

# О вероятности вымирания населения в медленной периодической среде

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем, Institut de Recherche pour le Développement, Les Cordeliers, Париж, Франция, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Ницца, Франция, lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ИТАР, Университет Монпелье, INRAE, Институт Агро, Монпелье, Франция, tewfik.sari@irstea.fr

## резюме

Нас интересует вероятность вымирания линейного процесса рождения и смерти с несколькими типами в периодической среде, когда период коэффициентов очень велик. Эта вероятность может представлять, как предел, разрыв в связи с уткой в медленно-быстрой динамической системе. Точка разрыва точно определяется на примере двух типов людей.

Ключевые слова: процесс рождения и смерти, периодическая среда, медленно-быстрая система

## 1. Введение

Оценка вероятности вымирания населения - это вопрос, который вмешивается, в частности, в природоохранную биологию и эпидемиологию. Во втором случае под населением подразумевается зараженное население. Классическая математическая модель для изучения такого рода проблем - это линейные процессы рождения и смерти с одним или несколькими типами людей (Méléard, 2016). Однако во многих ситуациях необходимо учитывать сезонность окружающей среды, что приводит к изучению этих процессов, когда коэффициенты рождения и смерти являются периодическими функциями времени (Bacaër and Ait Dads, 2014). Определенные группы населения или определенные эпидемии имеют коэффициенты, временная шкала которых относительно мала по сравнению с годовой сезонностью; поэтому мы вынуждены рассмотреть предел, где период коэффициентов очень велик. Когда жизненно важные параметры являются докритическими в течение части года (неблагоприятного сезона), вероятность вымирания как функция сезона, в котором начинается процесс, сходится к прерывистому пределу (Carmona and Gandon, 2019). Точка разрыва - перед началом неблагоприятного сезона.

Bacaër (2019) продолжил это исследование, по существу, в случае особой одного типа, отметив, в частности, что разрыв вероятности вымирания был связан с наличием в медленно-быстрой динамической системе «утки». То есть (см., Например, Лобри (2018, глава 5)) траектории, которая проходит определенное время вдоль привлекательной дуги, прежде чем следовать за отталкивающей дугой. Ниже мы предлагаем изучить пример с двумя типами индивидуумов, вдохновленных моделью передачи трансмиссивной болезни. Точка разрыва вероятности вымирания точно определена. Эта проблема осталась нерешенной (Carmona and Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

В разделе 2 представлена популяционная модель линейных процессов рождения и смерти с периодическими коэффициентами для нескольких типов людей. Объясняется, что вероятность вымирания связана с системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Когда период сходится к бесконечности, изменение переменной превращает эту систему в медленно-быструю систему с фиксированным периодом.

В разделе 3 мы представляем пример с двумя типами людей. Численное моделирование показывает, что вероятность исчезновения сходится к разрывному пределу и что точка разрыва определяется условием, которое включает в себя интеграл от доминирующего собственного значения некоторой матрицы. В разделе 4 мы демонстрируем с помощью нестандартных инструментов анализа, что именно это условие определяет точку разрыва. В разделе 5 мы представляем еще один пример с четырьмя типами людей. Численное моделирование предполагает, что условие того же типа все еще определяет точку разрыва. Однако нам не удалось продемонстрировать это в общих рамках, когда число типов людей строго больше двух.

## 2. Модель

Мы рассматриваем линейный процесс рождения и смерти с  $k$  типами ( $k \geq 1$ ) в периодической среде.  $T > 0$  - период среды. Мы даем себе две матричные функции  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  а также  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  размера  $k$  и периода  $T$  со следующими допущениями:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  представляет скорость, с которой люди типа  $J$  генерируют новых людей типа  $I$
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  скорость, с которой индивиды типа  $j$  превращаются в индивидов типа  $i$
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  представляет скорость, с которой люди типа  $j$  меняют тип или умирают, и  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- если  $U(t)$  это системное решение  $dU/dt = -B(t)U(t)$  с начальным условием  $U(0) = I$  (единичная матрица), то спектральный радиус матрицы  $U(T)$  доминирующим множителем Флоке является  $\rho(U(T)) < 1$
- матрица  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  неприводим для всех  $t$ .

Точнее, как в (Bacaër and Ait Dads, 2014), мы определяем

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  вероятность того, что  $N_i$  лица типа  $i$  в момент времени  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  соответствующая производящая функция.

У нас тогда

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Мы предполагаем, что в то время  $t_0$  Там есть  $n_i \geq 0$  особи типа  $i$  ( $n_i$  целые числа,  $1 \leq i \leq k$ ) с  $\sum_i n_i \geq 1$ , Мы можем предположить, что  $0 \leq t_0 < T$ , Согласно (Bacaër and Ait Dads, 2014), вероятность  $p(t_0, t_1)$  что население вымерло в этот второй момент, то есть не осталось особей разных типов,

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \dots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  является решением дифференциальной системы

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

с начальным условием  $z_i(0) = 0 \forall i$ ,

Ожидание числа особей типа  $i$  в момент времени  $t$  является решением

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

а также  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ , Мы определяем

- $V(t)$  системное решение  $dV/dt = C(t)V(t)$  с начальным условием  $V(0) = I$ ,
- $F = \rho(V(T))$  доминирующий множитель Флоке.

Si  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Если  $F > 1$ , эта вероятность наоборот сходится к пределу, строго меньшему 1. Это периодическая функция  $t_0$  (Bacaer and Ait Dads, 2014).

Мы предполагаем

- есть две периодические матричные функции периода 1, независимые от  $T$ ,  $a(s)$  а также  $b(s)$ , с

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  это фиксированное число
- $t_1 = t_0 + mT$  где  $m \geq 1$  - фиксированное целое число.

Наша цель - изучить предел

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

с точки зрения  $s_0$ , с  $0 \leq s_0 < 1$ , У нас также есть

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

которая является вероятностью вымирания после  $m$  периодов, когда начинается с одного человека типа  $i$ .

Мы определяем

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ ,

У нас тогда

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

с  $x_i(0) = 0 \forall i$ , Более того,  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ , У нас также есть  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$ ,  $0 \leq s \leq m$  (Bacaer and Ait Dads, 2014).

Если  $T$  сходится к  $\infty$ , другими словами, если  $\varepsilon \rightarrow 0$  система (2.1) может быть записана как медленно-быстрая автономная система с  $k$  быстрыми переменными  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) и медленная переменная  $x_{k+1}(s) = s$  с  $dx_{k+1}/ds = 1$ ,

Для тривиального стационарного решения  $x_i = 1 \forall i$  матрица Якоби правого члена системы (2.1) имеет вид  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ ,  $\tilde{c}$  обозначает матрицу, транспонированную из матрицы  $c$ . Согласно следствию из теоремы Перрона и Фробениуса для неприводимых матриц, все коэффициенты которых вне диагонали положительны или равны нулю (Allaire et al., 2018, примечание 6.2.13), матрицы  $c(s)$  а также  $\tilde{c}(s)$  имеют общее доминантное реальное собственное значение  $\Lambda(s)$  строго больше, чем действительная часть всех других собственных значений.

### 3. Пример

Давайте принимать

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

с  $\alpha(s) > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  а также  $\delta > 0$ ,  $\alpha(s)$  является непрерывной периодической функцией периода 1. Эта стохастическая модель основана на линейризованной детерминированной модели трансмиссивной болезни (Bacaer, 2007, раздел 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Зараженные векторы - тип 1. Зараженные люди - тип 2. Параметр  $\alpha(s)$  скорость, с которой зараженные люди передают свою инфекцию переносчикам, когда они укушены. Этот показатель является периодическим, поскольку популяция здоровых переносчиков также является периодической. Параметр  $\beta$  - это скорость, с которой векторы умирают. Параметр  $\gamma$  - это скорость, с которой векторы кусаются. Параметр  $\delta$  - это скорость выздоровления инфицированных людей. Затем система (2.1) записывается

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Обратите внимание, что участники справа отменяют друг друга в двух случаях:  $x_1(s) = 1$  а также  $x_2(s) = 1$ , или

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Два собственных значения матрицы  $c(s)$  являются действительными числами:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

Доминирующее собственное значение  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ , У нас есть  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ ,

Предположим, что есть сезон, неблагоприятный для распространения эпидемии, т.е.  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  с

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Предположим далее, что

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

В качестве примера, давайте возьмем  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  с  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $|\kappa| < 1$  а также

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Это последнее условие гарантирует, что действительно неблагоприятное время года. Более конкретно, давайте выберем  $\bar{\alpha} = 3$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  а также  $\delta = 1$ . Эти значения не очень реалистичны, но они подчеркивают это явление. У нас тогда  $s_1 \simeq 0,323$  а также  $s_2 \simeq 0,677$ . Численно можно проверить, что условие (3.8) выполнено. Давайте также возьмем  $T = 1000$ ,  $m = 3$  а также  $s_0 = 0,25$ . На рисунке 1 представлено решение системы (3.2) - (3.3) с начальным условием  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Мы использовали программное обеспечение Scilab и решили дифференциальную систему для  $\log(1 - x_1(s))$  а также  $\log(1 - x_2(s))$ . Затем мы вернулись к исходным переменным. Мы также нарисовали постоянную функцию, равную 1, и кривые (3.4). Обратите внимание на следующее:

- в окрестностях  $s = 0$  кривые почти вертикальные (на рисунках не видно);
- $x_1(s)$  а также  $x_2(s)$  сходятся на периодическом решении;
- асимптотически  $x_1(s)$  а также  $x_2(s)$  очень близко к 1 для значений  $s$  с  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ , особенно для  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$  но и для  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  с  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ . В последнем случае мы имеем  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . Есть "утка".

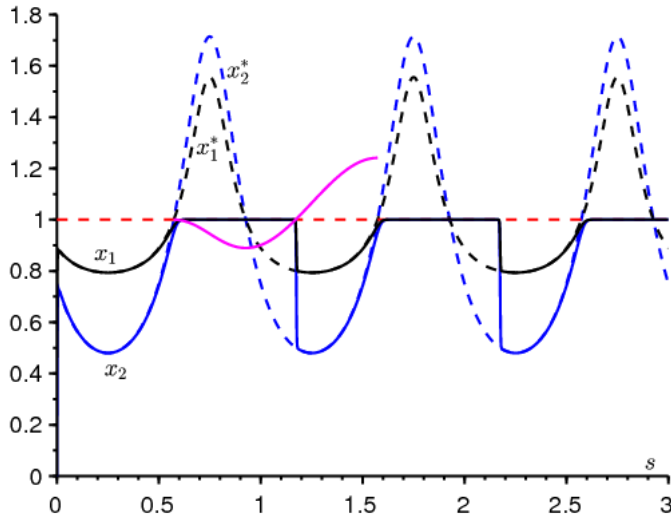


Рисунок 1. В зависимости от  $s$  кривые  $x_1(s)$  (в черном цвете) и  $x_2(s)$  (синим цветом), а также медленные кривые  $x_1^*(s)$  (пунктирный черный),  $x_2^*(s)$  (пунктирный синий) и 1 (пунктирный красный). В розовом, часть функции  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ ,

На рисунке 2 показано, как величины, которые нас интересуют, вероятности вымирания после  $m$  периодов  $x_1(m)$  а также  $x_2(m)$ , варьируются в зависимости от  $s_0$ . Мы также нарисовали кривые, выведенные из (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

Рисунок 2 предполагает, что  $x_1(m)$  а также  $x_2(m)$  сходятся, когда  $T \rightarrow +\infty$ , к пределам, равным 1, если  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ ,  $s_0 = s^*$  это разрыв границ. Проблема состоит в том, чтобы определить этот момент.

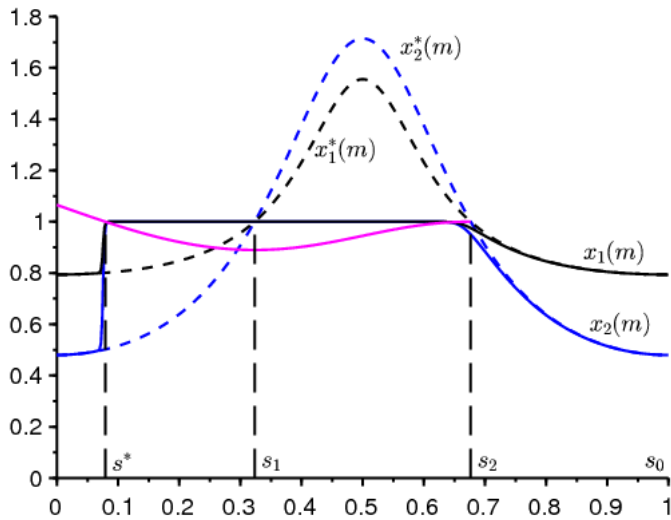


Рисунок 2. Вероятности вымирания после  $m$  периодов  $x_1(m)$  (в черном цвете) и  $x_2(m)$  (темно-синий) в зависимости от  $s_0$ , Формулы для  $x_1^*(m)$  а также  $x_2^*(m)$  расставлены в розовом, часть функции  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^1 \Lambda(s) ds$ ,

В следующем разделе мы продемонстрируем, что решения  $x_1(s)$  а также  $x_2(s)$  на рисунке 1, которые очень близки к 1 для  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , неожиданно отклониться от окрестности 1 для  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  с

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Другими словами, эти решения отклоняются от окрестности 1 в точке  $s = q$ . Более того,  $q = s_0 + 1 - s^*$  а также

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Именно это уравнение определяет  $s^*$  однозначно. Действительно, если  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$  тогда мы имеем

- $\phi(s_1) < 0$  из-за условия (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  из-за условия (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2 - 1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

из-за условия (3.8).

Так что есть единственное действительное число  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  с  $\phi(s^*) = 0$ . В примере мы находим численно  $s^* \simeq 0,079$ ,

**Запись.** Условие (3.8) не связано с возможным сверхкритическим характером системы (3.1). Это также хорошо известно в теории Флоке. Действительно, если мы возьмем для примера  $c = 0,7$  вместо  $c = 1$  мы находим численно, что доминирующим множителем Флоке является  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  пока  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ ,

## 4. Функция ввода-вывода для транскритической бифуркации

Чтобы оправдать то, что только что было сказано о точке разрыва, мы более широко рассмотрим медленное быстрое поле с двумя быстрыми измерениями и медленным измерением, например (3.2) - (3.3). Предполагается, что быстрая динамика имеет особую точку с двумя различными действительными собственными значениями, одно из которых всегда отрицательное, а второе отрицательное, а затем положительное. Поэтому это транскритическая бифуркация, когда состояние равновесия быстрой динамики является устойчивым узлом, а затем седловой точкой.

Решение, близкое к устойчивой особой точке, не покинет своей окрестности, как только оно станет нестабильным, но будет оставаться близким в течение определенного времени. Цель состоит в том, чтобы вычислить функцию ввода-вывода для этой транскритической бифуркации, то есть определить момент, когда решение удаляется от особой точки (момент выхода), в соответствии с той, где оно приближается (время входа). Это явление, известное как «задержка бифуркации», связано с понятием утиных растворов и избыточной устойчивости.

Концепция функции ввода-вывода и концепция решения утки впервые были изучены в начале 1980-х годов с использованием нестандартных методов анализа. См. Обзорные статьи (Бенуа и др., 1981; Картье, 1982; Звонкин и Шубин, 1984). Функция ввода-вывода сначала рассчитывалась для уток уравнения Ван-дер-Поля (Бенуа, 1981; Бенуа и др., 1981), а затем распространялась на любую медленно-быструю систему самолета (Динер и Динер, 1983).

Позднее существование утиных решений было обнаружено с помощью классических методов асимптотического развития (Eckhaus, 1983) и геометрической теории сингулярных возмущений (Dumortier and Roussarie, 1996). Функция ввода-вывода для плоской системы была также получена с помощью геометрической теории сингулярных возмущений (De Maesschalck and Schecter, 2016).

Более подробную информацию о вкладе нестандартной французской школы в проблему уток и задержки бифуркации читатель может проконсультировать (Cartier, 1982; Fruchard and Schäfer, 2008). Более полный взгляд на различные подходы в теории сингулярных возмущений см. В недавней монографии (Kuehn, 2015), а также в статье (Wechselberger, 2007), посвященной уткам. Понятие чрезмерной стабильности и задержки в бифуркации см. Также (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Fruchard and Schäfer, 2008; Wallet, 1990, 1994) и ссылки, которые они содержат.

Частный случай медленно-быстрого поля в размерности два, с быстрой динамикой размерности один, которая привлекательна, а затем отталкивающая, хорошо понятна, см. (Diener and Diener, 1983). Случай бифуркации Хопфа, когда два собственных значения являются комплексными сопряженными и их реальная часть меняет знак, был рассмотрен несколькими авторами, см. (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener and Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). См. Также полную и образовательную презентацию в недавней монографии (Kuehn, 2015, глава 12).

Рассмотрим дифференциальную систему на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  с медленной переменной  $s \in \mathbb{R}$  и с двумя быстрыми переменными  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  является дифференцируемой функцией в  $(s, x)$ , а также  $\varepsilon > 0$  бесконечно мало. Мы используем словарь нестандартного анализа, см. (Diener and Reeb, 1989) или Loby (2018, глава 5). Мы предполагаем  $f(s, 0) = 0 \forall s$ ,

$x = 0$  не только медленная кривая системы (4.1), то есть решение уравнения  $f(s, x) = 0$ , но также частное решение системы (4.1). Определим квадратную матрицу  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Мы предполагаем, что  $M(s)$  имеет два разных собственных значения,  $\lambda_1(s)$  а также  $\lambda_2(s)$  один из которых всегда остается отрицательным, а другой меняет знак. С  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ , у нас есть :

- $\lambda_1(s) < 0$  а также  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  а также  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ ,

В геометрической теории сингулярных возмущений мы изучаем систему (4.1) в расширенном фазовом пространстве  $(x, \varepsilon)$ , Добавляем уравнение  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ , Единое собственное значение быстрой динамики меняет знак. Эту ситуацию можно свести к случаю систем на плоскости, уменьшив центральное многообразие дополненной системы ((4.1),  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) в точке равновесия  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ , Для получения более подробной информации см. (Boudjellaba and Sari, 2009; Кгера и Szmolyan, 2001). С этим сокращением мы получаем плоскую систему, функция ввода-вывода которой определяется интегралом от собственного значения, которое меняет знак (Diener and Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

В этом уравнении  $p$  - момент входа, а  $q$  - момент выхода. Сокращение предсказывает, что функция ввода-вывода задается формулой (4.3) локально, близко к значению транскритической бифуркации. Далее мы предлагаем вычислить глобальную функцию ввода-вывода. Частный случай медленного быстрого трехмерного поля с развязанной быстрой динамикой был рассмотрен в (Boudjellaba and Sari, 2009).

Мы используем словарь нестандартного анализа. Что именно представляет собой эта теория, не очень важно для понимания этой статьи. Читатель может иметь в виду интуитивное чувство бесконечно малого языка и успокаивать себя, зная, что нестандартный анализ обеспечивает строгую основу для концепций бесконечно малых и бесконечно больших. Для введения в нестандартный анализ см. (Diener and Reeb, 1989). Для получения дополнительной информации об использовании нестандартного анализа в теории дифференциальных уравнений читатель может обратиться к (Cartier, 1982), (Zvonkin and Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, глава 19.5). или (Лобри, 2018, глава 5).

Поэтому предположим, что параметр  $\varepsilon$  в (4.1) бесконечно мал. Решение  $x(s) = 0$  это "утка", так как она привлекательна для  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  и отталкивающая для  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ , Цель состоит в том, чтобы изучить решения системы (4.1), бесконечно близкие к этому решению. Быстрая динамика привлекательна на интервале  $[\sigma_0, \sigma_1[$ . Мы принимаем  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ , Решение системы (4.1) с начальным условием в бассейне притяжения 0 быстро движется к медленной кривой  $x = 0$  и остается бесконечно близко к этой, пока  $s < \sigma_1$ , Решение не оставляет бесконечно малую окрестность 0 в этот момент, но продолжает следовать за 0 в течение всего интервала. Момент  $q > \sigma_1$  для которого  $x(s)$  больше не бесконечно близко к 0 называется временем выхода. Цель состоит в том, чтобы определить функцию  $p \mapsto q$ . Покажем, что  $q$  определяется уравнением (4.3). Точнее, мы имеем следующий результат:

## теорема

Мы определяем

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  начальное условие, расположенное в бассейне притяжения 0, но не бесконечно близко к инвариантному многообразию быстрой динамики, соответствующей собственному значению  $\lambda_1(p)$ ,
- $q$  по уравнению (4.3).

Так  $\forall s \in ]p, q[$  не бесконечно близко к  $p$  или  $q$ , имеем:  $x(s) \simeq 0$ . Более того,  $x(q)$  не бесконечно близко к 0. При  $p$ ,  $x(s)$  приближается к 0 по быстрой динамической орбите

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

кто проходит  $x(p)$ , В  $\delta$ ,  $x(s)$  удаляется от 0 вдоль неустойчивого разделителя 0 для быстрой динамики

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Доказательство . У нас есть  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ ,  $M(s)$  это матрица (4.2). У нас есть

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Система (4.1) становится

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

Матрица  $M(s)$  имеет два различных собственных значения. Следовательно, существует обратимая дифференцируемая матрица  $P(s)$  с

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Преобразуем уравнение (4.5) с заменой переменной  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Мы преобразуем это уравнение с помощью увеличительного стекла  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

Условия (4.4) проверяются  $g(s, x)$ , Итак, мы имеем

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

а также  $g_1(s, U, \varepsilon)$  это непрерывная функция. Поэтому мы имеем

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$  это непрерывная функция. Определим компоненты векторов:  $U = (U_1, U_2)$  а также  $h = (h_1, h_2)$ , Система становится

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Эта система состоит из двух слабосвязанных уравнений. Изменение переменных

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

превращает систему в

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

с

$$k_1(s, r, \theta, \varepsilon) = \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon),$$

$$k_2(s, r, \theta, \varepsilon) = -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon).$$

$k_2$  является непрерывной функцией при  $r = 0$ , потому что  $h_1 = O(r)$  а также  $h_2 = O(r)$ , Мы выбираем  $r_0$  с  $0 < r_0 < 1$  и так что шар с центром 0 и радиусом  $r_0$  входит в первоначальный аттракцион бассейн. Применить изменение переменной  $v = \varepsilon \ln(r)$  в регион  $0 < r < r_0$ , который отправляется в регион, определенный  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ , Мы получаем систему:

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \quad (4.6)$$

Эта система с сингулярным возмущением, медленное многообразие которой представляет собой объединение двух плоскостей  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ . Потому что  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  для всех  $s$  плоскость  $\theta = \pi/2$  привлекательна, а плоскость  $\theta = 0$  отталкивающая. Любое решение, приходящее из точки, не бесконечно близкой к плоскости отталкивания, становится бесконечно близко к плоскости притяжения за бесконечно малое время. Решения, которые приходят из точки, очень близкой к плоскости отталкивающего вещества, могут довольно долго оставаться вблизи этой плоскости, прежде чем отойти от нее. Применяется теорема Тихонова (Лобри и др., 1998; Тихонов, 1952). Мы выбираем  $p \in [\sigma_0, \sigma_1]$  а также  $x(p)$  начальное условие, расположенное в бассейне притяжения 0, но не бесконечно близкое к инвариантному многообразию быстрой динамики

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

соответствует собственному значению  $\lambda_1(p)$ , Быстрая динамика сводит соответствующее решение к бесконечно близкому к 0. В плоскости  $(U_1, U_2)$  это не очень близко к медленному разнообразию  $U_2 = 0$  и, следовательно, плоскости  $\theta = 0$ . Следовательно, решение быстро приближается к плоскости  $\theta = \pi/2$ , затем аппроксимируется решением медленной системы.

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Мы выводим, что

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Поэтому мы снова  $r(s) = r_0$  то есть  $v(s)$  бесконечно мал, когда  $s$  асимптотически равен  $q$ , определяемому (4.3). Для этого значения  $q$  начало координат является седловой точкой для быстрой динамики

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Следовательно, решение удаляется в точке  $q$  от седловой точки вдоль своего неустойчивого сепаратора. Мы использовали здесь, что в момент  $p$  решение не было бесконечно близко к медленному многообразию  $\theta = \pi/2$ , что переводит факт, что решение не прибыло в плоскость  $(U_1, U_2)$  будучи очень близко к  $U_1 = 0$ , Это завершает доказательство.

Вернемся к примеру (3.2) - (3.3). Мы определяем  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ , Следующая быстрая система, где  $s$  считается параметром,

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

имеет две точки равновесия (квазистационарные состояния)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  а также  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  определяется формулой (3.4). Якобиева матрица в  $(1, 1)$  имеет вид  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ , Как мы уже видели, два собственных значения всегда различны, они являются действительными числами. Два собственных значения отрицательны тогда и только тогда, когда  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ , Следовательно, особая точка  $(1, 1)$  является привлекательным узлом для значений  $s$ , для которых  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$  и седловая точка, если  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ , Собственные значения  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  а также  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , определяемый формулой (3.5).

С  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  получаем матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

У нас есть

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Собственные значения имеют отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, когда  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Поэтому в точках, где  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$  существуют транскритические бифуркации, потому что следующие два равновесия встречаются и обмениваются их стабильностью:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  а также  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ ,

У нас есть

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  если  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[ \text{ modulo } 1$
- $\lambda_2(s) > 0$  если  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[ \text{ modulo } 1$ ,

Мы можем применить теорему и вычислить функцию ввода-вывода, как мы это делали в разделе 2.

## 5. Обобщение

Это исследование, вероятно, распространяется на проблемы с более чем двумя быстрыми уравнениями и одним медленным уравнением. Рассмотрим, например, линеаризованную систему с четырьмя быстрыми уравнениями (Васаёр, 2007, раздел 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Мы предполагаем  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0, \psi(\cdot) > 0$  является периодической функцией периода 1. Это также модель передачи трансмиссивной болезни. Первые два компонента представляют векторы, инфицированные в латентной фазе и в инфекционной фазе, в то время как последние два компонента представляют людей, инфицированных в латентной фазе и в инфекционной фазе. Система (2.1) становится,  $c \varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

Предположение состоит в том, что функция ввода-вывода задается формулой (4.3), где  $\lambda_2(s)$  должно быть заменено доминантным реальным собственным значением  $\Lambda(s)$  матрицы  $c(s)$ , как мы могли проверить на численном примере (рисунок 3). Значения параметров  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ ,  $m = 3$  а также  $T = 2000$ . Имеем характеристическое уравнение для собственных значений матрицы  $\lambda c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

Мы выводим, что  $\Lambda(s) < 0$  если и только если

$$\frac{\beta\gamma\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

что происходит для  $s_1 < s < s_2$  с  $s_1 \simeq 0,323$  а также  $s_2 \simeq 0,677$ . С помощью формулы (4.3) находим  $s^* \simeq 0,047$  что, по-видимому, хорошо соответствует внезапному скачку вероятности вымирания на рисунке 3.

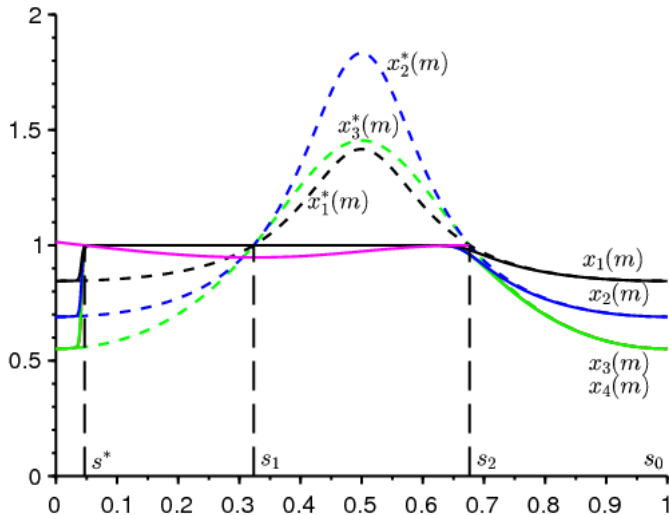


Рисунок 3. Вероятности вымирания после  $m$  периодов  $x_1(m)$  (В черном),  $x_2(m)$  (синим цветом), а также  $x_3(m)$  а также  $x_4(m)$  (зеленым, неразличимым) согласно  $s_0$ . Пунктирные, медленные кривые. В розовом мы нарисовали кусок функции  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ ,

## Библиографические ссылки

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfer, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfer (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ». Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.