

- $\forall i \neq j$ ، هو المعدل الذي يتحول فيه الأفراد من النوع j إلى أفراد من النوع i $-B_{i,j}(t) \geq 0$
- $\forall j$ ، يمثل المعدل الذي يتغير عنده الأفراد من النوع j أو يموتون ، و $B_{j,j}(t) \geq 0$ و $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- إذا $U(t)$ هو حل النظام $dU/dt = -B(t)U(t)$ مع الشرط الأولي $U(0) = I$ (مصفوفة الهوية) ، ثم نصف القطر الطيفي للمصفوفة $U(T)$ ، أي مضاعف فلوكيت المهيمن ، هو $\rho(U(T)) < 1$
- المصفوفة $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ غير قابل للاختزال لجميع t .

بتعبير أدق ، كما في (Baca Br and Ait Dads، 2014) ، نحدد

- احتمال وجود N_i أفراد من النوع الأول في الوقت t ($1 \leq i \leq k$) $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$
- وظيفة المولد المقابلة $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$

لدينا بعد ذلك

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j} .$$

من المفترض أنه في ذلك الوقت t_0 يوجد $n_i \geq 0$ النوع الأول من الأفراد (n_i هي أعداد صحيحة ، $1 \leq i \leq k$) مع $\sum_i n_i \geq 1$. يمكننا أن نفترض ذلك $0 \leq t_0 < T$. بحسب (باكير وأيت داس ، 2014) ، الاحتمال $p(t_0, t_1)$ أن السكان انقرضوا في هذه اللحظة الثانية ، أي أنه لم يبق أي فرد من الأنواع المختلفة

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ هو حل النظام التفاضلي

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

مع الشرط الأولي $z_i(0) = 0 \forall i$

توقع عدد الأفراد من النوع i في الوقت t هو حل

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

و $E_i(t_0) = n_i \forall i$ نحدد

- $V(t)$ حل النظام $dV/dt = C(t)V(t)$ مع الشرط الأولي $V(0) = I$
- $F = \rho(V(T))$ المضاعف المهيمن فلوكيت.

إذا كانت $F \leq 1$ ،

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

إذا كان $F > 1$ ، فإن هذا الاحتمال يتقارب على عكس الاتجاه نحو حد أقل من 1 . وهو دالة دورية لـ t_0 (بكار وأيت داس ، 2014) .

ومن المفترض

- هناك وظيفتان مصفوفة دورية للفترة 1 ، مستقلة عن T ، $a(s)$ و $b(s)$ مع

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

• $s_0 = t_0/T$ هو رقم ثابت

• حيث $m \geq 1$ عدد صحيح ثابت $t_1 = t_0 + mT$

هدفنا هو دراسة الحد

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

من ناحية s_0 مع $0 \leq s_0 < 1$ ولدينا ايضا

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

وهو احتمال الانقراض بعد فترات m عند البدء من فرد واحد من النوع i .

نحدد

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon &= 1/T \\ \bullet \quad c(s) &= a(s) - b(s) \\ \bullet \quad x(s) &= z(t) \end{aligned}$$

لدينا بعد ذلك

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

مع $x_i(0) = 0 \forall i$. علاوة على ذلك، $z(t_1 - t_0) = x(m)$. نحن ايضا لدينا $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i, 0 \leq s \leq m$ (بكار وآيت داس، 2014).

إذا كانت T تتقارب مع ∞ ، بعبارة أخرى إذا $\varepsilon \rightarrow 0$ ، يمكن كتابة النظام (2.1) كنظام مستقل بطيء السرعة بمتغيرات k السريعة $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) ومتغير بطيء $x_{k+1}(s) = s$ مع $dx_{k+1}/ds = 1$.

لحل ثابت نافهة $x_i = 1 \forall i$ ، المصفوفة اليعقوبية في الجانب الأيمن من النظام (2.1) هي $\bar{c}(s_0 + m - s)$. \bar{c} يدل على المصفوفة المنقولة للمصفوفة ج. وفقاً للنتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius للمصفوفات غير القابلة للاختزال التي تكون معاملاتها خارج القطر كلها موجبة أو صفرية (Allaire et al., 2018، الملاحظة 6.2.13)، المصفوفات $c(s)$ و $\bar{c}(s)$ لديها قيمة ذاتية حقيقية سائدة مشتركة $\Lambda(s)$ ، أكبر بدقة من الجزء الحقيقي من جميع القيم الذاتية الأخرى.

3. مثال

يأخذ

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

مع $\alpha(s) > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$. هي وظيفة دورية مستمرة من الفترة 1. هذا النموذج العشوائي مستوحى من النموذج القطعي الخطي لمرض ناقلات (باكار، 2007، القسم 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

ناقلات المصابة هي النوع 1. الأشخاص المصابون هم النوع 2. المعلمة $\alpha(s)$ هو المعدل الذي ينقل به المصابون العدوى إلى المتجهات عند اللدغة. هذا المعدل دوري لأن عدد المتجهات الصحية هو أيضاً. المعلمة β هي معدل موت النواقل. المعلمة γ هي معدل لدغات المتجهات. المعلمة δ هي المعدل الذي يتعافى به المصابون. ثم يتم كتابة النظام (2.1)

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

لاحظ أن الجانبين الأيمن يلغي كل منهما الآخر في حالتين: $x_1(s) = 1$ و $x_2(s) = 1$ أو

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

القيمة الذاتية للمصفوفة $c(s)$ هي أرقام حقيقية:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

القيمة الذاتية السائدة هي $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$. نملك $\Lambda(s) < 0 \forall s$.

لنفترض أن هناك موسمًا غير موات لانتقال الوباء ، وهذا يعني $0 < s_1 < s_2 < 1$ مع

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

افترض كذلك

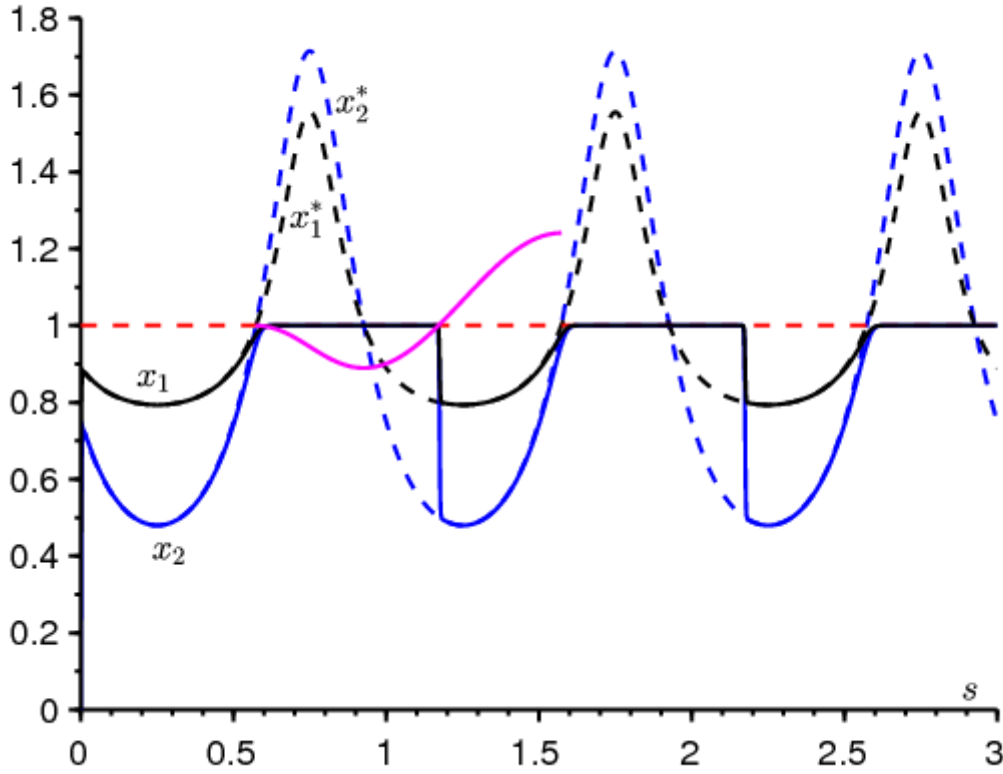
$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

كمثال ، لنأخذ $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ مع $|\kappa| < 1$ ، $\bar{\alpha} > 0$ و

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

يضمن هذا الشرط الأخير وجود موسم غير موات بالفعل. بشكل أكثر تحديدًا ، دعنا نختار $\bar{\alpha} = 3$ ، $\kappa = 0,75$ ، $\beta = 2$ ، $\gamma = 1$ و $\delta = 1$. هذه القيم ليست واقعية للغاية ولكنها توضح الظاهرة بوضوح. لدينا بعد ذلك $s_1 \simeq 0,323$ و $s_2 \simeq 0,677$. يمكننا التحقق رقميًا من أن الشرط (3.8) تم التحقق منه. فلنأخذ أيضًا $T = 1000$ ، $m = 3$ و $s_0 = 0,25$. يمثل الشكل 1 حل النظام (3.2) - (3.3) مع الشرط الأولي $x_1(0) = x_2(0) = 0$. استخدمنا برنامج Scilab وقمنا بحل النظام التفاضلي $\log(1 - x_1(s))$ و $\log(1 - x_2(s))$. ثم عدنا إلى المتغيرات الأولية. لقد قمنا أيضًا برسم دالة ثابتة تساوي 1 والمنحنيات (3.4). لاحظ ما يلي:

- في حي $s = 0$ ، تكون المنحنيات عمودية تقريبًا (غير مرئية في الأشكال) ؛
- $x_1(s)$ و $x_2(s)$ تتلاقى إلى حل دوري ؛
- بشكل مقارب ، $x_1(s)$ و $x_2(s)$ قريبة جدًا من 1 لقيم s مع $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ ، خصوصًا $]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s_2[$ ولكن أيضًا $]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ مع $s_1 < s^* < s_2 - 1$. في الحالة الأخيرة ، لدينا $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$. هناك "بطة".

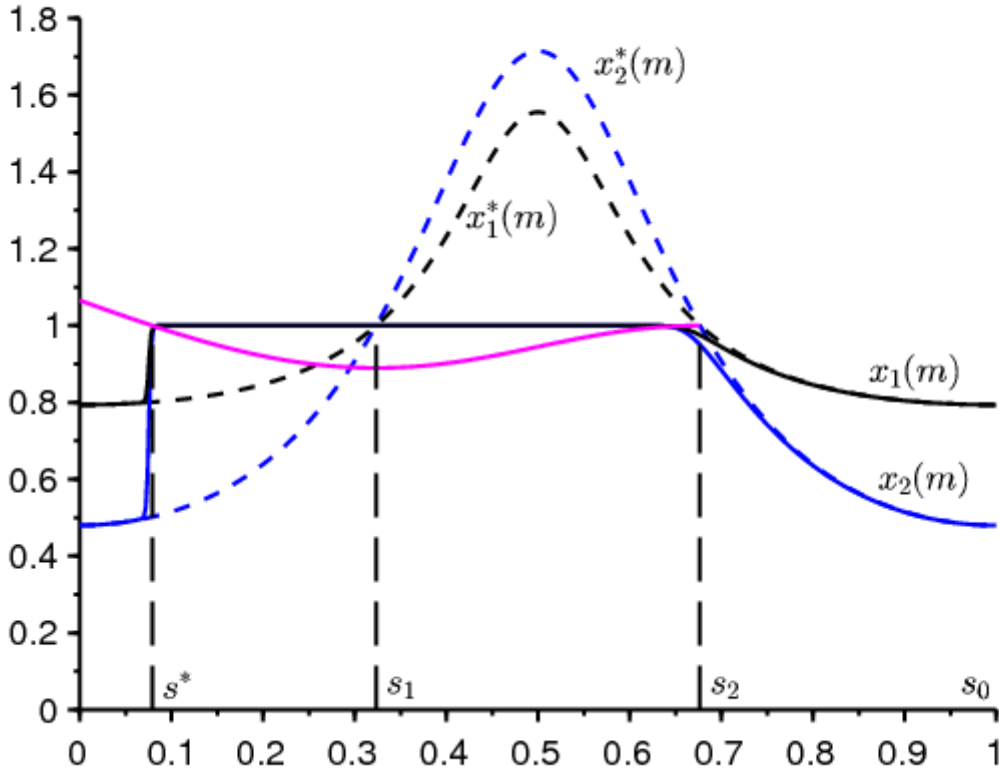


الشكل 1. كدالة s ، المنحنيات $x_1(s)$ (باللون الأسود) و $x_2(s)$ (باللون الأزرق) وكذلك المنحنيات البطينة $x_1^*(s)$ (أسود منقط)، $x_2^*(s)$ (أزرق منقط) و 1 (أحمر منقط). باللون الوردي، قطعة من الوظيفة $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$.

يوضح الشكل 2 كيف أن الكميات التي تهمننا، واحتمالات الانقراض بعد فترات m $x_1(m)$ و $x_2(m)$ ، تختلف باختلاف s_0 . كما قمنا برسم المنحنيات المستخلصة من (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

يقترح الشكل 2 ذلك $x_1(m)$ و $x_2(m)$ تتلاقى، متى $T \rightarrow +\infty$ ، نحو حدود تساوي 1 إذا $s_0 \in]s^*, s_2[$. $s_0 = s^*$ هو انقطاع الحدود. المشكلة هي تحديد هذه النقطة.



الشكل 2. احتمالات الانقراض بعد m فترات $x_1(m)$ (باللون الأسود) و $x_2(m)$ (باللون الأزرق الداكن) حسب s_0 . الصيغ لـ $x_1^*(m)$ و $x_2^*(m)$ منقط. باللون الوردي، قطعة من الوظيفة $\Lambda(s)$ من $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

سنوضح في القسم التالي أن الحلول $x_1(s)$ و $x_2(s)$ في الشكل 1، وهي قريبة جدًا من 1 لـ $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ انحرفت عن 1 فجأة انحرفت عن 1 لـ $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

بمعنى آخر، تنحرف هذه الحلول عن الجوار 1 عند نقطة $s = q$. علاوة على ذلك، $q = s_0 + 1 - s^*$ و

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

هذه المعادلة هي التي تحدد s^* بطريقة فريدة. في الواقع، إذا لدينا

- $\phi(s_1) < 0$ بسبب الحالة (3.6)،
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ بسبب الحالة (3.7)

$$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2 - 1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

بسبب الحالة (3.8).

لذلك هناك عدد حقيقي فريد من نوعه $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ مع $\phi(s^*) = 0$. في المثال نجد العدد $s^* \simeq 0,079$.

تعليق. الشرط (3.8) ليس له اتصال مع شخصية فوق حرجة محتملة للنظام (3.1). ومن المعروف أيضا في نظرية فلوكنيه. في الواقع، إذا أخذنا على سبيل المثال $c = 0,7$ في مكان $c = 1$ نجد عدديا أن مضاعف فلوكنيت المهيمن هو $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ في حين أن $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$.

4. وظيفة المدخلات والمخرجات من أجل التشعب عبر الحرج

لتبرير ما قيل للتو عن نقطة الانقطاع ، نعتبر بشكل عام مجالاً بطيئاً سريعاً ذا بعدين سريعين وأبعاداً بطيئة واحدة ، مثل (3.2) - (3.3). من المفترض أن الديناميكيات السريعة لها نقطة واحدة مع قيمتين حقيقتين متميزتين ، أحدهما سلبى دائماً والثاني سلبى ثم إيجابى. وبالتالي فهو تشعب عبر الحرجة حيث تكون حالة توازن الديناميكيات السريعة عقدة مستقرة ثم نقطة سرج.

لن يقترب الحل القريب من نقطة المفرد المستقرة من جواره بمجرد أن يصبح غير مستقر ، ولكنه سيستمر في البقاء بالقرب منه لبعض الوقت. الهدف هو حساب وظيفة المدخلات والمخرجات لهذا التشعب عبر النقدي ، أي تحديد اللحظة التي يتحرك فيها الحل بعيداً عن نقطة المفرد (لحظة الخرج) ، وفقاً لذلك حيث يكون s يقترب (وقت الدخول). وترتبط هذه الظاهرة المعروفة باسم "التأخر في التشعب" بمفهوم حلول البط والاستقرار المفرد.

تمت دراسة مفهوم وظيفة المدخلات والمخرجات ومفهوم حل البط لأول مرة في بداية الثمانينيات باستخدام طرق تحليل غير قياسية. راجع مقالات المراجعة (Zvonkin and Shubin، 1984؛ Cartier، 1982؛ Benoît et al.، 1981). تم حساب دالة المدخلات والمخرجات لأول مرة للبوط من معادلة فان دير بول (Benoît et al.، 1981؛ Benoît، 1981) ثم امتدت إلى أي نظام بطيء السرعة للطائرة (Diener، 1983 and Diener، 1983).

في وقت لاحق ، تم العثور على وجود حلول البوط باستخدام الأساليب الكلاسيكية للتوسعات المقاربة (Eckhaus ، 1983) والنظرية الهندسية للاضطرابات المفردة (Dumortier and Roussarie ، 1996). تم أيضاً الحصول على وظيفة المدخلات والمخرجات لنظام الطائرة من خلال النظرية الهندسية للاضطرابات الفردية (De Maesschalck and Schecter، 2016).

لمزيد من التفاصيل حول مساهمة المدرسة الفرنسية غير المقفلة في مشكلة البوط والتأخير في التشعب ، يمكن للقارئ أن يستشير (كارتييه ، 1982 ؛ فروخارد وشيفك ، 2008). للحصول على نظرة أكثر اكتمالاً حول المناهج المختلفة في نظرية الاضطرابات الفردية ، انظر الدراسة الأخيرة (Kuehn ، 2015) بالإضافة إلى المقالة (Wechselberger ، 2007) المخصصة للبوط. لفكرة الاستقرار الزائد والتأخير في التشعب ، انظر أيضاً (Benoît، 1991، 2015؛ Benoît et al.، 1998؛ Benoît et al.، 1994؛ Wallet، 1990) والمراجع التي تحتوي عليها.

إن الحالة الخاصة لحقل بطيء السرعة في البعد الثاني ، مع ديناميكية سريعة للبعد الأول تكون جذابة ثم مثيرة للاشمئزاز ، مفهومة جيداً ، انظر (Diener and Diener ، 1983). تم النظر في حالة تشعب هوبف ، حيث يوجد قيمتان متحدتان متقاربان معقدان وعلامة تغييرات جزئية حقيقية ، من قبل العديد من المؤلفين ، انظر (Lobry، 1992؛ Diener and Diener، 1995؛ Callot، 1993؛ Benoît، 2009) ، انظر (Lobry، 1992؛ Diener and Diener، 1995؛ Callot، 1993؛ Benoît، 2009) ، انظر أيضاً العرض التقديمي الكامل والتعليمي في الدراسة الحديثة (Kuehn ، 2015) ، الفصل 12).

النظر في نظام تفاضلي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ مع متغير بطيء $s \in \mathbb{R}$ ومع متغيرين سريعين $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ هي دالة مختلفة في (s, x) و $\varepsilon > 0$ هو صغير بلا حدود. نستخدم مفردات التحليل غير القياسي ، انظر (Diener، 1989 and Reeb، 2018 أو Lobry (2018) ، الفصل 5). ومن المفترض $f(s, 0) = 0 \forall s$.

$x = 0$ ليس فقط منحنى بطيء للنظام (4.1) ، أي حل المعادلة $f(s, x) = 0$ ، ولكن أيضاً حل معين للنظام (4.1). نحدد المصفوفة المربعة 2×2

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

نحن نفترض ذلك $M(s)$ لديه قيمتين متميزتين ، $\lambda_1(s)$ و $\lambda_2(s)$ واحد منها يبقى دائماً سلبياً وعلامة التغييرات الأخرى. مع $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ ، نملك :

$$\begin{aligned} & \bullet \lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2] \text{ و } \lambda_1(s) < 0 \\ & \bullet \lambda_2(s) > 0 \forall s \in [\sigma_1, \sigma_2] \text{ و } \lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[\end{aligned}$$

في النظرية الهندسية للاضطرابات المفردة ندرس النظام (4.1) في مساحة المرحلة الممتدة (x, ε) . نضيف المعادلة $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$. علامة eigenvalue واحدة من التغييرات الديناميكية السريعة علامة. يمكن إعادة هذا الموقف إلى حالة الأنظمة في الطائرة ، عن طريق تقليل المشعب المركزي للنظام المعزز ((4.1) ، $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) عند نقطة التوازن $(x, \varepsilon) = (0, 0)$. لمزيد من التفاصيل انظر (Boudjellaba and Krupa and Szmolyan، 2001؛ Sari، 2009). مع هذا التخفيض ، نحصل على نظام مستوي يتم إعطاء وظيفة الإدخال والإخراج من خلال تكامل القيمة الذاتية التي تغير العلامة (Diener and Diener ، 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

في هذه المعادلة p هو وقت الدخول و q هو وقت الخروج. ويتوقع التخفيض أن وظيفة المدخلات والمخرجات معطاة بالصيغة (4.3) محليًا ، بالقرب من قيمة التشعب عبر الحرجة. نقترح ما يلي لحساب دالة المدخلات والمخرجات الإجمالية. تم النظر في الحالة الخاصة لحقل بطيء السرعة في البعد الثالث مع ديناميكية فصل سريع في (Boudjellaba and Sari، 2009).

نستخدم مفردات التحليل غير القياسي. ما هي بالضبط هذه النظرية ليست مهمة جدا لفهم هذه المقالة. يمكن للقارئ أن يضع في اعتباره الإحساس الحدسي للغة اللامحدودة والراحة في معرفة أن التحليل غير القياسي يوفر أساسًا صارمًا لمفاهيم الصغير اللامتناهي والكبير بشكل لا نهائي. للحصول على مقدمة للتحليل غير القياسي ، انظر (Diener and Reeb، 1989). لمزيد من المعلومات حول استخدام التحليل غير القياسي في نظرية المعادلات التفاضلية ، انظر (Kuehn، 2015، section)، (Zvonkin and Shubin، 1984)، (Cartier، 1982)، (Lobry، 2018) or (19.5 ، الفصل 5).

لذلك نفترض أن المعلمة ε في (4.1) صغيرة بشكل لا نهائي. الحل $x(s) = 0$ بطة لأنها جذابة $s \in [\sigma_0, \sigma_1]$ وطارد لل $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$. الهدف هو دراسة طول النظام (4.1) التي هي قريبة بشكل لا نهائي لهذا الحل. ديناميات سريعة جذابة خلال الفترة $[\sigma_0, \sigma_1]$. ياخذ $p \in]\sigma_0, \sigma_1[$. حل النظام (4.1) مع حالة أولية في حوض الجذب 0 يذهب بسرعة نحو المنحنى البطيء $x = 0$ ويبقى قريبًا بلا حدود طالما أنه $s < \sigma_1$. لا يترك الحل الحي اللامتناهي من 0 في هذه اللحظة ، لكنه يستمر في الالتفاف على 0 خلال فترة كاملة. اللحظة $q > \sigma_1$ التي $x(s)$ لم يعد قريبًا بلا حدود من 0 يسمى وقت الخروج. الهدف هو تحديد الوظيفة $q \mapsto p$. سنوضح أن q محددة بالمعادلة (4.3). بتعبير أدق، لدينا النتيجة التالية:

نظرية

نحدد

- $p \in]\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ حالة أولية تقع في حوض الجذب 0 ولكنها ليست قريبة بشكل غير محدود من التنوع الثابت للديناميات السريعة المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda_1(p)$.
- q بالمعادلة (4.3).

ثم $\forall s \in]p, q[$ ليس قريبًا بلا حدود من p أو q ، لدينا: $x(s) \simeq 0$. علاوة على ذلك، $x(q)$ ليس قريبًا بلا حدود من 0 . في ص ، $x(s)$ تقترب من 0 على طول مدار الديناميات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

الذي يمر $x(p)$. في ص ، $x(s)$ يتحرك بعيدًا عن 0 على طول فاصل 0 غير المستقر للديناميكيات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

إثبات . نملك $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$. $M(s)$ هي المصفوفة (4.2). نملك

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

يصيح النظام (4.1)

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

المصفوفة $M(s)$ له قيمتان متميزتان. وبالتالي هناك مصفوفة قابلة للتمييز قابلة للعكس $P(s)$ مع

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

نقوم بتحويل المعادلة (4.5) مع تغيير المتغير $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

نقوم بتحويل هذه المعادلة بالعدسة المكبرة $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

يتم التحقق من الشروط (4.4) بواسطة $g(s, x)$. اذا لدينا

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

و $g_1(s, U, \varepsilon)$ هي وظيفة مستمرة. لذلك ، لدينا

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h = (h_1, h_2)$ و $U = (U_1, U_2)$: نحدد مكونات ناقلات: $h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$ يصبح النظام

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

يتكون هذا النظام من معادلتين ضعيفتين. تغيير المتغيرات

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

يحول النظام إلى

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

مع

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

k_2 هي دالة مستمرة عند $r = 0$ لأن $h_1 = O(r)$ و $h_2 = O(r)$. يتم تحديد r_0 مع $0 < r_0 < 1$ بحيث الكرة مع مركز 0 ونصف القطر r_0 يتم تضمينه في حوض جاذبية المنشأ. تطبيق تغيير المتغير $v = \varepsilon \ln(r)$ إلى المنطقة $0 < r < r_0$ ، الذي يتم إرساله إلى المنطقة المحددة بواسطة $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$. نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.6)$$

إنه نظام منزعج منفرداً تنوعه البطيء هو اتحاد الطائرتين $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$. لأن $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ بالنسبة لجميع s ، تكون المستوي $\theta = \pi/2$ جاذبة والمستوي $\theta = 0$ مقبلة. أي حل ناتج عن نقطة ليست قريبة بشكل غير محدود من المستوى البغيض يصبح قريباً بلا حدود من المستوى الجذاب في وقت صغير للغاية. يمكن للحلول التي تأتي من نقطة قريبة جداً من الطائرة الطاردة أن تبقى قريبة من هذه الطائرة لفترة طويلة قبل أن تبتعد عنها. تنطبق نظرية تيخونوف (Lobry et al.، 1998؛ Tihonov، 1952). يتم تحديد $p \in [\sigma_0, \sigma_1]$ و $x(p)$ حالة أولية تقع في حوض الجذب 0، ولكنها ليست قريبة بشكل غير محدود من التنوع الثابت للديناميات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda_1(p)$. الديناميات السريعة تقود الحل المطابق قريب بلا حدود إلى 0. في المستوى (U_1, U_2) إنه ليس قريباً بلا حدود من التنوع البطيء $U_2 = 0$ ، وبالتالي للمستوي $\theta = 0$. لذلك يقترب الحل بسرعة من المستوى $\theta = \pi/2$ ثم يتم تقريبه بمحلول النظام البطيء

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

نستنتج ذلك

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

لذلك لدينا مرة أخرى $r(s) = r_0$ ، ذلك بالقول $v(s)$ صغير بشكل لا نهائي، عندما تكون s متساوية تقارب q المحددة بواسطة (4.3). بالنسبة لهذه القيمة q ، الأصل هو نقطة سرج للديناميكيات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

لذلك، ينتقل الحل بعيداً عند النقطة q من نقطة السرج على طول فاصله غير المستقر. كنا هنا أنه في الوقت ص هو الحل لا متناهية على مقربة من مجموعة متنوعة بطيئة $\theta = \pi/2$ ، والذي يترجم حقيقة أن الحل لم تصل في الطائرة (U_1, U_2) كونها قريبة جداً من $U_1 = 0$. هذا ينهي الدليل.

دعنا نرجع إلى المثال (3.2) - (3.3). نحدد $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$. النظام السريع التالي، حيث تعتبر s كمعلمة،

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

لديه نقطتان من التوازن (الحالات شبه الثابتة) $(x_1, x_2) = (1, 1)$ و $(x_1^*(s), x_2^*(s)) = (3.4)$. المصفوفة اليعقوبية في $(1, 1)$ هي $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. كما رأينا بالفعل، فإن القيمتين الذاتيتين دائماً ما تكون مميزة، وهما رقمان حقيقيان. إن القيمتين الذاتيتين سلبيتين فقط إذا $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$. وبالتالي فإن النقطة المفردة $(1, 1)$ هي عقدة جذابة لقيم s التي من أجلها $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ ، ونقطة سرج إذا $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. القيم الذاتية هي $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ و $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ (3.5).

مع $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ ، نحصل على المصفوفة اليعقوبية

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

نملك

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

القيم الذاتية لها جزء حقيقي سلبى إذا فقط إذا $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. لذلك، في النقاط حيث $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ ، هناك تشعبات عبر الدرجة، لأن التوازنين التاليين يلتقيان ويتبادلان استقرارهما: $(x_1, x_2) = (1, 1)$ و $(x_1^*(s), x_2^*(s)) = (3.5)$.

نملك

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ إذا $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[\text{ modulo } 1$
- $\lambda_2(s) > 0$ إذا $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[\text{ modulo } 1$

يمكننا تطبيق النظرية وحساب وظيفة المدخلات والمخرجات كما فعلنا في القسم 2.

5. التعميم

تمتد هذه الدراسة بلا شك لتشمل أكثر من معادلتين سريعتين ومعادلة بطيئة واحدة. لنأخذ على سبيل المثال النظام الخطي مع أربع معادلات سريعة (Bacaër, 2007, Section 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

ومن المفترض $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$. $\psi(\cdot) > 0$ هي وظيفة دورية من الفترة 1. وهي أيضاً نموذج لانتقال الأمراض المنقولة بالنواقل. يمثل المكونان الأولان المتجهات المصابة في المرحلة الكامنة وفي المرحلة المعدية بينما يمثل المكونان الأخيران

الأشخاص المصابين في المرحلة الكامنة وفي المرحلة المعدية. يصبح النظام (2.1) مع $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s).\end{aligned}$$

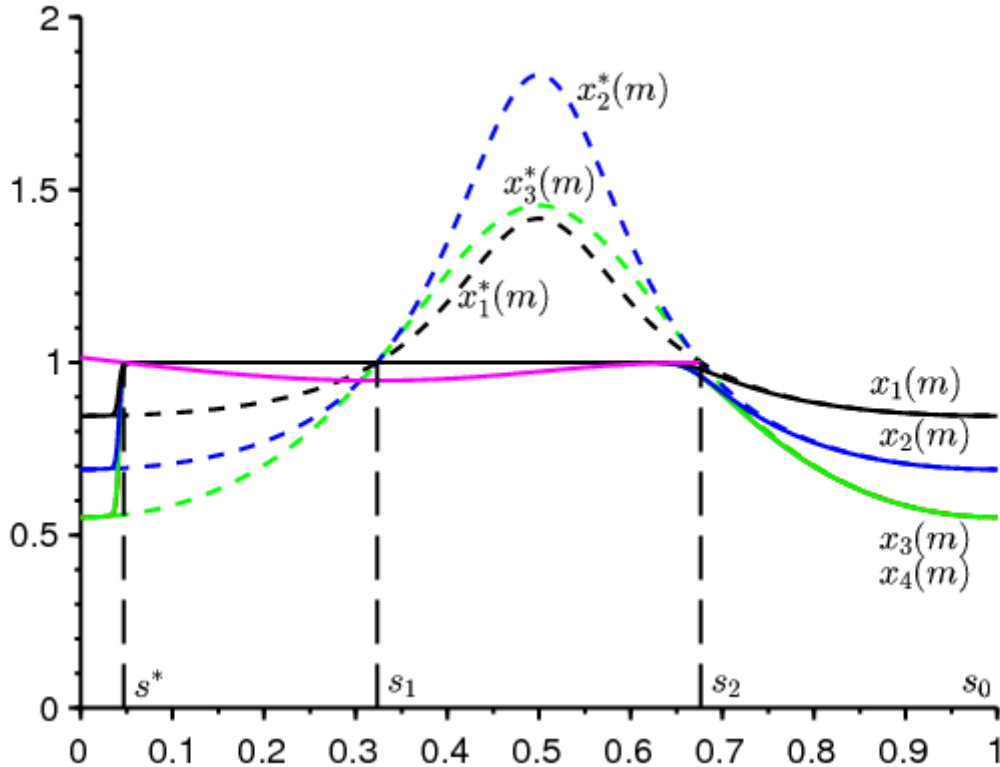
التخمين هو أن وظيفة المدخلات والمخرجات معطاة بالصيغة (4.3) ، حيث $\lambda_2(s)$ يجب استبداله بالقيمة الذاتية الحقيقية المهيمنة $\Lambda(s)$ المصفوفة $c(s)$ ، حيث يمكن للمرء التحقق من ذلك في مثال رقمي (الشكل 3). قيم المعلمات $\mu = 1$ ، $\delta = 1$ ، $\gamma = 1$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 1$ ، لدينا المعادلة المميزة للقيم الذاتية λ للمصفوفة $c(s)$ $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ و $m = 3$ و $T = 2000$.

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

نستنتج ذلك $\Lambda(s) < 0$ إذا وفقط إذا

$$\frac{\beta \gamma \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

ماذا يحدث إذا $s_1 < s < s_2$ مع $s_1 \simeq 0,323$ و $s_2 \simeq 0,677$ كما في المثال العددي في القسم 3 (صدفة بسيطة). مع الصيغة (4.3) نجد من ناحية أخرى $s^* \simeq 0,047$. يبدو أن هذا يتوافق بشكل جيد مع الفقرة الحادة في احتمال الانقراض في الشكل 3.



الشكل 3. احتمالات الانقراض بعد فترات $x_1(m)$ (باللون الأسود) ، $x_2(m)$ (باللون الأزرق) وكذلك $x_3(m)$ و $x_4(m)$ (باللون الأخضر ، لا يمكن تمييزه) حسب s_0 . منحنيات منقطة وبطيئة. باللون الوردي ، قمنا برسم قطعة من الوظيفة $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

5. الخلاصة

في هذه المقالة ، تم أخذ نماذج دورية للأمراض المنقولة بالنواقل كأمثلة. لكن نتيجة القسم 4 تنطبق أيضًا ، على سبيل المثال ، على نماذج SEIR الدورية التي تشكل نموذجًا لمرض ينتقل مباشرةً. في التقريب الخطي ، تتدخل فقط المقصورتان المصابتان E و I اللتان تمثلان الأشخاص في المرحلة الكامنة والأشخاص المعدين. تم استخدام هذا النموذج لبدء تفشي وباء الفيروس التاجي في فرنسا (Bacaër, 2020b) ، ولكن بدون الموسمية. كما هو الحال مع الأنفلونزا ، من المتوقع أن تلعب الموسمية دورًا في انتشار هذا الفيروس التاجي. ستظهر مسألة الانقراض قرب نهاية الوباء.

نقطة أخرى مهمة من الجيد أن نتذكرها هي أن نتائجنا بشأن سلوك النظام تنطوي على تكاملات قيمة ذاتية على فترات. على وجه الخصوص ، لا توفر قيمة هذه القيمة الذاتية في وقت معين معلومات مباشرة عن سلوك النظام. ومن المعروف أيضًا في نظرية Floquet أن النظام الدوري لا يمكن أن يكون له سوى قيم eigen سلبية في أي وقت ولكنه غير مستقر. ومع ذلك ، خلال وباء الفيروس التاجي ، سمعنا بانتظام إعلانات بشأن التكاثر اليومي (R_0) ، وهو مجرد شكل آخر من قيم eigenvalue الفورية.

المراجع الببليوغرافية

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, [حال: 01291211](#)
- N. Bacaër (2020) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. 80, 1021–1037, [DOI: 10.1007/s00285-019-01447-02279038](#) / [دوى: s00285-019-01447-02279038](#) ، [هال: 02509142](#)
- N. Bacaër (2020b) Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 29, [doi : 10.1051/mmnp/2020015](#), [hal : 02509142](#)
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, [hal : 01266292](#)
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.

- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) *Canard Cycles and Center Manifolds*. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. *Asymptotic Analysis II*, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, *ARIMA* 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, *Nonlinearity* 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) *Multiple Time Scale Dynamics*. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamic *Ann. I. Fourier* 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) *La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov’s theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. *Electron. J. Differ. Eq.* 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. *Differ. Equations Translations* 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. *Differ. Equations Translations* 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d’équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. *Mat. Sborn.* 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. *Ann. I. Fourier* 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. *Ann. I. Fourier* 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France* 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. *Scholarpedia* 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk* 39, 77–127.