

# Over de kans op uitsterven van een populatie in een langzame periodieke omgeving

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Wiskundige en computermodelleringseenheid van complexe systemen, Institut de Recherche pour le Développement, Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Nice, Frankrijk, lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP, Universiteit van Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Frankrijk, tewfik.sari@irstea.fr

## Overzicht

We zijn geïnteresseerd in de kans op uitsterven van een lineair proces van geboorte en dood met verschillende typen in een periodieke omgeving wanneer de periode van de coëfficiënten erg groot is. Deze waarschijnlijkheid kan op de limiet een discontinuïteit in verband met een eend in een langzaam-snel dynamisch systeem opleveren. Het punt van discontinuïteit wordt nauwkeurig bepaald in een voorbeeld met twee soorten individuen.

Sleutelwoorden: geboorte- en sterfproces, periodieke omgeving, langzaam-snel systeem

## 1. Inleiding

Het schatten van de kans op uitsterven van een populatie is een vraag die met name intereneert in de instandhoudingsbiologie en epidemiologie. In dit tweede geval wordt met populatie geïnfecteerde populatie bedoeld. Een klassiek wiskundig model voor het bestuderen van dit soort problemen is dat van de lineaire processen van geboorte en dood met een of meer soorten individuen (Méléard, 2016). In veel situaties moet echter rekening worden gehouden met de seizoensgebondenheid van de omgeving, wat leidt tot de studie van deze processen wanneer de coëfficiënten van geboorte en dood periodieke functies van tijd zijn (Bacaër en Ait Dads, 2014). Bepaalde populaties of bepaalde epidemieën hebben coëfficiënten waarvan de tijdschaal relatief kort is in vergelijking met de jaarlijkse seizoensinvloeden; we worden daarom ertoe gebracht de limiet te overwegen waar de periode van de coëfficiënten erg groot is. Wanneer de vitale parameters gedurende een deel van het jaar (het ongunstige seizoen) subkritisch zijn, convergeert de waarschijnlijkheid van uitsterven als functie van het seizoen waarin het proces begint naar een discontinue limiet (Carmona en Gandon, 2019). Het punt van discontinuïteit is voor aanvang van het ongunstige seizoen.

Bacaër (2019) had deze studie voornamelijk voortgezet in het geval van een enkel type individuen, waarbij hij met name opmerkte dat de discontinuïteit van de kans op uitsterven verband hield met de aanwezigheid in een langzaam-snel dynamisch systeem van een "eend", Dat wil zeggen (zie bijvoorbeeld Lobry (2018, hoofdstuk 5)) van een traject dat gedurende een bepaalde tijd langs een aantrekkelijke boog gaat alvorens een afstotende boog te volgen. We stellen hieronder voor om een voorbeeld te bestuderen met twee soorten individuen geïnspireerd door een model van overdracht van een door vectoren overgedragen ziekte. Het punt van discontinuïteit van de kans op uitsterven wordt nauwkeurig bepaald. Dit probleem bleef onopgelost (Carmona en Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

In paragraaf 2 wordt het bevolkingsmodel gepresenteerd, dat van lineaire geboorte- en sterfprocessen met periodieke coëfficiënten bij verschillende typen individuen. Er wordt uitgelegd dat de kans op uitsterven is gekoppeld aan een systeem van gewone differentiaalvergelijkingen. Wanneer de periode convergeert naar oneindig, verandert een verandering van variabele dit systeem in een langzaam-snel systeem met een vaste periode.

In paragraaf 3 presenteren we een voorbeeld met twee soorten individuen. Numerieke simulaties suggereren dat de kans op uitsterven convergeert naar een discontinue limiet en dat het discontinuïteitspunt wordt bepaald door een voorwaarde die de integraal van de dominante eigenwaarde van een bepaalde matrix omvat. In paragraaf 4 laten we met niet-standaard analyse-instrumenten zien dat het deze voorwaarde is die het punt van discontinuïteit bepaalt. In paragraaf 5 presenteren we een ander voorbeeld met deze keer vier soorten individuen. Een numerieke simulatie suggereert dat een conditie van hetzelfde type nog steeds het punt van discontinuïteit bepaalt. Het is ons echter niet gelukt om dit in een algemeen kader aan te tonen wanneer het aantal soorten individuen strikt groter is dan twee.

## 2. Het model

We beschouwen een lineair proces van geboorte en dood met  $k$ -types ( $k \geq 1$ ) in een periodieke omgeving.  $T > 0$  is de periode van de omgeving. We geven onszelf twee matrixfuncties  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  en  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  van maat  $k$  en van periode  $T$  met de volgende aannames:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  vertegenwoordigt de snelheid waarmee type  $j$ -individuen nieuwe type  $i$ -individuen genereren
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  is de snelheid waarmee type  $j$ -individuen transformeren naar type  $i$ -individuen
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  staat voor de snelheid waarmee individuen van type  $j$  van type veranderen of sterven, en  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- als  $U(t)$  is een systeemoplossing  $dU/dt = -B(t)U(t)$  met de beginconditie  $U(0) = I$  (de identiteitsmatrix), dan de spectrale straal van de matrix  $U(T)$ , d.w.z. de dominante Floquet-multiplier, is  $\rho(U(T)) < 1$
- de matrix  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  is onherleidbaar voor alle  $t$ .

Meer precies, zoals in (Bacaër en Ait Dads, 2014), definiëren we

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  de kans om te hebben  $N_i$  individuen van type  $i$  op tijdstip  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  de bijbehorende genererende functie.

We hebben dan

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i] [B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t) Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Dat nemen we destijds aan  $t_0$  er is  $n_i \geq 0$  individuen van type  $i$  (de  $n_i$  zijn gehele getallen,  $1 \leq i \leq k$ ) met  $\sum_i n_i \geq 1$ . We kunnen dat veronderstellen  $0 \leq t_0 < T$ . Volgens (Bacaër en Ait Dads, 2014), de waarschijnlijkheid  $p(t_0, t_1)$  dat de populatie op dit tweede moment is uitgestorven, dat wil zeggen dat er geen individu van de verschillende typen overblijft, wordt gegeven door

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  is de oplossing van het differentieel systeem

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t) z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

met de beginconditie  $z_i(0) = 0 \forall i$ .

De verwachting van het aantal individuen van type  $i$  op tijdstip  $t$  is een oplossing van

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

en  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ . We definiëren

- $V(t)$  de systeemoplossing  $dV/dt = C(t)V(t)$  met de beginconditie  $V(0) = I$ .
- $F = \rho(V(T))$  de dominante Floquet-multiplier.

Als  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Als  $F > 1$ , deze waarschijnlijkheid convergeert naar een limiet die strikt lager is dan 1. Het is een periodieke functie van  $t_0$  (Bacaër en Ait Dads, 2014).

Wij nemen aan

- er zijn twee periodieke matrixfuncties van periode 1, onafhankelijk van  $T$ ,  $a(s)$  en  $b(s)$ , met

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  is een vast nummer
- $t_1 = t_0 + mT$ , waarbij  $m \geq 1$  een vast geheel getal is.

Ons doel is om de limiet te bestuderen

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

aangaande met  $s_0$ , met  $0 \leq s_0 < 1$ . We hebben ook

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

dat is de kans op uitsterven na  $m$  perioden bij het starten van een enkel individu van type  $i$ .

We definiëren

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ .

We hebben dan

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

met  $x_i(0) = 0 \forall i$ . Bovendien  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ . We hebben ook  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i, 0 \leq s \leq m$  (Bacaër en Ait Dads, 2014).

Als  $T$  convergeert naar  $\infty$ , met andere woorden als  $\varepsilon \rightarrow 0$  kan het systeem (2.1) worden geschreven als een langzaam-snel autonoom systeem met  $k$  snelle variabelen  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) en een langzame variabele  $x_{k+1}(s) = s$  met  $dx_{k+1}/ds = 1$ .

Voor de triviale stationaire oplossing  $x_i = 1 \forall i$  is de Jacobiaanse matrix van het rechterlid van het systeem (2.1)  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ .  $\tilde{c}$  geeft de matrix aan die is getransponeerd uit matrix  $c$ . Volgens een uitvloeisel van de stelling van Perron en Frobenius voor onherleidbare matrices waarvan de coëfficiënten buiten de diagonaal allemaal positief of nul zijn (Allaire et al., 2018, noot 6.2.13), matrices  $c(s)$  en  $\tilde{c}(s)$  hebben een gemeenschappelijke dominante reële eigenwaarde  $\Lambda(s)$ , strikt groter dan het reële deel van alle andere eigenwaarden.

### 3. Een voorbeeld

Laten we nemen

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

met  $\alpha(s) > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  en  $\delta > 0$ .  $\alpha(s)$  is een periodieke continue functie van periode 1. Dit stochastische model is geïnspireerd op het gelineariseerde deterministische model voor een door vectoren overgedragen ziekte (Bacaër, 2007, paragraaf 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

De geïnfecteerde vectoren zijn type 1. De geïnfecteerde mensen zijn type 2. De parameter  $\alpha(s)$  is de snelheid waarmee geïnfecteerde mensen hun infectie doorgeven aan vectoren wanneer ze worden gebeten. Dit percentage is periodiek omdat de populatie van gezonde vectoren ook periodiek is. De parameter  $\beta$  is de snelheid waarmee de vectoren afsterven. De parameter  $\gamma$  is de snelheid waarmee de vectoren bijten. De parameter  $\delta$  is de snelheid waarmee geïnfecteerde mensen herstellen. Het systeem (2.1) wordt dan geschreven

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Merk op dat de leden aan de rechterkant elkaar in twee gevallen opzeggen:  $x_1(s) = 1$  en  $x_2(s) = 1$ , of

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

De twee eigenwaarden van de matrix  $c(s)$  zijn echte cijfers:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

De dominante eigenwaarde is  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ . Men heeft  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ .

Stel dat er een seizoen is dat ongunstig is voor de overdracht van de epidemie, d.w.z.  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  met

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Stel verder dat

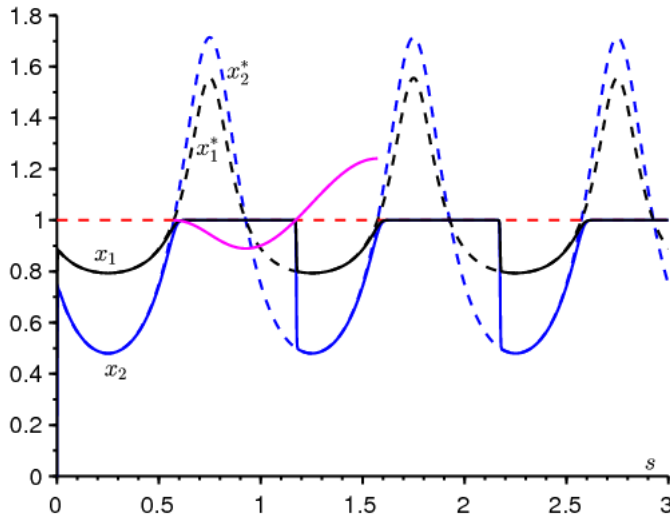
$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Laten we als voorbeeld nemen  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  met  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $|\kappa| < 1$  en

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Deze laatste voorwaarde zorgt ervoor dat er inderdaad een ongunstig seizoen is. Laten we meer in het bijzonder kiezen  $\bar{\alpha} = 3$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  en  $\delta = 1$ . Ces valeurs ne sont pas très réalistes mais elles mettent bien en évidence le phénomène. On a alors  $s_1 \simeq 0,323$  en  $s_2 \simeq 0,677$ . Numeriek kan worden gecontroleerd of aan de voorwaarde (3.8) is voldaan. Laten we ook nemen  $T = 1000$ ,  $m = 3$  en  $s_0 = 0,25$ . Figuur 1 vertegenwoordigt de oplossing van het systeem (3.2) - (3.3) met de beginvoorwaarde  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . We gebruikten Scilab-software en loste het differentieel systeem op  $\log(1 - x_1(s))$  en  $\log(1 - x_2(s))$ . Daarna keerden we terug naar de oorspronkelijke variabelen. We hebben ook de constante functie getekend die gelijk is aan 1 en de curven (3.4). Let op het volgende:

- in de buurt van  $s = 0$ , de curven zijn bijna verticaal (niet zichtbaar in de figuren);
- $x_1(s)$  en  $x_2(s)$  komen samen op een periodieke oplossing;
- asymptotisch,  $x_1(s)$  en  $x_2(s)$  liggen zeer dicht bij 1 voor de waarden van  $s$  met  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ , speciaal voor  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ , maar ook voor  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  met  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ . In het laatste geval hebben we  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . Er is een "eend".

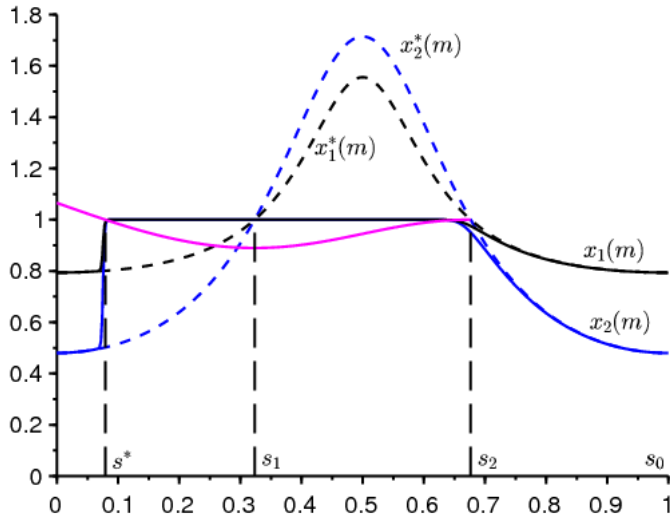


Figuur 1. Als functie van  $s$ , de curven  $x_1(s)$  (in zwart) en  $x_2(s)$  (in blauw) evenals de langzame bochten  $x_1^*(s)$  (zwart gestippeld),  $x_2^*(s)$  (gestippeld blauw) en 1 (gestippeld rood). In roze, een stukje van de functie  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ .

Figuur 2 laat zien hoe de hoeveelheden die ons interesseren, de extinctiekansen na  $m$  periodes  $x_1(m)$  en  $x_2(m)$ , variëren afhankelijk van  $s_0$ . We hebben ook de curven getekend die zijn afgeleid van (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

Figuur 2 suggereert dat  $x_1(m)$  en  $x_2(m)$  convergeren wanneer  $T \rightarrow +\infty$ , naar limieten gelijk aan 1 als  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ .  $s_0 = s^*$  is een discontinuïteit van de limieten. Het probleem is om dit punt te bepalen.



Figuur 2. Kans op uitsterven na  $m$  periodes  $x_1(m)$  (in zwart) en  $x_2(m)$  (in donkerblauw) afhankelijk van  $s_0$ . De formules voor  $x_1^*(m)$  en  $x_2^*(m)$  zijn gestippeld. In roze, een stukje van de functie  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

We zullen in de volgende sectie laten zien dat de oplossingen  $x_1(s)$  en  $x_2(s)$  in Figuur 1, die heel dicht bij 1 staan voor  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , wijken plotseling af van de buurt van 1 voor  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  met

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Deze oplossingen wijken met andere woorden af van de buurt van 1 op een punt  $s = q$ . Bovendien  $q = s_0 + 1 - s^*$  en

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Het is deze vergelijking die bepaalt  $s^*$  uniek. Inderdaad, als  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ , dan hebben we

- $\phi(s_1) < 0$  vanwege conditie (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  vanwege conditie (3.7)

$$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2 - 1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

vanwege conditie (3.8).

Er is dus een enkel reëel getal  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  met  $\phi(s^*) = 0$ . In het voorbeeld vinden we numeriek  $s^* \simeq 0,079$ .

**Notitie.** De voorwaarde (3.8) heeft geen verband met een mogelijk superkritisch karakter van het systeem (3.1). Het is ook bekend in de theorie van Floquet. Inderdaad, als we bijvoorbeeld nemen  $c = 0,7$  in plaats van  $c = 1$  vinden we numeriek dat de dominante Floquet-multiplier is  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  terwijl  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ .

## 4. De input-outputfunctie voor een transkritische splitsing

Om te rechtvaardigen wat zojuist is gezegd over het punt van discontinuïteit, beschouwen we meer in het algemeen een langzaam-snel veld met twee snelle dimensies en een langzame dimensie, zoals (3.2) - (3.3). Men veronderstelt dat de snelle dynamiek een enkelvoudig punt heeft met twee verschillende reële eigenwaarden waarvan de ene altijd negatief is en de tweede negatief en dan positief. Het is daarom een transkritische vertakking waarbij de evenwichtstoestand van de snelle dynamiek een stabiel knooppunt is en dan een zadelpunt.

Een oplossing die dicht bij het stabiele singuliere punt ligt, verlaat de buurt niet zodra deze onstabiel wordt, maar blijft wel een tijdje dichtbij. Het doel is om de invoer-uitvoerfunctie voor deze transkritische splitsing te berekenen, dat wil zeggen om het moment te definiëren waarop de oplossing weggaat van het singuliere punt (exit-moment), volgens het punt waar het zich bevindt wordt benaderd (ingangstijd). Dit fenomeen dat bekend staat als "vertakkingvertraging" hangt samen met het idee van eindoplossingen en overstabiliteit.

Het concept van de input-outputfunctie en het concept van de eindoplossing werden begin jaren tachtig voor het eerst bestudeerd met niet-standaard analysemethoden. Zie overzichtsartikelen (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin en Shubin, 1984). De invoer-uitvoerfunctie werd eerst berekend voor de eenden van de Van der Pol-vergelijking (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) en vervolgens uitgebreid tot elk langzaam-snel systeem van het vliegtuig (Diener en Diener, 1983).

Later werd het bestaan van eindoplossingen gevonden met de klassieke methoden van asymptotische ontwikkeling (Eckhaus, 1983) en door de geometrische theorie van singuliere verstoringen (Dumortier en Roussarie, 1996). De invoer-uitvoerfunctie voor een vlaksysteem is ook verkregen door de geometrische theorie van singuliere storingen (De Maesschalck en Schechter, 2016).

Voor meer details over de bijdrage van de niet-standaardistische Franse school aan het probleem van eenden en vertragingen in de splitsing, kan de lezer raadplegen (Cartier, 1982; Fruchard en Schäfke, 2008). Voor een vollediger beeld van de verschillende benaderingen in de theorie van singuliere storingen, zie de recente monografie (Kuehn, 2015) en het artikel (Wechselberger, 2007) over eenden. Zie ook (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Fruchard en Schäfke, 2008; Wallet, 1990, 1994) en de referenties die ze bevatten voor het idee van overstabiliteit en vertraging in de splitsing.

Het specifieke geval van een langzaam-snel veld in dimensie twee, met een snelle dynamiek van dimensie één die aantrekkelijk is en vervolgens afstotend, is goed begrepen, zie (Diener en Diener, 1983). Het geval van de Hopf-splitsing, waarbij twee eigenwaarden complexe conjugaten zijn en hun werkelijke deel verandert van teken, is door verschillende auteurs overwogen, zie (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener en Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Zie ook de volledige en educatieve presentatie in de recente monografie (Kuehn, 2015, hoofdstuk 12).

Overweeg een differentieel systeem aan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  met een langzame variabele  $s \in \mathbb{R}$  en met twee snelle variabelen  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is een differentieerbare functie in  $(s, x)$ , en  $\varepsilon > 0$  is oneindig klein. We gebruiken de vocabulaire van niet-standaard analyse, zie (Diener en Reeb, 1989) of Lobry (2018, hoofdstuk 5). Wij nemen aan  $f(s, 0) = 0 \forall s$ .

$x = 0$  is niet alleen een langzame curve van het systeem (4.1), d.w.z. een oplossing van de vergelijking  $f(s, x) = 0$ , maar ook een bijzondere oplossing van het systeem (4.1). We definiëren de vierkante matrix  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

We veronderstellen dat  $M(s)$  heeft twee verschillende eigenwaarden,  $\lambda_1(s)$  en  $\lambda_2(s)$  een daarvan blijft altijd negatief en de andere verandert teken. Met  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ , men heeft :

- $\lambda_1(s) < 0$  en  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  en  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ .

In de geometrische theorie van singuliere verstoringen bestuderen we het systeem (4.1) in de uitgebreide faseruimte  $(x, \varepsilon)$ . We voegen de vergelijking toe  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ . Een enkele eigenwaarde van het snelle dynamiek verandert teken. Deze situatie kan worden teruggebracht tot het geval van systemen in het vliegtuig, door reductie op de centrale variëteit van het augmented systeem ((4.1),  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) op het evenwichtspunt  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ . Zie voor meer details (Boudjellaba en Sari, 2009; Krupa en Szmolyan, 2001). Met deze reductie verkrijgen we een planair systeem waarvan de invoer-uitvoerfunctie wordt gegeven door de integraal van de eigenwaarde die van teken verandert (Diener en Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

In deze vergelijking is  $p$  het moment van binnenkomst en  $q$  is het moment van vertrek. De reductie voorspelt dat de invoer-uitvoerfunctie lokaal wordt gegeven door de formule (4.3), dicht bij de transkritische vertakkingswaarde. We stellen hieronder voor om de globale input-outputfunctie te berekenen. Het speciale geval van een langzaam-snel driedimensionaal veld met ontkoppelde snelle dynamiek werd overwogen in (Boudjellaba en Sari, 2009).

We gebruiken de woordenschat van niet-standaard analyse. Wat deze theorie precies is, is niet erg belangrijk voor het begrijpen van dit artikel. De lezer kan het intuïtieve gevoel van oneindig kleine taal in gedachten houden en zichzelf geruststellen door te weten dat niet-standaard analyse een rigoureuze basis biedt voor de concepten oneindig klein en oneindig groot. Zie (Diener en Reeb, 1989) voor een inleiding tot niet-standaard analyse. Voor meer informatie over het gebruik van niet-standaard analyse in de theorie van differentiaalvergelijkingen, kan de lezer verwijzen naar (Cartier, 1982), (Zvonkin en Shubin, 1984) (Kuehn, 2015, hoofdstuk 19.5). of (Lobry, 2018, hoofdstuk 5).

We veronderstellen daarom dat de parameter  $\varepsilon$  in (4.1) oneindig klein is. De oplossing  $x(s) = 0$  is een "eend" aangezien het aantrekkelijk is voor  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  en weerzinwekkend voor  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ . Het doel is om de oplossingen van het systeem (4.1) te bestuderen die oneindig dicht bij deze oplossing liggen. De snelle dynamiek is aantrekkelijk over het interval  $[\sigma_0, \sigma_1[$ . We nemen  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ . Een oplossing van het systeem (4.1) met een beginvoorwaarde in het aantrekkingsbekken van 0 gaat snel in de richting van de langzame curve  $x = 0$  en blijft oneindig dichtbij deze zolang als  $s < \sigma_1$ . De oplossing verlaat op dit moment niet de oneindig kleine buurt van 0, maar blijft de 0 gedurende een heel interval volgen. Het moment  $q > \sigma_1$  waarvoor  $x(s)$  is niet langer oneindig dicht bij 0 heet de uitlooptijd. Het doel is om de functie te bepalen  $p \mapsto q$ . We zullen laten zien dat  $q$  wordt gedefinieerd door vergelijking (4.3). Meer precies hebben we het volgende resultaat:

## Stelling

We definiëren

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  een beginvoorwaarde in het aantrekkingsbekken van 0 maar die niet oneindig dicht bij de invariante verscheidenheid van de snelle dynamiek komt die overeenkomt met de eigenwaarde  $\lambda_1(p)$ .
- $q$  door vergelijking (4.3).

Dus  $\forall s \in ]p, q[$  niet oneindig dicht bij  $p$  of  $q$ , we hebben:  $x(s) \simeq 0$ . Bovendien  $x(q)$  is niet oneindig dicht bij 0. Bij  $p$ ,  $x(s)$  benadert 0 langs de snelle dynamische baan

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

wie doorgaat  $x(p)$ . In  $q$ ,  $x(s)$  beweegt weg van 0 langs het onstabiele scheidingsteken 0 voor snelle dynamiek

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Bewijs . Men heeft  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ .  $M(s)$  is de matrix (4.2). Men heeft

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Het systeem (4.1) wordt

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

De matrix  $M(s)$  heeft twee verschillende eigenwaarden. Er is dus een omkeerbare differentieerbare matrix  $P(s)$  met

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

We transformeren vergelijking (4.5) met de verandering van variabele  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

We zetten deze vergelijking om met het vergrootglas  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

De voorwaarden (4.4) worden gecontroleerd door  $g(s, x)$ . Dus we hebben

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

en  $g_1(s, U, \varepsilon)$  is een continue functie. Daarom hebben we

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$  is een continue functie. We definiëren de componenten van de vectoren:  $U = (U_1, U_2)$  en  $h = (h_1, h_2)$ . Het systeem wordt

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Dit systeem bestaat uit twee zwak gekoppelde vergelijkingen. Variabelen veranderen

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

verandert het systeem in

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

met

$$k_1(s, r, \theta, \varepsilon) = \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon),$$

$$k_2(s, r, \theta, \varepsilon) = -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon).$$

$k_2$  is een continue functie bij  $r=0$  omdat  $h_1 = O(r)$  en  $h_2 = O(r)$ . We kiezen  $r_0$  met  $0 < r_0 < 1$  en zodat de bal met middelpunt 0 en straal  $r_0$  is opgenomen in het originele attractiepool. Pas de variabele wijziging toe  $v = \varepsilon \ln(r)$  naar de regio  $0 < r < r_0$ , die wordt verzonden naar de regio die is gedefinieerd door  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ . We krijgen het systeem:

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon).$$

(4.6)

Het is een bijzonder verstoord systeem waarvan de langzame variatie de vereniging is van de twee vlakken  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi/2$ . Omdat  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  voor alle  $s$  is het vlak  $\theta = \pi/2$  aantrekkelijk en het vlak  $\theta = 0$  is weezinwekkend. Elke oplossing die van een punt komt dat niet oneindig dicht bij het afstotende vlak ligt, wordt in oneindig weinig tijd oneindig dicht bij het aantrekkelijke vlak. Oplossingen die van een punt heel dicht bij het afstotende vlak komen, kunnen vrij lang dicht bij dit vlak blijven voordat ze ervan weggaan. De stelling van Tihonov is van toepassing (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). We kiezen  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$  en  $x(p)$  een beginvoorwaarde in het aantrekkingsgebied van 0, maar die niet oneindig dicht bij de onveranderlijke verscheidenheid van snelle dynamiek ligt

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

overeenkomend met de eigenwaarde  $\lambda_1(p)$ . De snelle dynamiek drijft de bijbehorende oplossing oneindig dichtbij 0. In het vliegtuig  $(U_1, U_2)$  het komt niet erg in de buurt van de langzame variëteit  $U_2 = 0$ , en dus van het vlak  $\theta = 0$ . Dientengevolge nadert de oplossing snel het vlak  $\theta = \pi/2$  en wordt dan benaderd door de oplossing van het langzame systeem

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

We leiden dat af

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Daarom hebben we weer  $r(s) = r_0$ , dat wil zeggen  $v(s)$  oneindig klein, wanneer  $s$  asymptotisch gelijk is aan  $q$  gedefinieerd door (4.3). Voor deze waarde van  $q$  is de oorsprong een zadelpunt voor snelle dynamiek

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Dientengevolge beweegt de oplossing weg bij punt  $q$  van het zadelpunt langs zijn onstabiele scheider. We gebruikten hier dat de oplossing op tijd  $p$  niet oneindig dicht in de buurt kwam van de langzame variant  $\theta = \pi/2$ , wat het feit vertaalt dat de oplossing niet in het vliegtuig aankwam  $(U_1, U_2)$  door heel dichtbij te zijn  $U_1 = 0$ . Hiermee is het bewijs compleet.

Laten we terugkeren naar voorbeeld (3.2) - (3.3). We definiëren  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ . Het volgende snelle systeem, waarbij  $s$  als een parameter wordt beschouwd,

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

heeft twee evenwichtspunten (quasi-stationaire toestanden)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  en  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  gegeven door (3.4). De Jacobiaanse matrix in  $(1, 1)$  is  $\tilde{\alpha}(s_0 + m - s)$ . Zoals we al hebben gezien, zijn de twee eigenwaarden altijd verschillend, het zijn reële getallen. De twee eigenwaarden zijn negatief als en alleen als  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . Het singuliere punt  $(1, 1)$  is dus een aantrekkelijk knooppunt voor de waarden van  $s$  waarvoor  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ , en een zadelpunt als  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . De eigenwaarden zijn  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  en  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , gegeven door (3.5).

Met  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ , verkrijgen we de Jacobiaanse matrix

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Men heeft

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

De eigenwaarden hebben een negatief reëel deel als en alleen als  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Daarom op de punten waar  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ , er zijn transkritische splitsingen, omdat de volgende twee evenwichten elkaar ontmoeten en hun stabiliteit uitwisselen:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  en  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ .

Men heeft

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  als  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[$  modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$  als  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[$  modulo 1.

We kunnen de stelling toepassen en de invoer-uitvoerfunctie berekenen zoals we deden in sectie 2.

## 5. Generalisatie

Deze studie strekt zich waarschijnlijk uit tot problemen met meer dan twee snelle vergelijkingen en één langzame vergelijking. Beschouw bijvoorbeeld het gelineariseerde systeem met vier snelle vergelijkingen van (Bacaër, 2007, paragraaf 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Wij nemen aan  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$ .  $\psi(\cdot) > 0$  is een periodieke functie van periode 1. Het is ook een model voor de overdracht van een door vectoren overgedragen ziekte. De eerste twee componenten vertegenwoordigen de vectoren die zijn geïnfecteerd in de latente fase en in de infectieuze fase, terwijl de laatste twee componenten de geïnfecteerde personen vertegenwoordigen in de latente fase en in de infectieuze fase. Het systeem (2.1) wordt, met  $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

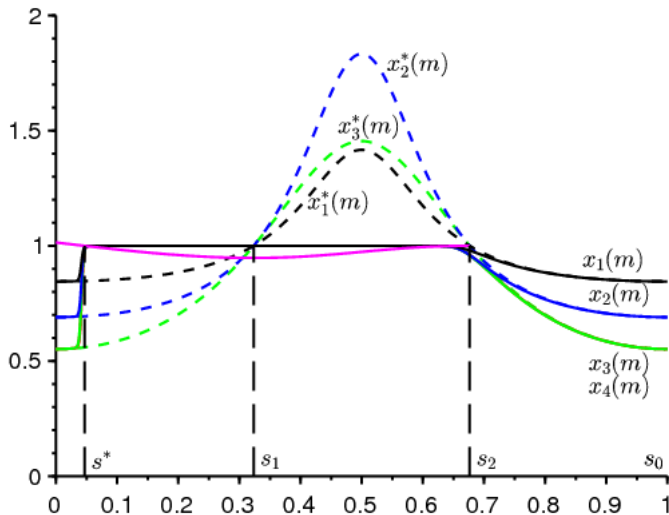
Het vermoeden is dat de invoer-uitvoerfunctie wordt gegeven door de formule (4.3), waar  $\lambda_2(s)$  moet worden vervangen door de dominante reële eigenwaarde  $\Lambda(s)$  van de matrix  $c(s)$ , zoals we konden verifiëren op een numeriek voorbeeld (Figuur 3). Parameterwaarden zijn  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1$ ,  $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ ,  $m = 3$  en  $T = 2000$ . We hebben de karakteristieke vergelijking voor de eigenwaarden  $\lambda$  van de matrix  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

We leiden dat af  $\Lambda(s) < 0$  als en alleen als

$$\frac{\beta\gamma\delta\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

wat gebeurt er voor  $s_1 < s < s_2$  met  $s_1 \simeq 0,323$  en  $s_2 \simeq 0,677$ . Met de formule (4.3) vinden we  $s^* \simeq 0,047$ , wat goed lijkt overeen te komen met de plotselinge sprong in de kans op uitsterven in figuur 3.



Figuur 3. De kans op uitsterven na  $m$  periodes  $x_1(m)$  (in het zwart),  $x_2(m)$  (in blauw) evenals  $x_3(m)$  en  $x_4(m)$  (in groen, niet te onderscheiden) volgens  $s_0$ . Gestippelde, langzame bochten. In roze hebben we een stukje van de functie getekend  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

## Bibliografische referenties

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfer, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfer (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des « bifurcations dynamiques ». Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.