2015, Kapitel 12).

Betrachten Sie ein Differentialsystem an $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ mit einer langsamen Variablen $s \in \mathbb{R}$ und mit zwei schnellen Variablen $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine differenzierbare Funktion in (s, x) , und $\varepsilon > 0$ ist unendlich klein. Wir verwenden das Vokabular der Nicht-Standard-Analyse, siehe (Diener und Reeb, 1989) oder Lobry (2018, Kapitel 5). Wir nehmen an $f(s, 0) = 0 \forall s$.

$x = 0$ ist nicht nur eine langsame Kurve des Systems (4.1), d. h. eine Lösung der Gleichung $f(s, x) = 0$, sondern auch eine bestimmte Lösung des Systems (4.1). Wir definieren die quadratische Matrix 2×2

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Wir nehmen das an $M(s)$ hat zwei unterschiedliche Eigenwerte, $\lambda_1(s)$ und $\lambda_2(s)$ einer bleibt immer negativ und der andere wechselt das Vorzeichen. Mit $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$, wir haben :

- $\lambda_1(s) < 0$ und $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ und $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in]\sigma_1, \sigma_2]$.

In der geometrischen Theorie singularer Störungen untersuchen wir das System (4.1) im erweiterten Phasenraum (x, ε) . Wir fügen die Gleichung hinzu $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$. Ein einzelner Eigenwert der schnellen Dynamik ändert das Vorzeichen. Diese Situation kann auf den Fall von Systemen in der Ebene zurückgeführt werden, indem der zentrale Verteiler des erweiterten Systems reduziert wird ((4.1), $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) an seinem Gleichgewichtspunkt $(x, \varepsilon) = (0, 0)$. Für weitere Details siehe (Boudjellaba und Sari, 2009; Krupa und Szmolyan, 2001). Mit dieser Reduktion erhalten wir ein Ebenensystem, dessen Eingabe-Ausgabe-Funktion durch das Integral des Eigenwerts gegeben ist, der das Vorzeichen ändert (Diener und Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

In dieser Gleichung ist p die Eintrittszeit und q die Austrittszeit. Die Reduktion sagt voraus, dass die Eingabe-Ausgabe-Funktion durch die Formel (4.3) lokal nahe dem transkritischen Bifurkationswert gegeben ist. Wir schlagen im Folgenden vor, die gesamte Eingabe-Ausgabe-Funktion zu berechnen. Der spezielle Fall eines langsam-schnellen Feldes in Dimension drei mit einer schnell entkoppelten Dynamik wurde in (Boudjellaba und Sari, 2009) betrachtet.

Wir verwenden das Vokabular der Nicht-Standard-Analyse. Was genau diese Theorie ist, ist für das Verständnis dieses Artikels nicht sehr wichtig. Der Leser kann die intuitive Bedeutung der infinitesimalen Sprache im Auge behalten und sich darauf verlassen, dass die Nicht-Standard-Analyse eine strenge Grundlage für die Konzepte des unendlich Kleinen und des unendlich Großen bietet. Für eine Einführung in die Nichtstandardanalyse siehe (Diener und Reeb, 1989). Weitere Informationen zur Verwendung der Nicht-Standard-Analyse in der Theorie der Differentialgleichungen finden Sie in (Cartier, 1982), (Zvonkin und Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, Abschnitt 19.5) oder (Lobry, 2018), Kapitel 5).

Wir nehmen daher an, dass der Parameter ε in (4.1) unendlich klein ist. Die Lösung $x(s) = 0$ ist eine "Ente", da es attraktiv ist für $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ und abweisend für $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$. Ziel ist es, die Lösungen des Systems (4.1) zu untersuchen, die dieser Lösung unendlich nahe kommen. Schnelle Dynamik ist über das Intervall attraktiv $[\sigma_0, \sigma_1[$. Wir nehmen $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$. Eine Lösung des Systems (4.1) mit einer Anfangsbedingung im Anziehungsbecken von 0 geht schnell in Richtung der langsamen Kurve $x = 0$ und bleibt unendlich nahe daran, solange $s < \sigma_1$. Die Lösung verlässt zu diesem Zeitpunkt nicht die infinitesimale Nachbarschaft von 0, sondern umgeht die 0 weiterhin über ein ganzes Intervall. Der Moment $q > \sigma_1$ für welche $x(s)$ ist nicht mehr unendlich nahe bei 0 heißt die Austrittszeit. Ziel ist es, die Funktion zu bestimmen $p \mapsto q$. Wir werden zeigen, dass q durch Gleichung (4.3) definiert ist. Genauer gesagt haben wir folgendes Ergebnis:

Satz

Wir definieren

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ eine Anfangsbedingung, die sich im Anziehungsbecken von 0 befindet, aber nicht unendlich nahe an der invarianten Vielfalt der schnellen Dynamik liegt, die dem Eigenwert entspricht $\lambda_1(p)$.
- q durch Gleichung (4.3).

So $\forall s \in]p, q[$ nicht unendlich nahe an p oder q haben wir: $x(s) \simeq 0$. Außerdem, $x(q)$ ist nicht unendlich nahe bei 0. In p , $x(s)$ nähert sich 0 entlang der schnellen dynamischen Umlaufbahn

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

wer geht vorbei $x(p)$. In q , $x(s)$ bewegt sich von 0 entlang des instabilen Trennzeichens von 0 weg, um eine schnelle Dynamik zu erzielen

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Beweis. Wir haben $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$. $M(s)$ ist die Matrix (4.2). Wir haben

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Das System (4.1) wird

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

Die Matrix $M(s)$ hat zwei unterschiedliche Eigenwerte. Es gibt daher eine invertierbare differenzierbare Matrix $P(s)$ mit

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Wir transformieren Gleichung (4.5) mit der Änderung der Variablen $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Wir transformieren diese Gleichung mit der Lupe $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

Die Bedingungen (4.4) werden durch verifiziert $g(s, x)$. Also haben wir

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

und $g_1(s, U, \varepsilon)$ ist eine stetige Funktion. Deshalb haben wir

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$ ist eine stetige Funktion. Wir definieren die Komponenten der Vektoren: $U = (U_1, U_2)$ und $h = (h_1, h_2)$. Das System wird

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Dieses System besteht aus zwei schwach gekoppelten Gleichungen. Die Änderung von Variablen

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

verwandelt das System in

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

k_2 ist eine stetige Funktion bei $r=0$, weil $h_1 = O(r)$ und $h_2 = O(r)$. Wir wählen r_0 mit $0 < r_0 < 1$ und damit der Ball mit Mittelpunkt 0 und Radius r_0 ist im Anziehungsbecken des Ursprungs enthalten. Wenden Sie die Änderung der Variablen an $v = \varepsilon \ln(r)$ in die Region $0 < r < r_0$, die an die durch definierte Region gesendet wird $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$. Wir bekommen das System:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es ist ein einzigartig gestörtes System, dessen langsame Vielfalt die Vereinigung der beiden Ebenen $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$ ist. weil $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ für alle s ist die Ebene $\theta = \pi/2$ attraktiv und die Ebene $\theta = 0$ ist abstoßend. Jede Lösung, die sich aus einem Punkt ergibt, der nicht unendlich nahe an der Abstoßungsebene liegt, wird in unendlich kurzer Zeit unendlich nahe an der attraktiven Ebene. Die Lösungen, die von einem Punkt kommen, der sehr nahe an der abstoßenden Ebene liegt, können lange Zeit nahe an dieser Ebene bleiben, bevor sie sich von ihr entfernen. Es gilt der Satz von Tihonov (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Wir wählen $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ und $x(p)$ ein Anfangszustand, der sich im Anziehungsbecken von 0 befindet, aber nicht unendlich nahe an der invarianten Vielfalt der schnellen Dynamik liegt

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

entsprechend dem Eigenwert $\lambda_1(p)$. Die schnelle Dynamik führt die entsprechende Lösung unendlich nahe an 0. In der Ebene (U_1, U_2) es ist nicht unendlich nah an der langsamen Sorte $U_2 = 0$ und daher der Ebene $\theta = 0$. Daher nähert sich die Lösung schnell der Ebene $\theta = \pi/2$ und wird dann durch die Lösung des langsamen Systems angenähert

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Daraus schließen wir

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Deshalb haben wir wieder $r(s) = r_0$, das heißt $v(s)$ unendlich klein, wenn s asymptotisch gleich q ist, definiert durch (4.3). Für diesen Wert von q ist der Ursprung ein Sattelpunkt für eine schnelle Dynamik

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Daher bewegt sich die Lösung am Punkt q vom Sattelpunkt entlang ihres instabilen Abscheiders weg. Wir haben hier verwendet, dass zum Zeitpunkt p die Lösung nicht unendlich nahe an der langsamen Sorte $\theta = \pi/2$ lag, was die Tatsache übersetzt, dass die Lösung nicht in der Ebene angekommen ist (U_1, U_2) sehr nah dran sein $U_1 = 0$. Damit ist der Beweis beendet.

Kehren wir zu Beispiel (3.2) - (3.3) zurück. Wir definieren $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$. Das folgende schnelle System, bei dem s als Parameter betrachtet wird,

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

hat zwei Gleichgewichtspunkte (quasistationäre Zustände) $(x_1, x_2) = (1, 1)$ und $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ gegeben durch (3.4). Die Jacobi-Matrix in $(1, 1)$ ist $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. Wie wir bereits gesehen haben, sind die beiden Eigenwerte immer verschieden, sie sind reelle Zahlen. Die beiden Eigenwerte sind genau dann negativ, wenn $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$. Daher ist der Singularpunkt $(1, 1)$ ein attraktiver Knoten für die Werte von s , für die $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ und ein Sattelpunkt, wenn $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ und $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$, gegeben durch (3.5).

Mit $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \bar{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Die Eigenwerte haben genau dann einen negativen Realteil $\bar{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Daher an den Stellen, an denen $\bar{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ gibt es transkritische Gabelungen, weil die folgenden zwei Gleichgewichte ihre Stabilitäten treffen und austauschen: $(x_1, x_2) = (1, 1)$ und $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$.

Wir haben

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ wenn $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[$ modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$ wenn $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[$ modulo 1.

Wir können den Satz anwenden und die Eingabe-Ausgabe-Funktion wie in Abschnitt 2 berechnen.

5. Verallgemeinerung

Diese Studie erstreckt sich zweifellos auf Probleme mit mehr als zwei schnellen Gleichungen und einer langsamen Gleichung. Betrachten Sie zum Beispiel das linearisierte System mit vier schnellen Gleichungen von (Bacaër, 2007, Abschnitt 4.2).

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Wir nehmen an $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$. $\psi(\cdot) > 0$ ist eine periodische Funktion von Periode 1. Es ist auch ein Modell für die Übertragung von durch Vektoren übertragenen Krankheiten. Die ersten beiden Komponenten repräsentieren die in der Latenzphase und in der Infektionsphase infizierten Vektoren, während die letzten beiden Komponenten die in der Latenzphase und in der Infektionsphase infizierten Personen repräsentieren. Das System (2.1) wird mit $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

Die Vermutung ist, dass die Eingabe-Ausgabe-Funktion durch die Formel (4.3) gegeben ist, wobei $\lambda_2(s)$ muss durch den dominanten reellen Eigenwert ersetzt werden $\Lambda(s)$ der Matrix $c(s)$, wie man es an einem numerischen Beispiel verifizieren könnte (Abbildung 3). Die Parameterwerte sind $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s)), m = 3$ und $T = 2000$. Wir haben die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte λ der Matrix $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

Daraus schließen wir $\Lambda(s) < 0$ dann und nur dann, wenn

$$\frac{\beta\gamma\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

was passiert wenn $s_1 < s < s_2$ mit $s_1 \simeq 0,323$ und $s_2 \simeq 0,677$, wie im numerischen Beispiel in Abschnitt 3 (einfacher Zufall). Mit Formel (4.3) finden wir dagegen $s^* \simeq 0,047$. Dies scheint gut mit dem starken Anstieg der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens in Abbildung 3 übereinzustimmen.

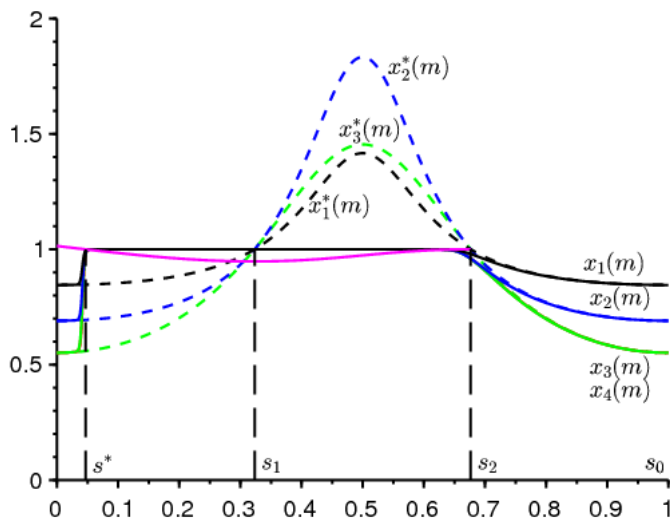


Abbildung 3. Die Extinktionswahrscheinlichkeiten nach m Perioden $x_1(m)$ (in Schwarz), $x_2(m)$ (in blau) sowie $x_3(m)$ und $x_4(m)$ (in grün, nicht zu unterscheiden) je nach s_0 . Gepunktete, langsame Kurven. In Pink haben wir einen Teil der Funktion gezeichnet $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

5. Schlussfolgerung

In diesem Artikel wurden periodische Modelle für durch Vektoren übertragene Krankheiten als Beispiele genommen. Das Ergebnis von Abschnitt 4 gilt jedoch beispielsweise auch für periodische SEIR-Modelle, die eine Krankheit mit direkter Übertragung modellieren. In der linearen Näherung greifen nur die beiden

infierten Kompartimente E und I ein, die Personen in der Latenzphase und infektiöse Personen darstellen. Dieses Modell wurde für den Beginn der Coronavirus-Epidemie in Frankreich verwendet (Bacaër, 2020b), jedoch ohne Saisonalität. Wie bei der Grippe wird dennoch erwartet, dass die Saisonalität eine Rolle bei der Verbreitung dieses Coronavirus spielt. Die Frage des Aussterbens wird sich gegen Ende der Epidemie stellen.

Ein weiterer wichtiger Punkt, an den man sich gut erinnern sollte, ist, dass unsere Ergebnisse zum Verhalten des Systems Integrale eines Eigenwerts in Intervallen beinhalten. Insbesondere liefert der Wert dieses Eigenwerts zu einem bestimmten Zeitpunkt keine direkten Informationen über das Verhalten des Systems. In Floquets Theorie ist auch bekannt, dass ein periodisches System zu jeder Zeit nur negative Eigenwerte haben und dennoch instabil sein kann. Während der Coronavirus-Epidemie hörten wir jedoch regelmäßig Ankündigungen zur täglichen Reproduzierbarkeit (R_0), die nur eine andere Form des momentanen Eigenwerts ist.

Literaturhinweise

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [hal: 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [doi: 10.1007/s00285-019-01447-z](#), [hal: 02279038](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi: 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal: 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal: 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn.–S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci., Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schbeimfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des "" bifurcations dynamiques "" . Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.