

# Sobre a probabilidade de extinção de uma população em um ambiente periódico lento

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Unidade matemática e de modelagem computacional de sistemas complexos, Institut de Recherche pour le Développement, Les Cordeliers, Paris, França, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Nice, França, lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP, Universidade de Montpellier, INRAE, Instituto Agro, Montpellier, França, tewfik.sari@irstea.fr

## resumo

Estamos interessados na probabilidade de extinção de um processo linear de nascimento e morte com vários tipos em um ambiente periódico, quando o período dos coeficientes é muito grande. Essa probabilidade pode apresentar, no limite, uma descontinuidade em conexão com um pato em um sistema dinâmico lento-rápido. O ponto da descontinuidade é determinado com precisão em um exemplo com dois tipos de indivíduos.

Palavras-chave: processo de nascimento e morte, ambiente periódico, sistema lento-rápido

## 1. Introdução

A estimativa da probabilidade de extinção de uma população é uma questão que intervém em particular na biologia da conservação e epidemiologia. Neste segundo caso, por população entende-se população infectada. Um modelo matemático clássico para estudar esse tipo de problema é o dos processos lineares de nascimento e morte com um ou mais tipos de indivíduos (Méléard, 2016). No entanto, em muitas situações, a sazonalidade do ambiente deve ser levada em consideração, o que leva ao estudo desses processos quando os coeficientes de nascimento e morte são funções periódicas do tempo (Bacaër e Ait Dads, 2014). Certas populações ou certas epidemias têm coeficientes cuja escala de tempo é relativamente curta em comparação com a sazonalidade anual; portanto, somos levados a considerar o limite em que o período dos coeficientes é muito grande. Quando os parâmetros vitais são subcríticos durante parte do ano (estação desfavorável), a probabilidade de extinção em função da estação em que o processo inicia converge para um limite descontinuo (Carmona e Gandon, 2019). O ponto da descontinuidade é antes do início da temporada desfavorável.

Bacaër (2019) continuou este estudo essencialmente no caso de um único tipo de indivíduos, observando, em particular, que a descontinuidade da probabilidade de extinção estava ligada à presença em um sistema dinâmico lento-rápido de um "pato". Ou seja (ver, por exemplo, Lobry (2018, capítulo 5)) de uma trajetória que percorre um arco atraente por um certo tempo antes de seguir um arco repulsivo. Propomos abaixo estudar um exemplo com dois tipos de indivíduos inspirados em um modelo de transmissão de uma doença transmitida por vetores. O ponto de descontinuidade da probabilidade de extinção é determinado com precisão. Esse problema permaneceu sem solução (Carmona e Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

A seção 2 apresenta o modelo populacional, o de processos lineares de nascimento e morte com coeficientes periódicos com vários tipos de indivíduos. É explicado que a probabilidade de extinção está ligada a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Quando o período converge para o infinito, uma mudança de variável transforma esse sistema em um sistema lento-rápido com um período fixo.

Na seção 3, apresentamos um exemplo com dois tipos de indivíduos. Simulações numéricas sugerem que a probabilidade de extinção converge para um limite descontinuo e que o ponto de descontinuidade é determinado por uma condição que envolve a integral do autovalor dominante de uma determinada matriz. Na seção 4, demonstramos com ferramentas de análise não padronizadas que é essa condição que determina o ponto de descontinuidade. Na seção 5, apresentamos outro exemplo com este tempo quatro tipos de indivíduos. Uma simulação numérica sugere que uma condição do mesmo tipo ainda determine o ponto de descontinuidade. No entanto, não conseguimos demonstrar isso em uma estrutura geral quando o número de tipos de indivíduos é estritamente maior que dois.

## 2. O modelo

Nós consideramos um processo linear de nascimento e morte com  $k$  tipos ( $k \geq 1$ ) em um ambiente periódica.  $T > 0$  é o período do ambiente. Nós nos damos duas funções matriciais  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  e  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  de tamanho  $ke$  período  $T$  com as seguintes premissas:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  representa a taxa na qual indivíduos do tipo  $j$  geram novos indivíduos do tipo  $i$
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  é a taxa na qual indivíduos do tipo  $j$  se transformam em indivíduos do tipo  $i$
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  representa a taxa na qual os indivíduos do tipo  $j$  mudam de tipo ou morrem, e  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- E se  $U(t)$  é solução do sistema  $dU/dt = -B(t)U(t)$  com a condição inicial  $U(0) = I$  (a matriz de identidade), então o raio espectral da matriz  $U(T)$ , ou seja, o multiplicador Floquet dominante, é  $\rho(U(T)) < 1$
- o Matrix  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  é irredutível para todos os  $t$ .

Mais precisamente, como em (Bacaër e Ait Dads, 2014), definimos

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  a probabilidade de ter  $N_i$  indivíduos do tipo  $i$  no momento  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  a função geradora correspondente.

Nós temos então

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i] [B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t) Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Assumimos que no momento  $t_0$  Há sim  $n_i \geq 0$  indivíduos do tipo  $i$  ( $n_i$  são inteiros,  $1 \leq i \leq k$ ) com  $\sum_i n_i \geq 1$ . Podemos supor que  $0 \leq t_0 < T$ . Segundo (Bacaër e Ait Dads, 2014), a probabilidade  $p(t_0, t_1)$  que a população está extinta neste segundo instante, ou seja, que nenhum indivíduo dos diferentes tipos permanece, é dado por

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  é a solução do sistema diferencial

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t) z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

com a condição inicial  $z_i(0) = 0 \forall i$ .

A expectativa do número de indivíduos do tipo  $i$  no momento  $t$  é uma solução de

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

e  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ . Nós definimos

- $V(t)$  a solução do sistema  $dV/dt = C(t)V(t)$  com a condição inicial  $V(0) = I$ .
- $F = \rho(V(T))$  o multiplicador dominante de Floquet.

Se  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Se  $F > 1$ , essa probabilidade converge, pelo contrário, para um limite estritamente menor que 1. É uma função periódica de  $t_0$  (Bacaër e Ait Dads, 2014).

Nós presumimos

- existem duas funções matriciais periódicas do período 1, independentes de  $T$ ,  $a(s)$  e  $b(s)$  com

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  é um número fixo
- $t_1 = t_0 + mT$ , onde  $m \geq 1$  é um número inteiro fixo.

Nosso objetivo é estudar o limite

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

em termos de  $s_0$  com  $0 \leq s_0 < 1$ . Nos também temos

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

qual é a probabilidade de extinção após  $m$  períodos ao iniciar a partir de um único indivíduo do tipo  $i$ .

Nós definimos

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ .

Nós temos então

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

com  $x_i(0) = 0 \forall i$ . Além disso,  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ . Nos também temos  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$ ,  $0 \leq s \leq m$  (Bacaër e Ait Dads, 2014).

Se  $T$  convergir para  $\infty$ , em outras palavras, se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o sistema (2.1) pode ser escrito como um sistema autônomo lento-rápido com  $k$  variáveis rápidas  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) e uma variável lenta  $x_{k+1}(s) = s$  com  $dx_{k+1}/ds = 1$ .

Para a solução estacionária trivial  $x_i = 1 \forall i$ , a matriz jacobiana do membro direito do sistema (2.1) é  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ .  $\tilde{c}$  denota a matriz transposta da matriz  $c$ . De acordo com um corolário do teorema de Perron e Frobenius para matrizes irredutíveis cujos coeficientes fora da diagonal são todos positivos ou zero (Allaire et al., 2018, nota 6.2.13), matrizes  $c(s)$  e  $\tilde{c}(s)$  tem um autovalor real dominante comum  $\Lambda(s)$ , estritamente maior que a parte real de todos os outros autovalores.

### 3. um exemplo

Vamos levar

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

com  $\alpha(s) > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  e  $\delta > 0$ .  $\alpha(s)$  é uma função contínua periódica do período 1. Esse modelo estocástico é inspirado no modelo determinístico linearizado para uma doença transmitida por vetores (Bacaër, 2007, Seção 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Os vetores infectados são do tipo 1. As pessoas infectadas são do tipo 2. O parâmetro  $\alpha(s)$  é a taxa na qual as pessoas infectadas transmitem sua infecção a vetores quando são picadas. Essa taxa é periódica porque a população de vetores saudáveis também é periódica. O parâmetro  $\beta$  é a taxa na qual os vetores morrem. O parâmetro  $\gamma$  é a taxa na qual os vetores mordem. O parâmetro  $\delta$  é a taxa na qual as pessoas infectadas se recuperam. O sistema (2.1) é então escrito

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Observe que os membros à direita se cancelam em dois casos:  $x_1(s) = 1$  e  $x_2(s) = 1$  ou

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Os dois valores próprios da matriz  $c(s)$  são números reais:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

O autovalor dominante é  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ . Nós temos  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ .

Suponha que haja uma estação desfavorável para a transmissão da epidemia, ou seja,  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  com

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Suponha ainda que

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Como exemplo, vamos dar  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  com  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $|\kappa| < 1$  e

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Esta última condição garante que haja de fato uma estação desfavorável. Mais especificamente, vamos escolher  $\bar{\alpha} = 3$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 1$ . Esses valores não são muito realistas, mas destacam o fenômeno. Nós temos então  $s_1 \simeq 0,323$  e  $s_2 \simeq 0,677$ . Pode-se verificar numericamente se a condição (3.8) é satisfeita. Vamos também  $T = 1000$ ,  $m = 3$  e  $s_0 = 0,25$ . A figura 1 representa a solução do sistema (3.2) - (3.3) com a condição inicial  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Utilizamos o software Scilab e resolvemos o sistema diferencial para  $\log(1 - x_1(s))$  e  $\log(1 - x_2(s))$ . Em seguida, retornamos às variáveis iniciais. Também desenhamos a função constante igual a 1 e as curvas (3.4). Observe o seguinte:

- no bairro de  $s = 0$ , as curvas são quase verticais (não visíveis nas figuras);
- $x_1(s)$  e  $x_2(s)$  convergir para uma solução periódica;
- assintoticamente,  $x_1(s)$  e  $x_2(s)$  estão muito próximos de 1 para os valores de  $s$  com  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ , especialmente para  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ , mas também para  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  com  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ . Neste último caso, temos  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . Há um "pato".

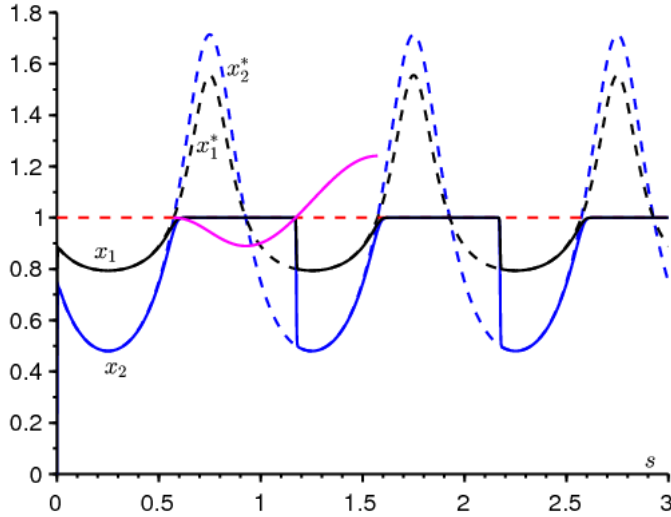


Figura 1. Em função de  $s$ , as curvas  $x_1(s)$  (em preto) e  $x_2(s)$  (em azul), bem como as curvas lentas  $x_1^*(s)$  (preto pontilhado),  $x_2^*(s)$  (azul pontilhado) e 1 (vermelho pontilhado). Em rosa, uma parte da função  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ .

A Figura 2 mostra como as quantidades que nos interessam, as probabilidades de extinção após  $m$  períodos  $x_1(m)$  e  $x_2(m)$ , variar dependendo da  $s_0$ . Também desenhamos as curvas deduzidas de (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

A Figura 2 sugere que  $x_1(m)$  e  $x_2(m)$  convergir quando  $T \rightarrow +\infty$ , para limites iguais a 1 se  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ .  $s_0 = s^*$  é uma descontinuidade dos limites. O problema é determinar este ponto.

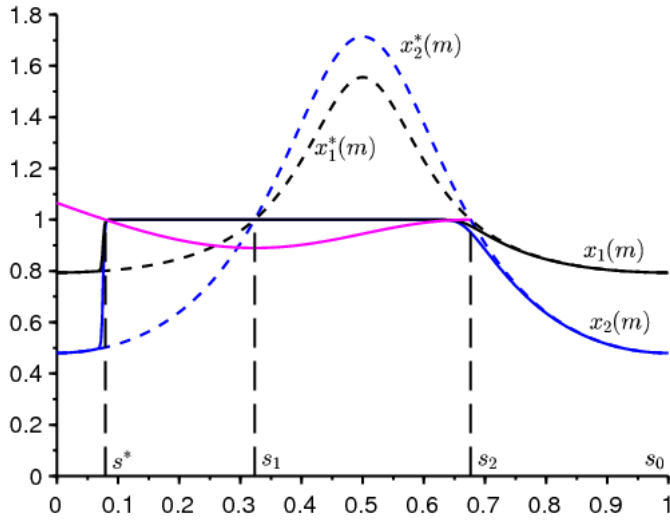


Figura 2. Probabilidades de extinção após  $m$  períodos  $x_1(m)$  (em preto) e  $x_2(m)$  (em azul escuro) dependendo da  $s_0$ . As fórmulas para  $x_1^*(m)$  e  $x_2^*(m)$  são pontilhadas. Em rosa, uma parte da função  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^1 \Lambda(s) ds$ .

Demonstraremos na seção a seguir que as soluções  $x_1(s)$  e  $x_2(s)$  na Figura 1, que estão muito perto de 1 para  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , desviar-se repentinamente do bairro 1 para  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  com

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Em outras palavras, essas soluções se desviam da vizinhança de 1 no ponto  $s = q$ . Além disso,  $q = s_0 + 1 - s^*$  e

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

É essa equação que determina  $s^*$  unicamente. De fato, se  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ , então nós temos

- $\phi(s_1) < 0$  por causa da condição (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  por causa da condição (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

por causa da condição (3.8).

Portanto, há um único número real  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  com  $\phi(s^*) = 0$ . No exemplo, encontramos numericamente  $s^* \simeq 0,079$ .

**Nota.** A condição (3.8) não tem conexão com um possível caráter supercrítico do sistema (3.1). Também é bem conhecido na teoria de Floquet. De fato, se tomarmos, por exemplo,  $c = 0,7$  ao invés de  $c = 1$ , descobrimos numericamente que o multiplicador Floquet dominante é  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  enquanto  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ .

## 4. A função de entrada e saída para uma bifurcação transcritical

Para justificar o que foi dito sobre o ponto de descontinuidade, consideramos mais geralmente um campo lento-rápido com duas dimensões rápidas e uma dimensão lenta, como (3.2) - (3.3). Supõe-se que a dinâmica rápida tenha um ponto singular com dois autovalores reais distintos, dos quais um é sempre negativo e o segundo é negativo e depois positivo. Portanto, é uma bifurcação transcritical em que o estado de equilíbrio da dinâmica rápida é um nó estável e depois um ponto de sela.

Uma solução próxima do ponto singular estável não deixará sua vizinhança assim que se tornar instável, mas continuará próxima por um certo tempo. O objetivo é calcular a função de entrada e saída para essa bifurcação transcritical, ou seja, definir o instante em que a solução se afasta do ponto singular (instante de saída), de acordo com o local onde está é abordado (horário de entrada). Esse fenômeno conhecido como "atraso da bifurcação" está ligado à noção de soluções e superestabilidade de pato.

O conceito de função de entrada e saída e o conceito de solução de pato foram estudados pela primeira vez no início dos anos 80 com métodos de análise não padronizados. Ver artigos de revisão (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin e Shubin, 1984). A função de entrada e saída foi calculada primeiro para os patos da equação de Van der Pol (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) e depois estendida a qualquer sistema lento e rápido do avião (Diener e Diener, 1983).

Mais tarde, a existência de soluções de pato foi encontrada com os métodos clássicos de desenvolvimento assintótico (Eckhaus, 1983) e pela teoria geométrica de distúrbios singulares (Dumortier e Roussarie, 1996). A função de entrada e saída para um sistema plano também foi obtida pela teoria geométrica de perturbações singulares (De Maesschalck e Schechter, 2016).

Para mais detalhes sobre a contribuição da escola francesa não padronizada para o problema dos patos e o atraso na bifurcação, o leitor pode consultar (Cartier, 1982; Fruchard e Schäfer, 2008). Para uma visão mais completa das várias abordagens da teoria dos distúrbios singulares, consulte a monografia recente (Kuehn, 2015), bem como o artigo (Wechselberger, 2007) dedicado aos patos. Para a noção de superestabilidade e atraso na bifurcação, consulte também (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Fruchard e Schäfer, 2008; Wallet, 1990, 1994) e as referências que elas contêm.

O caso particular de um campo lento-rápido na dimensão dois, com uma dinâmica rápida da dimensão um que é atraente e depois repulsiva, é bem compreendido, veja (Diener e Diener, 1983). O caso da bifurcação de Hopf, onde dois autovalores são conjugados complexos e sua parte real muda de sinal, foi considerado por vários autores (ver Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener e Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Veja também a apresentação completa e educacional na monografia recente (Kuehn, 2015, capítulo 12).

Considere um sistema diferencial em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  com uma variável lenta  $s \in \mathbb{R}$  e com duas variáveis rápidas  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função diferenciável em  $(s, x)$  e  $\varepsilon > 0$  é infinitamente pequeno. Utilizamos o vocabulário da análise não-padrão, ver (Diener e Reeb, 1989) ou Lobry (2018, capítulo 5). Nós presumimos  $f(s, 0) = 0 \forall s$ .

$x = 0$  não é apenas uma curva lenta do sistema (4.1), ou seja, uma solução da equação  $f(s, x) = 0$ , mas também uma solução específica do sistema (4.1). Definimos a matriz quadrada  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Supomos que  $M(s)$  tem dois autovalores distintos,  $\lambda_1(s)$  e  $\lambda_2(s)$  um dos quais permanece sempre negativo e o outro muda de sinal. Com  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ , temos :

- $\lambda_1(s) < 0$  e  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  e  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ .

Na teoria geométrica das perturbações singulares estudamos o sistema (4.1) no espaço de fase estendido  $(x, \varepsilon)$ . Nós adicionamos a equação  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ . Um único autovalor da dinâmica rápida muda de sinal. Esta situação pode ser reduzida ao caso de sistemas no avião, pela redução na variedade central do sistema aumentado ((4.1),  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) no seu ponto de equilíbrio  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ . Para mais detalhes, consulte (Boudjellaba e Sari, 2009; Krupa e Szmolyan, 2001). Com essa redução, obtemos um sistema planar cuja função de entrada e saída é dada pela integral do valor próprio que altera o sinal (Diener e Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

Nesta equação,  $p$  é o instante de entrada e  $q$  é o instante de saída. A redução prediz que a função de entrada e saída é dada pela fórmula (4.3) localmente, próximo ao valor da bifurcação transcítica. Propomos a seguir calcular a função global de entrada e saída. O caso especial de um campo tridimensional lento-rápido com dinâmica rápida dissociada foi considerado em (Boudjellaba e Sari, 2009).

Usamos o vocabulário da análise não padronizada. O que exatamente é essa teoria não é muito importante para a compreensão deste artigo. O leitor pode ter em mente o senso intuitivo da linguagem infinitesimal e se tranquilizar sabendo que a análise não-padrão fornece uma base rigorosa para os conceitos de infinitamente pequeno e infinitamente grande. Para uma introdução à análise não-padrão, consulte (Diener e Reeb, 1989). Para obter mais informações sobre o uso da análise não-padrão na teoria das equações diferenciais, o leitor pode consultar (Cartier, 1982), (Zvonkin e Shubin, 1984) (Kuehn, 2015, capítulo 19.5) ou (Lobry, 2018, capítulo 5).

Portanto, supomos que o parâmetro  $\varepsilon$  em (4.1) seja infinitamente pequeno. A solução  $x(s) = 0$  é um "pato", pois é atraente para  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  e repulsivo por  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ . O objetivo é estudar as soluções do sistema (4.1) infinitamente próximas a essa solução. A dinâmica rápida é atraente ao longo do intervalo  $[\sigma_0, \sigma_1[$ . Nós levamos  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ . Uma solução do sistema (4.1) com uma condição inicial na bacia de atração 0 avança rapidamente em direção à curva lenta  $x = 0$  e permanece infinitamente próxima a essa, desde que  $s < \sigma_1$ . A solução não deixa a vizinhança infinitesimal de 0 nesse instante, mas continua a seguir o 0 durante um intervalo inteiro. O momento  $q > \sigma_1$  para qual  $x(s)$  não é mais infinitamente próximo de 0 é chamado de tempo de saída. O objetivo é determinar a função  $p \mapsto q$ . Mostraremos que  $q$  é definido pela equação (4.3). Mais precisamente nós temos o seguinte resultado:

### Teorema

Nós definimos

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  uma condição inicial localizada na bacia de atração 0, mas que não é infinitamente próxima da variedade invariante da dinâmica rápida correspondente ao valor próprio  $\lambda_1(p)$ .
- $q$  pela equação (4.3).

assim  $\forall s \in ]p, q[$  não infinitamente próximo de  $p$  ou  $q$ , temos:  $x(s) \simeq 0$ . Além disso,  $x(q)$  não é infinitamente próximo de 0. Em  $p$ ,  $x(s)$  se aproxima de 0 ao longo da órbita dinâmica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

quem passa  $x(p)$ . Em  $q$ ,  $x(s)$  se afasta de 0 ao longo do separador instável de 0 para dinâmica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

*Prova*. Nós temos  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ .  $M(s)$  é a matriz (4.2). Nós temos

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

O sistema (4.1) torna-se

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

O Matrix  $M(s)$  possui dois valores próprios distintos. Existe, portanto, uma matriz diferenciável invertível  $P(s)$  com

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Transformamos a equação (4.5) com a mudança da variável  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Transformamos essa equação com a lupa  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon}P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)U.$$

As condições (4.4) são verificadas por  $g(s, x)$ . Então nós temos

$$P(s)^{-1}g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

e  $g_1(s, U, \varepsilon)$  é uma função contínua. Portanto, temos

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1}P'(s)U$  é uma função contínua. Definimos os componentes dos vetores:  $U = (U_1, U_2)$  e  $h = (h_1, h_2)$ . O sistema se torna

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Este sistema consiste em duas equações fracamente acopladas. Alterando variáveis

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

transforma o sistema em

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r[\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

$k_2$  é uma função contínua em  $r = 0$  porque  $h_1 = O(r)$  e  $h_2 = O(r)$ . Nós escolhemos  $r_0$  com  $0 < r_0 < 1$  e para que a bola com centro 0 e raio  $r_0$  está incluído na piscina de atração original. Aplique a alteração da variável  $v = \varepsilon \ln(r)$  para a região  $0 < r < r_0$ , que é enviado para a região definida por  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ . Temos o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.6)$$

É um sistema singularmente perturbado, cuja variedade lenta é a união dos dois planos  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ . Porque  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  para todos os  $s$ , o plano  $\theta = \pi/2$  é atraente e o plano  $\theta = 0$  é repulsivo. Qualquer solução vinda de um ponto não infinitamente próximo ao plano repulsivo torna-se infinitamente próximo ao plano atraente em um tempo infinitamente pequeno. As soluções que vêm de um ponto muito próximo ao plano repelente podem permanecer próximas a esse plano por um longo tempo antes de se afastarem dele. O teorema de Tihonov se aplica (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Nós escolhemos  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$  e  $x(p)$  uma condição inicial localizada na bacia de atração 0, mas que não é infinitamente próxima da variedade invariante de dinâmica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

correspondente ao valor próprio  $\lambda_1(p)$ . A dinâmica rápida leva a solução correspondente infinitamente perto de 0. No plano  $(U_1, U_2)$  não é muito próximo da variedade lenta  $U_2 = 0$  e, portanto, do plano  $\theta = 0$ . Consequentemente, a solução se aproxima rapidamente do plano  $\theta = \pi/2$  e é aproximada pela solução do sistema lento

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Deduzimos que

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Portanto, temos novamente  $r(s) = r_0$ , isto é,  $v(s)$  infinitamente pequeno, quando  $s$  é assintoticamente igual a  $q$  definido por (4.3). Para esse valor de  $q$ , a origem é um ponto de sela para dinâmicas rápidas

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Consequentemente, a solução se afasta no ponto  $q$  do ponto de sela ao longo de seu separador instável. Utilizamos aqui que no momento  $p$  a solução não estava infinitamente próxima da variedade lenta  $\theta = \pi/2$ , o que traduz o fato de que a solução não chegou ao plano  $(U_1, U_2)$  por estar muito perto de  $U_1 = 0$ . Isso completa a prova.

Vamos voltar ao exemplo (3.2) - (3.3). Nós definimos  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ . O seguinte sistema rápido, em que  $s$  é considerado um parâmetro,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

possui dois pontos de equilíbrio (estados quase-estacionários)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  e  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  dada por (3.4). A matriz jacobiana em  $(1, 1)$  é  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . Como já vimos, os dois valores próprios são sempre distintos, são números reais. Os dois valores próprios são negativos se e somente se  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . Consequentemente, o ponto singular  $(1, 1)$  é um nó atraente para os valores de  $s$  para os quais  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$  e um ponto de sela se  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Os autovalores são  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  e  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , dado por (3.5).

Com  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ , obtemos a matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Nós temos

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Os autovalores têm uma parte real negativa se e somente se  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Portanto, nos pontos em que  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ , existem bifurcações transcíticas, porque os dois equilíbrios a seguir atendem e trocam suas estabilidades:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  e  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ .

Nós temos

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  E se  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[$  modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$  E se  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[$  modulo 1.

Podemos aplicar o teorema e calcular a função de entrada e saída, como fizemos na seção 2.

## 5. Generalização

Este estudo provavelmente se estende a problemas com mais de duas equações rápidas e uma equação lenta. Considere, por exemplo, o sistema linearizado com quatro equações rápidas de (Bacaër, 2007, Seção 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Nós presumimos  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$ .  $\psi(\cdot) > 0$  é uma função periódica do período 1. É também um modelo para a transmissão de uma doença transmitida por vetores. Os dois primeiros componentes representam os vetores infectados na fase latente e na fase infecciosa, enquanto os dois últimos componentes representam as pessoas infectadas na fase latente e na fase infecciosa. O sistema (2.1) torna-se, com  $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

A conjectura é que a função entrada-saída é dada pela fórmula (4.3), onde  $\lambda_2(s)$  deve ser substituído pelo valor próprio real dominante  $\Lambda(s)$  da matriz  $c(s)$ , como podemos verificar em um exemplo numérico (Figura 3). Os valores dos parâmetros são  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ ,  $m = 3$  e  $T = 2000$ . Temos a equação característica para os autovalores  $\lambda$  da matriz  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

Deduzimos que  $\Lambda(s) < 0$  se e apenas se

$$\frac{\beta\gamma\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

o que acontece para  $s_1 < s < s_2$  com  $s_1 \simeq 0,323$  e  $s_2 \simeq 0,677$ . Com a fórmula (4.3) encontramos  $s^* \simeq 0,047$ , que parece corresponder bem ao salto repentino na probabilidade de extinção na Figura 3.

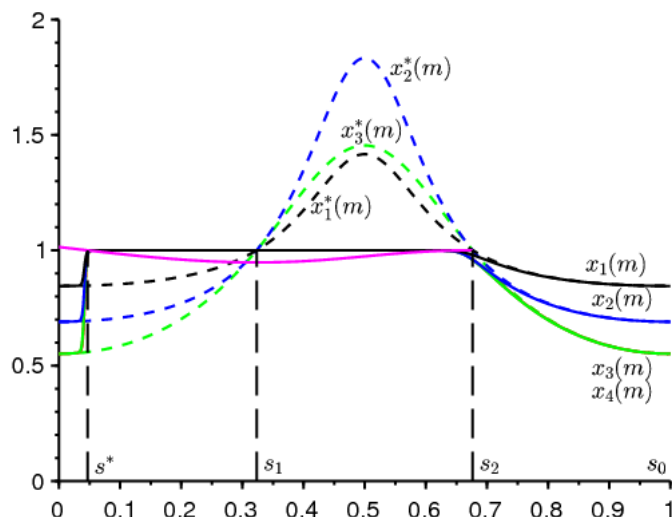


Figura 3. As probabilidades de extinção após  $m$  períodos  $x_1(m)$  (de preto),  $x_2(m)$  (em azul), bem como  $x_3(m)$  e  $x_4(m)$  (em verde, indistinguível) de acordo com  $s_0$ . Pontilhada, curvas lentas. Em rosa, desenhamos uma parte da função  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

## Referências bibliográficas

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>

- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfer, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci., Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfer (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des " bifurcations dynamiques ". Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tikhonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.