

# 遅い周期的環境における人口の絶滅の確率について

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 複雑なシステムの数学的およびコンピュータモデリングユニット、Institut de Recherche pour le Développement、Les Cordeliers、パリ、フランス、nicolas.bacaer @ ird.fr

<sup>2</sup> フランス、ニース、lobrinria @ wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP、モンペリエ大学、INRAE、Institut Agro、モンペリエ、フランス、tewfik.sari @ irstea.fr

## 概要

係数の周期が非常に大きい場合、周期的な環境でいくつかのタイプの出生と死亡の線形プロセスが消滅する確率に関心があります。この確率は、限界で、低速高速ダイナミックシステムのアヒルに関連して不連続性を示す可能性があります。不連続点は、2種類の個人の例で正確に決定されます。

キーワード：生死プロセス、周期的環境、スローファストシステム

## 1.はじめに

人口の絶滅確率の推定は、特に保全生物学と疫学に介入する問題です。この2番目のケースでは、人口とは感染した人口を意味します。この種の問題を研究するための古典的な数学モデルは、1つ以上のタイプの個人による誕生と死の線形プロセスのモデルです (Méléard, 2016)。ただし、多くの状況では、環境の季節性を考慮に入れる必要があります。これにより、出生と死亡の係数が時間の周期関数である場合にこれらのプロセスを調査できます (BacaërおよびAit Dads, 2014)。特定の母集団または特定の流行には、年間の季節性と比較して時間スケールが比較的短い係数があります。したがって、係数の周期が非常に大きい場合の制限を検討するように求められます。1年の一部 (好ましくない季節) に重要なパラメーターが亜臨界である場合、プロセスが開始する季節の関数としての絶滅の確率が不連続な制限に向かって収束します (Carmona and Gandon, 2019)。不連続のポイントは、不利なシーズンの開始前です。

バカエル (2019) は本質的に単一タイプの個人の場合にこの研究を続けており、特に絶滅の確率の不連続性は「アヒルのゆっくりと速い動的システムの存在に関連している」、つまり、反発的な弧をたどる前に、一定の時間、魅力的な弧に沿って移動する軌跡の (たとえば、Lobry (2018, 第5章を参照))。ベクトル媒介性疾患の伝染のモデルに触発された2種類の個人の例を検討するために、以下を提案します。絶滅確率の不連続点は正確に決定されます。この問題は未解決のままです (Carmona and Gandon, 2019; Bacaër, 2019)。

セクション2では、人口モデルを示します。これは、いくつかのタイプの個人の周期的な係数を使用した出生と死亡の線形プロセスのモデルです。絶滅の確率は常微分方程式のシステムにリンクされていると説明されています。周期が無限大に収束すると、変数の変更により、このシステムは一定の周期を持つ低速のシステムに変わります。

セクション3では、2種類の個人の例を示します。数値シミュレーションは、消滅の確率が不連続な限界に収束し、不連続点が特定の行列の支配的な固有値の積分を含む条件によって決定されることを示唆しています。セクション4では、非標準の分析ツールを使用して、この条件が不連続点を決定することを示します。セクション5では、今回は4つのタイプの個人を使用した別の例を示します。数値シミュレーションは、同じタイプの条件が不連続点を決定することを示唆しています。ただし、個人のタイプの数が厳密に2を超える場合、これを一般的なフレームワークで実証することはできませんでした。

## 2.モデル

私たちは、との誕生と死の線形プロセスを考える $k$ タイプ ( $k$ は、定期的な環境で $\geq 1$ )。  $T > 0$ は、環境の周期です。2つの行列関数を与える  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  そして  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  サイズ $k$ と周期 $T$ の次の仮定

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  タイプ $j$ の個体が新しいタイプ $i$ の個体を生成する速度を表します
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  タイプ $j$ の個体がタイプ $i$ の個体に変換する速度
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  タイプ $j$ の個体がタイプを変えるか死ぬ率  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- もし  $U(t)$  システムソリューションです  $dU/dt = -B(t)U(t)$  初期状態で  $U(0) = I$  (単位行列)、次に行列のスベクトル半径  $U(T)$ 、つまり主要なFloquet乗数は、 $\rho(U(T)) < 1$
- マトリックス  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  すべての $t$ について既約です。

より正確には、(Bacaërand Ait Dads, 2014) のように、

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  持つ確率  $N_i$  時間 $t$ におけるタイプ $i$ の個人 ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  対応する生成関数。

その時

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

当時は  $t_0$  有る  $n_i \geq 0$  タイプ $i$ の個人 ( $n_i$  整数です  $1 \leq i \leq k$ ) と  $\sum_i n_i \geq 1$ 。私たちはそれを仮定することができます  $0 \leq t_0 < T$ 。(Bacaërand Ait Dads, 2014) によれば、確率は  $p(t_0, t_1)$  人口はこの2番目の瞬間に絶滅している、つまり異なるタイプの個人が残っていないということは、

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  微分システムのソリューションです

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

初期状態で  $z_i(0) = 0 \forall i$ 。

型の個体数の期待私の時間のトンのはのソリューションです

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

そして  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ 。私たちは定義します

- $V(t)$  システムソリューション  $dV/dt = C(t)V(t)$  初期状態で  $V(0) = I$ 。
- $F = \rho(V(T))$  主要なFloquet乗数。

もし  $F < 1$

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow[t_1 \rightarrow +\infty]{} 1.$$

$F > 1$  の場合、この確率は厳密に1未満の限界に向かって収束します。これは、 $t_0$  (バカエルとアイト・ダッド、2014)。

とする

- $T$ に関係なく、周期1の2つの周期行列関数があります。  $a(s)$  そして  $b(s)$ 、

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  固定数です
- $t_1 = t_0 + mT$ ここで、  $m \geq 1$ は固定整数です。

私たちの目標は限界を研究することです

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

の面では  $s_0$ 、  $0 \leq s_0 < 1$ 。また、

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

これは、タイプ*i*の単一の個体から開始した場合に、*m*期間後に消滅する確率です。

私たちは定義します

- $\varepsilon = 1/T$ 、
- $c(s) = a(s) - b(s)$ 、
- $x(s) = z(t)$ 。

その時

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

と  $x_i(0) = 0 \forall i$ 。さらに、 $z(t_1 - t_0) = x(m)$ 。また、 $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i, 0 \leq s \leq m$  (BacaërおよびAit Dads、2014年)。

$T$ が $\infty$ に収束する 場合、つまり  $\varepsilon \rightarrow 0$ 、システム (2.1) は、*k*個の高速変数を持つ低速高速自律システムとして記述できます。 $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) そして遅い変数  $x_{k+1}(s) = s$  と  $dx_{k+1}/ds = 1$ 。

ささいな定常解について  $x_i = 1 \forall i$ 、システムの正しいメンバー (2.1) のヤコビ行列は  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ 。  $\tilde{c}$  は、行列  $c$  から転置された行列を示します。対角線の外側の係数がすべて正またはゼロである既約行列のペロンとフロベニウスの定理の帰結によれば (Allaire et al.、2018、note 6.2.13)、行列  $c(s)$  そして  $\tilde{c}(s)$  共通の支配的な実固有値を持つ  $\Lambda(s)$ 、他のすべての固有値の実数部分よりも厳密に大きい。

### 3.例

取りましょう

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

と  $\alpha(s) > 0$ 、 $\beta > 0$ 、 $\gamma > 0$  そして  $\delta > 0$ 。  $\alpha(s)$  は、期間1の周期的な連続関数です。この確率モデルは、ベクトル媒介疾患の線形化された決定論的モデル (Bacaër、2007年、セクション4.1) に着想を得ています。

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

感染したベクターはタイプ1です。感染した人々はタイプ2です。パラメーター  $\alpha(s)$  感染した人が噛まれたときに感染をベクターに感染させる割合です。健康なベクターの母集団も周期的であるため、このレートは周期的です。パラメータ  $\beta$  は、ベクトルが死ぬ速度です。パラメータ  $\gamma$  は、ベクトルがかみ合う速度です。パラメータ  $\delta$  は、感染した人々が回復する速度です。次にシステム (2.1) が作成されます

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

右側のメンバーは、次の2つの場合に互いにキャンセルします。  $x_1(s) = 1$  そして  $x_2(s) = 1$ 、または

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

行列の2つの固有値  $c(s)$  実数です：

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

支配的な固有値は  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ 。我々は持っています  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ 。

流行の伝染に好ましくない季節があると仮定します。  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  と

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

さらにそれを仮定します

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

例として、  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  と  $\bar{\alpha} > 0$ 、  $|\kappa| < 1$  として

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

この最後の条件は、実際に好ましくない季節があることを保証します。具体的には、選択してみましょう  $\bar{\alpha} = 3$ 、 $\kappa = 0,75$ 、 $\beta = 2$ 、 $\gamma = 1$  として  $\delta = 1$ 。これらの値はあまり現実的ではありませんが、現象を際立たせています。その時  $s_1 \simeq 0,323$  として  $s_2 \simeq 0,677$ 。数値 (3.8) が満たされていることを確認できます。とりましょう  $T = 1000$ 、 $m = 3$  として  $s_0 = 0,25$ 。図1は、システムの解 (3.2) - (3.3) を初期条件で表したものです  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ 。私たちはScilabソフトウェアを使用し、 $\log(1 - x_1(s))$  として  $\log(1 - x_2(s))$ 。次に、初期変数に戻りました。また、1に等しい定数関数と曲線 (3.4) を描画しました。次の点に注意してください。

- 近所で  $s = 0$  , les courbes sont presque verticales (non visible sur les figures) ;
- $x_1(s)$  として  $x_2(s)$  周期解に収束します。
- 漸近的に、 $x_1(s)$  として  $x_2(s)$  値のために非常に近い1にしているので  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ 、特に  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$  だけでなく、 $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  と  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ 。後者の場合、 $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ 。「あひる」があります。

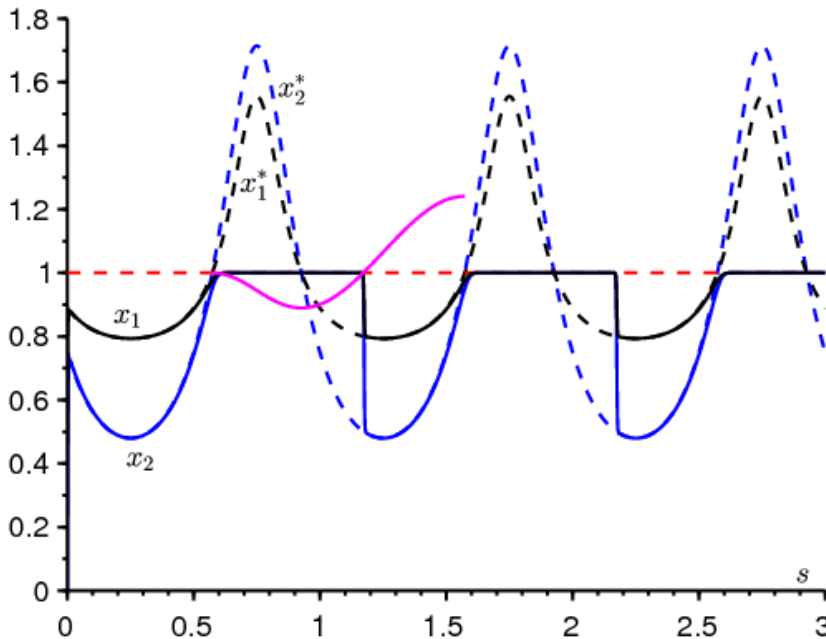


図1.  $s$ の関数としての曲線  $x_1(s)$  (黒) と  $x_2(s)$  (青色) と緩やかな曲線  $x_1^*(s)$  (点線の黒)、 $x_2^*(s)$  (点線の青) と1 (点線の赤)。ピンク、機能の一部  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ 。

図2は、関心のある量、 $m$ 期間後の消滅確率を示しています。  $x_1(m)$  として  $x_2(m)$ 、によって異なります  $s_0$ 。 (3.4) から推定される曲線も描画しました。

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

図2は、 $x_1(m)$  そして  $x_2(m)$  収束するとき  $T \rightarrow +\infty$ 、1に等しい限界に向かって  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ 。  $s_0 = s^*$  限界の不連続です。問題はこの点を決定することです。

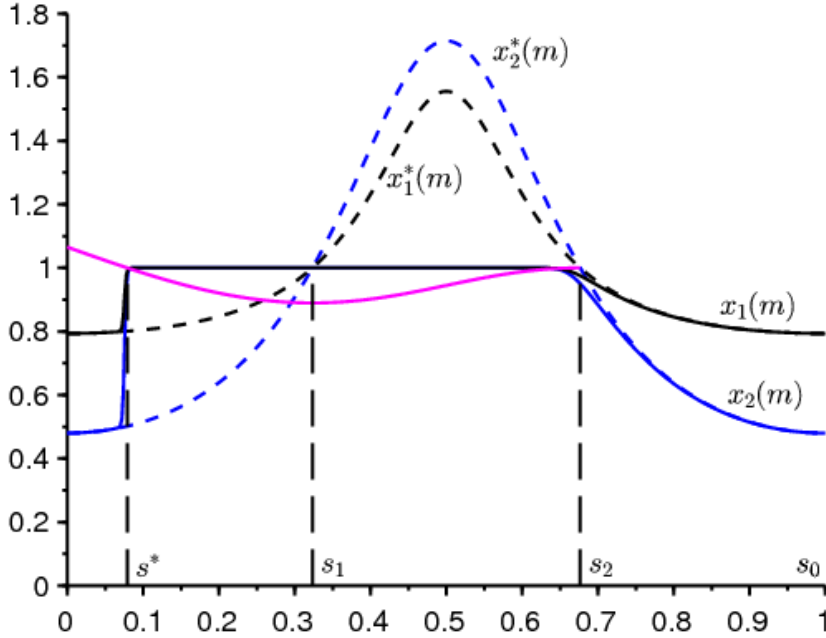


図2.後の絶滅確率  $m$  期間  $x_1(m)$  (黒) と  $x_2(m)$  (紺色)  $s_0$ 。の式  $x_1^*(m)$  そして  $x_2^*(m)$  点線です。ピンク、機能の一部  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ 。

次のセクションでは、ソリューションが  $x_1(s)$  そして  $x_2(s)$  図1では、1に非常に近い  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ 、突然1の近傍から逸脱します  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  と

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

つまり、これらの解は、点  $s = q$  で1の近傍から逸脱します。さらに、 $q = s_0 + 1 - s^*$  そして

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

決定するのはこの方程式です  $s^*$  独自に。確かに  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ 、その後、

- $\phi(s_1) < 0$  条件 (3.6) のため、
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  状態のため (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2 - 1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

条件 (3.8) のため。

したがって、実数は1つです。  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  と  $\phi(s^*) = 0$ 。例では、数値的に  $s^* \simeq 0,079$ 。

**注意。** 条件 (3.8) は、システム (3.1) の可能な超臨界特性とは関係ありません。フロケの理論でもよく知られています。確かに、例えば  $c = 0,7$  の代わりに  $c = 1$ 、我々は数値的に支配的なフロケ乗数が  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  ながら  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ 。

#### 4. トランسكريティカル分岐の入出力関数

不連続点について述べたことを正当化するために、より一般的には (3.2) - (3.3) のように、2つの高速次元と低速次元を持つ低速高速フィールドを検討します。1つは、高速ダイナミクスが2つの異なる実固有値を持つ特異点を持ち、そのうちの1つが常に負であり、2つ目が負、次に正であると仮定します。したがって、これは、高速ダイナミクスの平衡状態が安定節点であり、次に鞍点である、超臨界分岐です。

安定した特異点に近い解は、不安定になるとすぐにその近傍を離れることはありませんが、一定の時間は近接したままになります。目標は、この超臨界分岐の入出力関数を計算することです。つまり、解が特異点から離れる瞬間（出口の瞬間）を定義します。近づいています（入り口時間）。「分岐遅延」と呼ばれるこの現象は、アヒルの解と不安定性の概念に関連しています。

入出力関数の概念とダックソリューションの概念は、1980年代初頭に非標準の分析方法で初めて研究されました。レビュー記事を参照（Benoît al.、1981; Cartier、1982; Zvonkin and Shubin、1984）。入出力関数は、最初にファンデルポール方程式のアヒルについて計算され（Benoît、1981; Benoît al.、1981）、次に平面のすべての低速高速システム（DienerおよびDiener、1983）。

その後、アヒルの解の存在は、漸近的発達の古典的な方法（Eckhaus、1983）と特異な外乱の幾何学理論（Dumortier and Roussarie、1996）によって発見されました。平面システムの入出力関数は、特異摂動の幾何学理論によっても得られています（De Maesschalck and Schecter、2016）。

アヒルと分岐の遅延の問題に対する非標準主義のフランスの学校の貢献に関する詳細については、読者が相談することができます（Cartier、1982; Fruchard and Schäfke、2008）。特異障害の理論におけるさまざまなアプローチについてのより完全な見方については、最近のモノグラフ（Kuehn、2015）と、アヒルに捧げられた記事（Wechselberger、2007）を参照してください。分岐の過度の安定性と遅延の概念については、（Benoît、1991、2015; Benoît al.、1998; Fruchard and Schäfke、2008; Wallet、1990、1994）およびそれらに含まれる参考文献も参照してください。

次元2の遅い高速フィールドの特定のケースは、魅力的で反発的な次元1の高速ダイナミクスでよく理解されています（Diener and Diener、1983）。2つの固有値が複素共役であり、実際の部分が変わるというHopf分岐のケースは、何人かの著者によって検討されています（Benoît、2009; Callot、1993; Diener and Diener、1995; Lobry、1992; Neishtadt、1987年、1988年、Wallet、1986年）。最近のモノグラフ（Kuehn、2015年、第12章）の完全に教育的なプレゼンテーションも参照してください。

上の差動システムを考えます  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  遅い変数で  $s \in \mathbb{R}$  2つのクイック変数  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は微分可能な関数です  $(s, x)$ 、および  $\varepsilon > 0$  無限に小さいです。非標準分析の語彙を使用します（Diener and Reeb、1989）またはLobry（2018、第5章）を参照してください。とする  $f(s, 0) = 0 \forall s$ 。

$x = 0$ は、システムの遅い曲線（4.1）だけではなく、方程式の解でもあります。  $f(s, x) = 0$  だけでなく、システムの特定のソリューション（4.1）。正方行列  $2 \times 2$  を定義します

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

と思う  $M(s)$  2つの異なる固有値があります。  $\lambda_1(s)$  そして  $\lambda_2(s)$  そのうちの1つは常にネガティブなままで、他の変化は兆候です。と  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ 、我々は持っています：

- $\lambda_1(s) < 0$  そして  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ 、
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  そして  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ 。

特異摂動の幾何学理論では、拡張位相空間でシステム（4.1）を研究します。  $(x, \varepsilon)$ 。方程式を追加します  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ 。高速ダイナミクスの単一の固有値は符号を変更します。この状況は、拡張システムの中心的な多様性を削減することにより、平面内のシステムの場合に削減できます（（4.1）、  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ）平衡点で  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ 。詳細については、（Boudjellaba and Sari、2009; Krupa and Szmolyan、2001）を参照してください。この縮小により、符号が変化する固有値の積分によって入出力関数が与えられる平面システムが得られます（DienerおよびDiener、1983）。

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

この方程式では、 $p$ は開始の瞬間、 $q$ は終了の瞬間です。減少は、入出力関数が式 (4.3) によって局所的に、臨界超過分岐値に近いものとして与えられることを予測します。以下では、グローバル入出力関数を計算することを提案します。(Boudjellaba and Sari, 2009) で、分離された高速ダイナミクスを持つ低速高速3次元フィールドの特別なケースが検討されました。

非標準分析の語彙を使用します。この理論が正確に何であるかは、この記事を理解する上でそれほど重要ではありません。読者は、極小言語の直感を覚えて、標準外の分析が無限に小さい、無限に大きいという概念の厳密な基盤を提供することを知ることによって、自分自身を安心させることができます。非標準分析の概要については、(Diener and Reeb, 1989) を参照してください。微分方程式の理論における非標準分析の使用の詳細については、読者は (Cartier, 1982)、(Zvonkin and Shubin, 1984)、(Kuehn, 2015, chapter 19.5) を参照できます。または (Lobry, 2018年、第5章)。

したがって、(4.1) のパラメーター $\varepsilon$ は無限に小さいと仮定します。ソリューション  $x(s) = 0$  それは魅力的であるため、「アヒル」です  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  反発する  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ 。目標は、この解に無限に近いシステムの解 (4.1) を研究することです。高速ダイナミクスは、インターバルにわたって魅力的です  $[\sigma_0, \sigma_1[$ 。私たちは取る  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ 。引力の流域が0の初期条件を持つシステム (4.1) の解は、遅い曲線  $x = 0$  に向かって急速に進み、この曲線に限りなく近くなります。 $s < \sigma_1$ 。ソリューションは、この瞬間に0の極小近傍を残さず、間隔全体にわたって0を追跡し続けます。瞬間  $q > \sigma_1$  のため  $x(s)$  が無限に0に近づくことはなくなり、終了時間と呼ばれます。目的は関数を決定することです  $p \mapsto q$ 。  $q$  が式 (4.3) で定義されることを示します。より正確には、次の結果が得られます。

## 定理

私たちは定義します

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  引力0の盆地にあるが、固有値に対応する高速ダイナミクスの不変の多様性に限りなく近い初期条件  $\lambda_1(p)$ 。
- 式 (4.3) による  $q$

そう  $\forall s \in ]p, q[$  または  $q$  に無限に近いわけではありません。  $x(s) \simeq 0$ 。さらに、  $x(q)$  は無限に0に近いわけではありません。  $p$  で、  $x(s)$  高速ダイナミクス軌道に沿って0に近づく

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

誰が通過する  $x(p)$ 。では、  $Q$ 、  $x(s)$  高速ダイナミクスのために、0の不安定なセパレーターに沿って0から離れる

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

証明。我々は持っています  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ 。  $M(s)$  は行列 (4.2) です。我々は持っています

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

システム (4.1) は

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

マトリックス  $M(s)$  2つの異なる固有値があります。したがって、可逆微分可能行列があります。  $P(s)$  と

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

変数を変更して式 (4.5) を変換します。  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

この方程式を拡大鏡で変換します  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

条件 (4.4) は  $g(s, x)$ 。だから私たちは

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

そして  $g_1(s, U, \varepsilon)$  は連続関数です。したがって、

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$  は連続関数です。ベクトルのコンポーネントを定義します。  $U = (U_1, U_2)$  そして  $h = (h_1, h_2)$ 。システムは

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

このシステムは、2つの弱結合方程式で構成されています。変数の変更

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

システムを

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dr}{ds} &= r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon), \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} k_1(s, r, \theta, \varepsilon) &= \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon), \\ k_2(s, r, \theta, \varepsilon) &= -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

$k_2 r = 0$  での連続関数です。  $h_1 = O(r)$  そして  $h_2 = O(r)$ 。我々が選択しました  $r_0$  と  $0 < r_0 < 1$  そして中心0と半径のボールが  $r_0$  元のアトラクションボールに含まれています。変数の変更を適用する  $v = \varepsilon \ln(r)$  地域へ  $0 < r < r_0$  によって定義された領域に送信されます  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ 。私たちはシステムを手に入れます：

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\theta}{ds} &= [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.6}$$

これは、ゆっくりと変化する2つの平面  $\theta = 0$  および  $\theta = \pi/2$  の和集合である、特異的に乱されたシステムです。なぜなら  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  すべての  $s$  について、平面  $\theta = \pi/2$  は魅力的であり、平面  $\theta = 0$  は反発的です。反発平面に無限に近くない点から来る解は、無限の時間で無限に引力平面に近くなります。忌避面に非常に近い点から来るソリューションは、離れる前にかかなり長い間この面に近いままです。ティホノフの定理が適用されます (Lobry et al.、1998; Tihonov, 1952)。我々が選択しました  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$  そして  $x(p)$  引力0の盆地にある初期条件ですが、不変の高速ダイナミクスに無限に近いわけではありません

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

固有値に対応  $\lambda_1(p)$ 。高速ダイナミクスは、対応するソリューションを限りなく0に近づけます。  $(U_1, U_2)$  それは遅い品種にあまり近くありません  $U_2 = 0$ 、したがって平面の  $\theta = 0$  です。その結果、解はすぐに平面  $\theta = \pi/2$  に近づき、遅いシステムの解によって近似されます。

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

私たちはそれを推測します

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$



したがって、再び  $r(s) = r_0$ 、つまり  $v(s)$  が (4.3) で定義された  $q$  に漸近的に等しい場合、無限に小さい。この  $q$  の値の場合、原点は高速ダイナミクスの鞍点です

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

その結果、解は点  $q$  で鞍点から不安定なセパレーターに沿って移動します。ここで、時間  $p$  での解が遅い多様体  $\theta = \pi/2$  に無限に近くないことをここで使用しました。これは、解が平面に到着しなかったという事実を変換します ( $U_1, U_2$ ) に非常に近いことによって  $U_1 = 0$ 。これで証明は完了です。

例 (3.2) - (3.3) に戻しましょう。私たちは定義します  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ 。次のクイックシステムでは、 $s$  はパラメータと見なされます。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2, \end{aligned}$$

2つの平衡点があります (準定常状態)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  そして  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  (3.4) で与えられる。  $(1, 1)$  のヤコビ行列は  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ 。すでに見てきたように、2つの固有値は常に異なり、それらは実数です。2つの固有値は、次の場合にのみ負になります  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ 。結果として特異点  $(1, 1)$  の値のための魅力的なノードであり、 $S$  のために  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ 、そして鞍点  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ 。固有値は  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  そして  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$  (3.5) で与えられる。

と  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ 、ヤコビ行列を取得します

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

我々は持っています

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

固有値は、以下の場合にのみ負の実数部を持ちます  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ 。したがって、 $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ 、次の2つの均衡が満たされ、それらの安定性を交換するため、超臨界分岐があります。  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  そして  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ 。

我々は持っています

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  もし  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[ \text{ modulo } 1$
- $\lambda_2(s) > 0$  もし  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[ \text{ modulo } 1$ 。

セクション2で行ったように、定理を適用して入出力関数を計算できます。

## 5. 汎化

この研究はおそらく、2つ以上の高速方程式と1つの低速方程式の問題にまで及びます。たとえば、(Bacaër, 2007, Section 4.2) の4つの高速方程式をもつ線形化システムを考えます。

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

とする  $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ 、 $\gamma > 0$ 、 $\delta > 0$ 、 $\mu > 0$ 。  $\psi(\cdot) > 0$  これは、期間1の周期関数です。これは、ベクター媒介性疾患の伝染のモデルでもあります。最初の2つのコンポーネントは潜伏期と感染期の感染バクテラを表し、最後の2つのコンポーネントは潜伏期と感染期の感染者を表します。システム (2.1) は、 $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s).\end{aligned}$$

推測は、入出力関数が式 (4.3) で与えられることです。ここで、 $\lambda_2(s)$  支配的な実固有値で置き換える必要があります  $\Lambda(s)$  マトリックスの  $c(s)$ 、数値例で確認できるように (図3)。パラメータ値は  $\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$ 、 $\gamma = 1$ 、 $\delta = 1$ 、 $\mu = 1$ 、 $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ 、 $m = 3$  そして  $T = 2000$ 。行列の固有値  $\lambda$  の特性方程式があります  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

私たちはそれを推測します  $\Lambda(s) < 0$  もしそうなら

$$\frac{\beta\gamma\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

何が起こりますか  $s_1 < s < s_2$  と  $s_1 \simeq 0,323$  そして  $s_2 \simeq 0,677$ 。式 (4.3) で、 $s^* \simeq 0,047$  これは、図3の消滅確率の急上昇によく対応しているようです。

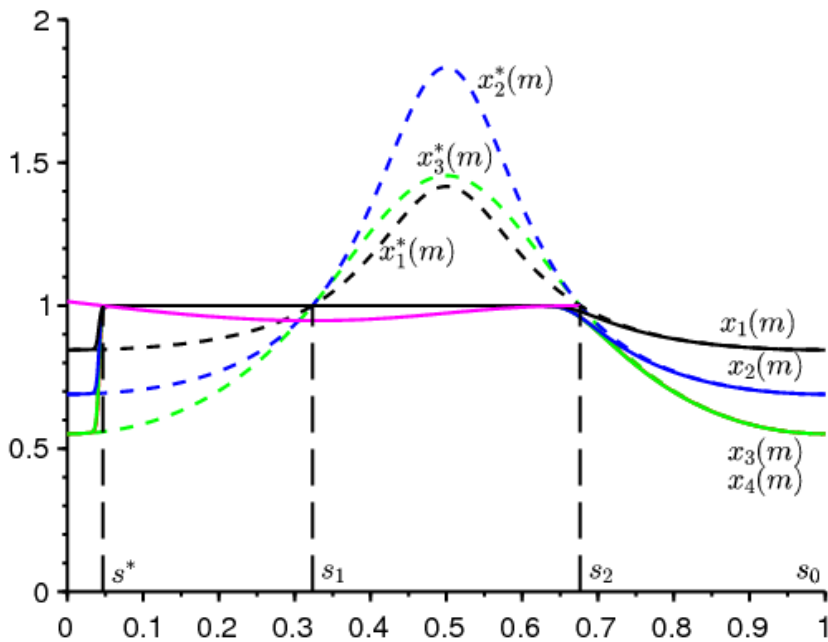


図3.  $m$  期間後の絶滅確率  $x_1(m)$  (黒で)、 $x_2(m)$  (青) だけでなく  $x_3(m)$  そして  $x_4(m)$  (緑色で、区別がつかない) によると  $s_0$ 。点線の緩やかな曲線。ピンクで、私たちは関数の一部を描きました  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^s \Lambda(s) ds$ 。

## 参考文献

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol., <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée-sortie, C. R. Acad. Sci., Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.

- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node. *Discrete Cont. Dyn. – S 2*, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, *ARIMA* 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. *Collect. Math.* 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. *Ann. Fac. sci. Toulouse* 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. *J. Diff. Eq.* 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, *Séminaire Bourbaki* 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Differ. Equations* 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. *C. R. Acad. Sci., Série I* 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, *Nonstandard Analysis in Practice*, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) *Analyse non standard*. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) *Canard Cycles and Center Manifolds*. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. *Asymptotic Analysis II*, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, *ARIMA* 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, *Nonlinearity* 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) *Multiple Time Scale Dynamics*. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des ] bifurcations dynamiques ] . *Ann. I. Fourier* 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov’s theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. *Electron. J. Differ. Eq.* 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. *Differ. Equations Translations* 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. *Differ. Equations Translations* 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d’équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. *Mat. Sborn.* 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. *Ann. I. Fourier* 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. *Ann. I. Fourier* 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France* 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. *Scholarpedia* 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk* 39, 77–127.