

# على احتمال انقراض السكان في بيئة دورية بطيئة

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388815>

Nicolas Bacaër<sup>1</sup> Claude Lobry<sup>2</sup> Tewfik Sari<sup>3</sup>

<sup>1</sup> وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة ، Institut de Recherche pour le Développement ، Les Cordeliers ، Paris ، France ، nicolas.bacaer@ird.fr

<sup>2</sup> نيس ، فرنسا ، lobrinria@wanadoo.fr

<sup>3</sup> ITAP ، جامعة مونبلييه ، INRAE ، معهد أجرو ، مونبلييه ، فرنسا ، tewfik.sari@irstea.fr

## ملخص

نحن مهتمون باحتمالية انقراض عملية خطية للولادة والموت بعدة أنواع في بيئة دورية عندما تكون فترة المعاملات كبيرة جدًا. يمكن أن يقدم هذا الاحتمال ، في الحد ، انقطاعاً فيما يتعلق بطة في نظام ديناميكي بطيء السرعة. يتم تحديد نقطة الانقطاع بدقة في مثال مع نوعين من الأفراد.

الكلمات المفتاحية: عملية الولادة والوفاة ، البيئة الدورية ، نظام بطيء السرعة

## 1 المقدمة

تقدير احتمال انقراض السكان هو سؤال يتدخل بشكل خاص في بيولوجيا الحفظ وعلم الأوبئة. في هذه الحالة الثانية ، يعني السكان المصابين. نموذج رياضي كلاسيكي لدراسة هذا النوع من المشاكل هو العمليات الخطية للولادة والموت مع نوع واحد أو أكثر من الأفراد (Méléard، 2016). ومع ذلك ، في كثير من الحالات ، يجب أن تؤخذ موسمية البيئة في الاعتبار ، مما يؤدي إلى دراسة هذه العمليات عندما تكون معاملات الولادة والوفاة وظائف دورية للوقت (Bacaër and Ait Dads ، 2014). بعض السكان أو بعض الأوبئة لها معاملات يكون مقياسها الزمني قصيراً نسبياً مقارنة بالموسمية السنوية ؛ لذا فإننا نأخذ بعين الاعتبار الحد الذي تكون فيه فترة المعاملات كبيرة جدًا. عندما تكون المعلمات الحيوية دون حرجة خلال جزء من السنة (الموسم غير المواتي) ، فإن احتمال الانقراض كدالة للموسم الذي تبدأ فيه العملية يتقارب نحو حد غير مستمر (Carmona and Gandon، 2019). نقطة الانقطاع هي قبل بداية الموسم غير المواتي.

تابع باكير (2019) هذه الدراسة بشكل أساسي في حالة نوع واحد من الأفراد ، مشيراً على وجه الخصوص إلى أن انقطاع احتمال الانقراض مرتبط بوجود نظام ديناميكي بطيء السرعة في "بطة" ، وهذا يعني (انظر على سبيل المثال Lobry (2018) ، الفصل 5)) لمسار يتبع قوساً جذاباً لفترة معينة قبل اتباع القوس البغيض. نقترح أدناه لدراسة مثال مع نوعين من الأفراد المستوحاة من نموذج انتقال المرض المنقولة. يتم تحديد نقطة انقطاع احتمال الانقراض بدقة. ظلت هذه المشكلة دون حل (Carmona and Gandon، 2019) ؛ Bacaër، (2019).

يقدم القسم 2 النموذج السكاني ، وهو العمليات الخطية للولادة والوفاة مع معاملات دورية مع عدة أنواع من الأفراد. وأوضح أن احتمال الانقراض مرتبط بنظام المعادلات التفاضلية العادية. عندما تتقارب الفترة إلى ما لا نهاية ، يؤدي تغيير المتغير إلى تحويل هذا النظام إلى نظام بطيء السرعة مع فترة زمنية ثابتة.

في القسم 3 ، نقدم مثلاً على نوعين من الأفراد. تشير المحاكاة العددية إلى أن احتمال الانقراض يتقارب إلى حد غير مستمر وأن نقطة الانقطاع يتم تحديدها من خلال حالة تنطوي على تكامل القيمة الذاتية السائدة لمصفوفة معينة. في القسم 4 ، نوضح باستخدام أدوات التحليل غير القياسية أن هذا الشرط هو الذي يحدد نقطة الانقطاع. في القسم 5 ، نقدم مثلاً آخر في هذا الوقت أربعة أنواع من الأفراد. نقترح المحاكاة العددية أن حالة من نفس النوع لا تزال تحدد نقطة الانقطاع. ومع ذلك ، لم تتمكن من إظهار ذلك في إطار عام عندما يكون عدد أنواع الأفراد أكبر من اثنين.

## 2. النموذج

ونحن نعتبر عملية خطية الولادة والموت مع  $k$  أنواع ( $k \leq 1$ ) في بيئة دورية.  $T > 0$  هي فترة البيئة. نعطي أنفسنا وظيفتين مصفوفة:  
 $A(t) = (A_{i,j}(t))$  و  $B(t) = (B_{i,j}(t))$  من الحجم  $k$  والفترة  $T$  مع الافتراضات التالية:

- $\forall i, j, A_{i,j}(t) \geq 0$  يمثل المعدل الذي يولد فيه الأفراد من النوع  $j$  أفراداً من النوع الأول
- $\forall i \neq j, -B_{i,j}(t) \geq 0$  هو المعدل الذي يتحول عنده الأفراد من النوع  $j$  إلى الأفراد من النوع الأول

- $\forall j, B_{j,j}(t) \geq 0$  يمثل المعدل الذي يغير فيه الأفراد النوع  $j$  أو يموتون ، و  $\sum_i B_{i,j}(t) \geq 0$
- إذا  $U(t)$  هو حل النظام  $dU/dt = -B(t)U(t)$  مع الشرط الأولي  $U(0) = I$  (مصنوفة الهوية) ، ثم نصف القطر الطيفي للمصفوفة  $U(T)$  ، أي مضاعف فلوكيت المهيمن ، هو  $\rho(U(T)) < 1$
- المصفوفة  $C(t) = A(t) - B(t) = (C_{i,j}(t))$  غير قابل للاختزال لجميع  $t$  .

بتعبير أدق ، كما في (Bacaër and Ait Dads، 2014) ، نحدد

- احتمال وجود  $N_i$  أفراد من النوع الأول في الوقت  $t$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- دالة التوليد المقابلة  $G(t, Z_1, \dots, Z_k)$ .

لدينا بعد ذلك

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i,j} [1 - Z_i][B_{i,j}(t) - A_{i,j}(t)Z_j] \frac{\partial G}{\partial Z_j}.$$

نفترض ذلك في ذلك الوقت  $t_0$  يوجد  $n_i \geq 0$  أفراد من النوع الأول (ال  $n_i$  هي أعداد صحيحة ،  $1 \leq i \leq k$ ) مع  $\sum_i n_i \geq 1$ . يمكننا أن نفترض ذلك  $0 \leq t_0 < T$ . بحسب (باكير وأيت دادس ، 2014) ، الاحتمال  $p(t_0, t_1)$  أن السكان انقرضوا في هذه اللحظة الثانية ، أي أنه لا يوجد فرد من الأنواع المختلفة ،

$$p(t_0, t_1) = [z_1(t_1 - t_0)]^{n_1} \cdots [z_k(t_1 - t_0)]^{n_k}, \quad \forall t_1 > t_0.$$

$z(t) = (z_i(t))_{1 \leq i \leq k}$  هو حل النظام التفاضلي

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = \sum_j [1 - z_j(t)][B_{j,i}(t_1 - t) - A_{j,i}(t_1 - t)z_i(t)], \quad 0 < t < t_1 - t_0,$$

مع الشرط الأولي  $z_i(0) = 0 \forall i$ .

إن توقع عدد الأفراد من النوع  $i$  في الوقت  $t$  هو حل

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j C_{i,j}(t) E_j(t)$$

و  $E_i(t_0) = n_i \forall i$  نحدد

- $V(t)$  حل النظام  $dV/dt = C(t)V(t)$  مع الشرط الأولي  $V(0) = I$ .
- $F = \rho(V(T))$  المضاعف المهيمن فلوكيت.

إذا كانت  $F \leq 1$  ،

$$p(t_0, t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow +\infty} 1.$$

إذا كان  $F > 1$  ، فإن هذا الاحتمال يتقارب على عكس الاتجاه نحو حد أقل من 1. وهو دالة دورية لـ  $t_0$  (باكير وأيت دادس ، 2014).

ومن المفترض

- هناك وظيفتان مصنوفة دورية للفترة 1 ، مستقلة عن  $T$  ،  $a(s)$  و  $b(s)$  مع

$$A(t) = a(s), \quad B(t) = b(s), \quad s = t/T.$$

- $s_0 = t_0/T$  هو رقم ثابت
- حيث  $m \geq 1$  عدد صحيح ثابت.  $t_1 = t_0 + mT$ .

هدفنا هو دراسة الحد

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} z_i(t_1 - t_0), \quad 1 \leq i \leq k$$

من ناحية  $s_0$  مع  $0 \leq s_0 < 1$ . ولدينا ايضا

$$q_i(s_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} p(t_0, t_1),$$

وهو احتمال الانقراض بعد فترات  $m$  عند البدء من فرد واحد من النوع  $i$ .

نحدد

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon &= 1/T \\ \bullet \quad c(s) &= a(s) - b(s) \\ \bullet \quad x(s) &= z(t) \end{aligned}$$

لدينا بعد ذلك

$$\varepsilon \frac{dx_i}{ds}(s) = \sum_j [1 - x_j(s)] [b_{j,i}(s_0 + m - s) - a_{j,i}(s_0 + m - s) x_i(s)], \quad 0 < s < m, \quad (2.1)$$

مع  $x_i(0) = 0 \forall i$ . علاوة على ذلك،  $z(t_1 - t_0) = x(m)$ . نحن ايضا لدينا  $0 \leq x_i(s) \leq 1 \forall i, 0 \leq s \leq m$  (باكير وأيت دادس، 2014).

إذا كانت  $T$  تتقارب مع  $\infty$ ، بعبارة أخرى إذا  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، يمكن كتابة النظام (2.1) كنظام مستقل بطيء السرعة بمتغيرات  $k$  السريعة  $x_i(s)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) ومتغير بطيء  $x_{k+1}(s) = s$  مع  $dx_{k+1}/ds = 1$ .

لحل ثابت تافهة  $x_i = 1 \forall i$ ، المصفوفة اليعقوبية للعضو الصحيح في النظام (2.1) هي  $\bar{c}(s_0 + m - s)$ .  $\bar{c}$  يدل على المصفوفة المنقولة من المصفوفة ج. وفقاً للنتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius للمصفوفات غير القابلة للاختزال التي تكون معاملاتها خارج القطر كلها موجبة أو صفرية (Allaire et al., 2018، الملاحظة 6.2.13)، المصفوفات  $c(s)$  و  $\bar{c}(s)$  لديهم قيمة ذاتية حقيقية سائدة مشتركة  $\Lambda(s)$ ، أكبر بدقة من الجزء الحقيقي من جميع القيم الذاتية الأخرى.

### 3. مثال

لنأخذ

$$a(s) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(s) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad b(s) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

مع  $\alpha(s) > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ . هي وظيفة دورية مستمرة من الفترة 1. هذا النموذج العشوائي مستوحى من النموذج القطعي الخطي للمرض المنقولة (Bacaër, 2007, Section 4.1):

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha(t/T) \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} W = c(t/T) W. \quad (3.1)$$

المتجهات المصابة هي النوع 1. الأشخاص المصابون هم النوع 2. المعلمة  $\alpha(s)$  هو المعدل الذي ينقل به المصابون العدوى إلى المتجهات عند عضها. هذا المعدل دوري لأن عدد المتجهات السليمة هو أيضاً دوري. المعلمة  $\beta$  هي معدل موت النواقل. المعلمة  $\gamma$  هي معدل لدغات المتجهات. المعلمة  $\delta$  هي المعدل الذي يتعافى به المصابون. ثم يتم كتابة النظام (2.1)

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = \beta [1 - x_1(s)] - \gamma x_1(s) [1 - x_2(s)], \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \delta [1 - x_2(s)] - \alpha(s_0 + m - s) [1 - x_1(s)] x_2(s). \quad (3.3)$$

لاحظ أن الأعضاء على اليمين يلغون بعضهم البعض في حالتين:  $x_1(s) = 1$  و  $x_2(s) = 1$  أو

$$x_1(s) = x_1^*(s) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0 + m - s)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2(s) = x_2^*(s) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0 + m - s)}{\delta}}. \quad (3.4)$$

القيمة الذاتية للمصفوفة  $c(s)$  هي أرقام حقيقية:

$$\lambda_{\pm}(s) = \frac{-(\beta + \delta) \pm \sqrt{(\beta + \delta)^2 + 4[\alpha(s)\gamma - \beta\delta]}}{2}. \quad (3.5)$$

القيمة الذاتية السائدة هي  $\Lambda(s) = \lambda_+(s)$ . نملك  $\lambda_-(s) < 0 \forall s$ .

لنفترض أن هناك موسمًا غير مواتٍ لانتقال الوباء ، أي  $0 < s_1 < s_2 < 1$  مع

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} < 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) < 0 \quad \forall s \in ]s_1, s_2[, \quad (3.6)$$

$$\frac{\alpha(s)\gamma}{\beta\delta} > 1 \Leftrightarrow \Lambda(s) > 0 \quad \forall s \in ]0, s_1[ \cup ]s_2, 1[. \quad (3.7)$$

افترض كذلك

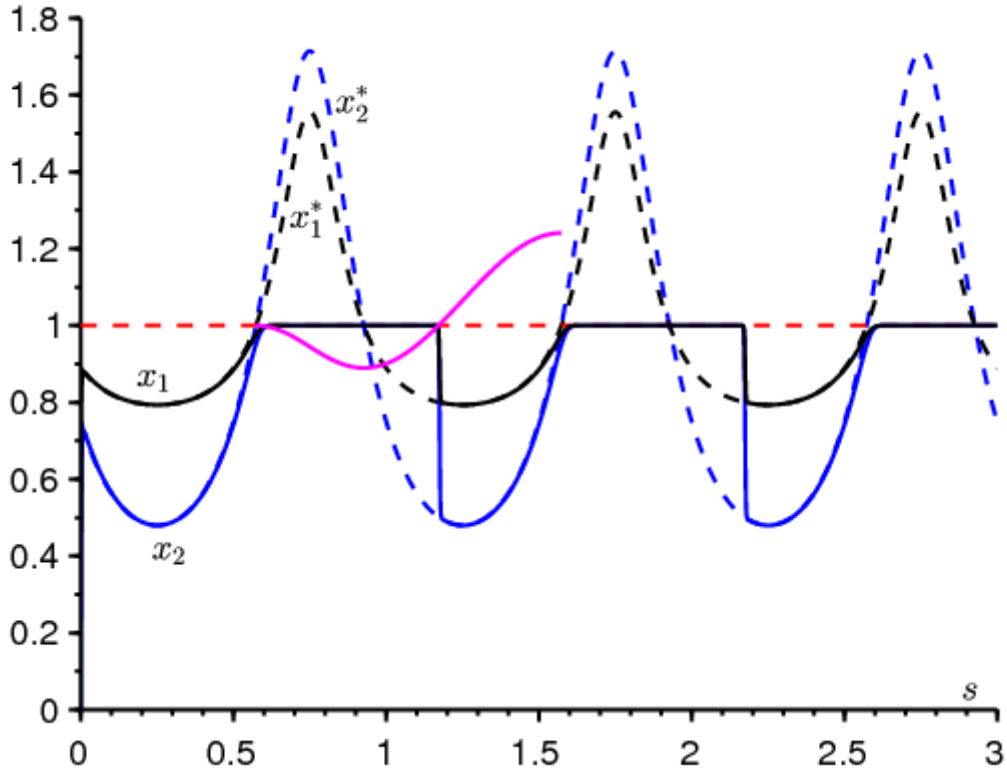
$$\int_0^1 \Lambda(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

كمثال ، لنأخذ  $\alpha(s) = \bar{\alpha}(1 + \kappa \cos(2\pi s))$  مع  $\bar{\alpha} > 0$  ،  $|\kappa| < 1$  و

$$\frac{\bar{\alpha}(1 - \kappa)\gamma}{\beta\delta} < 1 < \frac{\bar{\alpha}(1 + \kappa)\gamma}{\beta\delta}.$$

يضمن هذا الشرط الأخير وجود موسم غير مواتٍ بالفعل. بشكل أكثر تحديدًا ، دعنا نختار  $\bar{\alpha} = 3$  ،  $\kappa = 0,75$  ،  $\beta = 2$  ،  $\gamma = 1$  و  $\delta = 1$ . هذه القيم ليست واقعية للغاية لكنها تبرز الظاهرة. لدينا بعد ذلك  $s_1 \simeq 0,323$  و  $s_2 \simeq 0,677$ . يمكن التحقق عدديًا من استيفاء الشرط (3.8). لنأخذ أيضًا  $T = 1000$  ،  $m = 3$  و  $s_0 = 0,25$ . يمثل الشكل 1 حل النظام (3.2) - (3.3) مع الشرط الأولي  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . استخدمنا برنامج Scilab وحلنا النظام التفاضلي لـ  $\log(1 - x_1(s))$  و  $\log(1 - x_2(s))$ . ثم عدنا إلى المتغيرات الأولية. كما قمنا برسم دالة ثابتة تساوي 1 والمنحنيات (3.4). لاحظ ما يلي:

- في حي  $s = 0$  ، تكون المنحنيات عمودية تقريبًا (غير مرئية في الأشكال) ؛
- $x_1(s)$  و  $x_2(s)$  تتلاقى على حل دوري.
- بشكل مقارب ،  $x_1(s)$  و  $x_2(s)$  قريبة جدًا من 1 لقيم  $s$  مع  $\Lambda(s_0 + m - s) < 0$  ، خصوصًا  $]s_0 + 1 - s_2, s_0 + 1 - s_1[$  ولكن أيضًا  $]s_0 + 1 - s_1, s_0 + 1 - s^*[$  مع  $s_1 < s^* < s_2 - 1$ . في الحالة الأخيرة ، لدينا  $\Lambda(s_0 + m - s) > 0$ . هناك "بطة".

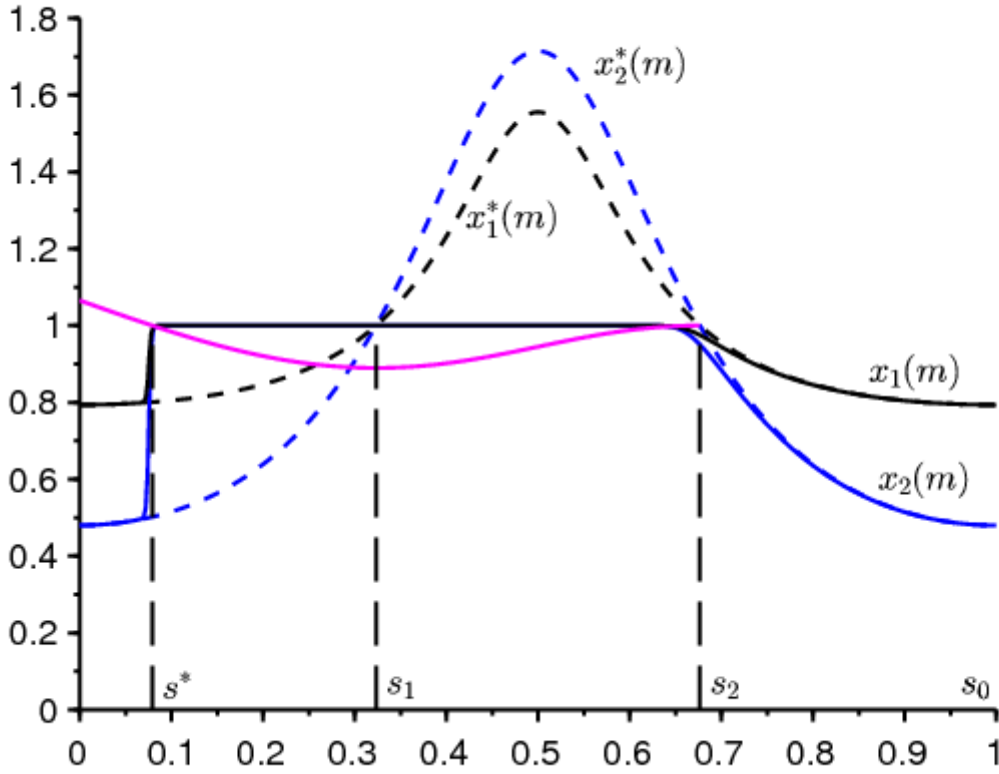


الشكل 1. كدالة  $s$ ، المنحنيات  $x_1(s)$  (باللون الأسود) و  $x_2(s)$  (باللون الأزرق) وكذلك المنحنيات البطينية  $x_1^*(s)$  (أسود منقط)،  $x_2^*(s)$  (أزرق منقط) و 1 (أحمر منقط). باللون الوردي، قطعة من الوظيفة  $s \mapsto 1 + \int_{s_0+1-s_2}^s \Lambda(s_0 + m - u) du$ .

يوضح الشكل 2 كيف الكميات التي تهمننا، واحتمالات الانقراض بعد فترات  $m$  و  $x_1(m)$  و  $x_2(m)$ ، تختلف باختلاف  $s_0$ . كما رسمنا المنحنيات المستخلصة من (3.4):

$$x_1^*(m) = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha(s_0)}}{1 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad x_2^*(m) = \frac{1 + \frac{\beta}{\gamma}}{1 + \frac{\alpha(s_0)}{\delta}}.$$

يقترح الشكل 2 ذلك  $x_1(m)$  و  $x_2(m)$  تتلاقى عندما  $T \rightarrow +\infty$ ، نحو حدود تساوي 1 إذا  $s_0 \in ]s^*, s_2[$ .  $s_0 = s^*$  هو انقطاع الحدود. المشكلة هي تحديد هذه النقطة.



الشكل 2. احتمالات الانقراض بعد  $m$  فترات  $x_1(m)$  (باللون الأسود) و  $x_2(m)$  (باللون الأزرق الداكن) حسب  $s_0$ . الصيغ لـ  $x_1^*(m)$  و  $x_2^*(m)$  منقط. باللون الوردي، قطعة من الوظيفة  $\Lambda(s)$  من  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

سنوضح في القسم التالي أن الحلول  $x_1(s)$  و  $x_2(s)$  في الشكل 1، وهي قريبة جدًا من 1 لـ  $p := s_0 + 1 - s_2 < s < s_0 + 1 - s_1$  انحرفت عن 1 لـ  $s = q := s_0 + 1 - s^* > s_0 + 1 - s_1$  مع

$$\int_p^q \Lambda(s_0 + m - s) ds = 0.$$

بمعنى آخر، تنحرف هذه الحلول عن الجوار 1 عند نقطة  $s = q$ . علاوة على ذلك،  $q = s_0 + 1 - s^*$  و

$$\int_{s^*}^{s_2} \Lambda(s) ds = 0.$$

هذه المعادلة هي التي تحدد  $s^*$  وبشكل فريد. في الواقع، إذا  $\phi(s) = \int_s^{s_2} \Lambda(v) dv$ ، إذن لدينا

- $\phi(s_1) < 0$  بسبب الحالة (3.6)،
- $\phi'(s) = -\Lambda(s) < 0 \forall s \in ]s_2 - 1, s_1[$  بسبب الحالة (3.7)

$$\phi(s_2 - 1) = \int_{s_2 - 1}^{s_2} \Lambda(s) ds = \int_0^1 \Lambda(s) ds > 0$$

بسبب الحالة (3.8).

لذلك هناك رقم حقيقي واحد  $s^* \in ]s_2 - 1, s_1[$  مع  $\phi(s^*) = 0$ . في المثال، نجد عددًا  $s^* \simeq 0,079$ .

تعليق. الشرط (3.8) ليس له اتصال مع شخصية فوق حرجة محتملة للنظام (3.1). كما أنها معروفة جيدًا في نظرية فلوكويت. في الواقع، إذا أخذنا على سبيل المثال  $c = 0,7$  في مكان  $c = 1$  نجد عددًا أن المضاعف المهيمن فلوكويت هو  $F = \rho(V(T)) \simeq 1,025 > 1$  في حين أن  $\int_0^1 \Lambda(s) ds \simeq -0,016 < 0$ .

#### 4. وظيفة المدخلات والمخرجات من أجل التشعب عبر الحرج

لتبرير ما قيل للتو عن نقطة الانقطاع ، نعتبر بشكل أعم مجالاً بطيئاً سريعاً مع بعدين سريعين وأبعاداً بطيئة ، مثل (3.2) - (3.3). يفترض المرء أن الديناميكيات السريعة لها نقطة واحدة مع قيمتين حقيقيتين متميزتين ، أحدهما سلبي دائماً والثاني سلبي ثم إيجابي. وبالتالي فهو تشعب عبر النقطة حيث تكون حالة توازن الديناميكيات السريعة عقدة مستقرة ثم نقطة سرج.

إن الحل القريب من نقطة المفرد المستقرة لن يترك حيه بمجرد أن يصبح غير مستقر ، ولكنه سيستمر في البقاء قريباً لفترة معينة. الهدف هو حساب وظيفة المدخلات والمخرجات لهذا التشعب عبر النقطة ، أي تحديد اللحظة التي يتحرك فيها الحل بعيداً عن نقطة المفرد (لحظة الخروج) ، وفقاً للحالة حيث يكون اقتراب (وقت الدخول). ترتبط هذه الظاهرة المعروفة باسم "تأخر التشعب" بمفهوم حلول البط والاستقرار المفرد.

تمت دراسة مفهوم وظيفة المدخلات والمخرجات ومفهوم حل البط لأول مرة في أوائل الثمانينيات باستخدام طرق تحليل غير قياسية. انظر مقالات المراجعة (1981 ، Benoît et al. ، 1982 ؛ Cartier ، 1984 ؛ Zvonkin and Shubin). تم حساب دالة الإدخال والإخراج لأول مرة لبط معادلة (1981 ، Benoît ، 1981 ؛ Van der Pol (Benoît ، 1981 ؛ Diener and (1983 ، Diener)).

في وقت لاحق ، تم العثور على وجود حلول البط باستخدام الأساليب الكلاسيكية للتطور المقارب (1983 ، Eckhaus) والنظرية الهندسية للاضطرابات المفردة (1996 ، Dumortier and Roussarie). تم أيضاً الحصول على وظيفة الإدخال والإخراج لنظام مستوي من خلال النظرية الهندسية للاضطرابات المفردة (2016 ، De Maesschalck and Schechter).

لمزيد من التفاصيل حول مساهمة المدرسة الفرنسية غير المعيارية في مشكلة البط والتأخير في التشعب ، يمكن للقارئ أن يستشير (كارتييه ، 1982 ؛ فروخارد وشيفك ، 2008). للحصول على نظرة أكثر اكتمالاً حول المناهج المختلفة في نظرية الاضطرابات الفردية ، انظر الدراسة الأخيرة (2015 ، Kuehn) بالإضافة إلى المقالة (2007 ، Wechselberger) المخصصة للبط. لفكرة الإفراط في الاستقرار والتأخير في التشعب ، انظر أيضاً (2015 ، 1991 ، 1998 ؛ Benoît et al. ، 2008 ؛ Fruchard and Schäfke ، 1994 ، 1990) والمراجع التي تحتوي عليها.

إن الحالة الخاصة لحقل بطيء السرعة في البعد الثاني ، مع ديناميكية سريعة للبعد الأول تكون جذابة ثم مثيرة للاشمئزاز ، مفهومة جيداً ، انظر (1983 ، Diener and Diener). تم النظر في حالة تشعب هوبف ، حيث يكون هناك قيمتان ذاتيان متقاربان معقداً وعلامة تغييرات جزئية حقيقية ، من قبل العديد من المؤلفين ، انظر (2009 ، Benoît ؛ 1993 ، Callot ؛ 1995 ، Diener and Diener ؛ 1992 ، Lobry ؛ 1988 ، 1987 ، Neishtadt ؛ المحفظة ، 1986). انظر أيضاً العرض التقديمي الكامل والتعليمي في الدراسة الحديثة (2015 ، Kuehn ، الفصل 12).

النظر في نظام تفاضلي  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  مع متغير بطيء  $s \in \mathbb{R}$  ومع متغيرين سريعين  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = f(s, x). \quad (4.1)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  هي دالة مختلفة في  $(s, x)$  و  $\varepsilon > 0$  هو صغير بلا حدود. نستخدم مفردات التحليل غير القياسي ، انظر (Diener and Reeb ، 1989) أو (Lobry ، 2018) ، الفصل 5). ومن المفترض  $f(s, 0) = 0 \forall s$ .

$x = 0$  ليس فقط منحنى بطيء للنظام (4.1) ، أي حل المعادلة  $f(s, x) = 0$  ، ولكن أيضاً حل معين للنظام (4.1). نحدد المصفوفة المربعة  $2 \times 2$

$$M(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, 0). \quad (4.2)$$

نحن نفترض ذلك  $M(s)$  لديه قيمتين متميزتين ،  $\lambda_1(s)$  و  $\lambda_2(s)$  أحدها يبقى دائماً سلبياً وعلامة التغييرات الأخرى. مع  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$  ، نملك :

$$\begin{aligned} & \bullet \lambda_1(s) < \lambda_2(s) \forall s \in [\sigma_0, \sigma_2] \text{ و } \lambda_1(s) < 0 \\ & \bullet \lambda_2(s) > 0 \forall s \in ]\sigma_1, \sigma_2] \text{ و } \lambda_2(s) < 0 \forall s \in [\sigma_0, \sigma_1[ \end{aligned}$$

في النظرية الهندسية للاضطرابات المفردة ندرس النظام (4.1) في مساحة المرحلة الممتدة  $(x, \varepsilon)$ . نضيف المعادلة  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ . علامة eigenvalue واحدة من ديناميات التغييرات السريعة علامة. يمكن تقليل هذا الوضع إلى حالة الأنظمة في الطائرة ، عن طريق تقليل التنوع المركزي للنظام المعزز ((4.1) ،  $\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$ ) عند نقطة التوازن  $(0, 0) = (x, \varepsilon)$ . لمزيد من التفاصيل انظر (Boudjellaba and Sari ، 2009 ؛ 2001 ، Krupa and Szmolyan). مع هذا التخفيض ، نحصل على نظام مستوي يتم إعطاء وظيفة الإدخال والإخراج من خلال تكامل القيمة الذاتية التي تغير العلامة (1983 ، Diener and Diener):

$$\int_p^q \lambda_2(s) ds = 0. \quad (4.3)$$

في هذه المعادلة  $p$  هي لحظة الدخول ، و  $q$  هي لحظة الخروج. يتوقع التخفيض أن وظيفة المدخلات والمخرجات معطاة بالصيغة (4.3) محليًا ، قريبة من قيمة التشعب عبر الحرجة. نقترح ما يلي لحساب دالة المدخلات والمخرجات العالمية. تم النظر في الحالة الخاصة لحقل ثلاثي الأبعاد بطيء السرعة مع ديناميات سريعة منفصلة في (Boudjellaba and Sari، 2009).

نستخدم مفردات التحليل غير القياسي. ما هي بالضبط هذه النظرية ليست مهمة للغاية لفهم هذه المقالة. يمكن للقارئ أن يضع في اعتباره الإحساس الحدسي للغة اللامتناهيّة ويطمئن نفسه من خلال معرفة أن التحليل غير القياسي يوفر أساسًا صارمًا لمفاهيم صغيرة لا نهائية وكبيرة بشكل لا نهائي. للحصول على مقدمة للتحليل غير القياسي ، انظر (Diener and Reeb، 1989). لمزيد من المعلومات حول استخدام التحليل غير القياسي في نظرية المعادلات التفاضلية ، يمكن للقارئ الرجوع إلى (Zvonkin and Shubin، 1984)، (Cartier، 1982)، (Kuehn، 2015، Chapter 19.5). أو (Lobry ، 2018 ، الفصل 5).

لذلك نفترض أن المعلمة  $\varepsilon$  في (4.1) صغيرة بشكل لا نهائي. الحل  $x(s) = 0$  بطة لأنها جذابة  $s \in [\sigma_0, \sigma_1]$  ومثير للاشمئزاز  $s \in ]\sigma_1, \sigma_2]$ . الهدف هو دراسة طول النظام (4.1) التي هي قريبة بشكل لا نهائي لهذا الحل. الديناميات السريعة جذابة خلال الفاصل الزمني  $[\sigma_0, \sigma_1]$ . ياخذ  $p \in ]\sigma_0, \sigma_1[$ . يذهب حل النظام (4.1) مع حالة أولية في حوض الجذب 0 بسرعة نحو المنحنى البطيء  $x = 0$  ويبقى قريبًا إلى ما لا نهاية لهذا طالما  $s < \sigma_1$ . لا يترك الحل الحي اللامتناهي من 0 في هذه اللحظة ، لكنه يستمر في اتباع 0 خلال فترة زمنية كاملة. اللحظة  $q > \sigma_1$  التي  $x(s)$  لم يعد قريبًا بلا حدود من 0 يسمى وقت الخروج. الهدف هو تحديد الوظيفة  $q \mapsto p$ . سنوضح أن  $q$  محددة بالمعادلة (4.3). بتعبير أدق، لدينا النتيجة التالية:

## نظرية

نحدد

- $p \in ]\sigma_0, \sigma_1[$
- $x(p)$  حالة أولية تقع في حوض الجذب 0 ولكنها ليست قريبة بشكل لا نهائي من التنوع الثابت للديناميات السريعة المقابلة للقيمة الذاتية  $\lambda_1(p)$ .
- $q$  بالمعادلة (4.3).

ثم  $\forall s \in ]p, q[$  ليس قريبًا بلا حدود من  $p$  أو  $q$  ، لدينا:  $x(s) \simeq 0$ . علاوة على ذلك،  $x(q)$  ليس قريبًا بلا حدود من 0. عند  $p$  ،  $x(s)$  تقترب من 0 على طول مدار الديناميكيات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x).$$

الذي يمر  $x(p)$ . في  $s$  ،  $x(s)$  يتحرك بعيدًا عن 0 على طول فاصل 0 غير المستقر للديناميكيات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

إثبات . نملك  $xM(s) = f(s, x) - g(s, x)$ .  $M(s)$  هي المصفوفة (4.2). نملك

$$g(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(s, 0) = 0. \quad (4.4)$$

يصح النظام (4.1)

$$\varepsilon \frac{dx}{ds} = M(s)x + g(s, x). \quad (4.5)$$

المصفوفة  $M(s)$  له قيمتان متميزتان. وبالتالي هناك مصفوفة قابلة للتمييز قابلة للعكس  $P(s)$  مع

$$P(s)^{-1}M(s)P(s) = A(s) \quad , \quad A(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

نقوم بتحويل المعادلة (4.5) مع تغيير المتغير  $x = P(s)u$

$$\varepsilon \frac{du}{ds} = A(s)u + P(s)^{-1}g(s, P(s)u) - \varepsilon P(s)^{-1}P'(s)u.$$

نقوم بتحويل هذه المعادلة بالعدسة المكبرة  $u = \varepsilon U$



$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \frac{1}{\varepsilon} P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) - \varepsilon P(s)^{-1} P'(s)U.$$

يتم التحقق من الشروط (4.4)  $g(s, x)$  اذا لدينا

$$P(s)^{-1} g(s, P(s)\varepsilon U) = \varepsilon^2 g_1(s, U, \varepsilon),$$

و  $g_1(s, U, \varepsilon)$  هي وظيفة مستمرة. لذلك ، لدينا

$$\varepsilon \frac{dU}{ds} = A(s)U + \varepsilon h(s, U, \varepsilon).$$

$h = (h_1, h_2)$  و  $U = (U_1, U_2)$ : نحدد مكونات ناقلات:  $h(s, U, \varepsilon) = g_1(s, U, \varepsilon) - P(s)^{-1} P'(s)U$  يصبح النظام

$$\varepsilon \frac{dU_j}{ds} = \lambda_j(s)U_j + \varepsilon h_j(s, U_1, U_2, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

يتكون هذا النظام من معادلتين ضعيفتين. المتغيرات المتغيرة

$$U_1 = r \cos \theta, \quad U_2 = r \sin \theta$$

يحول النظام إلى

$$\varepsilon \frac{dr}{ds} = r [\lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta] + \varepsilon k_1(s, r, \theta, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, r, \theta, \varepsilon),$$

مع

$$k_1(s, r, \theta, \varepsilon) = \cos \theta h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \sin \theta h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon),$$

$$k_2(s, r, \theta, \varepsilon) = -\frac{\sin \theta}{r} h_1(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon) + \frac{\cos \theta}{r} h_2(s, r \cos \theta, r \sin \theta, \varepsilon).$$

$k_2$  هي دالة مستمرة عند  $r = 0$  لأن  $h_1 = O(r)$  و  $h_2 = O(r)$ . يتم تحديد  $r_0$  مع  $0 < r_0 < 1$  بحيث تكون الكرة بمركز 0 ونصف القطر  $r_0$  يتم تضمينه في تجمع الجذب الأصلي. قم بتطبيق التغير المتغير  $v = \varepsilon \ln(r)$  إلى المنطقة  $0 < r < r_0$ ، الذي يتم إرساله إلى المنطقة المحددة بواسطة  $-\infty < v < \varepsilon \ln(r_0) < 0$ . نحصل على النظام:

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_1(s) \cos^2 \theta + \lambda_2(s) \sin^2 \theta + \varepsilon k_1(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon),$$

(4.6)

$$\varepsilon \frac{d\theta}{ds} = [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)] \cos \theta \sin \theta + \varepsilon k_2(s, e^{v/\varepsilon}, \theta, \varepsilon).$$

إنه نظام منزعج منفرداً تنوعه البطيء هو اتحاد الطائرتين  $\theta = 0$  و  $\theta = \pi/2$ . لأن  $\lambda_2(s) > \lambda_1(s)$  بالنسبة لجميع  $s$ ، تكون المستوي  $\theta = \pi/2$  جاذبة والمستوي  $\theta = 0$  مقبلة. أي حل قادم من نقطة ليست قريبة بشكل غير محدود من المستوى البغيض يصبح قريباً إلى ما لا نهاية من المستوى الجذاب في وقت صغير للغاية. يمكن للحلول التي تأتي من نقطة قريبة جداً من طائرة طاردة أن تبقى قريبة من هذه الطائرة لفترة طويلة قبل الابتعاد عنها. تنطبق نظرية تيخونوف (Lobry et al., 1998؛ Tihonov، 1952). يتم تحديد  $p \in [\sigma_0, \sigma_1]$  و  $x(p)$  حالة أولية تقع في حوض الجذب 0، ولكنها ليست قريبة بشكل غير محدود من التنوع الثابت للديناميات السريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(p, x)$$

المقابلة لقيمة eigenvalue  $\lambda_1(p)$ . تدفع الديناميكيات السريعة الحل المطابق قريب بلا حدود إلى 0. في المستوى  $(U_1, U_2)$  ليس قريباً جداً من التنوع البطيء  $U_2 = 0$ ، وبالتالي للمستوى  $\theta = 0$ . وبالتالي فإن الحل يقترب بسرعة من المستوى  $\theta = \pi/2$  ثم يتم تقريبه بمحلول النظام البطيء

$$\frac{dv}{ds} = \lambda_2(s), \quad \theta = \pi/2.$$

نستنتج ذلك

$$v(s) = \int_p^s \lambda_2(w) dw.$$

لذلك لدينا مرة أخرى  $r(s) = r_0$ ، ذلك بالقول  $v(s)$  صغير بشكل لا نهائي، عندما تكون  $s$  متساوية بشكل تقارب مع  $q$  المحدد بواسطة (4.3). لهذه القيمة  $q$ ، الأصل هو نقطة سرج لديناميكيات سريعة

$$\frac{dx}{dt} = f(q, x).$$

ونتيجة لذلك، ينتقل الحل بعيدًا عند النقطة  $q$  من نقطة السرج على طول فاصله غير المستقر. كنا هنا أنه في الوقت ص هو الحل لا متناهية على مقربة من مجموعة متنوعة بطيئة  $\theta = \pi/2$ ، والذي يترجم حقيقة أن الحل لم تصل في الطائفة  $(U_1, U_2)$  بكونها قريبة جدا من  $U_1 = 0$ . هذا يكمل الدليل.

لنعد إلى المثال (3.2) - (3.3). نحدد  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s_0 + m - s)$ . النظام السريع التالي، حيث تعتبر  $s$  معلمة،

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - x_1) - \gamma x_1(1 - x_2),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \delta(1 - x_2) - \bar{\alpha}(s)(1 - x_1)x_2,$$

لديه نقطتي توازن (حالات شبه ثابتة)  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  و  $(x_1^*(s), x_2^*(s)) = (3.4)$ . المصفوفة اليعقوبية في  $(1, 1)$  هي  $\bar{c}(s_0 + m - s)$ . كما رأينا بالفعل، فإن القيمتين الذاتيتين متميزتين دائمًا، وهما رقمان حقيقيان. إن قيمتي eigenvalues سلبية إذا فقط إذا  $\bar{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ . وبالتالي فإن النقطة المفردة  $(1, 1)$  هي عقدة جذابة لقيم  $s$  التي من أجلها  $\bar{\alpha}(s) < \beta\delta/\gamma$ ، ونقطة سرج إذا  $\bar{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . القيم الذاتية هي  $\lambda_1(s) = \lambda_-(s)$  و  $\lambda_2(s) = \lambda_+(s)$ . (3.5)

مع  $(x_1, x_2) = (x_1^*(s), x_2^*(s))$ ، نحصل على المصفوفة اليعقوبية

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta+\gamma}{1+\delta/\bar{\alpha}(s)} & \frac{1+\delta/\bar{\alpha}(s)}{1/\beta+1/\gamma} \\ \frac{1+\beta/\gamma}{1/\bar{\alpha}(s)+1/\delta} & -\frac{\delta+\bar{\alpha}(s)}{1+\beta/\gamma} \end{pmatrix}.$$

نملك

$$\text{Trace}(J) < 0, \quad \text{Dét}(J) = \bar{\alpha}(s)\gamma - \beta\delta.$$

القيم الذاتية لها جزء حقيقي سلبي إذا فقط إذا  $\bar{\alpha}(s) > \beta\delta/\gamma$ . لذلك، في النقاط حيث  $\bar{\alpha}(s) = \beta\delta/\gamma$ ، هناك تشعبات عبر الدرجة، لأن التوازنين التاليين يلتقيان ويتبادلان استقرارهما:  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  و  $(x_1^*(s), x_2^*(s)) = (3.5)$ .

نملك

- $\lambda_1(s) < 0$
- $\lambda_2(s) < 0$  إذا  $s_0 + m - s \in ]s_1, s_2[ \text{ modulo } 1$
- $\lambda_2(s) > 0$  إذا  $s_0 + m - s \in ]s_2, s_1 + 1[ \text{ modulo } 1$

يمكننا تطبيق النظرية وحساب وظيفة المدخلات والمخرجات كما فعلنا في القسم 2.

## 5. التعميم

من المحتمل أن تمتد هذه الدراسة إلى مشاكل أكثر من معادلتين سريعتين ومعادلة بطيئة واحدة. لنأخذ على سبيل المثال النظام الخطي مع أربع معادلات سريعة (Bacaër, 2007, Section 4.2)

$$\frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 & 0 & \psi(t/T) \\ \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\alpha \end{pmatrix} W = c(t/T)W.$$

ومن المفترض  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \mu > 0$ .  $\psi(\cdot) > 0$  هي وظيفة دورية للفترة 1. كما أنها نموذج لانتقال الأمراض المنقولة بالنواقل. يمثل المكونان الأولان المتجهات المصابة في المرحلة الكامنة وفي المرحلة المعدية بينما يمثل المكونان الأخيران الأشخاص

المصابين في المرحلة الكامنة وفي المرحلة المعدية. يصبح النظام (2.1) مع  $\varepsilon = 1/T$

$$\varepsilon \frac{dx_1}{ds}(s) = (\gamma + \mu)[1 - x_1(s)] - \gamma[1 - x_2(s)],$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{ds}(s) = \mu[1 - x_2(s)] - \beta x_2(s)[1 - x_3(s)],$$

$$\varepsilon \frac{dx_3}{ds}(s) = \delta[1 - x_3(s)] - \delta[1 - x_4(s)],$$

$$\varepsilon \frac{dx_4}{ds}(s) = \alpha[1 - x_4(s)] - \psi(s_0 + m - s)[1 - x_1(s)]x_4(s).$$

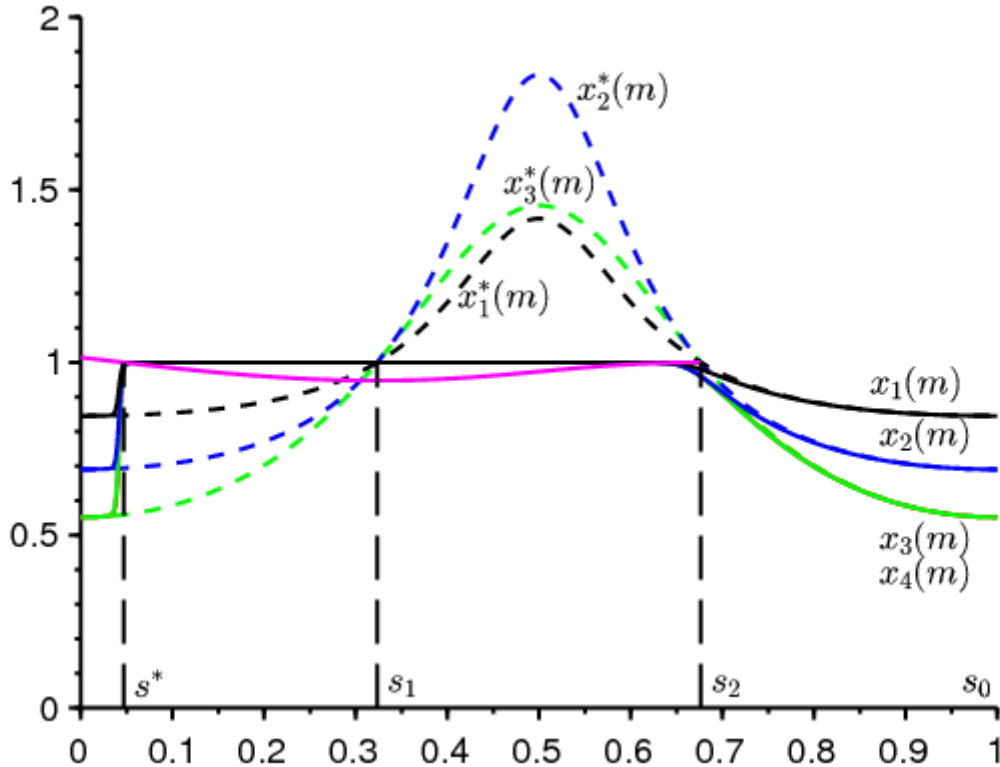
التخمين هو أن وظيفة المدخلات والمخرجات معطاة بواسطة الصيغة (4.3) ، حيث  $\lambda_2(s)$  يجب استبداله بالقيمة الذاتية الحقيقية المهيمنة  $\Lambda(s)$  المصفوفة  $c(s)$  ، حيث يمكننا التحقق من المثال العددي (الشكل 3). قيم المعلمات هي  $\mu = 1$  ،  $\delta = 1$  ،  $\gamma = 1$  ،  $\beta = 1$  ،  $\alpha = 1$  ،  $T = 2000$  و  $m = 3$  ،  $\psi(s) = 3 \times (1 + 0,75 \cos(2\pi s))$  للمصفوفة  $c(s)$

$$(\lambda + \gamma + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \delta)(\lambda + \alpha) = \beta \gamma \delta \psi(s).$$

نستنتج ذلك  $\Lambda(s) < 0$  إذا فقط إذا

$$\frac{\beta \gamma \psi(s)}{\alpha \mu (\gamma + \mu)} < 1,$$

ماذا يحدث  $s_1 < s < s_2$  مع  $s_1 \simeq 0,323$  و  $s_2 \simeq 0,677$  مع الصيغة (4.3) نجد  $s^* \simeq 0,047$  ، الذي يبدو أنه يتوافق بشكل جيد مع القفزة المفاجئة في احتمال الانقراض في الشكل 3.



الشكل 3. احتمالات الانقراض بعد فترات  $x_1(m)$  (باللون الأسود) ،  $x_2(m)$  (باللون الأزرق) وكذلك  $x_3(m)$  و  $x_4(m)$  (باللون الأخضر ، لا يمكن تمييزه) حسب  $s_0$ . منحنيات منقطة وبطيئة. باللون الوردي ، قمنا برسم قطعة من الوظيفة  $s_0 \mapsto 1 + \int_{s_0}^{s_2} \Lambda(s) ds$ .

المراجع البيولوجرافية

- G. Allaire, X. Blanc, B. Després, F. Golse (2018) Transport et diffusion. Ecole polytechnique, Palaiseau.
- N. Bacaër (2007) Approximation de la reproductivité nette  $R_0$  pour les maladies à vecteurs avec une population p <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>
- N. Bacaër (2019) Deux modèles de population dans un environnement périodique lent ou rapide. J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>
- E. Benoît (1981) Relation d'entrée– sortie, C. R. Acad. Sci. , Série I 293, 293– 296.
- E. Benoît, éd. (1991) Dynamic Bifurcations, Lect. Notes Math. 1493, Springer, Berlin.
- E. Benoît (2009) Bifurcation delay – the case of the sequence : stable focus – unstable focus – unstable node Discrete Cont. Dyn. – S 2, 911– 929.
- E. Benoît (2015) Solutions surstables avec singularités au point tournant, ARIMA 20, 5– 24.
- E. Benoît, J. – L. Callot, F. Diener, M. Diener (1981) Chasse au canard. Collect. Math. 31, 37– 119.
- E. Benoît, A. Fruchard, R. Shäfke, G. Wallet (1998) Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes– rapides à point tournant. Ann. Fac. sci. Toulouse 7, 627– 658.
- H. Boudjellaba, T. Sari (2009) Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow– fast predator– prey models. J. Diff. Eq. 246, 2205– 2225.
- J. L. Callot (1993) Champs lents– rapides complexes à une dimension lente. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 26, 149– 173.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/753442v1>
- P. Cartier (1982) Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non– standard, Séminaire Bourbaki 580, Astérisque 92– 93, Soc. Math. France, p. 21– 44.
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry– exit function and geometric singular perturbation theory, J. Differ. Equations 260, 6697– 6715.
- F. Diener, M. Diener (1983) Sept formules relatives aux canards. C. R. Acad. Sci. , Série I 297, 577– 580.
- F. Diener, M. Diener (1995) Ducks and rivers : three existence results, Nonstandard Analysis in Practice, F. Diener, M. Diener (éd. ), Springer, Berlin, 205– 224.
- F. Diener, G. Reeb (1989) Analyse non standard. Hermann, Paris.
- F. Dumortier and R. Roussarie (1996) Canard Cycles and Center Manifolds. American Mathematical Society, Providence.
- W. Eckhaus (1983) Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. Asymptotic Analysis II, F. Verhulst (éd. ), Springer, Berlin, 449– 494.
- A. Fruchard, R. Schäfke (2008) Sur le retard à la bifurcation, ARIMA 9, 431– 468.
- M. Krupa, P. Szmolyan (2001) Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities, Nonlinearity 14, 1473– 1491.
- C. Kuehn (2015) Multiple Time Scale Dynamics. Springer, Cham.
- C. Lobry (1992) A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des " bifurcations dynamic Ann. I. Fourier 42, 327– 351.
- C. Lobry (2018) La relation ressource– consommateur – modélisation mathématique. ISTE, Londres.

- C. Lobry, T. Sari, S. Touhami (1998)  
On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems.  
Electron. J. Differ. Eq. 19, 1–22.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution. Springer, Berlin.
- A. I. Neishtadt (1987) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, I.  
Differ. Equations Translations 23, 1385–1391.
- A. I. Neishtadt (1988) Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, II.  
Differ. Equations Translations 24, 171–176.
- A. N. Tihonov (1952)  
Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées.  
Mat. Sborn. 31, 575–586.
- G. Wallet (1986) Entrée– sortie dans un tourbillon. Ann. I. Fourier 36, 157–184.
- G. Wallet (1990) Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1.  
Ann. I. Fourier 40, 557–595.
- G. Wallet (1994) Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2.  
Bull. Soc. Math. France 122, 185–208.
- M. Wechselberger (2007) Canards. Scholarpedia 2(4), 1356.
- A. K. Zvonkin, M. A. Shubin (1984)  
Non– standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations.  
Uspekhi Mat. Nauk 39, 77–127.