

Sobre la probabilidad de extinción de una población en un entorno periódico lento

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër¹ Claude Lobry² Tewfik Sari³

¹ Unidad de modelado matemático y computacional de sistemas complejos, Institut de Recherche pour le Développement, Les Cordeliers, París, Francia, nicolas.bacaer@ird.fr

² Niza, Francia, lobrinria@wanadoo.fr

³ ITAP, Universidad de Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Francia, tewfik.sari@irstea.fr

resumen

Estamos interesados en la probabilidad de extinción de un proceso lineal de nacimiento y muerte con varios tipos en un entorno periódico cuando el período de los coeficientes es muy grande. Esta probabilidad puede presentar, en el límite, una discontinuidad en relación con un pato en un sistema dinámico lento-rápido. El punto de discontinuidad se determina con precisión en un ejemplo con dos tipos de individuos.

Palabras clave: proceso de nacimiento y muerte, ambiente periódico, sistema lento-rápido.

1. Introducción

La estimación de la probabilidad de extinción de una población es una cuestión que interviene en particular en biología de conservación y epidemiología. En este segundo caso, por población se entiende población infectada. Un modelo matemático clásico para estudiar este tipo de problema es el de los procesos lineales de nacimiento y muerte con uno o más tipos de individuos (Méléard, 2016). Sin embargo, en muchas situaciones, debe tenerse en cuenta la estacionalidad del medio ambiente, lo que conduce al estudio de estos procesos cuando los coeficientes de nacimiento y muerte son funciones periódicas del tiempo (Bacaër y Ait Dads, 2014). Ciertas poblaciones o ciertas epidemias tienen coeficientes cuya escala de tiempo es relativamente corta en comparación con la estacionalidad anual; Por lo tanto, se nos lleva a considerar el límite donde el período de los coeficientes es muy grande. Cuando los parámetros vitales son subcríticos durante parte del año (la temporada desfavorable), la probabilidad de extinción en función de la temporada en la que comienza el proceso converge hacia un límite discontinuo (Carmona y Gandon, 2019). El punto de discontinuidad es antes del comienzo de la temporada desfavorable.

Bacaër (2019) había continuado este estudio esencialmente en el caso de un solo tipo de individuos, señalando en particular que la discontinuidad de la probabilidad de extinción estaba vinculada a la presencia en un sistema dinámico lento-rápido de un "pato" Es decir (ver, por ejemplo, Lobry (2018, capítulo 5)) de una trayectoria que recorre un arco atractivo durante cierto tiempo antes de seguir un arco repulsivo. Proponemos a continuación para estudiar un ejemplo con dos tipos de individuos inspirados en un modelo de transmisión de una enfermedad transmitida por vectores. El punto de discontinuidad de la probabilidad de extinción se determina con precisión. Este problema quedó sin resolver (Carmona y Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

La sección 2 presenta el modelo de población, el de los procesos lineales de nacimiento y muerte con coeficientes periódicos con varios tipos de individuos. Se explica que la probabilidad de extinción está vinculada a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cuando el período converge al infinito, un cambio de variable transforma este sistema en un sistema lento-rápido con un período fijo.

En la sección 3, presentamos un ejemplo con dos tipos de individuos. Las simulaciones numéricas sugieren que la probabilidad de extinción converge a un límite discontinuo y que el punto de discontinuidad está determinado por una condición que involucra la integral del valor propio dominante de una matriz determinada. En la sección 4, demostramos con herramientas de análisis no estándar que esta condición la que determina el punto de discontinuidad. En la sección 5, presentamos otro ejemplo con esta vez cuatro tipos de individuos. Una simulación numérica sugiere que una condición del mismo tipo aún determina el punto de discontinuidad. Sin embargo, no hemos podido demostrar esto en un marco general cuando el número de tipos de individuos es estrictamente mayor que dos.

2. El modelo

Consideramos un proceso lineal de nacimiento y muerte con k tipos ($k \geq 1$) en un entorno periódico. $T > 0$ es el período del medio ambiente. Nos damos dos funciones matriciales $A(t) = (A_{i,j}(t))$ y $B(t) = (B_{i,j}(t))$ de tamaño k y de período T con los siguientes supuestos:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$ representa la velocidad a la que los individuos tipo j generan nuevos individuos tipo i
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$ es la velocidad a la que los individuos tipo j se transforman en individuos tipo i
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$ representa la velocidad a la que los individuos tipo j cambian de tipo o mueren, y $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- Si $U(t)$ es la solución del sistema $dU/dt = -B(t)U(t)$ con la condición inicial $U(0) = I$ (la matriz de identidad), luego el radio espectral de la matriz $U(T)$, es decir, el multiplicador de Floquet dominante, es $\rho(U(T)) < 1$
- la matriz $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$ es irreducible para todo t .

Más precisamente, como en (Bacaër y Ait Dads, 2014), definimos

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$ la probabilidad de tener N_i individuos de tipo i en el tiempo t ($1 \leq i \leq k$)
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ La función generadora correspondiente.

Tenemos entonces

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Suponemos que en ese momento t_0 hay $n_i \geq 0$ individuos del tipo i (el n_i son enteros $1 \leq i \leq k$) con $\sum_i n_i \geq 1$. Podemos suponer que $0 \leq t_0 < T$. Según (Bacaër y Ait Dads, 2014), la probabilidad $p(t_0, t_1)$ que la población se extingue en este segundo instante, es decir que no queda ningún individuo de los diferentes tipos, está dada por

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$ est la solution du système différentiel

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

con la condición inicial $z_i(0) = 0 \forall i$.

La expectativa del número de individuos de tipo i en el tiempo t es una solución de

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

y $E_i(t_0) = n_i \forall i$. Definimos

- $V(t)$ la solución del sistema $dV/dt = C(t)V(t)$ con la condición inicial $V(0) = I$.
- $F = \rho(V(T))$ El multiplicador de Floquet dominante.

Si $F \leq 1$,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

Si $F > 1$, esta probabilidad converge, por el contrario, hacia un límite estrictamente inferior a 1. Es una función periódica de t_0 (Bacaër y Ait Dads, 2014).

Asumimos

- hay dos funciones de matriz periódicas del período 1, independientes de T , $a(s)$ y $b(s)$, con

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$ es un número fijo
- $t_1 = t_0 + mT$, donde $m \geq 1$ es un entero fijo.

Nuestro objetivo es estudiar el límite.

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

en función de s_0 , con $0 \leq s_0 < 1$. También tenemos

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

cuál es la probabilidad de extinción después de m períodos cuando se comienza con un solo individuo de tipo i .

Definimos

- $\varepsilon = 1/T$,
- $c(s) = a(s) - b(s)$,
- $x(s) = z(t)$.

Tenemos entonces

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{ji}(s_0 + m - s) - a_{ji}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

con $x_i(0) = 0 \forall i$. De más, $z(t_1 - t_0) = x(m)$. También tenemos $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$, $0 \leq s \leq m$ (Bacaër y Ait Dads, 2014).

Si T converge a ∞ , en otras palabras si $\varepsilon \rightarrow 0$, el sistema (2.1) se puede escribir como un sistema autónomo lento-rápido con k variables rápidas $x_i(s)$ ($1 \leq i \leq k$) y una variable lenta $x_{k+1}(s) = s$ con $dx_{k+1}/ds = 1$.

Para la solución estacionaria trivial $x_i = 1 \forall i$, la matriz jacobiana del miembro correcto del sistema (2.1) es $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. \tilde{c} denota la matriz transpuesta de la matriz c . Según un corolario del teorema de Perron y Frobenius para matrices irreducibles cuyos coeficientes fuera de la diagonal son todos positivos o cero (Allaire et al., 2018, nota 6.2.13), matrices $c(s)$ y $\tilde{c}(s)$ tener un valor propio real dominante común $\Lambda(s)$, estrictamente mayor que la parte real de todos los demás valores propios.

3. Un ejemplo

Echemos

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

con $\alpha(s) > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ y $\delta > 0$. $\alpha(s)$ es una función periódica continua del período 1. Este modelo estocástico está inspirado en el modelo determinista linealizado para una enfermedad transmitida por vectores (Bacaër, 2007, Sección 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Los vectores infectados son de tipo 1. Las personas infectadas son de tipo 2. El parámetro $\alpha(s)$ es la velocidad a la que las personas infectadas transmiten su infección a los vectores cuando son mordidas. Esta tasa es periódica porque la población de vectores sanos también es periódica. El parámetro β es la velocidad a la que mueren los vectores. El parámetro γ es la velocidad a la que pican los vectores. El parámetro δ es la velocidad a la que las personas infectadas se recuperan. Luego se escribe el sistema (2.1)

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Tenga en cuenta que los miembros de la derecha se cancelan mutuamente en dos casos: $x_1(s) = 1$ y $x_2(s) = 1$, o bien

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Los dos valores propios de la matriz $c(s)$ son números reales:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

El valor propio dominante es $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$. Se tiene $\lambda_-(s) < 0 \forall s$.

Supongamos que hay una temporada desfavorable para la transmisión de la epidemia, es decir. $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$ con

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in]0, s_1[\cup]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Supongamos además que

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Como ejemplo, tomemos $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$ con $\bar{\alpha} > 0$, $|\kappa| < 1$ y

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Esta última condición asegura que efectivamente haya una temporada desfavorable. Más específicamente, elijamos $\bar{\alpha} = 3$, $\kappa = 0,75$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ y $\delta = 1$. Estos valores no son muy realistas, pero resaltan el fenómeno. Tenemos entonces $s_1 \simeq 0,323$ y $s_2 \simeq 0,677$. Se puede verificar numéricamente que se cumple la condición (3.8). También tomemos $T = 1000$, $m = 3$ y $s_0 = 0,25$. La Figura 1 representa la solución del sistema (3.2) - (3.3) con la condición inicial $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Utilizamos el software Scilab y resolvimos el sistema diferencial para $\log(1 - x_1(s))$ y $\log(1 - x_2(s))$. Luego volvimos a las variables iniciales. También hemos dibujado la función constante igual a 1 y las curvas (3.4). Tenga en cuenta lo siguiente:

- en el barrio de $s = 0$, las curvas son casi verticales (no visibles en las figuras);
- $x_1(s)$ y $x_2(s)$ convergen en una solución periódica;
- asintóticamente $x_1(s)$ y $x_2(s)$ están muy cerca de 1 para los valores de s con $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$, especialmente para $s \in]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$, pero también para $s \in]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$ con $s_2 - 1 < s^* < s_1$. En este último caso, tenemos $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$. Hay un "pato".

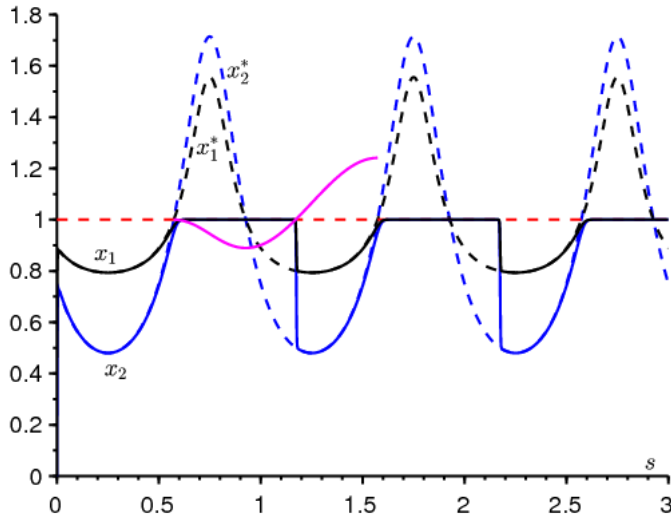


Figura 1. En función de s , las curvas $x_1(s)$ (en negro) y $x_2(s)$ (en azul) así como las curvas lentas $x_1^*(s)$ (punteado en negro), $x_2^*(s)$ (azul punteado) y 1 (rojo punteado). En rosa, una parte de la función. $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$.

La Figura 2 muestra cómo las cantidades que nos interesan, las probabilidades de extinción después de m periodos $x_1(m)$ y $x_2(m)$, varían según s_0 . También hemos dibujado las curvas deducidas de (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

La figura 2 sugiere que $x_1(m)$ y $x_2(m)$ convergen cuando $T \rightarrow +\infty$, hacia límites iguales a 1 si $s_0 \in]s^*, s_2[$. $s_0 = s^*$ Es una discontinuidad de los límites. El problema es determinar este punto.

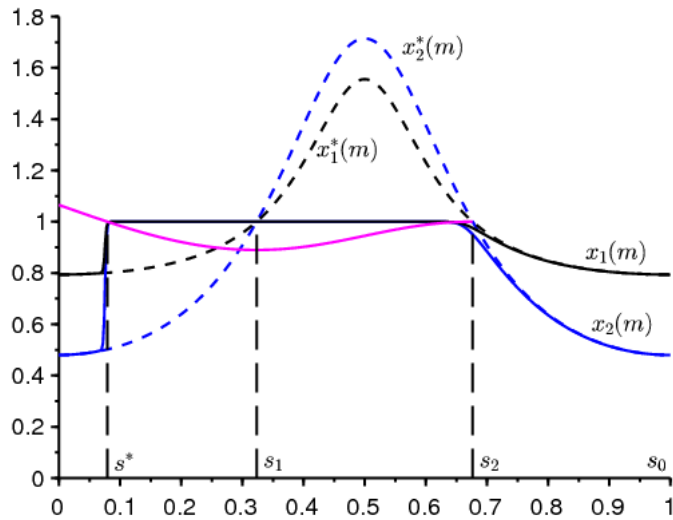


Figura 2. Probabilidades de extinción después m periodos $x_1(m)$ (en negro) y $x_2(m)$ (en azul oscuro) dependiendo de s_0 . Las fórmulas para $x_1^*(m)$ y $x_2^*(m)$ están punteadas En rosa, una parte de la función. $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

Demostremos en la siguiente sección que las soluciones $x_1(s)$ y $x_2(s)$ en la Figura 1, que están muy cerca de 1 para $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$, de repente se desvían del vecindario de 1 por $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$ con

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

En otras palabras, estas soluciones se desvían de la vecindad de 1 en un punto $s = q$. De más, $q = s_0 + 1 - s^*$ y

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Es esta ecuación la que determina s^* de forma única. De hecho, si $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$, entonces nosotros tenemos

- $\phi(s_1) < 0$ debido a la condición (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in]s_2 - 1, s_1[$ por condición (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

debido a la condición (3.8).

Entonces hay un solo número real $s^* \in]s_2 - 1, s_1[$ con $\phi(s^*) = 0$. En el ejemplo, encontramos numéricamente $s^* \simeq 0,079$.

Nota. La condición (3.8) no tiene conexión con un posible carácter supercrítico del sistema (3.1). También es bien conocido en la teoría de Floquet. De hecho, si tomamos por ejemplo $c = 0,7$ En vez de $c = 1$, encontramos numéricamente que el multiplicador de Floquet dominante es $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$ entonces que $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$.

4. La función de entrada-salida para una bifurcación transcítica

Para justificar lo que se acaba de decir sobre el punto de discontinuidad, consideramos más generalmente un campo lento-rápido con dos dimensiones rápidas y una dimensión lenta, como (3.2) - (3.3). Se supone que la dinámica rápida tiene un punto singular con dos valores propios reales distintos, uno de los cuales es siempre negativo y el segundo es negativo y luego positivo. Por lo tanto, es una bifurcación transcítica donde el estado de equilibrio de la dinámica rápida es un nodo estable y luego un punto de silla de montar.

Una solución que esté cerca del punto singular estable no abandonará su vecindario tan pronto como se vuelva inestable, sino que continuará estando cerca durante cierto tiempo. El objetivo es calcular la función de entrada-salida para esta bifurcación transcítica, es decir, definir el instante en que la solución se aleja del punto singular (instante de salida), de acuerdo con el lugar donde está se acerca (hora de entrada). Este fenómeno conocido como "retraso de la bifurcación" está relacionado con la noción de soluciones de pato y sobreestabilidad.

El concepto de función input-output y el concepto de solución de pato se estudiaron por primera vez a principios de la década de 1980 con métodos de análisis no estándar. Véanse los artículos de revisión (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin y Shubin, 1984). La función de entrada-salida se calculó primero para los patos de la ecuación de Van der Pol (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) y luego se extendió a cualquier sistema lento-rápido del avión (Diener y Diener, 1983).

Más tarde, la existencia de soluciones de pato se encontró con los métodos clásicos de desarrollo asintótico (Eckhaus, 1983) y por la teoría geométrica de las perturbaciones singulares (Dumortier y Roussarie, 1996). La función de entrada-salida para un sistema plano también se ha obtenido mediante la teoría geométrica de perturbaciones singulares (De Maesschalck y Schecter, 2016).

Para obtener más detalles sobre la contribución de la escuela francesa no estandarizada al problema de los patos y el retraso en la bifurcación, el lector puede consultar (Cartier, 1982; Fruchard y Schäfer, 2008). Para una visión más completa sobre los diversos enfoques en la teoría de las perturbaciones singulares, vea la monografía reciente (Kuehn, 2015), así como el artículo (Wechselberger, 2007) dedicado a los patos. Para la noción de sobreestabilidad y retraso en la bifurcación, ver también (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Fruchard y Schäfer, 2008; Wallet, 1990, 1994) y las referencias que contienen.

El caso particular de un campo lento-rápido en la dimensión dos, con una dinámica rápida de la dimensión uno que es atractiva y luego repulsiva, es bien entendido, ver (Diener y Diener, 1983). Varios autores han considerado el caso de la bifurcación de Hopf, donde dos valores propios son conjugados complejos y su parte real cambia de signo, ver (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener y Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Vea también la presentación completa y educativa en la monografía reciente (Kuehn, 2015, capítulo 12).

Considere un sistema diferencial en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ con una variable lenta $s \in \mathbb{R}$ y con dos variables rápidas $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en (s, x) y $\varepsilon > 0$ Es un infinitamente pequeño. Utilizamos el vocabulario de análisis no estándar, ver (Diener y Reeb, 1989) o Lobry (2018, capítulo 5). Asumimos $f(s, 0) = 0 \forall s$.

$x = 0$ no es solo una curva lenta del sistema (4.1), es decir, una solución de la ecuación $f(s, x) = 0$, pero también una solución particular del sistema (4.1). Definimos la matriz cuadrada 2×2

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Suponemos que $M(s)$ tiene dos valores propios distintos, $\lambda_1(s)$ y $\lambda_2(s)$ uno de los cuales siempre permanece negativo y el otro cambia de signo. Con $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$, se tiene :

- $\lambda_1(s) < 0$ y $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ y $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in]\sigma_1, \sigma_2]$.

En la teoría geométrica de perturbaciones singulares, estudiamos el sistema (4.1) en el espacio de fase extendido (x, ε) . Agregamos la ecuación $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$. Un único valor propio de la dinámica rápida cambia de signo. Esta situación puede reducirse al caso de los sistemas en el plano, mediante la reducción de la variedad central del sistema aumentado ((4.1), $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$) en su punto de equilibrio $(x, \varepsilon) = (0, 0)$. Para más detalles ver (Boudjellaba y Sari, 2009; Krupa y Szmolyan, 2001). Con esta reducción, obtenemos un sistema plano cuya función de entrada-salida viene dada por la integral del valor propio que cambia de signo (Diener y Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

En esta ecuación, p es el instante de entrada, y q es el instante de salida. La reducción predice que la función de entrada-salida está dada por la fórmula (4.3) localmente, cerca del valor de bifurcación transcítica. Proponemos a continuación calcular la función global de entrada-salida. Se consideró el caso particular de un campo tridimensional lento-rápido con dinámicas rápidas desacopladas (Boudjellaba y Sari, 2009).

Usamos el vocabulario de análisis no estándar. Qué es exactamente esta teoría no es muy importante para la comprensión de este artículo. El lector puede tener en cuenta el sentido intuitivo del lenguaje infinitesimal y tranquilizarse sabiendo que el análisis no estándar proporciona una base rigurosa para los conceptos de infinitamente pequeño e infinitamente grande. Para una introducción al análisis no estándar, ver (Diener y Reeb, 1989). Para obtener más información sobre el uso de análisis no estándar en la teoría de ecuaciones diferenciales, el lector puede consultar (Cartier, 1982), (Zvonkin y Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, capítulo 19.5). o (Lobry, 2018, capítulo 5).

Por lo tanto, suponemos que el parámetro ε en (4.1) es infinitamente pequeño. La solución $x(s) = 0$ es un "pato" ya que es atractivo para $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$ y repulsivo para $s \in]\sigma_1, \sigma_2]$. El objetivo es estudiar las soluciones del sistema (4.1) que son infinitamente cercanas a esta solución. La dinámica rápida es atractiva durante el intervalo. $[\sigma_0, \sigma_1[$. Se toma $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$. Una solución del sistema (4.1) con una condición inicial en la cuenca de atracción de 0 va rápidamente hacia la curva lenta $x = 0$ y permanece infinitamente cerca de esta mientras $s < \sigma_1$. La solución no deja el vecindario infinitesimal de 0 en este instante, sino que sigue el 0 durante un intervalo completo. El momento $q > \sigma_1$ por el cual $x(s)$ ya no está infinitamente cerca de 0 se llama tiempo de salida. El objetivo es determinar la función. $p \mapsto q$. Mostraremos que q está definido por la ecuación (4.3). Para ser más precisos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Definimos

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$ una condición inicial ubicada en la cuenca de atracción de 0 pero que no está infinitamente cerca de la variedad invariante de la dinámica rápida correspondiente al valor propio $\lambda_1(p)$.
- q por ecuación (4.3).

Entonces $\forall s \in]p, q[$ no infinitamente cerca de p o q , tenemos: $x(s) \simeq 0$. De más, $x(q)$ no está infinitamente cerca de 0. En p , $x(s)$ se acerca a 0 a lo largo de la órbita de dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

quien pasa $x(p)$. En q , $x(s)$ se aleja de 0 a lo largo del separador inestable de 0 para una dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Prueba . Se tiene $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$. $M(s)$ es la matriz (4.2). Se tiene

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

El sistema (4.1) se convierte

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

La matriz $M(s)$ tiene dos valores propios distintos. Por lo tanto, hay una matriz invertible diferenciable $P(s)$ con

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Transformamos la ecuación (4.5) con el cambio de variable $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Transformamos esta ecuación con la lupa $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

Las condiciones (4.4) son verificadas por $g(s, x)$. Entonces tenemos

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

y $g_1(s, U, \varepsilon)$ Es una función continua. Por lo tanto, tenemos

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$ Es una función continua. Definimos los componentes de los vectores: $U = (U_1, U_2)$ y $h = (h_1, h_2)$. El sistema se convierte

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Este sistema consta de dos ecuaciones débilmente acopladas. Variables cambiantes

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

convierte el sistema en

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

con

$$k_1(s, r, \theta, \varepsilon) = \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon),$$

$$k_2(s, r, \theta, \varepsilon) = -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon).$$

k_2 es una función continua en $r=0$ porque $h_1 = O(r)$ y $h_2 = O(r)$. Nosotros elegimos r_0 con $0 < r_0 < 1$ y para que la pelota con centro 0 y radio r_0 está incluido en la piscina de atracciones original. Aplicar el cambio variable $v = \varepsilon \ln(r)$ a la región $0 < r < r_0$, que se envía a la región definida por $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$. Obtenemos el sistema:

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon).$$

(4.6)

Es un sistema singularmente perturbado cuya variedad lenta es la unión de los dos planos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Porque $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$ para todos los s , el plano $\theta = \pi/2$ es atractivo y el plano $\theta = 0$ es repulsivo. Cualquier solución que provenga de un punto no infinitamente cercano al plano repulsivo se vuelve infinitamente cercana al plano atractivo en un tiempo infinitamente pequeño. Las soluciones que provienen de un punto muy cercano al plano repelente pueden permanecer cerca de este plano durante bastante tiempo antes de alejarse de él. Se aplica el teorema de Tihonov (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Nosotros elegimos $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ y $x(p)$ una condición inicial ubicada en la cuenca de atracción de 0, pero que no está infinitamente cerca de la variedad invariable de dinámica rápida

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

correspondiente al valor propio $\lambda_1(p)$. La dinámica rápida conduce la solución correspondiente infinitamente cerca de 0. En el plano (U_1, U_2) no está muy cerca de la variedad lenta $U_2 = 0$, y por lo tanto del plano $\theta = 0$. En consecuencia, la solución se acerca rápidamente al plano $\theta = \pi/2$ y luego se aproxima por la solución del sistema lento

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Deducimos que

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Por lo tanto tenemos de nuevo $r(s) = r_0$, es decir $v(s)$ infinitamente pequeño, cuando s es asintóticamente igual a q definido por (4.3). Para este valor de q , el origen es un punto de referencia para dinámicas rápidas

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

En consecuencia, la solución se aleja en el punto q del punto de silla a lo largo de su separador inestable. Aquí utilizamos que en el momento p la solución no estaba infinitamente cerca de la variedad lenta $\theta = \pi/2$, lo que traduce el hecho de que la solución no llegó al plano (U_1, U_2) al estar muy cerca de $U_1 = 0$. Esto completa la prueba.

Volvamos al ejemplo (3.2) - (3.3). Definimos $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$. El siguiente sistema rápido, donde s se considera un parámetro,

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

tiene dos puntos de equilibrio (estados cuasi estacionarios) $(x_1, x_2) = (1, 1)$ y $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ dado por (3.4). La matriz jacobiana en $(1, 1)$ es $\tilde{c}(s_0 + m - s)$. Como ya hemos visto, los dos valores propios son siempre distintos, son números reales. Los dos valores propios son negativos si y solo si $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$. En consecuencia, el punto singular $(1, 1)$ es un nodo atractivo para los valores de s para los cuales $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ y un punto de silla si $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Los valores propios son $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$ y $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$, dado por (3.5).

Con $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$, obtenemos la matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \bar{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Los valores propios tienen una parte real negativa si y solo si $\bar{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$. Por lo tanto, en los puntos donde $\bar{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$, hay bifurcaciones transcíticas, porque los dos equilibrios siguientes se encuentran e intercambian sus estabildades: $(x_1, x_2) = (1, 1)$ y $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$.

Se tiene

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$ Si $s_0 + m - s \in]s_1, s_2[$ modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$ Si $s_0 + m - s \in]s_2, s_1 + 1[$ modulo 1.

Podemos aplicar el teorema y calcular la función de entrada-salida como lo hicimos en la sección 2.

5. Generalización

Este estudio probablemente se extiende a problemas con más de dos ecuaciones rápidas y una ecuación lenta. Considere, por ejemplo, el sistema linealizado con cuatro ecuaciones rápidas de (Bacaër, 2007, Sección 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Asumimos $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0, \psi(\cdot) > 0$ es una función periódica del período 1. También es un modelo para la transmisión de una enfermedad transmitida por vectores. Los primeros dos componentes representan los vectores infectados en la fase latente y en la fase infecciosa, mientras que los dos últimos componentes representan a las personas infectadas en la fase latente y en la fase infecciosa. El sistema (2.1) se convierte, con $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

La conjetura es que la función de entrada-salida viene dada por la fórmula (4.3), donde $\lambda_2(s)$ debe ser reemplazado por el valor propio real dominante $\Lambda(s)$ de la matriz $c(s)$, como pudimos verificar en un ejemplo numérico (Figura 3). Los valores de los parámetros son $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$, $m = 3$ y $T = 2000$. Tenemos la ecuación característica para los valores propios λ de la matriz $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

Deducimos que $\Lambda(s) < 0$ si y solo si

$$\frac{\beta\gamma\delta\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

para que pasa $s_1 < s < s_2$ con $s_1 \simeq 0,323$ y $s_2 \simeq 0,677$. Con la fórmula (4.3) encontramos $s^* \simeq 0,047$, que parece corresponder bien al salto repentino en la probabilidad de extinción en la Figura 3.

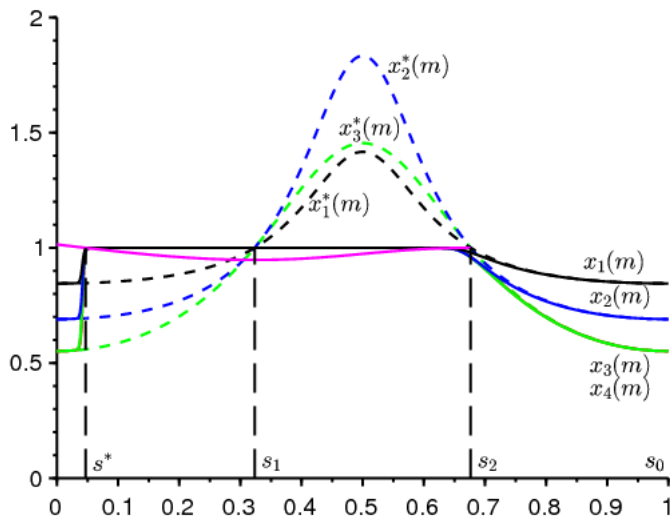


Figura 3. Las probabilidades de extinción después de m periodos $x_1(m)$ (en negro), $x_2(m)$ (en azul) así como $x_3(m)$ y $x_4(m)$ (en verde, indistinguible) según s_0 . Punteado, curvas lentas. En rosa, hemos dibujado una parte de la función. $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$.

Referencias bibliográficas

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.

- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. –S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfer, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schafke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des " bifurcations dynamiques ". Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.