HAL open science

Spectroscopie de Bragg et mode du continuum de paire brisée dans un gaz de fermions superfluide

Yvan Castin

▶ To cite this version:

Yvan Castin. Spectroscopie de Bragg et mode du continuum de paire brisée dans un gaz de fermions superfluide. Comptes Rendus. Physique, 2020, 21, pp.203. 10.5802/crphys.33 . hal-02377014v2

HAL Id: hal-02377014
https://hal.science/hal-02377014v2

Submitted on 19 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Spectroscopie de Bragg et mode du continuum de paire brisée dans un gaz de fermions superfluide

Yvan Castin

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

Résumé

Les gaz superfluides de fermions de spin 1/2, condensés par paires, sont censés présenter à vecteur d'onde non nul un mode d'excitation collectif encore inobservé dans leur continuum de paire brisée. À l'aide de la théorie BCS à température nulle et dans la limite des grandes longueurs d'onde, nous prédisons que ce mode est quantitativement observable (en fréquence, largeur et poids spectral) dans la réponse d'un gaz d'atomes froids à une excitation de Bragg par laser, si l'on mesure la perturbation induite sur le module du paramètre d'ordre plutôt que sur la densité.

Mots-clés : gaz de fermions ; condensat de paires ; modes collectifs ; facteur de structure dynamique ; excitation par brisure de paire ; atomes froids ; théorie BCS

1. Introduction

On sait désormais préparer en laboratoire un gaz d'atomes froids fermioniques de spin 1/2 piégé dans une boîte de potentiel à fond plat [1], donc spatialement homogène [2, 3, 4]. Ces atomes subissent une interaction attractive dans l'onde s entre états de spins opposés $\uparrow$ et $\downarrow$ de type van der Waals, de portée b négligeable et de longueur de diffusion a ajustable par résonance de Feshbach magnétique [5, 6, 7, 8, 9, 10]. On peut s'arranger pour le gaz soit non polarisé, c'est-à-dire qu'il comporte le même nombre de particules dans $\uparrow$ et $\downarrow$. Aux très basses températures atteintes expérimentalement, on peut alors supposer, en première approximation, que tous les fermions s'assemblent par paires liées $\uparrow\downarrow$, équivalentes pour notre système neutre aux paires de Cooper des supraconducteurs, ces paires formant de plus un condensat et un superfluide, comme le prédit la théorie BCS.

À la limite thermodynamique, à vecteur d'onde d'excitation $\mathbf{q}$ fixé, le spectre d'excitation du système à température nulle comporte un continuum de paire brisée, de la forme $\varepsilon_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}}$, où $k \mapsto \varepsilon_{\mathbf{k}}$ est la relation de dispersion d'un fragment de paire brisée et le vecteur d'onde relatif $\mathbf{k}$ des deux fragments décrit tout l'espace de Fourier tridimensionnel. Nous nous limitons ici au cas habituel, où les paires liées sont de rayon suffisamment grand (par rapport à la distance moyenne entre fermions) pour présenter un caractère de boson composite affirmé, c'est-à-dire que $k \mapsto \varepsilon_{\mathbf{k}}$ atteint son minimum en un nombre d'onde $k_0 > 0$. Si $0 < q < 2k_0$, la densité d'états du continuum de paire brisée présente alors, sur l'axe des énergies réelles, deux points de singularité $\varepsilon_1(q) < \varepsilon_2(q)$, et même un troisième $\varepsilon_3(q) > \varepsilon_2(q)$ pour q/k_0 suffisamment petit. Par prolongement analytique de l'équation aux énergies propres à travers l'intervalle $[\varepsilon_1(q), \varepsilon_2(q)]$, on trouve que le continuum abrite un mode d'excitation collectif par brisure de paire, d'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ s'écartant quadratiquement en q de sa limite 2Δ en $q = 0$, où Δ est le paramètre d'ordre du condensat de paires, pris réel positif à l'équilibre. Ceci est prédit aussi bien dans la limite de couplage faible $\Delta \ll \varepsilon_F$ [11], où ε_F est l'énergie de Fermi du gaz, que dans la limite de couplage fort $\Delta \approx \varepsilon_F$ [12, 13] ; d'après la théorie BCS dépendant du temps utilisée, il suffit que le potentiel chimique du gaz soit positif, $\mu > 0$, afin que $k_0 > 0$. Notons que le mode du continuum est souvent appelé mode d'amplitude, ou même mode de Higgs [14] mais l'analogie avec la physique des hautes énergies n'est qu'approximative [15] et la relation de dispersion donnée dans la référence [14] est incorrecte. Notons encore que d'autres modes du continuum peuvent être obtenus par prolongement analytique à travers les intervalles $[\varepsilon_2(q), +\infty[$, $[\varepsilon_2(q), \varepsilon_3(q)]$ et $[\varepsilon_3(q), +\infty[$ (si $\varepsilon_3(q)$ existe), et que le régime $k_0 = 0$ ($\mu < 0$ d'après la théorie BCS) admet lui aussi des modes du continuum par prolongement à travers $[\varepsilon_1(q), +\infty[$ (il n'y a dans ce cas qu'un seul point de singularité), même dans la limite $\mu/\varepsilon_F \to -\infty$ où les paires liées se réduisent à des bosons élémentaires [13].

Ces modes exotiques ont en général une énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ de partie réelle éloignée de leur intervalle de prolongement analytique à faible q et de partie imaginaire élevée (en valeur absolue) à grand q, ce qui les rend difficilement observables selon les critères de la référence [12] ; aussi les ignorons-nous ici.

La question est de savoir comment mettre en évidence la branche du continuum ordinaire. La question est d'importance car la branche est pour l'instant inobservée : les oscillations du paramètre d'ordre à la pulsation $2\Delta/\hbar$ détectées dans un supraconducteur [16, 17] ou dans un gaz d'atomes froids fermioniques [18] après une excitation spatialement homogène ont une dépendance temporelle amortie en loi de puissance $\sin(2\Delta t/\hbar + \phi)/t^{\alpha}$ plutôt que purement sinusoïdale [19, 20, 21], et ne résultent pas d'un mode discret du superfluide mais simplement d'un effet générique du bord 2Δ du continuum de paire brisée [22, 23] ; c'est que, à $q = 0$, comme le prédit la théorie, l'équation aux énergies propres admet comme racine seulement l'énergie nulle, point de départ de la branche acoustique d'Anderson-Bogolioubov, et surtout pas l'énergie 2Δ, même après prolongement analytique au demi-plan inférieur [12]. En revanche, sous certaines conditions, les fonctions de réponse linéaire (ou susceptibilités) χ du système à une excitation de pulsation ω et de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ *non nul* doivent présenter, en fonction de la pulsation, un pic centré près de $\omega = \mathrm{Re}\, z_{\mathbf{q}}/\hbar$ et de mi-largeur approximative $\mathrm{Im}\, z_{\mathbf{q}}/\hbar$, au-dessus du fond large de réponse du continuum, ce qui est caractéristique d'une contribution modale. C'est bien le cas de la fonction de réponse module-module $\chi_{|\Delta||\Delta|}(\mathbf{q}, \omega)$, où l'on regarde l'effet sur le module du paramètre d'ordre d'une excitation en module du paramètre d'ordre *via* une modulation spatio-temporelle de la longueur de diffusion [12] ; une telle excitation est cependant difficile à mettre en œuvre. En revanche, l'excitation en densité d'un gaz d'atomes froids par une impulsion de Bragg, au moyen de deux faisceaux laser de différence de pulsation ω et de différence de vecteur d'onde $\mathbf{q}$, est une technique bien rodée en laboratoire, qui a donné naissance à une véritable spectroscopie de Bragg [24, 25, 26, 27, 28]. Selon que l'on mesure la variation de la densité totale ρ du gaz (par absorption ou dispersion d'un faisceau laser [29]) ou du module $|\Delta|$ de son paramètre d'ordre (par interférométrie [30] ou bosonisation des paires liées $\uparrow\downarrow$ par rampe de Feshbach rapide [29, 31]) à la suite de l'impulsion de Bragg, on accède à la fonction de réponse $\chi_{\rho\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ ou $\chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{q}, \omega)$. D'un côté, la susceptibilité densité-densité d'un gaz de fermions superfluide a fait l'objet de nombreuses études théoriques [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38] et expérimentales [26, 27, 28], mais sans que la moindre attention ait été prêtée au mode du continuum ; de l'autre, la susceptibilité module-densité a été rarement calculée, et à notre connaissance jamais mesurée avec des atomes froids. L'objectif du présent travail est de combler ces deux lacunes, du moins sur le plan théorique.

2. Fonctions de réponse dans la théorie BCS

Notre gaz de fermions condensé par paires, initialement préparé à l'équilibre à température nulle, est soumis à une excitation en densité, c'est-à-dire à une perturbation de son hamiltonien de la forme

$$\hat{W}(t) = \int \mathrm{d}^3 r\, U(\mathbf{r}, t) \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

où le potentiel réel $U(\mathbf{r}, t)$ dépend du temps et de l'espace, et les opérateurs de champ $\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r})$ et $\hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\mathbf{r})$, écrits en point de vue de Schrödinger, annihilent et créent un fermion dans l'état de spin σ au point $\mathbf{r}$ et obéissent aux relations d'anticommutation fermioniques habituelles. Lorsque $U(\mathbf{r}, t)$ est suffisamment faible ou est appliqué pendant un temps suffisamment court, la réponse du système sur une observable $\hat{O}$ est linéaire, c'est-à-dire que l'écart $\delta\langle\hat{O}\rangle$ de la valeur moyenne de $\hat{O}$ à sa valeur à l'équilibre est une fonctionnelle linéaire de U, décrite par une susceptibilité $\chi_{O\rho}$. Nous nous limitons ici à deux observables, la densité totale ρ et le module $|\Delta|$ du paramètre d'ordre complexe Δ défini dans la référence [39] :

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3 r' \int \mathrm{d}t' \chi_{\rho\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') U(\mathbf{r}', t') \tag{2}$$

$$\delta|\Delta|(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3 r' \int \mathrm{d}t' \chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') U(\mathbf{r}', t') \tag{3}$$

Comme l'état initial du système est stationnaire et spatialement homogène, les susceptibilités ne dépendent que de la différence des temps et des positions ; elles sont aussi causales donc retardées (nulles si $t < t'$). En pratique, l'excitation de Bragg mentionnée dans l'introduction correspond au potentiel de déplacement lumineux $U(\mathbf{r}, t) = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \mathrm{c.c.}$,

où l'amplitude U_0 est complexe. Elle donne ainsi accès, comme le montre le report de $U(\mathbf{r},t)$ dans (2) et (3), à la transformée de Fourier spatio-temporelle des susceptibilités :

$$\chi(\mathbf{q},\omega) \equiv \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega+\mathrm{i}\eta)t-\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}]}\chi(\mathbf{r},t) \qquad (\eta \to 0^+) \tag{4}$$

Le facteur $\mathrm{e}^{-\eta t}$ assurant la convergence de l'intégrale sur le temps est habituel des fonctions de Green retardées [40].

Pour obtenir une expression approchée des susceptibilités à l'aide de la théorie variationnelle BCS dépendant du temps, il est commode d'utiliser un modèle sur réseau cubique de pas b dans le volume de quantification $[0,L]^3$ avec des conditions aux limites périodiques, en faisant tendre b vers zéro et L vers l'infini à la fin des calculs. Les fermions de masse m ont la relation de dispersion de l'espace libre $\mathbf{k} \mapsto E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$ sur la première zone de Brillouin $\mathcal{D} = [-\pi/b, \pi/b[^3$, et on l'étend par périodicité au-delà. Ils interagissent par le potentiel binaire de contact $V(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j) = g_0 \delta_{\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j}/b^3$, avec une constante de couplage nue g_0 ajustée pour reproduire la longueur de diffusion a de l'expérience [41, 42] : $1/g_0 = 1/g - \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}$ où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage effective. L'état fondamental grand canonique du gaz de potentiel chimique μ (de signe quelconque dans cette section) est approximé par l'habituel état $|\psi_0\rangle$, état cohérent de paires de fermions brisant la symétrie $U(1)$: c'est le vide des opérateurs d'annihilation fermioniques $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ de quasi-particules définis plus bas. L'ansatz variationnel BCS s'étend au cas dépendant du temps [43], et le paramètre d'ordre vaut simplement

$$\Delta(\mathbf{r},t) = g_0 \langle\psi(t)|\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r})|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

Pour obtenir $\chi(\mathbf{q},\omega)$, le plus simple est de considérer une excitation percussionnelle en temps et de vecteur d'onde non nul bien défini, $U(\mathbf{r},t) = \hbar\epsilon\cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\delta(t)$, avec $\epsilon \to 0$. La théorie des perturbations dépendant du temps donne le vecteur d'état juste après la perturbation au premier ordre en ϵ :

$$|\psi(0^+)\rangle \simeq \left[1 - \mathrm{i}\epsilon \int \mathrm{d}^3 r\, \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \sum_\sigma \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})\right]|\psi(0^-)\rangle \simeq \left[1 + \frac{\mathrm{i}\epsilon}{2}\sum_{\mathbf{k}}(U_+V_- + U_-V_+)(\hat{\gamma}^\dagger_{+\uparrow}\hat{\gamma}^\dagger_{-\downarrow} + \mathbf{q} \leftrightarrow -\mathbf{q})\right]|\psi_0\rangle \tag{6}$$

Ici, les indices + et − font référence aux nombres d'onde $\mathbf{q}/2 + \mathbf{k}$ et $\mathbf{q}/2 - \mathbf{k}$, les coefficients $U_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 + \xi_{\mathbf{k}}/\varepsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ et $V_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 - \xi_{\mathbf{k}}/\varepsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ sont les amplitudes des modes de quasi-particules sur les particules et les trous, et $\mathbf{k} \mapsto \varepsilon_{\mathbf{k}} = (\xi^2_{\mathbf{k}} + \Delta^2)^{1/2}$ est leur relation de dispersion BCS, avec $\xi_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} - \mu + g_0\rho/2$.[1] L'évolution de la densité et du paramètre d'ordre pour un très faible état cohérent de paires de *quasi-particules* comme (6) (qui reste bien entendu un fort état cohérent de paires d'atomes fermioniques) a été calculée avec la théorie BCS dépendant du temps [44, 45] ; en particularisant les expressions générales de la référence [13], nous trouvons pour $t > 0$:

$$\begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\Delta(\delta\theta)_{\mathbf{q}}(t) \\ 2(\delta|\Delta|)_{\mathbf{q}}(t) \\ (\delta\rho)_{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix} = (-\mathrm{i}\epsilon)\int_{\mathrm{i}\eta+\infty}^{\mathrm{i}\eta-\infty} \frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt/\hbar}}{M(z,\mathbf{q})}\begin{pmatrix} \Sigma_{13}(z,\mathbf{q}) \\ \Sigma_{23}(z,\mathbf{q}) \\ \Sigma_{33}(z,\mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{7}$$

où $\theta(\mathbf{r},t) = \arg\Delta(\mathbf{r},t)$ est la phase du paramètre d'ordre et $X_{\mathbf{q}}$ est le coefficient de Fourier de $X(\mathbf{r})$ sur l'onde plane $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Nous avons dû introduire la matrice 3×3, fonction de l'énergie complexe z dans le demi-plan supérieur et du nombre d'onde,

$$M(z,\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(z,\mathbf{q}) & \Sigma_{12}(z,\mathbf{q}) & -g_0\Sigma_{13}(z,\mathbf{q}) \\ \Sigma_{12}(z,\mathbf{q}) & \Sigma_{22}(z,\mathbf{q}) & -g_0\Sigma_{23}(z,\mathbf{q}) \\ \Sigma_{13}(z,\mathbf{q}) & \Sigma_{23}(z,\mathbf{q}) & 1 - g_0\Sigma_{33}(z,\mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

décrite par les six coefficients indépendants :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11}(z,\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\left(\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)(\varepsilon_+\varepsilon_- + \xi_+\xi_- + \Delta^2)}{2\varepsilon_+\varepsilon_-[z^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2]} + \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right) & \Sigma_{12}(z,\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{z(\xi_+\varepsilon_- + \xi_-\varepsilon_+)}{2\varepsilon_+\varepsilon_-[z^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2]} \\
\Sigma_{22}(z,\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\left(\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)(\varepsilon_+\varepsilon_- + \xi_+\xi_- - \Delta^2)}{2\varepsilon_+\varepsilon_-[z^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2]} + \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right) & \Sigma_{13}(z,\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{z\Delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}{2\varepsilon_+\varepsilon_-[z^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2]} \\
\Sigma_{33}(z,\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)(\varepsilon_+\varepsilon_- - \xi_+\xi_- + \Delta^2)}{2\varepsilon_+\varepsilon_-[z^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2]} & \Sigma_{23}(z,\mathbf{q}) &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{\Delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)(\xi_+ + \xi_-)}{2\varepsilon_+\varepsilon_-[z^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2]}
\end{aligned} \tag{9}$$

1. Il a fallu utiliser les développements modaux des opérateurs de champ, $\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) = L^{-3/2}\sum_{\mathbf{k}}(\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow}U_{\mathbf{k}} - \hat{\gamma}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}V_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) = L^{-3/2}\sum_{\mathbf{k}}(\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\downarrow}U_{\mathbf{k}} + \hat{\gamma}^\dagger_{-\mathbf{k}\uparrow}V_{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

En spécialisant (2) et (3) à l'excitation percussionnelle considérée, il vient aisément pour notre modèle sur réseau :

$$\chi_{\rho\rho}(\mathbf{q},\omega) = (0,0,1)\cdot\frac{2}{M(z,\mathbf{q})}\begin{pmatrix}\Sigma_{13}(z,\mathbf{q})\\ \Sigma_{23}(z,\mathbf{q})\\ \Sigma_{33}(z,\mathbf{q})\end{pmatrix}\Bigg|_{z=\hbar\omega+\mathrm{i}\eta} \tag{10}$$

$$\chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{q},\omega) = (0,1,0)\cdot\frac{1}{M(z,\mathbf{q})}\begin{pmatrix}\Sigma_{13}(z,\mathbf{q})\\ \Sigma_{23}(z,\mathbf{q})\\ \Sigma_{33}(z,\mathbf{q})\end{pmatrix}\Bigg|_{z=\hbar\omega+\mathrm{i}\eta} \tag{11}$$

ce que nous exploiterons pour un espace continu dans la suite.

3. Dans le raccordement CBE-BCS

Dans l'espace à un paramètre mesurant la force des interactions, on appelle raccordement CBE-BCS la zone intermédiaire entre la limite d'attraction forte $k_F a \to 0^+$, où l'état fondamental du système est un condensat de Bose-Einstein (CBE) de dimères $\uparrow\downarrow$ de taille a petite devant la distance moyenne entre particules, et la limite d'attraction faible $k_F a \to 0^-$, où l'état fondamental est un état BCS de paires liées $\uparrow\downarrow$ de taille $\xi \approx \hbar^2 k_F/m\Delta$ bien plus grande que la distance interatomique. Ici $k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}$ est le nombre d'onde de Fermi du gaz. Le raccordement correspond donc au régime $1 \lesssim k_F|a|$, qui est aussi celui dans lequel les gaz d'atomes froids fermioniques superfluides sont préparés en pratique, pour éviter de fortes pertes de particules par collision à trois corps dans la limite CBE et des températures critiques trop faibles dans la limite BCS.

Or, notre modèle sur réseau doit toujours avoir un pas $b \ll 1/k_F$ pour bien reproduire la physique de l'espace continu. On a donc aussi $b \ll |a|$, et l'on est conduit à faire tendre b vers zéro à longueur de diffusion fixée. On remplace alors la première zone de Brillouin $\mathcal{D}$ par l'espace de Fourier tout entier $\mathbb{R}^3$. Dans la définition des Σ_{ij}, cela ne conduit à aucune divergence ultraviolette ; cela en déclenche une dans l'expression de $1/g_0$, ce qui fait tendre g_0 vers zéro dans la matrice (8) :

$$g_0 \to 0 \tag{12}$$

La relation de dispersion des excitations BCS se réduit à $\varepsilon_k = [(E_k-\mu)^2+\Delta^2]^{1/2}$; elle admet un minimum Δ en un nombre d'onde $k_0 > 0$, et le gaz admet une branche d'excitation collective du continuum de départ 2Δ [12, 13], lorsque le potentiel chimique μ est > 0, ce que nous supposerons désormais. De même, les expressions (10) et (11) des susceptibilités se simplifient comme suit :

$$\chi_{\rho\rho} = \frac{2\begin{vmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13}\\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23}\\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22}\end{vmatrix}}, \qquad \chi_{|\Delta|\rho} = \frac{\begin{vmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{13}\\ \Sigma_{12} & \Sigma_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22}\end{vmatrix}} \tag{13}$$

où $|A|$ est le déterminant de la matrice A, et où l'on a sous-entendu la dépendance des χ en $(\mathbf{q},\omega)$ et des Σ_{ij} en $(z,\mathbf{q})$ pour alléger. [2] La valeur de $\chi_{\rho\rho}$ est en accord avec l'équation (118) de la référence [38].

Cherchons la trace éventuelle du mode du continuum dans les fonctions de réponse dans la limite des faibles nombres d'onde, $q \to 0$, où la partie imaginaire de l'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ est la plus faible. C'est là que le mode a *a priori* le plus de chance de bien se détacher du fond de réponse large du continuum sous forme d'un pic étroit en pulsation ω. Dans cette limite, sous la condition $q \ll k_0 \min(\Delta/\mu, (\mu/\Delta)^{1/2})$ [13], la branche du continuum a une dispersion quadratique en q :

$$z_{\mathbf{q}} \underset{q\to 0}{=} 2\Delta + \zeta_0\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\frac{\mu}{\Delta} + O(q^3) \tag{14}$$

2. En effet, le vecteur $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{s}$ est solution du système $M\mathbf{x} = \mathbf{s}$, que l'on résout par la méthode de Cramer, avec $\mathbf{s}$ le vecteur colonne de (10) et (11), pour obtenir ses coordoonnés x_2 et x_3.

Le coefficient ζ_0 est solution dans le demi-plan complexe inférieur d'une équation transcendante donnée dans la référence [12] (généralisant celle de [11] au raccordement CBE-BCS). Il est représenté en fonction de la force des interactions sur la figure 4, et son comportement aux limites est donné dans [12]. On retiendra ici que sa partie réelle est positive pour $\Delta/\mu < 1,21$, et négative sinon. Calculons donc les fonctions de réponse sur l'axe réel des pulsations près du mode du continuum, en imposant la même loi d'échelle en nombre d'onde que dans (14) :

$$\hbar\omega \equiv 2\Delta + \nu\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\frac{\mu}{\Delta} \qquad (\nu \in \mathbb{R}) \tag{15}$$

c'est-à-dire en faisant tendre q vers zéro à fréquence réduite ν quelconque fixée. Ceci revient à observer l'axe des pulsations autour de $2\Delta/\hbar$ sous un grossissement divergent $\propto q^{-2}$. Dans la suite, il sera commode de poser

$$\zeta = \nu + \mathrm{i}\eta \qquad (\eta \to 0^+) \tag{16}$$

par analogie avec $z = \hbar\omega + \mathrm{i}\eta$ dans (10) et (11). Comme les points de singularité $\varepsilon_1(q)$ et $\varepsilon_2(q)$ de la densité d'états du continuum de paire brisée à $\mathbf{q}$ fixé mentionnés dans l'introduction vérifient $\varepsilon_1(q) = 2\Delta$ et $\varepsilon_2(q) = 2\Delta + (\mu/\Delta)\hbar^2 q^2/2m + O(q^4)$ [12], on s'attend dans la limite $q \to 0$ à ce que les fonctions de réponse admettent des singularités en fréquence en $\nu = 0$ et $\nu = 1$, et qu'il faille effectuer le prolongement analytique de l'équation aux énergies propres à $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ en passant entre les points $\nu = 0$ (soit $\hbar\omega = \varepsilon_1(q)$) et $\nu = 1$ (soit $\hbar\omega = \varepsilon_2(q) + O(q^4)$) pour trouver le mode du continuum. Le fait que ces singularités subsistent à ν fini lorsque $q \to 0$ permet d'éliminer tout de suite un faux espoir : même si sa largeur en énergie tend vers zéro comme q^2, le mode du continuum ne peut conduire à un pic très étroit en valeur relative dans les fonctions de réponse en fréquence, car la contribution « large » du continuum présente une structure variant à la même échelle $\propto q^2$. En revanche, le troisième point de singularité $\varepsilon_3(q) = (\mu^2 + \Delta^2)^{1/2} + O(q^2)$ est non pertinent car rejeté à $\nu = +\infty$ par le changement d'échelle (15). Pour le calcul de χ proprement dit, reprenons la méthode de développement des quantités Σ_{ij} en puissances de q à ν fixée de la référence [12] : il ne suffit pas de développer naïvement les intégrales sur $\mathbf{k}$ sous le signe somme en puissances de q, mais il faut traiter à part la couche de vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ d'épaisseur $\propto q$ autour de la sphère $k = k_0$, qui donne en général la contribution dominante car les dénominateurs d'énergie y prennent des valeurs extrêmement faibles, de l'ordre de q^2.[3] Les formes (13) conduiraient à des calculs assez longs car, à l'ordre dominant en q, la première et la dernière colonne des déterminants aux numérateurs sont équivalentes ($\Sigma_{i3} \sim \Sigma_{1i}$, $1 \le i \le 3$), ce qui donne un résultat nul et oblige à aller chercher les ordres sous-dominants des Σ_{ij}. On peut heureusement effectuer d'astucieuses combinaisons linéaires sans changer la valeur de ces déterminants, en soustrayant la première colonne de la dernière puis, seulement dans $\chi_{\rho\rho}$, en soustrayant la première ligne de la troisième, si bien que :

$$\chi_{\rho\rho} = \frac{2\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \delta\Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \delta\Sigma_{23} \\ \delta\Sigma_{13} & \delta\Sigma_{23} & \delta\Sigma_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{vmatrix}}, \qquad \chi_{|\Delta|\rho} = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \delta\Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \delta\Sigma_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{vmatrix}} \tag{17}$$

avec

$$\delta\Sigma_{13} \equiv \Sigma_{13} - \Sigma_{11}, \quad \delta\Sigma_{23} \equiv \Sigma_{23} - \Sigma_{12}, \quad \delta\Sigma_{33} \equiv \Sigma_{33} + \Sigma_{11} - 2\Sigma_{13} \tag{18}$$

On développe alors ces $\delta\Sigma$ après recalcul de leur intégrande par combinaison linéaire des intégrandes des Σ_{ij}. Il suffit

3. Après passage en coordonnées sphériques d'axe $\mathbf{q}$, on sépare le domaine d'intégration sur le module k en les deux composantes $I = [k_0 - Aq, k_0 + Aq]$ et $J = \mathbb{R}^+ \setminus I$, où $A \gg 1$ est fixé. Sur J, on développe directement l'intégrande en puissances de q à k fixé. Sur I, on effectue le changement de variable $k = k_0 + qK$ puis on développe l'intégrande en puissances de q à K fixé. On regroupe les contributions de I et J ordre par ordre en q, puis on fait tendre A vers $+\infty$ dans les coefficients des monômes q^n. Dans les résultats (19), la contribution de J est négligeable sauf dans $\delta\Sigma_{23}^{[2]}$ et $\delta\Sigma_{33}^{[2,3]}$.

ici de connaître l'ordre dominant des $\delta\Sigma$ et celui des Σ_{ij} restants, sauf pour $\delta\Sigma_{33}$ où l'ordre sous-dominant est requis :

$$\check{\Sigma}_{11}^{[-1]} = \frac{\check{\Delta}}{8\mathrm{i}\pi}\,\mathrm{asin}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\,,\quad \check{\Sigma}_{22}^{[1]} = \frac{\zeta\,\mathrm{asin}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta}} + \sqrt{\zeta-1}}{16\mathrm{i}\pi\check{\Delta}}\,,\quad \check{\Sigma}_{12}^{[0]} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau}-1}}{-(2\pi)^2}\left[\mathrm{Re}\,\Pi(\mathrm{e}^{\tau},\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau}) - \Pi(-\mathrm{e}^{\tau},\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau}) + \frac{K(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau})}{\mathrm{sh}\,\tau}\right],$$
$$\delta\check{\Sigma}_{13}^{[1]} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{\zeta-1}}{16\pi\check{\Delta}}\,,\quad \delta\check{\Sigma}_{23}^{[2]} = \frac{(2/3-\zeta)}{2\check{\Delta}^2}\check{\Sigma}_{12}^{[0]} - \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\tau}}}{24\pi^2}[E(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau}) - \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{ch}\,\tau K(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau})]\,,$$
$$\delta\check{\Sigma}_{33}^{[2]} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\tau}}}{24\pi^2\check{\Delta}}[E(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau}) + \coth\tau\, K(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau})]\,,\quad \delta\check{\Sigma}_{33}^{[3]} = \frac{(\zeta-2)\sqrt{\zeta-1} + \zeta^2\,\mathrm{asin}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta}}}{64\mathrm{i}\pi\check{\Delta}^3} \tag{19}$$

où $\check{\Sigma}_{ij}^{[n]}$ ($\delta\check{\Sigma}_{ij}^{[n]}$) est le coefficient de $\check{q}^n$ dans le développement limité de $\check{\Sigma}_{ij}$ ($\delta\check{\Sigma}_{ij}$). Les trois premières identités figurent déjà dans [12, 13]. L'accent tchèque signale l'adimensionnement des énergies par μ ($\check{\Delta} = \Delta/\mu$), des nombres d'onde par k_0 ($\check{q} = q/k_0$) et des Σ_{ij} par k_0^3/μ, avec ici $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. On a utilisé les expressions de plusieurs intégrales sur k en termes d'intégrales elliptiques complètes K, E et Π de première, seconde et troisième espèce [46], en particulier celles données dans la référence [47], après avoir posé $\mathrm{sh}\,\tau = 1/\check{\Delta}$ pour abréger.[4] Nous obtenons finalement le comportement des fonctions de réponse à faible q :

$$\check{\chi}_{\rho\rho} \overset{\nu\,\text{fixé}}{\underset{q\to 0}{=}} 2\check{q}^2\delta\check{\Sigma}_{33}^{[2]} + 2\check{q}^3\left[\delta\check{\Sigma}_{33}^{[3]} + \frac{2\check{\Sigma}_{12}^{[0]}\delta\check{\Sigma}_{13}^{[1]}\delta\check{\Sigma}_{23}^{[2]} - \check{\Sigma}_{22}^{[1]}\delta\check{\Sigma}_{13}^{[1]2} - \check{\Sigma}_{11}^{[-1]}\delta\check{\Sigma}_{23}^{[2]2}}{\check{\Sigma}_{11}^{[-1]}\check{\Sigma}_{22}^{[1]} - \check{\Sigma}_{12}^{[0]2}}\right] + O(\check{q}^4) \tag{20}$$

$$\chi_{|\Delta|\rho} \overset{\nu\,\text{fixé}}{\underset{q\to 0}{=}} \check{q}\,\frac{\check{\Sigma}_{11}^{[-1]}\delta\check{\Sigma}_{23}^{[2]} - \check{\Sigma}_{12}^{[0]}\delta\check{\Sigma}_{13}^{[1]}}{\check{\Sigma}_{11}^{[-1]}\check{\Sigma}_{22}^{[1]} - \check{\Sigma}_{12}^{[0]2}} + O(\check{q}^2) \tag{21}$$

où $\chi_{\rho\rho}$ est exprimé en unités de k_0^3/μ et $\chi_{|\Delta|\rho}$ est naturellement sans dimension. Une dépendance plus explicite en la fréquence réduite ν est obtenue en passant à la limite $\eta \to 0^+$ comme dans l'équation (16) :

$$\mathrm{asin}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \underset{\eta\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} -\mathrm{i}\,\mathrm{argsh}\,\frac{1}{\sqrt{-\nu}} & \text{si } \nu < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\,\mathrm{argch}\,\frac{1}{\sqrt{\nu}} & \text{si } 0 < \nu < 1 \\ \mathrm{asin}\,\frac{1}{\sqrt{\nu}} & \text{si } 1 < \nu \end{cases} \quad \text{et} \quad \sqrt{\zeta-1} \underset{\eta\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \mathrm{i}\sqrt{1-\nu} & \text{si } \nu < 1 \\ \sqrt{\nu-1} & \text{si } \nu > 1 \end{cases} \tag{22}$$

Elle permet de vérifier que le coefficient $\check{\chi}_{\rho\rho}^{[3]}$ de la contribution d'ordre $\check{q}^3$ dans (20) et celui $\check{\chi}_{|\Delta|\rho}^{[1]}$ de la contribution d'ordre $\check{q}$ dans (21) ont une partie imaginaire nulle pour $\nu < 0$ (ceci était prévisible et se produit dans les fonctions de réponse à tous les ordres en q, car la densité d'états du continuum de paire brisée $\mathbf{k} \mapsto \varepsilon_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}}$ est nulle aux énergies $< 2\Delta$) et une partie réelle nulle pour $\nu > 1$ (ceci pour une raison physique que nous ignorons, et qui ne vaut pas à tous les ordres en q). Ces coefficients ont une limite finie et réelle en $\nu = 0$, atteinte lentement (logarithmiquement, avec un écart variant comme $1/\ln|\nu|$),

$$\lim_{\nu\to 0}\check{\chi}_{\rho\rho}^{[3]}(\nu) = -\frac{1}{16\pi\check{\Delta}^3} - 32\pi\check{\Delta}[\delta\check{\Sigma}_{23}^{[2]}(\nu=0)]^2 \tag{23}$$

$$\lim_{\nu\to 0}\check{\chi}_{|\Delta|\rho}^{[1]}(\nu) = 16\pi\check{\Delta}\,\delta\check{\Sigma}_{23}^{[2]}(\nu=0) \tag{24}$$

ce qui donne naissance à une structure pointue, à tangente verticale, dans la dépendance en ν, comme dans la référence [12] ; ils présentent en $\nu = 1$ une singularité en $|\nu-1|^{1/2}$, sur la partie réelle pour $\nu \to 1^-$, sur la partie imaginaire pour $\nu \to 1^+$, ce qui donne lieu cette fois à un banal point anguleux à tangente verticale (voir la figure 2 à venir).

Analysons physiquement les résultats (20,21). D'abord, le terme dominant (d'ordre q^2) dans la fonction de réponse densité-densité n'a guère d'intérêt pour notre étude : il est insensible au mode du continuum puisque les fonctions $\Sigma_{ij}(z,\mathbf{q})$, même après prolongement au demi-plan complexe inférieur, ne comportent aucun pôle. Heureusement, il

4. On a aussi utilisé, pour $x \geq 0$, $E(\mathrm{i}x) = \sqrt{1+x^2}E(x/\sqrt{1+x^2})$ et $K(\mathrm{i}x) = K(x/\sqrt{1+x^2})/\sqrt{1+x^2}$ [46]. Ainsi, par exemple, $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\check{k}\frac{\check{k}^2\check{\xi}_k}{\check{\varepsilon}_k^3} = K(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\tau})\sqrt{\mathrm{e}^{2\tau}-1}/2$.

constitue un fond indépendant de la fréquence réduite ν, comme on peut le vérifier sur l'équation (19) ; il est donc possible de s'en débarrasser expérimentalement en considérant la différence

$$\check{\chi}_{\rho\rho}(\check{q},\nu) - \check{\chi}_{\rho\rho}(\check{q},\nu_0) \tag{25}$$

où ν est la variable courante et ν_0, la fréquence réduite de référence, est fixée. On remarque aussi que ce fond en q^2 est réel, si bien qu'il ne contribue pas à la partie imaginaire de $\chi_{\rho\rho}$, qui est souvent ce que l'on mesure vraiment dans l'expérience [28]. En revanche, le terme sous-dominant (d'ordre q^3) dans $\chi_{\rho\rho}$ est sensible au mode du continuum : comme il contient des fonctions Σ_{ij} au dénominateur, son prolongement analytique au demi-plan complexe inférieur à travers l'intervalle $\nu \in [0,1]$ admet un pôle en $\zeta = \zeta_0$, où le nombre complexe ζ_0 est celui de l'équation (14), avec un résidu non nul, voir la figure 1a. La même conclusion s'impose pour le terme dominant (d'ordre q) dans la fonction de réponse module-densité, voir la figure 1b. [5] [6] Sans surprise, sur ces figures tracées en fonction de q, le résidu Z du mode du continuum est complexe, puisqu'aussi bien les fonctions de réponse que l'énergie $z_{\mathbf{q}}$ le sont. En pratique, la phase de Z importe peu (le pôle est unique et sa contribution ne peut interférer avec celle d'un autre pôle) et c'est son module qui caractérise le poids spectral du mode ; nous représentons donc $|Z|$ (ou plus précisément le coefficient de son ordre dominant en q) en fonction de la force des interactions sur la figure 4.

Cependant, les mesures physiques ont lieu sur l'axe réel des pulsations. Aussi avons-nous représenté $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ et $\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ en fonction de la fréquence réduite ν sur la figure 2, pour deux valeurs de la force des interactions. Les structures étroites espérées devraient se trouver sur l'intervalle de prolongement analytique $\nu \in [0,1]$, presque au-dessus du pôle ζ_0 donc près de la ligne verticale en trait plein vert. Pour $\check{\Delta} = 1/2$ (première ligne de la figure), on est dans le cas favorable $\mathrm{Re}\,\zeta_0 \in [0,1]$; or, $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ présente, sur l'intervalle $[0,1]$, une structure en forme d'épaule avec un maximum et un minimum, aussi bien sur sa partie réelle que sur sa partie imaginaire ; encore mieux, $\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ présente, sur le même intervalle, une bosse assez prononcée sur sa partie réelle, il est vrai assez loin de la ligne verte, et un creux assez net sur sa partie imaginaire, proche de la ligne. Pour $\check{\Delta} = 2$ (seconde ligne de la figure), on est dans le cas défavorable $\mathrm{Re}\,\zeta_0 < 0$; les fonctions de réponse devraient donc garder la trace du mode du continuum sur l'intervalle $\nu \in [0,1]$ seulement au travers de l'aile de la résonance complexe associée, et non plus sous forme d'extréma ; malheureusement, les structures observées restent essentiellement les mêmes que pour $\check{\Delta} = 1/2$, ce qui jette un doute affreux sur leur lien avec le mode du continuum. [7]

Pour voir ce qu'il en est vraiment, nous effectuons un prolongement analytique des coefficients $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}(\zeta)$ et $\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}(\zeta)$ au demi-plan complexe inférieur $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ comme dans la note 5, puis nous repérons la position des extréma de la partie réelle ou de la partie imaginaire de ces coefficients, c'est-à-dire leur abscisse ν_R, sur la droite horizontale $\zeta = \nu_R + \mathrm{i}\nu_I$ d'ordonnée fixée ν_I, et nous traçons enfin le lieu de ces extréma lorsque ν_I varie dans l'intervalle $]\,\mathrm{Im}\,\zeta_0, 0]$, voir la figure 3. Ce lieu est la réunion de lignes continues (ses composantes connexes) ; certaines, mais pas toutes [8], convergent vers le pôle ζ_0. [9] Tout extrémum de $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ ou $\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ sur l'intervalle réel $\nu \in]0,1[$ relié continûment au pôle par une de ces lignes est indubitablement une marque physique du mode du continuum, observable dans la fonction de réponse

5. Le prolongement analytique de $\zeta \mapsto \check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ et $\zeta \mapsto \check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur est effectué en passant à travers l'intervalle $[0,1]$ (reliant leurs singularités en $\nu = 0$ et $\nu = 1$ sur l'axe réel) par les substitutions $\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \to \pi - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}$ et $\sqrt{\zeta - 1} \to -\sqrt{\zeta - 1}$ comme dans la référence [12]. Le prolongement analytique du dénominateur au second membre des équations (20) et (21) donne précisément la fonction de [12] dont ζ_0 est racine. Il n'y a pas d'autre intervalle de prolongement à considérer car le dénominateur de $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ et $\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ (étendu à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par les relations $\Sigma_{ij}(z) = [\Sigma_{ij}(z^*)]^*$) n'a de ligne de coupure ni pour $\nu \in]-\infty, 0]$ (par annulation de la densité d'états du continuum de paire brisée) ni pour $\nu \in [1, +\infty[$ (par compensation des discontinuités de $\check{\Sigma}^{[-1]}_{11}$ et $\check{\Sigma}^{[1]}_{22}$ sur cette demi-droite, qui sont un simple changement de signe).

6. Le prolongement analytique des fonctions $\Sigma_{ij}(z)$ de $\mathrm{Im}\,z > 0$ à $\mathrm{Im}\,z < 0$ est donné par $\Sigma_{ij}{\downarrow}(z) = \Sigma_{ij}(z) - \frac{2\mathrm{i}\pi}{(2\pi)^3}\rho_{ij}(z)$ en termes des densités spectrales définies sur $\mathbb{R}^+$ par $\mathrm{Im}\,\Sigma_{ij}(\varepsilon + \mathrm{i}0^+) = -\frac{\pi}{(2\pi)^3}\rho_{ij}(\varepsilon)$ [48], qu'il suffit ici de connaître sur l'intervalle de prolongement entre les deux premiers points de branchement $\varepsilon_1(q) = 2\Delta$ et $\epsilon_2(q)$ [12]. Alors $\rho_{13}(\varepsilon) = (\frac{2m}{\hbar^2})^2 \frac{\pi\varepsilon}{2q} K(\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,\Omega)$, $\rho_{23}(\varepsilon) = 0$, $\rho_{33}(\varepsilon) = (\frac{2m}{\hbar^2})^2 \frac{\pi\Delta}{q} E(\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,\Omega)$, avec $\Omega = \operatorname{argch}\frac{\varepsilon}{2\Delta}$. Les autres $\rho_{ij}(\varepsilon)$ figurent dans les références [12, 13].

7. Quand $\mathrm{Re}\,\zeta_0 < 0$, il ne faut pas en général espérer voir de bosse ou de creux associé au mode du continuum dans les fonctions de réponse sur l'intervalle $\nu \in]-\infty, 0[$. En effet, cet intervalle physique est séparé du pôle par le bout de la ligne de coupure $[0,1]$ qu'il a fallu rabattre sur $]-\infty, 0]$ pour effectuer le prolongement analytique, l'autre bout étant rabattu sur $[1, +\infty[$.

8. Une ligne de maxima et une ligne de minima de $\mathrm{Re}\,\chi$ ($\mathrm{Im}\,\chi$) peuvent se rejoindre en un point d'arrêt où $\mathrm{Re}\,\partial^2_{\nu_R}\chi = 0$ ($\mathrm{Im}\,\partial^2_{\nu_R}\chi = 0$).

9. En ζ_0, on s'attend en général à voir converger une ligne de minima et une ligne de maxima de la partie réelle et de la partie imaginaire, soit quatre lignes au total. En effet une fonction méromorphe $f(\zeta)$ au voisinage de son pôle ζ_0 est équivalente à $Z/(\zeta - \zeta_0)$, où Z est le résidu. Des décompositions en partie réelle et imaginaire $Z = a + \mathrm{i}b$, $\zeta - \zeta_0 = x + \mathrm{i}y$, et du changement d'échelle $x = yX$, où $y > 0$ est la distance de la droite horizontale $\zeta = \nu_R + \mathrm{i}\nu_I$ au pôle, nous tirons $f(\zeta) \sim y^{-1}(\frac{aX+b}{X^2+1} + \mathrm{i}\frac{bX-a}{X^2+1})$. Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $X \mapsto (X+u)/(X^2+1)$ admet sur $\mathbb{R}$ un

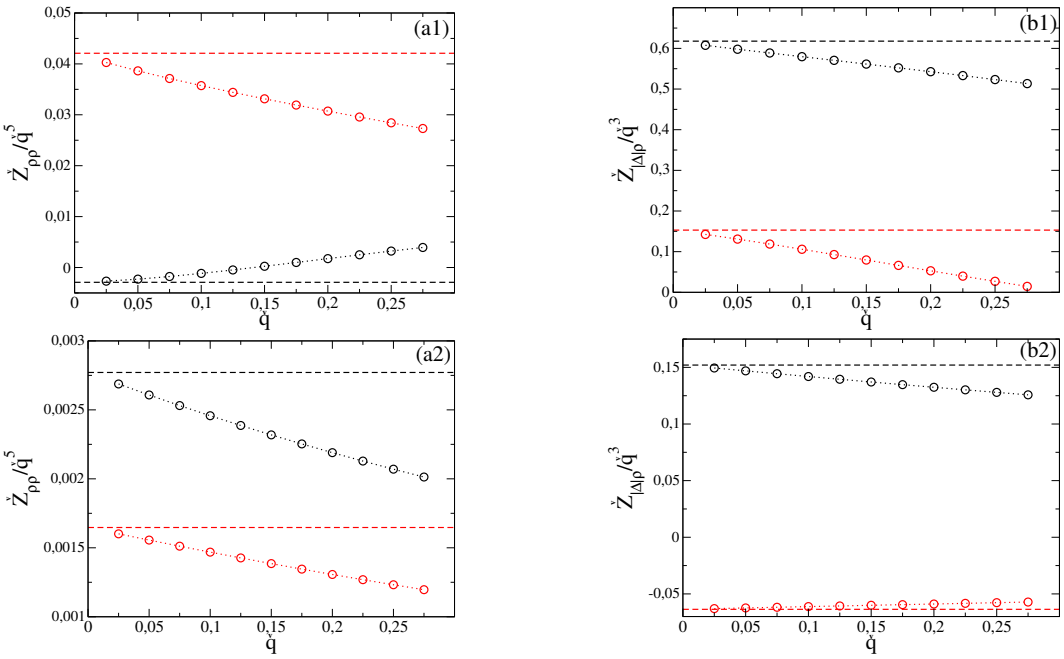

FIGURE 1: Poids spectral complexe du mode du continuum dans les fonctions de réponse densité-densité (colonne a) et module-densité (colonne b), c'est-à-dire résidu $Z_{\rho\rho}$ ou $Z_{|\Delta|\rho}$ du prolongement analytique de $\chi_{\rho\rho}(\mathbf{q}, z/\hbar)$ ou de $\chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{q}, z/\hbar)$ de $\operatorname{Im} z > 0$ à $\operatorname{Im} z < 0$ (à travers l'intervalle entre leurs deux premières singularités $\varepsilon_1(q)$ et $\varepsilon_2(q)$ sur $\mathbb{R}^+$) en le pôle $z_{\mathbf{q}}$ (énergie complexe du mode), en fonction du nombre d'onde q, du côté $\mu > 0$ du raccordement CBE-BCS (12), pour $\check{\Delta} = 1/2$ (ligne 1) et $\check{\Delta} = 2$ (ligne 2). Les résidus ont été divisés par la puissance de q assurant l'existence d'une limite finie et non nulle en $q = 0$. En noir : partie réelle ; en rouge : partie imaginaire. Cercles reliés en pointillé : résultats numériques tirés des formes générales (13) ; le prolongement analytique est effectué comme dans [12, 13] par la méthode des densités spectrales de la référence [48], voir notre note 6. Tiretés horizontaux : limite en $q = 0$, tirée des résultats analytiques (20,21) prolongés comme dans la note 5. Accent tchèque : adimensionnement de Δ par μ ($\check{\Delta} = \Delta/\mu$), de q par $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ ($\check{q} = q/k_0$), de $Z_{\rho\rho}$ par k_0^3 et de $Z_{|\Delta|\rho}$ par μ.

associée ; les autres extréma sur l'axe réel n'en sont pas. D'où le verdict sur la figure 2 : pour $\check{\Delta} = 1/2$, seuls le maximum de $\operatorname{Re}\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$, le maximum de $\operatorname{Im}\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$, le maximum de $\operatorname{Re}\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ et le minimum de $\operatorname{Im}\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ sur $\nu \in]0, 1[$ sont des marques physiques du mode du continuum ; pour $\check{\Delta} = 2$, c'est le cas seulement du maximum de $\operatorname{Re}\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$, du maximum de $\operatorname{Im}\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ et du maximum de $\operatorname{Re}\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}$ sur $\nu \in]0, 1[$.

En définitive, il reste à voir jusqu'à quel point on peut extraire la position et le poids spectral du mode du continuum de mesures des fonctions de réponse sur l'intervalle de fréquence réduite $\nu \in [0, 1]$. À cette fin, nous proposons un ajustement très simple des susceptibilités $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ par la somme de la contribution du pôle du mode collectif et d'un fond affine lentement variable décrivant la réponse large du continuum :

$$\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}(\nu)|_{\text{ajust}} = \frac{A}{\nu - B} + C + D\nu \quad (A, B, C, D \in \mathbb{C}) \tag{26}$$

en prenant l'exemple de la réponse module-densité limitée à son ordre dominant en q. La fonction d'ajustement est équilibrée dans sa recherche de précision, puisqu'elle décrit le fond avec le même nombre de paramètres ajustables complexes (C et D) que la résonance (A et B), soit un paramètre de plus que dans la référence [12]. L'ajustement est effectué sur un sous-intervalle $[\nu_1, \nu_2]$ de $[0, 1]$ afin d'éviter les singularités aux bornes. Le résultat est très encourageant pour la réponse module-densité, voir la figure 4a : on obtient une bonne approximation de l'énergie complexe et du poids spectral du mode, même pour $\check{\Delta} > 1,21$ où $\operatorname{Re}\zeta_0 < 0$ et où le pôle n'est plus en dessous de l'intervalle de

minimum en $-u - \sqrt{1+u^2}$ et un maximum en $-u + \sqrt{1+u^2}$. Donc, si $a \neq 0$ ($b \neq 0$), on voit converger vers ζ_0 deux lignes d'extréma de la partie réelle (imaginaire). Pour $\check{\Delta} = 1/2$, la ligne des minima de $\operatorname{Re}\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}$ arrive presque horizontalement (par la droite, avec une pente $\simeq -a/2b$, voir la figure 3a1) car le résidu est presque imaginaire pur, $\check{Z}_{\rho\rho} \sim (-0,003 + 0,04\mathrm{i})\check{q}^5$ comme on le voit sur la figure 1a1.

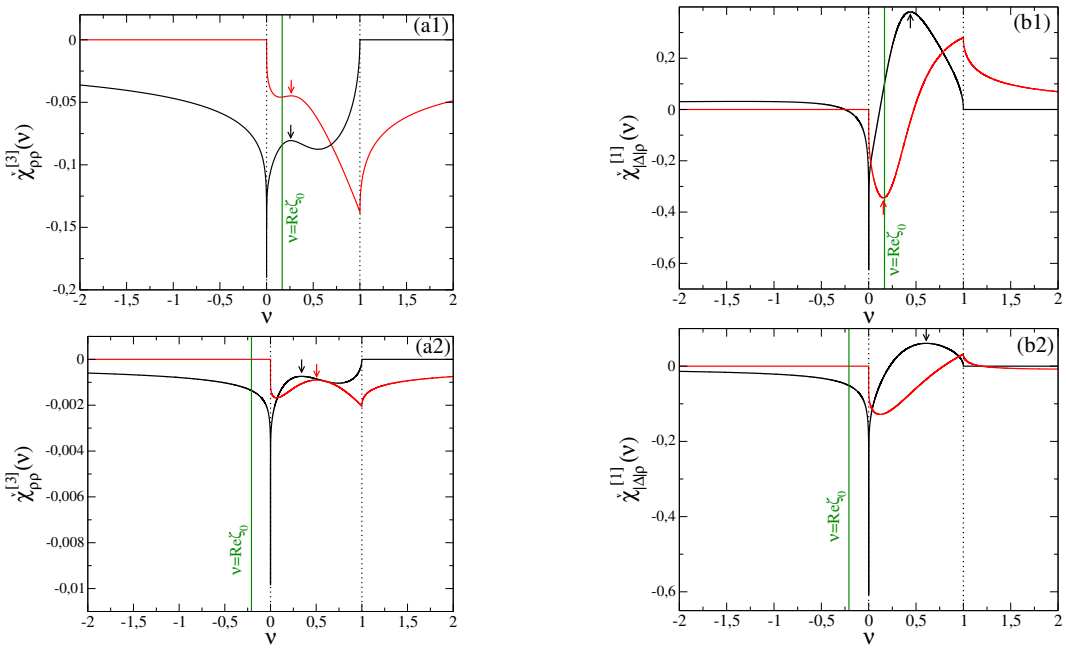

FIGURE 2: Premier coefficient sensible au mode du continuum dans le développement à faible nombre d'onde q (20, 21) des fonctions de réponse densité-densité (colonne a, ordre q^3) et module-densité (colonne b, ordre q), du côté $\mu > 0$ du raccordement CBE-CBS (12), pour $\check{\Delta} = 1/2$ (ligne 1) et $\check{\Delta} = 2$ (ligne 2), en fonction de la fréquence réduite ν de l'équation (15) (utiliser la variable ν plutôt que ω revient à regarder astucieusement l'axe des pulsations autour de $2\Delta/\hbar$ avec un grossissement divergent $\propto q^{-2}$ compensant exactement le rétrécissement du mode du continuum lorsque $q \to 0$). Trait plein noir : partie réelle ; trait plein rouge : partie imaginaire. Pointillés verticaux : positions $\nu = 0$ et $\nu = 1$ des singularités. Ligne verticale verte : partie réelle réduite $\mathrm{Re}\,\zeta_0$ de l'énergie complexe du mode du continuum. Les extréma indiqués par une flèche sont une marque physique du mode du continuum sur l'axe réel des fréquences (voir le texte et la figure 3). Accent tchèque : adimensionnement de Δ par μ, de q par $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, de $\chi_{\rho\rho}(\mathbf{q},\omega)$ par k_0^3/μ ; $\chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{q},\omega)$ est déjà sans dimension.

prolongement analytique (et de mesure) $\nu \in [0, 1]$. En revanche, le résultat est mauvais pour la réponse densité-densité, voir la figure 4b, sauf peut-être pour la largeur de la résonance. Pour comprendre cette différence de succès suivant l'observable $|\Delta|$ ou ρ, nous avons calculé la hauteur relative h_{rel} de la contribution de la résonance sur le fond. [10] Pour $\check{\Delta} < 2$, nous trouvons toujours que $h_{\mathrm{rel}} > 1$ pour le module du paramètre d'ordre, mais que $h_{\mathrm{rel}} < 1$ pour la densité. Par exemple, pour $\check{\Delta} = 1/2$, $h_{\mathrm{rel}}^{|\Delta|\rho} \simeq 1{,}8$ alors que $h_{\mathrm{rel}}^{\rho\rho} \simeq 0{,}37$. Le problème est donc que la résonance complexe n'émerge pas assez du fond dans la réponse densité-densité. Ce problème devient rédhibitoire dans la limite d'interaction faible, où $h_{\mathrm{rel}}^{\rho\rho} \to 0$, alors qu'il ne se pose pas pour le module, puisque $h_{\mathrm{rel}}^{|\Delta|\rho} \to 2{,}338\ldots$ pour $\nu_1 < \mathrm{Re}\,\zeta_0$, voir la section 4.

4. Dans la limite BCS d'interaction faible

Le régime d'attraction faible $k_F a \to 0^-$, bien que peu pertinent pour les expériences d'atomes froids, présente un certain intérêt théorique : c'est en effet là que la théorie BCS utilisée est la plus quantitative et la plus fiable. Une façon astucieuse de prendre la limite continue de notre modèle sur réseau correspond à la chaîne d'inégalités $0 < -a \ll b \ll 1/k_F$: on peut continuer à remplacer le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ par $\mathbb{R}^3$ dans la définition des Σ_{ij}, mais comme $|a|/b \ll 1$, l'interaction entre fermions est désormais dans le régime de Born de la théorie de la diffusion, si bien que l'on peut approximer g_0 par g dans la matrice (8),

$$g_0 \to g \tag{27}$$

et que le déplacement de champ moyen de Hartree subsiste dans le spectre BCS, avec $\xi_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} - \mu + \rho g/2$. À l'ordre un en $k_F a$, l'équation d'état du gaz à température nulle contient justement ce terme de Hartree, $\mu = \varepsilon_F + \rho g/2$; le

10. La fonction $\chi(\nu)$ étant donnée, on définit le fond par $F(\nu) = \chi(\nu) - Z_0/(\nu - \zeta_0)$, ζ_0 étant le pôle du prolongement analytique de χ au demi-plan complexe inférieur et Z_0 le résidu associé. Alors $h_{\mathrm{rel}} = |Z_0/(\nu_0 - \zeta_0)|/|F(\nu_0)|$ avec $\nu_0 = \max(\nu_1, \mathrm{Re}\,\zeta_0)$.

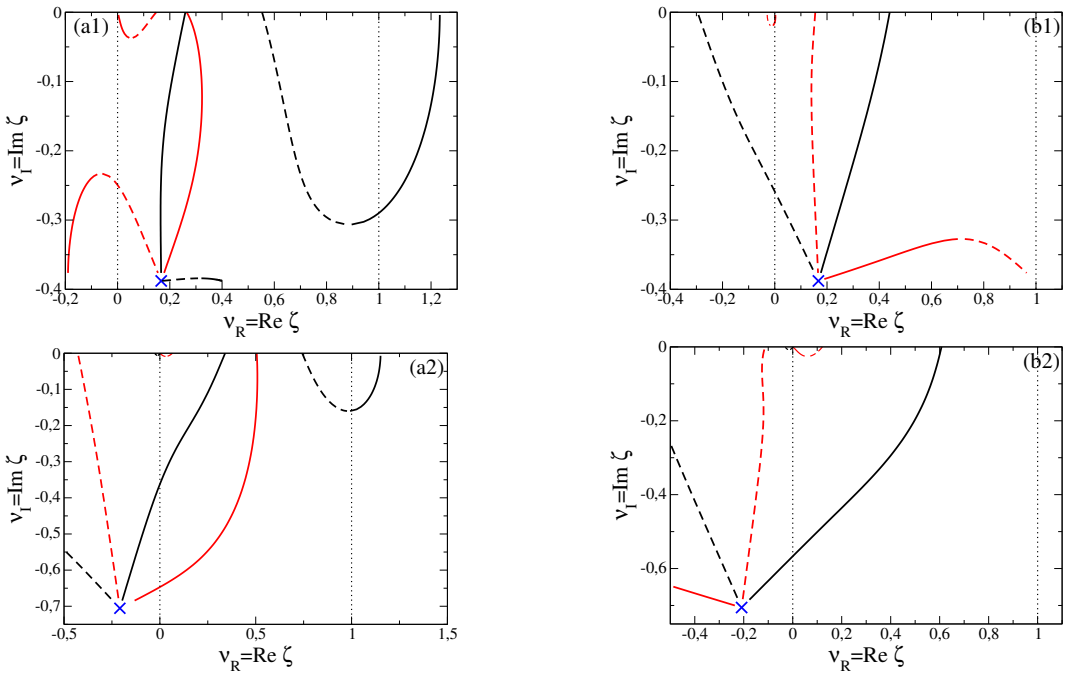

FIGURE 3: Lieu des extréma des fonctions de la partie réelle $\nu_R \mapsto \mathrm{Re}\,\chi^{[n]}\!\downarrow(\zeta = \nu_R + \mathrm{i}\nu_I)$ (en noir) et $\nu_R \mapsto \mathrm{Im}\,\chi^{[n]}\!\downarrow(\zeta = \nu_R + \mathrm{i}\nu_I)$ (en rouge) lorsque la partie imaginaire ν_I de ζ varie. Ici $\chi^{[n]}\!\downarrow(\zeta)$ est le coefficient de q^n dans le développement à faible q de la susceptibilité $\chi(\mathbf{q},\omega)$ à ν fixé dans (15), voir les équations (20,21), prolongé analytiquement de $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ à $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ à travers $\nu \in [0,1]$ comme l'indique la flèche $\downarrow$ dans la notation $\chi\!\downarrow$. Colonne (a) : $\chi = \chi_{\rho\rho}$ et $n = 3$; colonne (b) : $\chi = \chi_{|\Delta|\rho}$ et $n = 1$. Le gaz de fermions est dans le raccordement CBE-BCS du côté $\mu > 0$: $\Delta/\mu = 1/2$ (ligne 1) et $\Delta/\mu = 2$ (ligne 2). Trait plein : l'extrémum est un maximum. Tireté : l'extrémum est un minimum. Croix bleue : énergie complexe réduite ζ_0 du mode du continuum. Pointillés verticaux : positions $\nu = 0$ et $\nu = 1$ des singularités de $\chi^{[n]}(\nu)$ sur l'axe réel.

spectre BCS correspondant vaut simplement $\varepsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F)^2 + \Delta^2]^{1/2}$, en accord avec la référence [11], et atteint son minimum au nombre d'onde $k_0 = k_F$.

Les expressions (13) des fonctions de réponse obtenues pour $g_0 = 0$ ne suffisent plus. Recalculons-les en partant des expressions générales (10,11) et en y effectuant la substitution (27). En procédant comme dans la note 2, nous obtenons [11]

$$\chi_{\rho\rho} = \frac{2\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}}{\det M}, \qquad \chi_{|\Delta|\rho} = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{23} \end{vmatrix}}{\det M} \tag{28}$$

en sous-entendant que les χ sont évalués en $(\mathbf{q},\omega)$ et les Σ_{ij} en $(z = \hbar\omega + \mathrm{i}0^+, \mathbf{q})$. Or, le déterminant $\det M$ est une fonction linéaire du troisième vecteur colonne de M, si bien que

$$\det M = \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{vmatrix} \tag{29}$$

En divisant (28) haut et bas par le premier terme au second membre de (29), nous faisons apparaître les susceptibilités (13) obtenues pour $g_0 = 0$, que nous notons $\chi^{g_0=0}$, et qui permettent donc d'écrire très simplement les susceptibilités cherchées à $g_0 = g$ non nul :

$$\chi_{\rho\rho} = \frac{\chi^{g_0=0}_{\rho\rho}}{1 - \frac{g}{2}\chi^{g_0=0}_{\rho\rho}}, \qquad \chi_{|\Delta|\rho} = \frac{\chi^{g_0=0}_{|\Delta|\rho}}{1 - \frac{g}{2}\chi^{g_0=0}_{\rho\rho}} \tag{30}$$

11. Dans le déterminant de Cramer 3×3 au numérateur de $\chi_{|\Delta|\rho}$, on ajoute à la troisième colonne la deuxième multipliée par g pour se ramener à un déterminant 2×2.

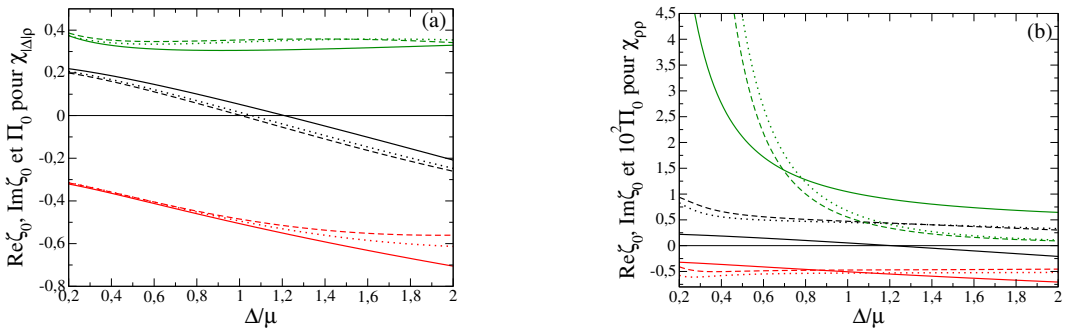

FIGURE 4: Extraction de l'énergie complexe du mode du continuum et de son poids spectral par un ajustement à quatre paramètres complexes (26) des fonctions de réponse $\chi(\mathbf{q},\omega)$ dans le raccordement CBE-BCS du côté $\mu > 0$ (la valeur $\check{\Delta} = 0,2$ correspondant à $k_F a \simeq -1$ dans la théorie BCS). (a) Par ajustement du coefficient $\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}(\nu)$ de $\check{q}$ dans le développement (21) de la fonction de réponse module-densité. (b) Idem pour le coefficient $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}(\nu)$ de $\check{q}^3$ dans (20). En noir (rouge) : partie réelle (imaginaire) du coefficient ζ_0 dans le départ quadratique (14) de l'énergie complexe. En vert : poids spectral Π_0 du mode dans la fonction de réponse considérée (c'est le module du résidu du prolongement analytique de $\check{\chi}^{[n]}$ en ζ_0, si bien que $\Pi_0 = \lim_{\check{q}\to 0} \check{\Delta}|\check{Z}_{|\Delta|\rho}|/\check{q}^3$ dans (a) et $\Pi_0 = \lim_{\check{q}\to 0} \check{\Delta}|\check{Z}_{\rho\rho}|/\check{q}^5$ dans (b), où les $\check{Z}$ sont ceux de la figure 1 et on a tenu compte du changement d'échelle (15)). Trait plein : valeurs exactes. Tireté : valeurs tirées de l'ajustement sur l'intervalle de fréquence réduite $\nu \in [1/10, 9/10]$. Pointillé : idem pour $\nu \in [1/5, 4/5]$. L'intervalle d'ajustement a été discrétisé en 60 points régulièrement espacés. Noter le facteur 100 sur Π_0 dans (b).

Les formes (30) sont typiques de la théorie de la RPA [49], à laquelle notre théorie BCS dépendant du temps linéarisée est équivalente à des fluctuations quantiques entrantes près [44]. De telles formes (mais pas les expressions explicites que nous en donnons) apparaissent déjà dans les références [33, 34].

Il est donc facile de reprendre l'étude des fonctions de réponse au voisinage du mode du continuum à faible nombre d'onde, en faisant tendre q vers zéro à fréquence réduite ν fixée comme dans (15). Comme $\chi^{g_0=0}_{\rho\rho}(\mathbf{q},\omega)$ varie alors au second ordre en q, les dénominateurs dans (30) peuvent être approximés par 1 et les résultats (20,21) se transposent directement. De manière remarquable, toute la discussion à faible q de la section 3 est en fait indépendante de la valeur précise de g_0 et s'applique aussi au cas $g_0 = g$, exception faite bien sûr de la valeur de la fonction $\xi_{\mathbf{k}}$ et du spectre BCS $\varepsilon_{\mathbf{k}}$, ainsi que de la position k_0 de son minimum.

Dans la présente limite $k_F a \to 0^-$, le paramètre d'ordre à l'équilibre tend exponentiellement vers zéro, $\Delta/\varepsilon_F \sim 8\mathrm{e}^{-2}\exp(-\pi/2k_F|a|)$ selon la théorie BCS [50]. Ceci permet de simplifier grandement nos résultats. Donnons ainsi le coefficient de $\check{q}^3$ et de $\check{q}$ dans les développements limités (20,21) des fonctions de réponse à l'ordre dominant en Δ : [12]

$$\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}(\nu) \underset{\check{\Delta}\to 0}{\sim} \frac{(\zeta-2)\sqrt{\zeta-1} + \zeta^2 \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{\zeta}} - \frac{2(\zeta-1)}{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}}}{32\mathrm{i}\pi\check{\Delta}^3} \tag{31}$$

$$\check{\chi}^{[1]}_{|\Delta|\rho}(\nu) \underset{\check{\Delta}\to 0}{\sim} \frac{2}{\mathrm{i}\pi}\left[\frac{1+\zeta\ln\frac{\check{\Delta}}{8\mathrm{e}}}{\zeta\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{\zeta}} + \sqrt{\zeta-1}} - \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\check{\Delta}}{8\mathrm{e}}}{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}}\right] \tag{32}$$

où les énergies sont cette fois en unités de ε_F ($\check{\Delta} = \Delta/\varepsilon_F$) et les nombres d'onde en unités de $k_0 = k_F$ ($\check{q} = q/k_F$). À cet ordre, au contraire de la réponse en module, la réponse en densité ne présente plus de pôle dans son prolongement analytique donc ne porte aucune trace du mode du continuum [13] ; d'ailleurs, sur l'intervalle ouvert $\nu \in]0,1[$, sa partie réelle (imaginaire) est une fonction purement croissante (décroissante) de ν, sans extrémum, en contraste avec la figure 2a1.

12. On utilise la section 4.6.3 de la référence [13] pour Σ_{12} et le développement connu des intégrales elliptiques pour le reste. Les développements (20,21) supposent que $q\xi \ll 1$ donc $\check{q} \ll \check{\Delta}$, d'où l'ordre des limites $q \to 0$ puis $\Delta \to 0$.

13. Il faut développer $\check{\chi}^{[3]}_{\rho\rho}(\zeta)$ à l'ordre $\check{\Delta}^{-1}$ pour trouver un pôle dans son prolongement analytique, de résidu $\zeta_0^{(0)}(1+\zeta_0^{(0)}\ln\frac{\check{\Delta}}{8\mathrm{e}})^2/(2\mathrm{i}\pi^3\check{\Delta}\sqrt{\zeta_0^{(0)}-1})$ avec $\zeta_0^{(0)} \simeq 0,2369 - 0,2956\mathrm{i}$.

5. Conclusion

À température nulle, dans l'approximation BCS dépendant du temps, nous avons calculé la réponse linéaire $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ d'un gaz superfluide de fermions de spin 1/2 à une excitation de Bragg de vecteur d'onde $\mathbf{q}$ et de pulsation ω, comme on sait bien en réaliser dans une expérience d'atomes froids. Pour un potentiel chimique $\mu > 0$, nous avons étudié cette réponse analytiquement dans la limite des faibles nombres d'onde $q \to 0$, l'écart de $\hbar\omega$ au bord 2Δ du continuum de paire brisée étant mis à l'échelle $\propto q^2$ de celui de l'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ du mode du continuum, mode à ce jour inobservé ; bien que de nombreux travaux théoriques aient été consacrés aux fonctions de réponse d'un superfluide de fermions, nos résultats analytiques sur χ dans cette étroite fenêtre de fréquence $\hbar\omega - 2\Delta = O(q^2)$ sont à notre connaissance originaux. Dans le raccordement CBE-BCS où le paramètre d'ordre Δ est comparable à μ, le mode du continuum est à l'origine de bosses ou de creux en fréquence dans les fonctions de réponse en densité et en module du paramètre d'ordre. Un ajustement simple de ces fonctions par la somme d'une résonance complexe et d'un fond affine en fréquence permet d'estimer l'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ et le poids spectral du mode, avec une bonne précision pour la réponse en module, même lorsque $\mathrm{Re}\, z_{\mathbf{q}} < 2\Delta$ donc que le mode n'est pas sous l'intervalle de prolongement analytique (dans la théorie) et de mesure (dans l'expérience). Ceci laisse augurer une observation prochaine.

Remerciements

L'intérêt de cette étude nous est apparu lors d'une discussion avec Chris Vale au congrès BEC 2019 à Sant Feliu de Guixols. Nous remercions aussi Hadrien Kurkjian pour d'utiles remarques sur le calcul de la fonction de réponse densité-densité, même s'il a préféré finalement collaborer avec d'autres sur le sujet [51]. Remarquons pour terminer que la date de soumission du présent travail est très postérieure à celle de la prépublication correspondante [52] ; nous avons dû en effet retirer notre précédente soumission à une revue qui s'est révélée incapable de produire un rapport d'expertise.

Références

[1] A.L. Gaunt, T.F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, « Bose-Einstein condensation of atoms in a uniform potential », Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013).

[2] B. Mukherjee, Zhenjie Yan, P.B. Patel, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, J. Struck, M.W. Zwierlein, « Homogeneous Atomic Fermi Gases », Phys. Rev. Lett. **118**, 123401 (2017).

[3] K. Hueck, N. Luick, L. Sobirey, J. Siegl, T. Lompe, H. Moritz, « Two-Dimensional Homogeneous Fermi Gases », Phys. Rev. Lett. **120**, 060402 (2018).

[4] P.B. Patel, Zhenjie Yan, B. Mukherjee, R.J. Fletcher, J. Struck, M.W. Zwierlein, « Universal Sound Diffusion in a Strongly Interacting Fermi Gas », arXiv :1909.02555 (2019).

[5] K.M. O'Hara, S.L. Hemmer, M.E. Gehm, S.R. Granade, J.E. Thomas, « Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms », Science **298**, 2179 (2002).

[6] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K.M. Magalhães, S.J.J.M.F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, C. Salomon, « Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a ^{6}Li Fermi gas », Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).

[7] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J.H. Denschlag, R. Grimm, « Collective excitations of a degenerate gas at the BEC-BCS crossover », Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).

[8] M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, A.J. Kerman, W. Ketterle, « Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance », Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).

[9] S. Nascimbène, N. Navon, K.J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », Nature **463**, 1057 (2010).

[10] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », Science **335**, 563 (2012).

[11] V.A. Andrianov, V.N. Popov, « Gidrodinamičeskoe dejstvie i Boze-spektr sverhtekučih Fermi-sistem », Teor. Mat. Fiz. **28**, 341 (1976) [Theor. Math. Phys. **28**, 829 (1976)].

[12] H. Kurkjian, S.N. Klimin, J. Tempere, Y. Castin, « Pair-Breaking Collective Branch in BCS Superconductors and Superfluid Fermi Gases », Phys. Rev. Lett. **122**, 093403 (2019).

[13] H. Kurkjian, Y. Castin, « Branche d'excitation collective du continuum dans les gaz de fermions condensés par paires : étude analytique et lois d'échelle », à paraître aux Comptes Rendus Physique (2020).

[14] D. Pekker, C.M. Varma, « Amplitude/Higgs Modes in Condensed Matter Physics », Annual Review of Condensed Matter Physics **6**, 269 (2015).

[15] T. Cea, C. Castellani, G. Seibold, L. Benfatto, « Nonrelativistic Dynamics of the Amplitude (Higgs) Mode in Superconductors », Phys. Rev. Lett. **115**, 157002 (2015).

[16] R. Matsunaga, Y.I. Hamada, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, R. Shimano, « Higgs Amplitude Mode in the BCS Superconductors $Nb_{1-x}Ti_xN$ Induced by Terahertz Pulse Excitation », Phys. Rev. Lett. **111**, 057002 (2013).
[17] M.-A. Méasson, Y. Gallais, M. Cazayous, B. Clair, P. Rodière, L. Cario, A. Sacuto, « Amplitude Higgs mode in the $2H$-$NbSe_2$ superconductor », Phys. Rev. B **89**, 060503 (2014).
[18] A. Behrle, T. Harrison, J. Kombe, K. Gao, M. Link, J.S. Bernier, C. Kollath, M. Köhl, « Higgs mode in a strongly interacting fermionic superfluid », Nat. Phys. **14**, 781 (2018).
[19] A.F. Volkov, Ch.M. Kogan, « Collisionless relaxation of the energy gap in superconductors », Zh. Eksp. Teor. Fiz. **65**, 2038 (1973).
[20] E.A. Yuzbashyan, O. Tsyplyatyev, B.L. Altshuler, « Relaxation and Persistent Oscillations of the Order Parameter in Fermionic Condensates », Phys. Rev. Lett. **96**, 097005 (2006).
[21] V. Gurarie, « Nonequilibrium Dynamics of Weakly and Strongly Paired Superconductors », Phys. Rev. Lett. **103**, 075301 (2009).
[22] I. O. Kulik, O. Entin-Wohlman, R. Orbach, « Pair susceptibility and mode propagation in superconductors: A microscopic approach », J. Low Temp. Phys. **43**, 591 (1981).
[23] R.G. Scott, F. Dalfovo, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, « Rapid ramps across the BEC-BCS crossover: A route to measuring the superfluid gap », Phys. Rev. A **86**, 053604 (2012).
[24] J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur, D.M. Stamper-Kurn, D.E. Pritchard, W. Ketterle, « Bragg spectroscopy of a Bose-Einstein condensate », Phys. Rev. Lett. **82**, 4569 (1999).
[25] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, N. Davidson, « Excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate », Phys. Rev. Lett. **88**, 120407 (2002).
[26] G. Veeravalli, E. Kuhnle, P. Dyke, C.J. Vale, « Bragg spectroscopy of a strongly interacting Fermi gas », Phys. Rev. Lett. **101**, 250403 (2008).
[27] E.D. Kuhnle, S. Hoinka, Hui Hu, P. Dyke, P. Hannaford, C.J. Vale, « Studies of the universal contact in a strongly interacting Fermi gas using Bragg spectroscopy », New J. Phys. **13**, 055010 (2011).
[28] S. Hoinka, P. Dyke, M.G. Lingham, J.J. Kinnunen, G.M. Bruun, C.J. Vale, « Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic Fermi superfluids », Nature Physics **13**, 943 (2017).
[29] W. Ketterle, « Making, probing and understanding ultracold Fermi gases », section 2, in *Ultra-cold Fermi gases*, Cours de l'école de physique Enrico Fermi 2006 de Varenne, édité par M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon (SIF, Bologne, 2007).
[30] I. Carusotto, Y. Castin , « Atom interferometric detection of the pairing order parameter in a Fermi gas », Phys. Rev. Lett. **94**, 223202 (2005).
[31] M.W. Zwierlein, J.R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C.H. Schunck, W. Ketterle, « Vortices and Superfluidity in a Strongly Interacting Fermi Gas », Nature **435**, 1047 (2005).
[32] T. Kostyrko, R. Micnas, « Collective modes of the extended Hubbard model with negative U and arbitrary electron density », Phys. Rev. B **46**, 11025 (1992).
[33] R. Côté, A. Griffin, « Cooper-pair-condensate fluctuations and plasmons in layered superconductors », Phys. Rev. B **48**, 10404 (1993).
[34] A. Minguzzi, G. Ferrari, Y. Castin, « Dynamic structure factor of a superfluid Fermi gas », Eur. Phys. J. D **17**, 49 (2001).
[35] G.M. Bruun, B.R. Mottelson, « Low Energy Collective Modes of a Superfluid Trapped Atomic Fermi Gas », Phys. Rev. Lett. **87**, 270403 (2001).
[36] H.P. Büchler, P. Zoller, W. Zwerger, « Spectroscopy of Superfluid Pairing in Atomic Fermi Gases », Phys. Rev. Lett. **93**, 080401 (2004).
[37] A. Korolyuk, J.J. Kinnunen, P. Törmä, « Density response of a trapped Fermi gas: a crossover from the pair vibration mode to the Goldstone mode », Phys. Rev. A **84**, 033623 (2011).
[38] Lianyi He, « Dynamic density and spin responses of a superfluid Fermi gas in the BCS-BEC crossover: Path integral formulation and pair fluctuation theory », Annals of Physics **373**, 470 (2016).
[39] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, « Theory of ultracold atomic Fermi gases », Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).
[40] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, in *Processus d'interaction entre photons et atomes*, section III.A.2 (InterEditions et Editions du CNRS, Paris, 1988).
[41] Y. Castin, « Simple theoretical tools for low dimension Bose gases », Cours de l'école de printemps des Houches 2003 *Quantum Gases in Low Dimensions*, édité par M. Olshanii, H. Perrin, L. Pricoupenko, J. Phys. IV France **116**, 89 (2004).
[42] W. Zwerger (éditeur), *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi gas*, Lecture Notes in Physics **836**, section 5.2 (Springer, Berlin, 2011).
[43] Y. Castin, « Basic tools for degenerate Fermi gases », section 3.5.1, in *Ultra-cold Fermi gases*, Cours de l'école de physique Enrico Fermi 2006 de Varenne, édité par M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon (SIF, Bologne, 2007).
[44] H. Kurkjian, *Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris (2016).
[45] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas », Annalen der Physik (Berlin) **529**, 1600352 (2017).
[46] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, and products*, édité par A. Jeffrey, 5ème édition (Academic Press, San Diego, 1994).
[47] M. Marini, F. Pistolesi, G.C. Strinati, « Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: Analytic results for the crossover in three dimensions », Eur. Phys. J. B **1**, 151 (1998).
[48] P. Nozières, *Le problème à N corps : Propriétés générales des gaz de fermions*, appendice C (Dunod, Paris, 1963).
[49] P.W. Anderson, « Random-phase approximation in the theory of superconductivity », Phys. Rev. **112**, 1900 (1958).
[50] M. Randeria, in *Bose-Einstein Condensation*, chapitre 15, p.373, édité par A. Griffin, D.W. Snoke, S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
[51] H. Kurkjian, J. Tempere, S.N. Klimin, « Linear response of a superfluid Fermi gas inside its pair-breaking continuum », arXiv:1912.08898 (version 1 déposée le 18 décembre 2019).
[52] Y. Castin, « Spectroscopie de Bragg et mode du continuum de paire brisée dans un gaz de fermions superfluide », hal-02377014 (version 1 déposée le 22 novembre 2019).