HAL open science

Modélisation numérique de rubans en éléments de haut degré

Raphaël Charrondière, Florence Bertails-Descoubes, Sébastien Neukirch, Victor Romero

To cite this version:

Raphaël Charrondière, Florence Bertails-Descoubes, Sébastien Neukirch, Victor Romero. Modélisation numérique de rubans en éléments de haut degré. JF.IG.RV 2019 - Journées Françaises d'Informatique Graphique et de Réalité Virtuelle, Nov 2019, Marseille, France. pp.1-7. hal-02384170

HAL Id: hal-02384170

https://hal.science/hal-02384170v1

Submitted on 27 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation numérique de rubans en éléments de haut degré

Raphaël Charrondière[1], Florence Bertails-Descoubes[1], Sébastien Neukirch[2], Victor Romero[1,2]

[1] Univ. Grenoble Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK, France, {raphael.charrondiere,florence.descoubes}@inria.fr
[2] Sorbonne Université, CNRS, UMR 7190, Institut Jean le Rond d'Alembert, Paris, France

Résumé
Nous proposons un modèle numérique robuste et efficace pour calculer les états d'équilibre stables d'un ruban naturellement plat ou courbé. Notre discrétisation spatiale se base sur des éléments à courbure normale linéaire et torsion géodésique quadratique en l'abscisse curviligne, qui permettent une grande richesse de représentation cinématique tout en garantissant l'inextensibilité parfaite du ruban. Les équilibres stables sont calculés par minimisation des énergies de gravité et d'élasticité du ruban, sous contrainte de développabilité.

Mots clés : structure élancée, surface développable, éléments finis, optimisation sous contrainte

1. Introduction

Depuis les nappes de câbles jusqu'aux accessoires de mode en passant par les mèches de cheveux en anglaise, les structures en forme de bande souple, communément appelées rubans, sont largement présentes dans notre quotidien. Si l'étude mécanique des rubans a vu le jour dans les années 1930 [Sad29], on assiste récemment à un regain d'intérêt pour comprendre et modéliser ces structures [DA15].

Formellement, un ruban est une surface développable dont l'épaisseur reste négligeable devant la largeur, cette dernière étant elle-même négligeable devant la longueur. Nous nous limitons ici au cas d'une géométrie rectangulaire avec une épaisseur fixe. La développabilité implique que chaque déformation du ruban est isométrique : la surface ne peut pas être étirée ni cisaillée, elle ne peut se déformer que par flexion pure. Par ailleurs, quel que soit l'état du ruban, sa surface est réglée, c'est-à-dire qu'elle est l'union de segments de longueur non-nulle appelés règles. La présence de règles s'avère souvent utile pour paramétrer judicieusement un ruban [DA15, SvdH07].

Si le nombre de modèles numériques pour les tiges élastiques a littéralement explosé ces dernières années [BD17], à notre connaissance très peu de codes de calcul ont été en revanche conçus spécifiquement pour les rubans. Une exception est le simulateur dynamique de ruban proposé dans [SHCB15, PHB16], qui s'appuie sur une discrétisation nodale de la surface du ruban. Ce modèle requiert un nombre d'éléments d'autant plus grand que la surface est courbe, rendant son utilisation peu efficace dans le cas d'un ruban fortement bouclé. Par ailleurs, l'inextensibilité du ruban doit être prise en compte par le biais de contraintes supplémentaires, qui sont non-linéaires. Notre approche, pour l'instant statique, se base sur une modélisation discrète très différente : en choisissant des degrés de liberté en courbures au lieu de positions, nous pouvons capturer précisément la géométrie du ruban, et ce pour une courbure naturelle arbitraire. Ce choix de discrétisation nous permet également de garantir l'inextensibilité du ruban de manière exacte.

Contribution Notre modèle numérique se base sur le modèle théorique présenté en [DA15], brièvement rappelé en section 2.1, qui fait le rapprochement entre le modèle historique de ruban de Wunderlich [Wun62] et le modèle classique de tige élastique de Kirchhoff [AP10]. Nous tirons ainsi parti des méthodes numériques mises au point précédemment dans notre équipe pour simuler des tiges élastiques parfaitement inextensibles [CBD13]. En particulier, nous choisissons d'utiliser la courbure matérielle du ruban comme degré de liberté de notre système, de manière à garantir l'inextensibilité du ruban de manière intrinsèque. En utilisant une discrétisation d'ordre élevé, similaire à la discrétisation en morceaux de clothoïdes † 3D utilisée pour les tiges [CBD13], la surface du ruban est, à la différence des modèles nodaux, nécessairement lisse

†. Une clothoïde est une courbe dont la courbure varie linéairement avec l'abscisse curviligne.

© journées JFIGRV 2019

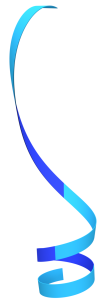

Figure 1 : *Équilibre stable d'un ruban naturellement courbé composé de* 5 *éléments, calculé en* 0.55 *secondes grâce à notre méthode.*

et inextensible, et ce indépendamment de la résolution choisie. Une difficulté consiste néanmoins à reconstruire de manière précise la géométrie du ruban à partir des degrés de liberté en courbure. En nous inspirant des travaux sur la tige discrétisée en superclothoïde [CBD13], nous montrons que nous pouvons utiliser une intégration de la ligne médiane du ruban par séries entières, tout en contrôlant finement l'erreur numérique (section 3). En ajoutant une grandeur supplémentaire, nous pouvons de plus spécifier la direction des règles passant par chaque point de la ligne médiane et ainsi reconstituer la surface du ruban avec une excellente précision. Finalement, une dernière difficulté consiste à assurer le non-croisement des règles durant la déformation du ruban et ainsi garantir la développabilité du ruban. Nous traitons cette condition comme contrainte de notre problème de recherche d'équilibres stables. Grâce à la dérivation analytique du Hessien de notre énergie de ruban, couplée à une méthode de minimisation par points intérieurs [WB06], notre problème peut être résolu en quelques secondes sur une machine standard, et ce pour une large gamme de paramètres (section 4). Finalement, nous montrons que notre code se compare favorablement à une méthode de tir standard, et validons notre approche sur une expérience simple de fléchissement de ruban. De plus, à l'aide de notre simulateur de ruban, nous mettons en évidence une différence de comportement notable par rapport à un modèle de tige de section rectangulaire, ainsi qu'un gain substantiel d'efficacité par rapport à un modèle plus général de coque mince ; tout cela confirmant l'intérêt de concevoir des modèles numériques dédiés aux rubans (section 5).

2. Ruban de Wunderlich paramétré en courbures

Le modèle de ruban de Sadowsky [HF15] définit une énergie potentielle 1D obtenue par réduction dimensionnelle lorsque $h \ll w \ll L$, où h est l'épaisseur, w la largeur, et L la longueur du ruban, en imposant la dévelopabilité de la surface moyenne de la structure. Le modèle de Wunderlich [Wun62] est une généralisation du modèle de Sadowsky aux cas où w devient du même ordre que L. Dans la suite nous montrons comment exploiter numériquement cette énergie 1D de ruban de manière à atteindre une précision contrôlée pour un coût calcul minimum.

2.1. Paramétrisation géométrique de base

Un ruban est une coque développable et inextensible. Nous nous restreignons ici au cas des rubans rectangulaires ayant une épaisseur constante h. Nous notons $r : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la ligne médiane du ruban, paramétrée par l'abscisse curviligne $s \in [0, L]$, où L est la longueur du ruban. Le repère matériel $\mathcal{R} : [0, L] \to \mathcal{SO}_3$ décrit localement la surface autour de la ligne médiane, avec $\mathcal{SO}_3$ le groupe des rotations. En tout point s, on note $\mathcal{R}_x(s)$, $\mathcal{R}_y(s)$ et $\mathcal{R}_z(s)$ les trois vecteurs colonne de la matrice de rotation $\mathcal{R}(s)$. Géométriquement, la composante $\mathcal{R}_z$ représente la tangente à la ligne médiane, $\mathcal{R}_y$ la normale à la surface, tandis que $\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_y \times \mathcal{R}_z$ est imposé par la structure de $\mathcal{SO}_3$. La figure 2 illustre la configuration géométrique d'un ruban.

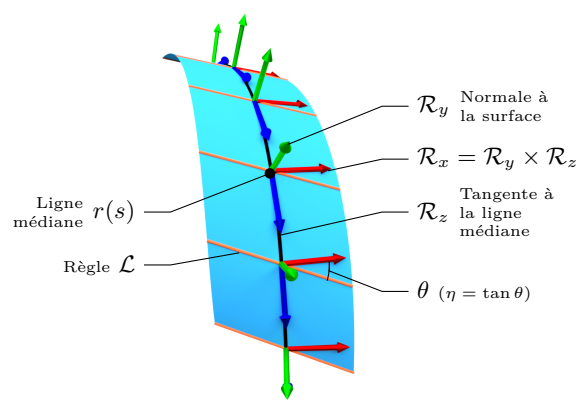

Figure 2 : *Paramétrisation du ruban, avec sa ligne médiane r, le repère matériel $\mathcal{R}$ qui lui est attaché, et le champ scalaire $\eta = \tan\theta$.*

Surface réglée Comme mentionné précédemment, la surface d'un ruban est réglée, ce qui signifie qu'à chaque point $r(s)$ de la ligne médiane passe un segment de droite – appelé règle, et noté $\mathcal{L}(s)$ – qui appartient à la surface du ruban et relie les deux bords du ruban dans la direction transverse (segment orange sur la figure 2).

Puisque $\mathcal{R}_y$ est normal à la surface, la direction de la règle passant par $r(s)$, appelée génératrice et notée $q(s)$, appartient forcément au plan $(\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_z)$. L'angle formé entre la règle et $\mathcal{R}_x$ est donné par $\theta(s)$. Dans la suite, nous utilisons le champ scalaire $\eta = \tan(\theta)$ pour définir une paramétrisation simple de la génératrice,

$$q(s) = \mathcal{R}_x(s) + \eta(s)\mathcal{R}_z(s). \tag{1}$$

© JFIGRV 2019.

À partir d'une génératrice, on peut alors reconstruire la règle correspondante comme $\mathcal{L}(s) = \{r(s) + v\,q(s);\ v \in \mathcal{S}(s)\}$, où l'ensemble $\mathcal{S}(s) \in \mathbb{R}$ est précisé ci-dessous. Finalement, la surface du ruban, qui représente l'ensemble de toutes les règles, est définie par la fonction

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\phi} & : & [0,L]\times\mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (s,v) & \mapsto & r(s) + v\,\underbrace{[\mathcal{R}_x(s) + \eta(s)\mathcal{R}_z(s)]}_{q(s)}. \end{array} \tag{2}$$

Dans le cas d'un ruban rectangulaire, l'ensemble $\mathcal{S}(s)$ se réduit à un intervalle constant, comme expliqué ci-après. Prenons une règle quelconque $\mathcal{L}(s) = \{r(s) + v(\mathcal{R}_y + \eta(s)\mathcal{R}_x);\ v \in \mathcal{S}\}$, et déformons le ruban de manière isométrique pour l'aplatir. Notons les variables dans la configuration aplatie en surlignant par une barre. La règle après aplatissement a pour expression $\bar{\mathcal{L}}(s) = \{\bar{r}(s) + v(\bar{\mathcal{R}}_y + \eta(s)\bar{\mathcal{R}}_x);\ v \in \mathcal{S}\}$ (voir figure 3, à gauche). On peut décomposer la direction de la règle aplatie selon les composantes de $\mathcal{R}$. Le point en extrémité du ruban $r(s)_+$ correspond alors à $\phi(s, \frac{w}{2})$ où w est la largueur du ruban. En ce point, on a donc $v = \frac{w}{2}$, et on en déduit $\mathcal{S} = [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$, qui est indépendant de s.

Contrainte de Wunderlich Les règles d'une surface développable ne s'intersectent pas, comme illustré sur la figure 3, à droite, où l'on a représenté à nouveau la configuration plane. Quand le point I touche le bord du ruban, la surface entre les deux règles est un cône de sommet I. On appelle I point de singularité, il ne peut pas appartenir dans la surface. Pour s'en convaincre le lecteur peut prendre une feuille de papier, courber les bords jusqu'à former un cône, et essayer de faire rentrer le sommet à l'intérieur de la feuille ; à moins de déchirer la feuille, cela s'avère impossible. On peut montrer [DA15] que cette contrainte de développabilité se formule de la manière suivante,

$$\forall s \in [0,L]\ \ \left|\eta'(s)\right| < \frac{2}{w}, \tag{3}$$

où $\eta'(s) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s}$ désigne la dérivée spatiale de η.

2.2. Paramétrisation en courbures

Comme pour les modèles de tige en courbures [BAC*06, CBD13], notre idée est d'utiliser les courbures et la torsion du ruban comme variables principales de notre modèle, au lieu d'utiliser directement la paramétrisation $(r, \mathcal{R}, \eta)$ décrite ci-dessus. Ce choix nous permet de mieux prendre en compte les vrais degrés de liberté du ruban, et en particulier, de garantir l'inextensibilité de la ligne médiane de façon intrinsèque. Comme pour les tiges, nous devons tout d'abord relier les courbures matérielles à la géométrie $(r, \mathcal{R}, \eta)$ du ruban. En outre, et à la différence des tiges, nous devons réduire le nombre de degrés de liberté en courbures de manière à prendre en compte l'inextensibilité et la développabilité de la surface du ruban.

Des coubures à la ligne médiane La relation d'inextensibilité de la ligne moyenne, $r'(s) = \mathcal{R}_z(s)$, permet d'écrire $r(s) = r(0) + \int_{t=0}^{s} \mathcal{R}_z(t)\mathrm{d}t$. Par ailleurs, la structure de $\mathcal{SO}_3$ implique l'existence d'un vecteur de Darboux $d(s) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{R}'(s) = [d(s)]_\times \mathcal{R}$. L'opérateur $[\cdot]_\times : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{A}_3$ transforme le produit vectoriel en opération matricielle $u \times v = [u]_\times v$, où $\mathcal{A}_3$ est l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de taille 3. Il est cependant plus aisé d'utiliser directement les courbures en transformant cette relation par $\mathcal{R}'(s) = \mathcal{R}\,[\omega(s)]_\times$ où $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathrm{T}}$ est le vecteur courbure, dont les composantes sont, dans l'ordre, la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique — ici nous appelons simplement ces quantités des courbures matérielles, ou simplement des courbures.

En fixant $r(0) = p_0$ et $\mathcal{R}(0) = \mathcal{F}_0$, nous obtenons au final le problème d'intégration suivant, appelé problème de Darboux,

$$\mathcal{P} = \begin{cases} (r(0), \mathcal{R}(0)) = (p_0, \mathcal{F}_0) \\ \mathcal{R}'(s) = \mathcal{R}(s)\,[\omega(s)]_\times \\ r'(s) = R(s)\,e_z, \end{cases}$$

où $e_z = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ est le troisième vecteur de la base canonique. Le problème de Darboux satisfait les conditions de Cauchy-Lipshitz, par conséquence il possèlde une unique solution. Cependant, à part dans des cas très particuliers (courbure constante par exemple), la solution ne possède en général pas d'expression en forme close, ce qui signifie qu'elle n'est pas représentable par un nombre fini d'opérations élémentaires. Dans le cas où la courbure est une fonction polynomiale de s, on peut néanmoins montrer que la solution est analytique, c'est-à-dire qu'elle admet un développement en série entière [CBD13]. Dans la section 3, nous montrons alors comment adapter la méthode d'intégration en séries entières mise au point dans [CBD13] au cas des rubans.

Isométrie de la surface Géométriquement, une différence majeure entre tiges et rubans provient du fait que les rubans sont caractérisés par des contraintes supplémentaires : leur surface doit se déformer de façon isométrique depuis la configuration plane, et donc rester inextensible et développable.

D'une part, l'inextensibilité de la surface du ruban impose l'invariance de la courbure géodésique. Puisque $\omega_2 = \langle \mathcal{R}'_z, \mathcal{R}_x \rangle$ (avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$), cela implique $\omega_2 = \left\langle \bar{\mathcal{R}}'_z, \bar{\mathcal{R}}_x \right\rangle$, ce qui, dans le cas d'un ruban rectangulaire, revient à

$$\omega_2 = 0. \tag{4}$$

D'autre part, la développabilité implique une courbure de Gauss nulle, ce qui s'écrit

$$\omega_3 = \eta\omega_1. \tag{5}$$

Le lecteur pourra trouver l'intégralité des justifications mathématiques de ces relations dans [DA15].

© JFIGRV 2019.

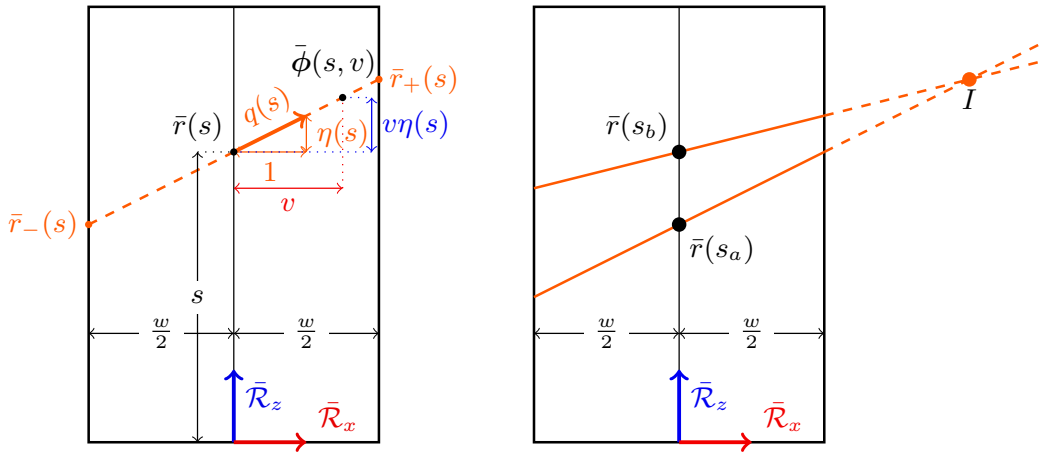

Figure 3 : *À gauche, paramétrisation du ruban par s, v et η, sur la configuration plate. À droite, illustration d'un point singulier. Aux points sur la ligne médiane d'abscisse linéaire s_a et s_b passent deux règles, dessinées en orange sur la configuration à plat. La surface étant développable, les droites portant les règles ne peuvent pas se croiser à l'intérieur du ruban.*

Réduction du nombre de degrés de liberté Étant données les contraintes de déformation isométrique données ci-dessus, nous proposons dans notre modèle d'utiliser η et ω_1 comme variables indépendantes. Ce choix nous permet, via les équations (4) et (5), de calculer le vecteur courbure $\omega(s) = (\omega_1, 0, \eta\omega_1)^{\mathrm{T}}$ pour toutes les valeurs de η et de ω_1. Remarquons que choisir plutôt ω_1 et ω_3 causerait des difficultés numériques pour évaluer η lorsque ω_1 s'annule (de même si l'on choisit η et ω_3).

2.3. Énergies

Notre objectif dans la suite est de calculer des configurations stables du ruban, c'est-à-dire, des minima locaux de l'énergie potentielle totale. Nous prenons deux énergies en compte : l'énergie élastique du ruban et l'énergie de pesanteur. Nous ne considérons pas ici le contact du ruban avec un autre objet, ni avec lui-même.

Énergie élastique L'énergie élastique de Wunderlich pour un ruban rectangulaire de courbure normale naturelle $\kappa_r(s)$ s'écrit [DA15]

$$E_{\mathcal{W}} = \frac{Dw}{2}\int_0^L \left[\omega_1^2(1+\eta^2)^2\frac{1}{w\eta'}\ln\left(\frac{1+\frac{\eta' w}{2}}{1-\frac{\eta' w}{2}}\right) - 2\kappa_r\omega_1(1+\nu\eta^2)\right]\mathrm{d}s, \quad (6)$$

où ν est le coefficient de Poisson, Y le module d'Young, et $D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidité de flexion de la surface.

À la limite $\eta' w \to 0$, l'énergie de Wunderlich $E_{\mathcal{W}}$ se simplifie en l'énergie de Sadowsky,

$$E_{\mathcal{S}} = \frac{Dw}{2}\int_0^L \omega_1^2(1+\eta^2)^2 - 2\kappa_r\omega_1(1+\nu\eta^2)\mathrm{d}s. \quad (7)$$

Énergie de pesanteur L'énergie potentielle de pesanteur est définie de manière classique,

$$E_{\mathcal{P}} = -\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \rho\, h\, \langle \phi(s,v), \mathcal{G}\rangle\, \mathrm{d}a(s,v), \quad (8)$$

où ρ est la masse surfacique du ruban, h l'épaisseur du ruban, $\mathcal{G} = -g\, e_z$ avec g la constante gravitationnelle, et $\mathrm{d}a(s,v) = (1+vn)\mathrm{d}v\mathrm{d}s$ l'élément d'intégration sur la surface du ruban.

L'intégration de (8) en v donne

$$E_{\mathcal{P}} = -\int_0^L \rho h w \left\langle \left(r(s) + \frac{\eta'(s)w^2}{12}\, q(s)\right), \mathcal{G}\right\rangle \mathrm{d}s. \quad (9)$$

La longueur du ruban étant bien plus grande que sa largeur, le terme $\frac{\eta'(s)w^2}{12}\, q(s)$ peut être considéré comme négligeable. Nous omettons donc ce terme dans la suite ce qui a pour effet de considérablement simplifier les calculs (voir section 4.1). En pratique, nous n'avons pas observé de problème lié à cette approximation.

Remarque Avant de discrétiser nos équations, nous pouvons d'ores et déjà anticiper un certain nombre de difficultés. Tout d'abord, la non-convexité de l'énergie potentielle totale laisse présager des soucis pour les techniques standard d'optimisation (comme la méthode de Newton). Une autre difficulté provient du terme logarithmique dans l'énergie de Wunderlich, qui diverge lorsque la contrainte (3) devient active. D'une part, nous devons minimiser l'énergie sous cette contrainte, et d'autre part, il nous faut construire un modèle limite pour l'énergie de Wunderlich lorsque la contrainte devient active. En section 4, nous présentons une méthode de résolution permettant de traiter l'ensemble de ces problèmes de façon robuste et efficace.

© JFIGRV 2019.

3. Cinématique discrète

Nous découpons le ruban en p morceaux de longueurs ℓ_i, $i \in \{1..p\}$, et cherchons à approcher nos fonctions η et ω_1 par des fonctions construites à partir d'un nombre fini de degrés de liberté.

3.1. Fonctions de forme de haut degré

Contrairement aux modèles de tiges paramétrés en courbures [BAC*06, CBD13], prendre nos variables constantes par morceaux ne permet pas d'obtenir une géométrie lisse (dérivable au moins une fois) pour le ruban : en effet, si la fonction η n'est pas une fonction continue, alors le ruban n'est même pas continu aux points de discontinuité (voir figure 4). Afin de garantir une surface suffisamment lisse, nous optons donc pour des fonctions η et ω_1 continues et linéaires par morceaux. En conséquence, la torsion géodésique $\omega_3 = \eta\,\omega_1$ prend la forme d'une fonction quadratique par morceaux.

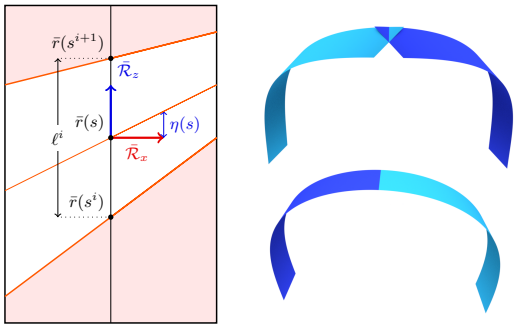

Figure 4 : *À gauche : notre élément trapézoïdal (en blanc) sur la configuration aplatie. À droite : prendre le vecteur courbure constant par élément conduit à des règles discontinues, et donc à des éléments disjoints (en haut) ; en revanche, une courbure normale linéaire et une torsion géodésique quadratique par élément garantie la continuité des règles, et mène à une surface de ruban lisse (en bas).*

La difficulté de notre nouveau problème de Darboux approché est, de manière analogue à [CBD13], qu'il ne présente pas de solution en forme close, à cause de nos éléments d'ordre supérieur à 1. Le recours à une méthode d'intégration numérique est donc nécessaire, avec le risque de transformer cette étape cruciale de construction de nos éléments en étape coûteuse. Heureusement, une méthode très efficace d'intégration, basée sur les séries entières, a été déployée dans [CBD13]. Nous montrons que cette méthode s'adapte parfaitement à notre problème de cinématique discrète de ruban.

3.2. Intégration numérique par séries entières

Si le vecteur courbure ω est développable en série entière (ce qui est le cas sur chaque morceau car nous avons choisi des éléments polynomiaux), alors r et $\mathcal{R}$ le sont aussi. Pour un morceau donné, nous notons $\omega_1(s) = as + b$ et $\eta(s) = ns + m$, avec $a, b, n, m \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors écrire le vecteur courbure comme un polynôme de degré 2, $\omega(s) = \lambda_0 + \lambda_1 s + \lambda_2 s^2$, avec $\lambda_0 = (b, 0, mb)^{\mathrm{T}}$, $\lambda_1 = (a, 0, nb + ma)^{\mathrm{T}}$, $\lambda_2 = (0, 0, na)^{\mathrm{T}}$. En développant r et $\mathcal{R}$ sous forme de séries entières $r = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n s^n$, $\mathcal{R} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n s^n$, on obtient

$$\begin{cases} r_0 = p_0,\ \mathcal{R}(0) = \mathcal{F}_0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n R_n s^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n s^n \left[\omega(s)\right]_\times \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n r_n s^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n s^n\, e_z. \end{cases} \tag{10}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, notre problème de Darboux revient à résoudre les récurrences suivantes,

$$\begin{cases} r_0 = p_0 \\ \mathcal{R}_0 = \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \left[\lambda_0\right]_\times \\ \mathcal{R}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{R}_1 \left[\lambda_0\right]_\times + \mathcal{R}_0 \left[\lambda_1\right]_\times\right) \\ \forall n \geqslant 3,\ \mathcal{R}_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{2} \mathcal{R}_{n-1-k} \left[\lambda_k\right]_\times\right) \\ \forall n > 0,\ r_n = \frac{1}{n}\mathcal{R}_{n-1}\, e_z. \end{cases} \tag{11}$$

À la différence de [CBD13] dans le cas des tiges, nous obtenons ici une récurrence à trois termes pour le repère matériel (au lieu de deux). Néanmoins, la structure du problème reste similaire. En particulier, ce type de série a l'avantage de présenter une convergence du reste très rapide, et ce pour un ordre n relativement faible. En pratique, il suffit donc de sommer un nombre restreint de termes (au plus une centaine) pour évaluer les séries de manière précise. Cependant, si l'on somme naïvement les différents termes de ces séries en utilisant le calcul flottant, on se rend compte rapidement d'une perte drastique de précision. Ce problème est connu sous le nom de compensation catastrophique.

3.3. Compensation catastrophique et contrôle de l'erreur

Les problèmes de perte de précision apparaissent lorsque l'on somme des valeurs d'ordre de grandeur très différents, et de signes opposés. Dans les ordinateurs actuels, un réel est représenté par une mantisse m, un exposant n et un signe $s = \pm 1$, la valeur du réel est alors $s \times 1, m \times 2^n$ où la virgule est la même que celle que l'on utilise pour écrire la partie décimale d'un nombre (sauf qu'ici elle est écrite en binaire). Pour des calculs en double flottants, la mantisse est de taille 52 bits, donc par exemple, lorsqu'on effectue la somme $1 + 10^{16}$, on obtient 10^{16} (phénomène d'absorption). Ce qui est problématique, c'est que si maintenant on retranche 10^{16} à la somme initiale, on trouve 0 au lieu de 1, soit une perte de précision de 100% ! Nos séries entières ont des termes qui deviennent rapidement très grands en norme, avant de devenir très petits. De plus, les termes à sommer sont des matrices avec des coefficients de signe positif ou négatif (produits par des matrices antisymétriques). En conséquence, tous les ingrédients sont réunis pour rencontrer le problème de compensation catastrophique.

Dans [CBD13], il est expliqué comment borner les

© JFIGRV 2019.

facteurs de la série $\mathcal{R}_n s^n$ pour conserver la précision numérique. Si l'on veut par exemple avoir une précision fixe à $2^{-26} \approx 1.5\ 10^{-8}$, nous devons nous assurer que la plus grande valeur de $\|\mathcal{R}_n s^n\|$ soit bornée par $2^{26} \approx 5\ 10^7$. Cela nous fournit un rayon de convergence numérique. La théorie nous montre que plus la courbure est grande, plus le rayon est petit. Dans le cas des rubans, il est également aisé de borner $\|\mathcal{R}_n s^n\|$ en fonction de la somme des normes des facteurs du polynôme de la courbure. En revanche, utiliser un degré de polynôme de la courbure trop élevé réduirait le rayon de convergence numérique. Pour cette raison, nous nous sommes limités pour l'instant à des éléments d'ordre 2.

4. Statique de ruban sous gravité

4.1. Énergie potentielle discrète

Il nous faut maintenant calculer l'énergie potentielle totale correspondant à notre choix de cinématique pour le ruban. Rappelons que sur chaque morceau du ruban, η et ω_1 sont des polynômes d'ordre 1 en s, que l'on écrit $\omega_1(s) = as + b$ et $\eta(s) = ns + m$.

Énergie discrète de Wunderlich En développant les formes données dans la section 2, l'énergie élastique de Wunderlich (6) devient alors

$$E_{\mathcal{W}} = \frac{Dw}{2}\left[H(n)P(a,b,n,m) - Q(a,b,n,m)\right]$$

$$\text{avec} \quad H(n) = \frac{1}{nw}\ \ln\left(\frac{1+\frac{nw}{2}}{1-\frac{nw}{2}}\right),$$

$$P(a,b,n,m) = \int_0^L (as+b)^2\left[1+(ns+m)^2\right]^2 \mathrm{d}s,$$

$$Q(a,b,n,m) = \int_0^L 2\kappa_r(as+b)\left(1+(ns+m)^2\right)\mathrm{d}s.$$

La seule difficulté ici est le traitement de H qui n'est pas défini si $n = \pm\frac{2}{w}$. Notre contrainte de Wunderlich (3) doit en théorie nous permettre d'éviter d'atteindre ces bornes. Néanmoins, si l'on s'en approche trop, des problèmes numériques apparaissent. Dans ce cas, nous utilisons le développement de Taylor $H(n) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{nw}{2}\right)^2 + o(n^3)$. Nous basculons vers ce développement dès que $\left|\frac{nw}{2}\right| < \epsilon_T$, où ϵ_T est une valeur seuil empirique. En pratique, nous avons constaté que choisir $\epsilon_T = 10^{-5}$ mène à des résultats satisfaisants en double précision.

Énergie discrète de pesanteur Comme mentionné plus haut, la longueur du ruban étant très supérieure à sa largeur, nous approchons l'énergie potentielle de pesanteur (8) en concentrant la masse sur la ligne médiane, $E_{\mathcal{G}} \approx \int_0^L w\rho\,\langle r(s), \mathcal{G}\rangle\, ds$. Cette intégrale peut être calculée à partir des séries entières $E_{\mathcal{G}} = \left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} E_k s^k, \mathcal{G}\right\rangle$.

4.2. Minimisation

Lors de la procédure de minimisation, nous faisons appel au gradient et au Hessien de l'énergie. Dans notre modèle, le coût de calcul du gradient augmente quadratiquement avec le nombre de morceaux du ruban, et celui du Hessien de manière cubique. Les algorithmes d'approximation et de correction du Hessien (L-BFGS par exemple) ne donnant pas la performance voulue, nous optons pour un calcul direct du Hessien, ce qui diminue le temps de convergence d'un facteur 300. La non-convexité de notre énergie, couplée à la présence de bornes sur les variables et à la divergence de l'énergie en cas de violation de ces bornes, nous imposent de choisir un algorithme un peu plus évolué que l'algorithme de Newton-Raphson couplé avec des recherches linéaires. Aussi, nous utilisons une méthode de point intérieur, implémentée dans la bibliothèque libre Ipopt [WB06], pour effectuer notre minimisation non-linéaire sous contraintes. Grâce à notre implémentation exacte du Hessien, cette méthode nous fournit un état d'équilibre stable en quelques secondes de calcul seulement, pour un ruban discrétisé en une vingtaine d'éléments.

5. Résultats

5.1. Simulation d'une anglaise

Pour tester notre modèle, nous simulons une anglaise, c'est-à-dire un ruban recourbé plusieurs fois sur lui-même et qui pend sous son poids propre. Nous considérons un ruban élastique de taille $w = 1$ cm par $L = 50$ cm, de masse surfacique 100 g/m^2, de courbure normale naturelle 60 m^{-1} (soit 5 tours du ruban sur lui-même au repos), de coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ et de rigidité de flexion $D = 0.0002$ N.m^2. Numériquement, la structure est divisée en 20 morceaux, et le premier itéré est choisi comme parfaitement plat et horizontal. La convergence est atteinte après 36 itérations en 2.1 secondes. Le résultat est présenté en figure 5, ainsi que dans la vidéo d'accompagnement.

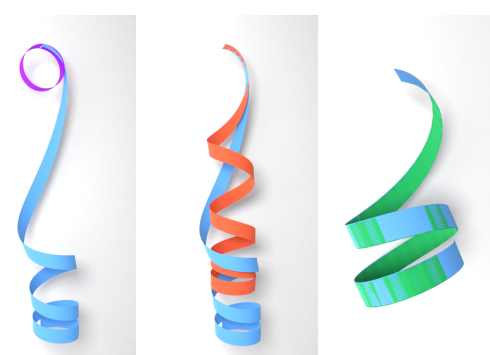

Figure 5 : *À gauche, un ruban dans sa forme naturelle (en violet), et soumis à la gravité (en bleu). Au centre, ce même ruban (en bleu) est comparé à un modèle de tige à section rectangulaire (en orange). À droite, comparaison entre notre méthode (en bleu) et une méthode de tir (en vert).*

© JFIGRV 2019.

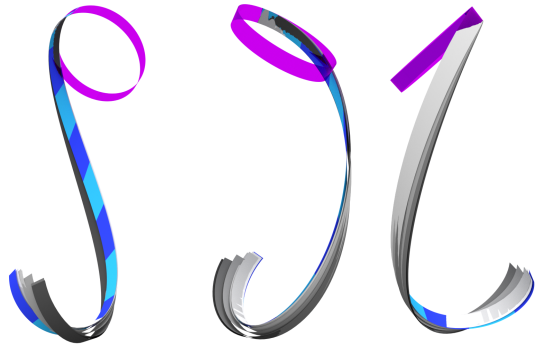

Figure 6 : *Comparaison de notre méthode (en bleu) avec le code en éléments finis* FEniCS-Shell *(5 rapports largueur/épaisseur augmentant avec une échelle de couleur grise), sous trois points de vue (cf. vidéo d'accompagnement).*

Ensuite nous considérons le même ruban, dont nous faisons varier la longueur totale L de 1 cm à 50 cm. Nous montrons sur la figure 9 quelques étapes caractéristiques de cette expérience. Le lecteur peut aussi voir l'évolution du ruban dans la vidéo d'accompagnement. À petite longueur, l'énergie élastique domine et le ruban adopte une forme proche de sa courbure naturelle. Ensuite, à partir de 5 cm, la gravité n'est plus négligeable, mais la torsion géodésique reste élevée et le ruban se déplie mais reste dans le plan. Finalement à partir de 29 cm le ruban bascule hors du plan, et la torsion apparaît.

5.2. Comparaison à une méthode de tir

Pour valider notre modèle, nous l'avons comparé à une méthode numérique alternative. Nous avons ainsi implémenté une méthode de tir, inspirée de [MGN18], qui permet de résoudre le problème au bord posé sur les équations différentielles régissant la statique des rubans avec courbure naturelle. Nous choisissons un ruban élastique de $w = 1.5$ cm par $L = 50$ cm, de courbure normale naturelle 30 m^{-1}, de masse surfacique 15 $\mathrm{g/m}^2$, de coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ et de rigidité de flexion $D = 0.0002$ N.m^2. Les deux résultats présentés sur la figure 5 à droite sont quasiment identiques, ce qui valide nos résultats. À noter que contrairement à la méthode de tir qui peine à converger dès que la courbure naturelle du ruban est élevée, notre modèle converge en quelques secondes seulement, quelle que soit la courbure naturelle imposée.

5.3. Comparaison à un modèle de coque

Nous avons également comparé notre modèle à un modèle de coque mince discrétisé par éléments finis. Nous utilisons le modèle de Naghdi [HBBM18], codé en Python avec le framework FEniCS-Shell pour calculer un équilibre statique. Le ruban est discrétisé par un maillage triangulaire de 100×4. Le modèle de ruban élastique étant conçu pour $L \gg w \gg h$, nous

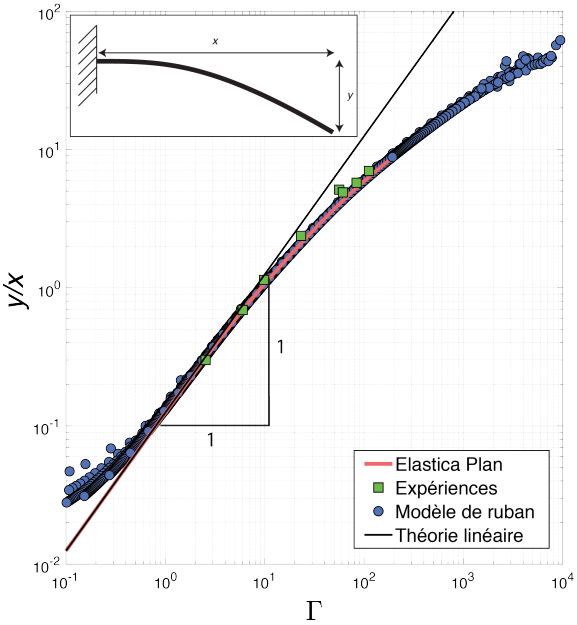

Figure 7 : *Rapport y/x de l'étendue de la déformée de la poutre, en fonction du paramètre de gravito-courbure Γ, évalué de quatre manières : par la théorie linéaire, $y/x = \Gamma/8$ valide pour de petits Γ (en noir), par le calcul de l'elastica plan (en rouge), par notre modèle numérique de ruban (en bleu), et par une série d'expériences (en vert).*

utilisons un rapport $w/L = 003$ et un rapport w/h croissant dans l'ensemble $\{10, 20, 50, 100, 200\}$. Les paramètres expérimentaux sont $D = 1$, $L = 1$, $\nu = 0.4$, $\rho g = 100$. Les calculs prennent entre 2 ($w/h = 10$) et 4 ($w/h = 200$) minutes, à comparer aux 0.1 secondes nécessaires pour notre modèle numérique de ruban. La figure 6 montre que les modèles diffèrent pour un rapport w/h faible, mais qu'ils s'accordent lorsque l'épaisseur devient négligeable, ce qui valide à nouveau notre approche.

5.4. Expérience de la poutre console

Une expérience bien connue en mécanique des objets élastiques est utilisée pour estimer les paramètres matériaux. Une poutre élastique est encastrée horizontalement avec un bord libre. Sous l'action de la gravité, le rapport des dimensions suit une courbe théorique spécifique fonction d'un paramètre adimensionné gravito-courbure ($\Gamma = \rho g h w L^3/D$), comme illustré sur la figure 7.

Pour comparer les prédictions de notre code à l'expérience, nous utilisons des simulations de rubans naturellement plats, de largeur $w = 5$ cm, de densité $\rho = 1200$ kg/m^3, d'épaisseur $h = 1$ mm et de coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ fixes. Le module d'Young Y est choisi dans l'intervalle $[0.5-10]$ MPa et la longueur L du ruban dans l'intervalle $[5-90]$ cm. Au total, nous effectuons 2500 simulations numériques. De plus, nous

© JFIGRV 2019.

Figure 8 : *Expérience de la poutre console : le ruban expérimental (en gris foncé) est fixé horizontalement d'un côté et tombe sous son propre poids. La prédiction de notre modèle (en bleu) est projetée sur l'image réelle pour comparaison. Le ruban réel est découpé dans une feuille de PET (Polyethylene terephthalate), avec comme dimensions* $29cm \times 3cm \times 0.143mm$.

résolvons les équations pour l'elastica plan avec la rigidité de flexion $D = \frac{Yh^3w}{12(1-\nu^2)}$. Enfin, nous effectuons plusieurs expériences en laboratoire, telles que celle illustrée figure 8. La figure 7 compare simultanément toutes ces approches (numérique, théorique, et expérimentale) lorsque l'on calcule le rapport des dimensions du ruban en fonction de Γ.

Pour une grande plage de Γ, une très bonne correspondance s'observe entre notre modèle numérique, le modèle de l'elastica, et l'expérimental. Une déviation apparaît seulement pour des cas extrêmes, $\Gamma \ll 1$, où des artefacts numériques surviennent.

5.5. Comparaison au modèle des tiges

Il est habituel d'utiliser un modèle de tige de Kirchhoff à section rectangulaire pour simuler un ruban. Néanmoins il a été montré que le modèle de ruban génère des configurations statiques qui peuvent être très différentes de celles engendrées par un modèle de tige [AS15, MGN18]. La différence majeure entre les deux modèles provient de la courbure géodésique qui n'est pas uniforme dans le cas des tiges. Nous comparons la configuration statique de ruban obtenue en figure 5 avec la configuration statique obtenue avec un modèle de tige. Pour simuler une tige de Kirchhoff, nous utilisons le modèle discret en superclothoïde [CBD13]. L'énergie de gravité est la même pour la tige et le ruban, seule l'énergie élastique diffère. La matrice de rigidité pour une tige à section rectangulaire est $K = \mathrm{diag}(YI_1, YI_2, \frac{Y}{2(1+\nu)}J)$ où $I_1 = \frac{h^3w}{12}$, $I_2 = \frac{hw^3}{12}$, et $J = J_0\left[1 - \frac{192}{\pi^5}\frac{h}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tanh\frac{(2k+1)\pi w}{2h}}{(2k+1)^5}\right]$ avec $J_0 = \frac{1}{3}wh^3$ [LB]. Cette série est $O\left(\frac{1}{k^5}\right)$, et a donc une excellente vitesse de convergence : avec moins de 10 termes, la précision numérique est celle de la machine. De manière à recaler la rigidité de courbure YI_1 du modèle de tige sur son équivalent pour les rubans Dw, nous multiplions YI_1 par $\frac{1}{1-\nu^2}$. Les deux modèles ont alors la même rigidité par rapport à la flexion normale. Nous reprenons les paramètres physiques de la section précédente ($L = 50$ cm, $w = 1$ cm, etc.) et comparons en figure 5, au milieu, les modèles de tige (en orange) et de ruban (en bleu). De même nous comparons ces deux modèles sur l'expérience de variation de longueur totale, voir figure 9. Nous remarquons que les deux modèles coïncident parfaitement au départ, et s'écartent substantiellement l'un de l'autre dès que la torsion apparaît.

6. Conclusion et perspectives

Nous avons présenté un modèle numérique robuste et précis dédié à la statique de rubans élastiques inextensibles, qui s'appuie sur le modèle récent de Wunderlich. La clef de notre modèle discret est de combiner des éléments d'ordre élevé avec une paramétrisation réduite, le calcul analytique de tous les termes cinématiques et statiques grâce aux séries entières, y compris le Hessien de l'énergie, et un algorithme de minimisation robuste prenant en compte la contrainte de Wunderlich. Nous avons testé notre approche sur diverses configurations de rubans, aussi bien naturellement plates que bouclées, et avons toujours observé une excellente convergence en des temps raisonnables (de l'ordre de quelques secondes pour 20 elements). Enfin, notre modèle numérique a été comparé favorablement à une méthode de tir, ainsi qu'à un modèle de coques implémenté sous FEniCS. À l'avenir nous souhaiterions enrichir l'espace des configurations admissibles pour le ruban, en traitant notamment le cas encastré-encastré, ainsi que l'auto-contact et le frottement. Nous réfléchissons également à inclure les termes dynamiques dans la simulation, ce qui est loin d'être trivial étant donné que la paramétrisation $(s, v) \mapsto \phi(s, v)$ ne correspond pas à un point matériel car η évolue avec le temps. Enfin, nous aimerions étendre nos comparaisons expérimentales à des configurations plus complexes impliquant notamment de la torsion et de la courbure naturelle.

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier Corrado Maurini pour son aide dans la prise en main de FEniCS-Shell, Mickaël Ly pour avoir rendu plusieurs figures en 3D et réalisé la vidéo d'accompagnement, et José Bico et Benoît Roman pour leur conseils dans le montage d'expériences réelles et le choix des matériaux. Les figures 3D ont été rendues grâce au logiciel libre Blender. Ce travail a été financé en partie par le Conseil Européen de la Recherche (CER) (StG-2014-639139).

© JFIGRV 2019.

9.4 cm 21.4 cm 21.8 cm 29 cm 29.4 cm 35.8 cm 42.2 cm

Figure 9 : *Comparaison des équilibres engendrés par le modèle des rubans (en bleu) et celui des tiges (en orange) pour des longueurs de structure croissantes.*

Références

[AP10] Audoly B., Pomeau Y. : Elasticity and Geometry : from hair curls to the nonlinear response of shells. Oxford University Press, 2010.

[AS15] Audoly B., Seffen K. : Buckling of Naturally Curved Elastic Strips : The Ribbon Model Makes a Difference. Journal of Elasticity. Vol. 119, Num. 1 (avril 2015), 293–320.

[BAC*06] Bertails F., Audoly B., Cani M.-P., Querleux B., Leroy F., Lévêque J.-L. : Super-Helices for Predicting the Dynamics of Natural Hair. ACM Transactions on Graphics. Vol. 25 (2006), 1180–1187.

[BD17] Bertails-Descoubes F. : Numerical modeling of elastic slender structures subject to contact and friction : from dynamic simulation to inverse static design. Habilitation à diriger les recherches, Université Grenoble Alpes, mai 2017.

[CBD13] Casati R., Bertails-Descoubes F. : Super Space Clothoids. ACM Transactions on Graphics. Vol. 32, Num. 4 (juillet 2013).

[DA15] Dias M., Audoly B. : "Wunderlich, Meet Kirchhoff" : A General and Unified Description of Elastic Ribbons and Thin Rods. Journal of Elasticity. Vol. 119, Num. 1 (avril 2015), 49–66.

[FF15] Fosdick R., Fried E. (Eds.) :. The Mechanics of Ribbons and Moebius Bands (2015), Springer. Previously published in Journal of Elasticity Volume 119, 2015.

[HBBM18] Hale J. S., Brunetti M., Bordas S. P., Maurini C. : Simple and extensible plate and shell finite element models through automatic code generation tools. Computers & Structures. Vol. 209 (2018), 163–181.

[HF15] Hinz D., Fried E. : Translation of Michael Sadowsky's Paper "The Differential Equations of the Möbius Band". Journal of Elasticity. Vol. 119, Num. 1 (2015), 19–22.

[LB] Lurie A. I., Belyaev A. : Theory of Elasticity. Foundations of Engineering Mechanics.

[MGN18] Moulton D., Grandgeorge P., Neukirch S. : Stable elastic knots with no self-contact. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Vol. 116 (2018), 33–53.

[PHB16] Pan Z., Huang J., Bao H. : Modelling Developable Ribbons Using Ruling Bending Coordinates. Computing Research Repository. Vol. abs/1603.04060 (2016).

[Sad29] Sadowsky M. : Die Differentialgleichungen des MÖBIUSschen bandes. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1929), 49–51. , translated in [FF15].

[SHCB15] Shen Z., Huang J., Chen W., Bao H. : Geometrically exact simulation of inextensible ribbon. Computer Graphics Forum. Vol. 34, Num. 7 (2015), 145–154.

[SvdH07] Starostin E. L., van der Heijden G. H. M. : The shape of a Möbius strip. Nature Materials. Vol. 6 (juillet 2007), 563.

[WB06] Wächter A., Biegler L. : On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. Mathematical Programming. Vol. 106, Num. 1 (2006), 25–57.

[Wun62] Wunderlich W. : Über ein abwickelbares Möbiusband. Monatshefte für Mathematik. Vol. 66, Num. 3 (juin 1962), 276–289.

© JFIGRV 2019.