

# Über die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Bevölkerung in einer langsamen periodischen Umgebung

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Mathematische und Computermodellierungseinheit komplexer Systeme, Institut de Recherche pour le Développement, Les Cordeliers, Paris, Frankreich, nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> Nizza, Frankreich, lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP, Universität Montpellier, INRAE, Institut Agro, Montpellier, Frankreich, tewfik.sari@irstea.fr

## Zusammenfassung

Wir sind an der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens eines linearen Prozesses von Geburt und Tod mit mehreren Typen in einer periodischen Umgebung interessiert, wenn die Periode der Koeffizienten sehr groß ist. Diese Wahrscheinlichkeit kann an der Grenze eine Diskontinuität in Verbindung mit einer Ente in einem langsam-schnellen dynamischen System darstellen. Der Punkt der Diskontinuität wird in einem Beispiel mit zwei Arten von Individuen genau bestimmt.

Schlüsselwörter: Geburts- und Todesprozess, periodische Umgebung, langsam-schnelles System

## 1. Einleitung

Die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Bevölkerung ist eine Frage, die insbesondere in die Naturschutzbiologie und in die Epidemiologie eingreift. In diesem zweiten Fall ist unter Bevölkerung eine infizierte Bevölkerung zu verstehen. Ein klassisches mathematisches Modell zur Untersuchung dieser Art von Problem ist das der linearen Prozesse von Geburt und Tod mit einem oder mehreren Arten von Individuen (Méléard, 2016). In vielen Situationen muss jedoch die Saisonalität der Umwelt berücksichtigt werden, was zur Untersuchung dieser Prozesse führt, wenn die Koeffizienten von Geburt und Tod periodische Funktionen der Zeit sind (Bacaër und Ait Dads, 2014). Bestimmte Populationen oder bestimmte Epidemien haben Koeffizienten, deren Zeitskala im Vergleich zur jährlichen Saisonalität relativ kurz ist. Wir werden daher veranlasst, die Grenze zu betrachten, bei der die Periode der Koeffizienten sehr groß ist. Wenn die Vitalparameter während eines Teils des Jahres (der ungünstigen Jahreszeit) unterkritisch sind, konvergiert die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens in Abhängigkeit von der Jahreszeit, in der der Prozess beginnt, gegen eine diskontinuierliche Grenze (Carmona und Gandon, 2019). Der Punkt der Diskontinuität liegt vor dem Beginn der ungünstigen Saison.

Bacaër (2019) hatte diese Studie im Wesentlichen bei einem einzelnen Individuentyp fortgesetzt und insbesondere festgestellt, dass die Diskontinuität der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens mit dem Vorhandensein einer "Ente" in einem langsam-schnellen dynamischen System zusammenhängt. Das heißt (siehe zum Beispiel Lobry (2018, Kapitel 5) einer Flugbahn, die für eine bestimmte Zeit entlang eines attraktiven Bogens verläuft, bevor sie einem abstoßenden Bogen folgt. Wir schlagen unten vor, ein Beispiel mit zwei Arten von Individuen zu untersuchen, die von einem Modell der Übertragung einer durch Vektoren übertragenen Krankheit inspiriert sind. Der Punkt der Diskontinuität der Extinktionswahrscheinlichkeit wird genau bestimmt. Dieses Problem blieb ungelöst (Carmona und Gandon, 2019; Bacaër, 2019).

In Abschnitt 2 wird das Bevölkerungsmodell vorgestellt, das lineare Prozesse von Geburt und Tod mit periodischen Koeffizienten für verschiedene Arten von Personen. Es wird erklärt, dass die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens mit einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen verbunden ist. Wenn die Periode gegen unendlich konvergiert, verwandelt eine Änderung der Variablen dieses System in ein langsam-schnelles System mit einer festen Periode.

In Abschnitt 3 präsentieren wir ein Beispiel mit zwei Arten von Personen. Numerische Simulationen legen nahe, dass die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens gegen eine diskontinuierliche Grenze konvergiert und dass der Punkt der Diskontinuität durch eine Bedingung bestimmt wird, die das Integral des dominanten Eigenwerts einer bestimmten Matrix beinhaltet. In Abschnitt 4 zeigen wir mit nicht standardmäßigen Analysewerkzeugen, dass diese Bedingung den Punkt der Diskontinuität bestimmt. In Abschnitt 5 präsentieren wir ein weiteres Beispiel mit dieser Zeit vier Arten von Personen. Eine numerische Simulation legt nahe, dass eine Bedingung des gleichen Typs immer noch den Punkt der Diskontinuität bestimmt. Wir konnten dies jedoch nicht in einem allgemeinen Rahmen nachweisen, wenn die Anzahl der Arten von Personen streng größer als zwei ist.

## 2. Das Modell

Wir betrachten einen linearen Prozess von Geburt und Tod mit  $k$  Typen ( $k \geq 1$ ) in einer periodischen Umgebung.  $T > 0$  ist die Periode der Umgebung. Wir geben uns zwei Matrixfunktionen  $A(t) = (A_{i,j}(t))$  und  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  der Größe  $k$  und der Periode  $T$  mit folgenden Annahmen:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  stellt die Rate dar, mit der Individuen vom Typ  $j$  neue Individuen vom Typ  $i$  erzeugen
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich Individuen vom Typ  $j$  in Individuen vom Typ  $i$  verwandeln
- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  stellt die Rate dar, mit der Personen vom Typ  $j$  den Typ ändern oder sterben, und  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- wenn  $U(t)$  ist Systemlösung  $dU/dt = -B(t)U(t)$  mit dem Ausgangszustand  $U(0) = I$  (die Identitätsmatrix), dann der Spektralradius der Matrix  $U(T)$  d.h. der dominante Floquet-Multiplikator ist  $\rho(U(T)) < 1$
- die Matrix  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  ist für alle  $t$  irreduzibel.

Genauer gesagt, wie in (Bacaër und Ait Dads, 2014) definieren wir

- $\pi(t, N_1, \dots, N_k)$  die Wahrscheinlichkeit zu haben  $N_i$  Individuen vom Typ  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$  die entsprechende Erzeugungsfunktion.

Wir haben dann

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i] [B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t) Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

Wir gehen davon aus, dass zu der Zeit  $t_0$  es gibt  $n_i \geq 0$  Individuen vom Typ  $i$  (die  $n_i$  sind ganze Zahlen,  $1 \leq i \leq k$ ) mit  $\sum_i n_i \geq 1$ . Das können wir annehmen  $0 \leq t_0 < T$ . Laut (Bacaër und Ait Dads, 2014) ist die Wahrscheinlichkeit  $p(t_0, t_1)$  dass die Bevölkerung in diesem zweiten Moment ausgestorben ist, das heißt, dass es kein Individuum der verschiedenen Typen gibt, ist gegeben durch

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  ist die Lösung des Differentialsystems

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)] [B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t) z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

mit dem Ausgangszustand  $z_i(0) = 0 \forall i$ .

Die Erwartung der Anzahl von Individuen vom Typ  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  ist eine Lösung von

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

und  $E_i(t_0) = n_i \forall i$ . Wir definieren

- $V(t)$  die Systemlösung  $dV/dt = C(t)V(t)$  mit dem Ausgangszustand  $V(0) = I$ .
- $F = \rho(V(T))$  der dominante Floquet-Multiplikator.

Wenn  $F \leq 1$ ,

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow[t_1 \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Wenn  $F > 1$  ist, konvergiert diese Wahrscheinlichkeit im Gegenteil gegen eine Grenze, die streng unter 1 liegt. Sie ist eine periodische Funktion von  $t_0$  (Bacaër und Ait Dads, 2014).

Wir nehmen an

- es gibt zwei periodische Matrixfunktionen der Periode 1, unabhängig von  $T$ ,  $a(s)$  und  $b(s)$  mit

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  ist eine feste Nummer
- $t_1 = t_0 + mT$ , wobei  $m \geq 1$  eine feste ganze Zahl ist.

Unser Ziel ist es, die Grenze zu studieren

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

bezüglich  $s_0$  mit  $0 \leq s_0 < 1$ . Wir haben auch

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens nach  $m$  Perioden, wenn von einem einzelnen Individuum vom Typ  $i$  *ausgegangen* wird.

Wir definieren

- $\varepsilon = 1/T$ ,
- $c(s) = a(s) - b(s)$ ,
- $x(s) = z(t)$ .

Wir haben dann

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

mit  $x_i(0) = 0 \forall i$ . Außerdem,  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ . Wir haben auch  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i$ ,  $0 \leq s \leq m$  (Bacaër und Ait Dads, 2014).

Wenn  $T$  gegen  $\infty$  konvergiert, mit anderen Worten wenn  $\varepsilon \rightarrow 0$  kann das System (2.1) als langsam-schnelles autonomes System mit  $k$  schnellen Variablen geschrieben werden  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) und eine langsame Variable  $x_{k+1}(s) = s$  mit  $dx_{k+1}/ds = 1$ .

Für die triviale stationäre Lösung  $x_i = 1 \forall i$  ist die Jacobi-Matrix des rechten Gliedes des Systems (2.1)  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ .  $\tilde{c}$  bezeichnet die aus der Matrix  $c$  transponierte Matrix. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Perron und Frobenius für irreduzible Matrizen, deren Koeffizienten außerhalb der Diagonale alle positiv oder Null sind (Allaire et al., 2018, Anmerkung 6.2.13), Matrizen  $c(s)$  und  $\tilde{c}(s)$  haben einen gemeinsamen dominanten reellen Eigenwert  $\Lambda(s)$ , streng größer als der Realteil aller anderen Eigenwerte.

### 3. Ein Beispiel

Lass uns nehmen

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

mit  $\alpha(s) > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  und  $\delta > 0$ .  $\alpha(s)$  ist eine periodische kontinuierliche Funktion von Periode 1. Dieses stochastische Modell ist vom linearisierten deterministischen Modell für eine durch Vektoren übertragene Krankheit inspiriert (Bacaër, 2007, Abschnitt 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

Die infizierten Vektoren sind vom Typ 1. Die infizierten Personen sind vom Typ 2. Der Parameter  $\alpha(s)$  ist die Rate, mit der infizierte Menschen ihre Infektion auf Vektoren übertragen, wenn sie gebissen werden. Diese Rate ist periodisch, da die Population gesunder Vektoren ebenfalls periodisch ist. Der Parameter  $\beta$  ist die Rate, mit der die Vektoren sterben. Der Parameter  $\gamma$  ist die Rate, mit der die Vektoren beißen. Der Parameter  $\delta$  ist die Rate, mit der sich infizierte Personen erholen. Das System (2.1) wird dann geschrieben

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

Beachten Sie, dass sich die Mitglieder auf der rechten Seite in zwei Fällen gegenseitig aufheben:  $x_1(s) = 1$  und  $x_2(s) = 1$ , oder

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0+m-s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0+m-s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Die zwei Eigenwerte der Matrix  $c(s)$  sind reelle Zahlen:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

Der dominante Eigenwert ist  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ . Wir haben  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ .

Angenommen, es gibt eine Jahreszeit, die für die Übertragung der Epidemie ungünstig ist, d.h.  $\exists 0 < s_1 < s_2 < 1$  mit

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

Nehmen wir weiter an

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

Nehmen wir als Beispiel  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  mit  $\bar{\alpha} > 0, |\kappa| < 1$  und

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

Diese letzte Bedingung stellt sicher, dass es tatsächlich eine ungünstige Jahreszeit gibt. Genauer gesagt, wählen wir  $\bar{\alpha} = 3, \kappa = 0,75, \beta = 2, \gamma = 1$  und  $\delta = 1$ . Diese Werte sind nicht sehr realistisch, aber sie heben das Phänomen hervor. Wir haben dann  $s_1 \simeq 0,323$  und  $s_2 \simeq 0,677$ . Es kann numerisch überprüft werden, ob die Bedingung (3.8) erfüllt ist. Nehmen wir auch  $T = 1000, m = 3$  und  $s_0 = 0,25$ . Abbildung 1 zeigt die Lösung des Systems (3.2) - (3.3) mit dem Ausgangszustand  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Wir haben die Scilab-Software verwendet und das Differentialsystem für gelöst  $\log(1 - x_1(s))$  und  $\log(1 - x_2(s))$ . Dann kehrten wir zu den ursprünglichen Variablen zurück. Wir haben auch die konstante Funktion gleich 1 und die Kurven (3.4) gezeichnet. Beachten Sie das Folgende:

- in der Nachbarschaft von  $s = 0$  sind die Kurven fast vertikal (in den Figuren nicht sichtbar);
- $x_1(s)$  und  $x_2(s)$  auf eine periodische Lösung konvergieren;
- asymptotisch,  $x_1(s)$  und  $x_2(s)$  sind sehr nahe an 1 für die Werte von  $s$  mit  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$ , speziell für  $s \in ]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$ , aber auch für  $s \in ]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  mit  $s_2 - 1 < s^* < s_1$ . Im letzteren Fall haben wir  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . Es gibt eine "Ente".

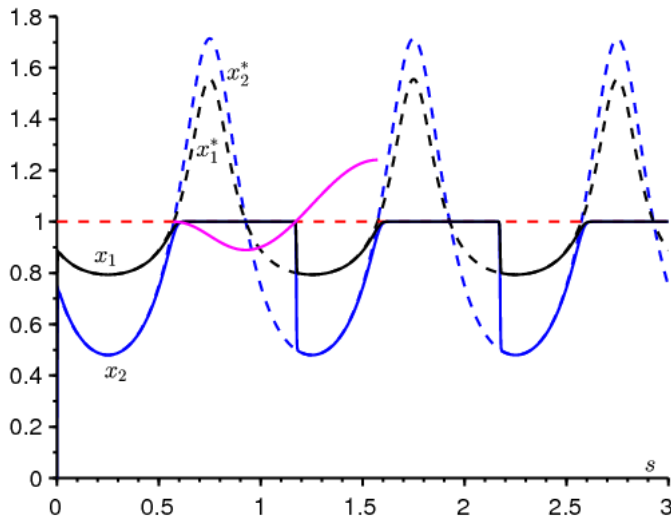


Abbildung 1. In Abhängigkeit von  $s$  die Kurven  $x_1(s)$  (in schwarz) und  $x_2(s)$  (in blau) sowie die langsamen Kurven  $x_1^*(s)$  (schwarz gepunktet),  $x_2^*(s)$  (blau gepunktet) und 1 (rot gepunktet). In Pink ein Teil der Funktion  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ .

Abbildung 2 zeigt, wie die uns interessierenden Größen, die Extinktionswahrscheinlichkeiten nach  $m$  Perioden  $x_1(m)$  und  $x_2(m)$  variieren je nach  $s_0$ . Wir haben auch die aus (3.4) abgeleiteten Kurven gezeichnet:

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

Abbildung 2 legt dies nahe  $x_1(m)$  und  $x_2(m)$  konvergieren wenn  $T \rightarrow +\infty$  in Richtung Grenzen gleich 1, wenn  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ .  $s_0 = s^*$  ist eine Diskontinuität der Grenzen. Das Problem besteht darin, diesen Punkt zu bestimmen.

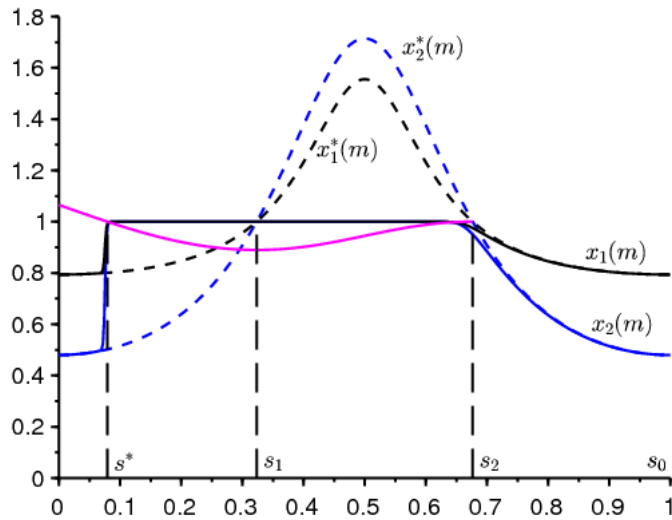


Abbildung 2. Wahrscheinlichkeiten des Aussterbens nach  $m$  Perioden  $x_1(m)$  (in schwarz) und  $x_2(m)$  (in dunkelblau) je nach  $s_0$ . Die Formeln für  $x_1^*(m)$  und  $x_2^*(m)$  sind gepunktet. In Pink ein Teil der Funktion  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, dass die Lösungen  $x_1(s)$  und  $x_2(s)$  in Abbildung 1, die sehr nahe an 1 für  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$ , plötzlich von der Nachbarschaft von 1 abweichen für  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  mit

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

Mit anderen Worten, diese Lösungen weichen an einem Punkt  $s = q$  von der Nachbarschaft von 1 ab. Außerdem,  $q = s_0 + 1 - s^*$  und

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

Es ist diese Gleichung, die bestimmt  $s^*$  einzigartig. In der Tat, wenn  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ , dann haben wir

- $\phi(s_1) < 0$  wegen Bedingung (3.6),
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  wegen Bedingung (3.7)

- $$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2-1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

wegen der Bedingung (3.8).

Es gibt also eine einzige reelle Zahl  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  mit  $\phi(s^*) = 0$ . Im Beispiel finden wir numerisch  $s^* \simeq 0,079$ .

**Hinweis.** Die Bedingung (3.8) hat keinen Zusammenhang mit einem möglichen überkritischen Charakter des Systems (3.1). Es ist auch in Floquets Theorie bekannt. In der Tat, wenn wir zum Beispiel nehmen  $c = 0,7$  anstatt  $c = 1$  finden wir numerisch, dass der dominante Floquet-Multiplikator ist  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  während  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ .

## 4. Die Eingabe-Ausgabe-Funktion für eine transkritische Gabelung

Um zu rechtfertigen, was gerade über den Punkt der Diskontinuität gesagt wurde, betrachten wir allgemein ein langsam-schnelles Feld mit zwei schnellen Dimensionen und einer langsamen Dimension wie (3.2) - (3.3). Man nimmt an, dass die schnelle Dynamik einen singulären Punkt mit zwei unterschiedlichen reellen Eigenwerten hat, von denen einer immer negativ und der zweite negativ und dann positiv ist. Es handelt sich also um eine transkritische Gabelung, bei der der Gleichgewichtszustand der schnellen Dynamik ein stabiler Knoten und dann ein Sattelpunkt ist.

Eine Lösung, die nahe am stabilen Singularpunkt liegt, verlässt ihre Nachbarschaft nicht, sobald sie instabil wird, sondern bleibt für eine bestimmte Zeit nahe. Das Ziel besteht darin, die Eingabe-Ausgabe-Funktion für diese transkritische Gabelung zu berechnen, dh den Zeitpunkt zu definieren, zu dem sich die Lösung vom singulären Punkt entfernt (Austrittszeitpunkt), entsprechend dem Punkt, an dem sie sich befindet wird angefahren (Eintrittszeit). Dieses als "Bifurkationsverzögerung" bekannte Phänomen ist mit dem Begriff der Entenlösungen und der Überstabilität verbunden.

Das Konzept der Input-Output-Funktion und das Konzept der Entenlösung wurden Anfang der 1980er Jahre erstmals mit nicht standardmäßigen Analysemethoden untersucht. Siehe Übersichtsartikel (Benoît et al., 1981; Cartier, 1982; Zvonkin und Shubin, 1984). Die Eingabe-Ausgabe-Funktion wurde zuerst für die Enten der Van-der-Pol-Gleichung berechnet (Benoît, 1981; Benoît et al., 1981) und dann auf jedes langsam-schnelle System der Ebene erweitert (Diener und Diener, 1983).

Später wurde die Existenz von Entenlösungen mit den klassischen Methoden der asymptotischen Entwicklung (Eckhaus, 1983) und mit der geometrischen Theorie singulärer Störungen (Dumortier und Roussarie, 1996) gefunden. Die Eingabe-Ausgabe-Funktion für ein ebenes System wurde auch durch die geometrische Theorie singulärer Störungen erhalten (De Maesschalck und Schechter, 2016).

Für weitere Einzelheiten über den Beitrag der nicht standardistischen französischen Schule zum Problem der Enten und der Verzögerung der Gabelung kann der Leser konsultieren (Cartier, 1982; Fruchard und Schäfer, 2008). Für eine umfassendere Darstellung der verschiedenen Ansätze in der Theorie der singulären Störungen siehe die aktuelle Monographie (Kuehn, 2015) sowie den Artikel (Wechselberger, 2007) über Enten. Zum Begriff der Überstabilität und Verzögerung der Bifurkation siehe auch (Benoît, 1991, 2015; Benoît et al., 1998; Fruchard und Schäfer, 2008; Wallet, 1990, 1994) und die darin enthaltenen Referenzen.

Der spezielle Fall eines langsam-schnellen Feldes in Dimension zwei mit einer schnellen Dynamik der Dimension eins, die attraktiv und dann abstoßend ist, ist gut verstanden, siehe (Diener und Diener, 1983). Der Fall der Hopf-Bifurkation, bei der zwei Eigenwerte komplex konjugiert sind und ihr Realteil das Vorzeichen ändert, wurde von mehreren Autoren betrachtet, siehe (Benoît, 2009; Callot, 1993; Diener und Diener, 1995; Lobry, 1992; Neishtadt, 1987, 1988; Wallet, 1986). Siehe auch die vollständige und lehrreiche Präsentation in der aktuellen Monographie (Kuehn, 2015, Kapitel 12).

Betrachten Sie ein Differentialsystem an  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  mit einer langsamen Variablen  $s \in \mathbb{R}$  und mit zwei schnellen Variablen  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine differenzierbare Funktion in  $(s, x)$ , und  $\varepsilon > 0$  ist unendlich klein. Wir verwenden das Vokabular der Nicht-Standard-Analyse, siehe (Diener und Reeb, 1989) oder Lobry (2018, Kapitel 5). Wir nehmen an  $f(s, 0) = 0 \forall s$ .

$x = 0$  ist nicht nur eine langsame Kurve des Systems (4.1), d. h. eine Lösung der Gleichung  $f(s, x) = 0$ , sondern auch eine bestimmte Lösung des Systems (4.1). Wir definieren die quadratische Matrix  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

Wir nehmen das an  $M(s)$  hat zwei unterschiedliche Eigenwerte,  $\lambda_1(s)$  und  $\lambda_2(s)$  einer davon bleibt immer negativ und der andere ändert das Vorzeichen. Mit  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$ , wir haben :

- $\lambda_1(s) < 0$  und  $\lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2]$ ,
- $\lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  und  $\lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ .

In der geometrischen Theorie singulärer Störungen untersuchen wir das System (4.1) im erweiterten Phasenraum  $(x, \varepsilon)$ . Wir fügen die Gleichung hinzu  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ . Ein einzelner Eigenwert der schnellen Dynamik ändert das Vorzeichen. Diese Situation kann auf den Fall von Systemen in der Ebene reduziert werden, indem die zentrale Vielfalt des erweiterten Systems reduziert wird ((4.1),  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) an seinem Gleichgewichtspunkt  $(x, \varepsilon) = (0, 0)$ . Für weitere Details siehe (Boudjellaba und Sari, 2009; Krupa und Szmolyan, 2001). Mit dieser Reduktion erhalten wir ein planares System, dessen Eingabe-Ausgabe-Funktion durch das Integral des Eigenwerts gegeben ist, der das Vorzeichen ändert (Diener und Diener, 1983):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

In dieser Gleichung ist  $p$  der Zeitpunkt des Eintritts und  $q$  der Zeitpunkt des Austritts. Die Reduktion sagt voraus, dass die Eingabe-Ausgabe-Funktion durch die Formel (4.3) lokal nahe dem Wert der transkritischen Bifurkation gegeben ist. Wir schlagen im Folgenden vor, die globale Eingabe-Ausgabe-Funktion zu berechnen. Der spezielle Fall eines langsamen-schnellen dreidimensionalen Feldes mit entkoppelter schneller Dynamik wurde in (Boudjellaba und Sari, 2009) betrachtet.

Wir verwenden das Vokabular der Nicht-Standard-Analyse. Was genau diese Theorie ist, ist für das Verständnis dieses Artikels nicht sehr wichtig. Der Leser kann den intuitiven Sinn der infinitesimalen Sprache im Auge behalten und sich beruhigen, indem er weiß, dass die Nicht-Standard-Analyse eine strenge Grundlage für die Konzepte von unendlich klein und unendlich groß bietet. Für eine Einführung in die Nicht-Standard-Analyse siehe (Diener und Reeb, 1989). Weitere Informationen zur Verwendung der Nicht-Standard-Analyse in der Theorie der Differentialgleichungen finden Sie in (Cartier, 1982), (Zvonkin und Shubin, 1984), (Kuehn, 2015, Kapitel 19.5). oder (Lobry, 2018, Kapitel 5).

Wir nehmen daher an, dass der Parameter  $\varepsilon$  in (4.1) unendlich klein ist. Die Lösung  $x(s) = 0$  ist eine "Ente", da es attraktiv ist für  $s \in [\sigma_0, \sigma_1[$  und abstoßend für  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ . Ziel ist es, die Lösungen des Systems (4.1) zu untersuchen, die dieser Lösung unendlich nahe kommen. Die schnelle Dynamik ist über das Intervall attraktiv  $[\sigma_0, \sigma_1[$ . Wir nehmen  $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$ . Eine Lösung des Systems (4.1) mit einer Anfangsbedingung im Anziehungsbecken von 0 geht schnell in Richtung der langsamen Kurve  $x = 0$  und bleibt dieser unendlich nahe, solange  $s < \sigma_1$ . Die Lösung verlässt zu diesem Zeitpunkt nicht die infinitesimale Nachbarschaft von 0, sondern folgt weiterhin der 0 über ein ganzes Intervall. Der Moment  $q > \sigma_1$  für welche  $x(s)$  ist nicht mehr unendlich nahe bei 0 heißt die Austrittszeit. Ziel ist es, die Funktion zu bestimmen  $p \mapsto q$ . Wir werden zeigen, dass  $q$  durch Gleichung (4.3) definiert ist. Genauer gesagt haben wir folgendes Ergebnis:

### Satz

Wir definieren

- $p \in [\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  eine Anfangsbedingung, die sich im Anziehungsbecken von 0 befindet, aber nicht unendlich nahe an der invarianten Vielfalt der schnellen Dynamik liegt, die dem Eigenwert entspricht  $\lambda_1(p)$ .
- $q$  durch Gleichung (4.3).

Damit  $\forall s \in ]p, q[$  nicht unendlich nahe an  $p$  oder  $q$  haben wir:  $x(s) \simeq 0$ . Außerdem,  $x(q)$  ist nicht unendlich nahe bei 0. Bei  $p$ ,  $x(s)$  nähert sich 0 entlang der schnellen dynamischen Umlaufbahn

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

wer geht durch  $x(p)$ . In  $q$ ,  $x(s)$  bewegt sich von 0 entlang des instabilen Trennzeichens von 0 weg, um eine schnelle Dynamik zu erzielen

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

*Beweis.* Wir haben  $g(s, x) = f(s, x) - M(s)x$ .  $M(s)$  ist die Matrix (4.2). Wir haben

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Das System (4.1) wird

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

Die Matrix  $M(s)$  hat zwei unterschiedliche Eigenwerte. Es gibt daher eine invertierbare differenzierbare Matrix  $P(s)$  mit

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

Wir transformieren Gleichung (4.5) mit der Änderung der Variablen  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

Wir transformieren diese Gleichung mit der Lupe  $u = \varepsilon U$

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

Die Bedingungen (4.4) werden von überprüft  $g(s, x)$ . Also haben wir

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

und  $g_1(s, U, \varepsilon)$  ist eine stetige Funktion. Deshalb haben wir

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$  ist eine stetige Funktion. Wir definieren die Komponenten der Vektoren:  $U = (U_1, U_2)$  und  $h = (h_1, h_2)$ . Das System wird

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Dieses System besteht aus zwei schwach gekoppelten Gleichungen. Variablen ändern

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

verwandelt das System in

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

mit

$$k_1(s, r, \theta, \varepsilon) = \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon),$$

$$k_2(s, r, \theta, \varepsilon) = -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon).$$

$k_2$  ist eine stetige Funktion bei  $r=0$ , weil  $h_1 = O(r)$  und  $h_2 = O(r)$ . Wir wählen  $r_0$  mit  $0 < r_0 < 1$  und damit der Ball mit Mittelpunkt 0 und Radius  $r_0$  ist im ursprünglichen Attraktionspool enthalten. Wenden Sie die Variablenänderung an  $v = \varepsilon \ln(r)$  in die Region  $0 < r < r_0$ , die an die durch definierte Region gesendet wird  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ . Wir bekommen das System:

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon). \quad (4.6)$$

Es ist ein einzigartig gestörtes System, dessen langsame Vielfalt die Vereinigung der beiden Ebenen  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi/2$  ist. weil  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  für alle  $s$  ist die Ebene  $\theta = \pi/2$  attraktiv und die Ebene  $\theta = 0$  ist abstoßend. Jede Lösung, die von einem Punkt kommt, der nicht unendlich nahe an der abstoßenden Ebene liegt, wird in unendlich kurzer Zeit unendlich nahe an der attraktiven Ebene. Lösungen, die von einem Punkt kommen, der sehr nahe an der abstoßenden Ebene liegt, können ziemlich lange in der Nähe dieser Ebene bleiben, bevor sie sich von ihr entfernen. Es gilt der Satz von Tihonov (Lobry et al., 1998; Tihonov, 1952). Wir wählen  $p \in [\sigma_0, \sigma_1]$  und  $x(p)$  Ein Anfangszustand, der sich im Anziehungsbecken von 0 befindet, aber nicht unendlich nahe an der unveränderlichen Vielfalt der schnellen Dynamik liegt

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

entsprechend dem Eigenwert  $\lambda_1(p)$ . Die schnelle Dynamik treibt die entsprechende Lösung unendlich nahe an 0. In der Ebene  $(U_1, U_2)$  es ist nicht sehr nah an der langsamen Sorte  $U_2 = 0$  und daher der Ebene  $\theta = 0$ . Folglich nähert sich die Lösung schnell der Ebene  $\theta = \pi/2$  und wird dann durch die Lösung des langsamen Systems angenähert

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

Daraus schließen wir

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

Deshalb haben wir wieder  $r(s) = r_0$ , das heißt  $v(s)$  unendlich klein, wenn  $s$  asymptotisch gleich  $q$  ist, definiert durch (4.3). Für diesen Wert von  $q$  ist der Ursprung ein Sattelpunkt für schnelle Dynamik

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

Folglich bewegt sich die Lösung am Punkt  $q$  vom Sattelpunkt entlang ihres instabilen Abscheiders weg. Wir haben hier verwendet, dass zum Zeitpunkt  $p$  die Lösung nicht unendlich nahe an der langsamen Sorte  $\theta = \pi/2$  lag, was die Tatsache übersetzt, dass die Lösung nicht in der Ebene angekommen ist  $(U_1, U_2)$  indem man sehr nah dran ist  $U_1 = 0$ . Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Kehren wir zu Beispiel (3.2) - (3.3) zurück. Wir definieren  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ . Das folgende schnelle System, bei dem  $s$  als Parameter betrachtet wird,

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \tilde{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

hat zwei Gleichgewichtspunkte (quasistationäre Zustände)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  und  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  gegeben durch (3.4). Die Jacobi-Matrix in  $(1, 1)$  ist  $\tilde{c}(s_0 + m - s)$ . Wie wir bereits gesehen haben, sind die beiden Eigenwerte immer verschieden, sie sind reelle Zahlen. Die beiden Eigenwerte sind genau dann negativ, wenn  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . Folglich ist der Singularpunkt  $(1, 1)$  ein attraktiver Knoten für die Werte von  $s$ , für die  $\tilde{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$  und ein Sattelpunkt, wenn  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Die Eigenwerte sind  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  und  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ , gegeben durch (3.5).

Mit  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$  erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\tilde{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\tilde{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\tilde{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \tilde{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

Die Eigenwerte haben genau dann einen negativen Realteil, wenn  $\tilde{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . Daher an den Stellen, an denen  $\tilde{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$  gibt es transkritische Gabelungen, weil die folgenden zwei Gleichgewichte sich treffen und ihre Stabilitäten austauschen:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  und  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ .

Wir haben

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  wenn  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[$  modulo 1
- $\lambda_2(s) > 0$  wenn  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[$  modulo 1.

Wir können den Satz anwenden und die Eingabe-Ausgabe-Funktion wie in Abschnitt 2 berechnen.

## 5. Verallgemeinerung

Diese Studie erstreckt sich wahrscheinlich auf Probleme mit mehr als zwei schnellen Gleichungen und einer langsamen Gleichung. Betrachten Sie zum Beispiel das linearisierte System mit vier schnellen Gleichungen von (Bacaër, 2007, Abschnitt 4.2).

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

Wir nehmen an  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$ .  $\psi(\cdot) > 0$  ist eine periodische Funktion von Periode 1. Es ist auch ein Modell für die Übertragung einer durch Vektoren übertragenen Krankheit. Die ersten beiden Komponenten repräsentieren die in der latenten Phase und in der Infektionsphase infizierten Vektoren, während die letzten beiden Komponenten die in der Latentphase und in der Infektionsphase infizierten Personen repräsentieren. Das System (2.1) wird mit  $\varepsilon = 1/T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) &= (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) &= \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) &= \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)], \\ \varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) &= \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s). \end{aligned}$$

Die Vermutung ist, dass die Eingabe-Ausgabe-Funktion durch die Formel (4.3) gegeben ist, wobei  $\lambda_2(s)$  muss durch den dominanten reellen Eigenwert ersetzt werden  $\Lambda(s)$  der Matrix  $c(s)$ , wie wir anhand eines numerischen Beispiels überprüfen konnten (Abbildung 3). Parameterwerte sind  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1, \mu = 1, \psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$ ,  $m = 3$  und  $T = 2000$ . Wir haben die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta\gamma\delta\psi(s).$$

Daraus schließen wir  $\Lambda(s) < 0$  dann und nur dann, wenn

$$\frac{\beta\gamma\psi(s)}{\alpha\mu(\gamma + \mu)} < 1,$$

was passiert für  $s_1 < s < s_2$  mit  $s_1 \simeq 0,323$  und  $s_2 \simeq 0,677$ . Mit der Formel (4.3) finden wir  $s^* \simeq 0,047$ , was dem plötzlichen Anstieg der Wahrscheinlichkeit des Aussterbens in Abbildung 3 gut zu entsprechen scheint.

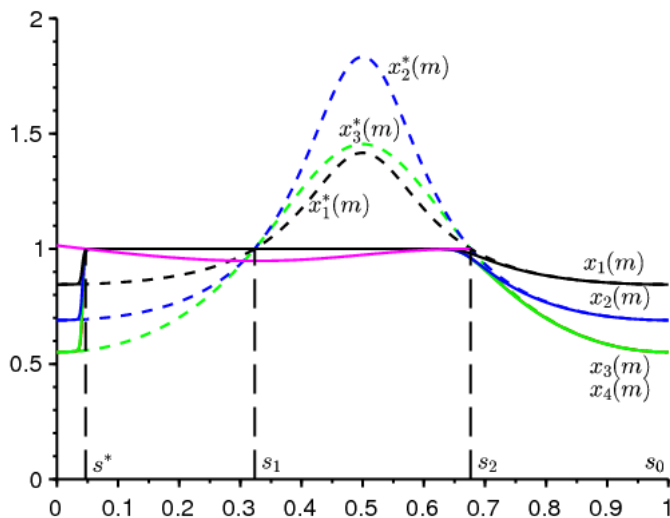


Abbildung 3. Die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens nach  $m$  Perioden  $x_1(m)$  (in Schwarz),  $x_2(m)$  (in blau) sowie  $x_3(m)$  und  $x_4(m)$  (in grün, nicht zu unterscheiden) nach  $s_0$ . Gepunktete, langsame Kurven. In Pink haben wir einen Teil der Funktion gezeichnet  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

## Literaturhinweise

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée–sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293–296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable node. Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911–929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5–24.
- E. Benoît, J.–L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37–119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes–rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627–658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow–fast predator–prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205–2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents–rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149–173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non–standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92–93, Soc. Math. France, p. 21–44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697–6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577–580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd.), Springer, Berlin, 205–224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd.), Springer, Berlin, 449–494.
- A. Fruchard, R. Schbeimfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431–468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473–1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des "" bifurcations dynamiques "" . Ann. I. Fourier 42, 327–351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource–consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.
- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998) On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems. Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I. Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II. Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952) Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées. Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée–sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1. Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984) Non–standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.