



**HAL**  
open science

# Vitesse d'équidistribution vers le courant de Green pour les endomorphismes de $P^k$

Johan Taflin

► **To cite this version:**

Johan Taflin. Vitesse d'équidistribution vers le courant de Green pour les endomorphismes de  $P^k$ . Comptes Rendus. Mathématique, 2011, 349 (9-10), pp.515-517. 10.1016/j.crma.2011.03.016 . hal-02375547

**HAL Id: hal-02375547**

**<https://hal.science/hal-02375547>**

Submitted on 22 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Vitesse d'équidistribution vers le courant de Green pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$

Johan Taflin <sup>a</sup>,

<sup>a</sup>UPMC Univ Paris 06, UMR 7586, Institut de Mathématiques de Jussieu, F-75005 Paris, France

Reçu le \*\*\*\*\*; accepté après révision le +++++

Présenté par ččččč

---

## Résumé

Soient  $f$  un endomorphisme holomorphe non-inversible de  $\mathbb{P}^k$  et  $f^n$  son itérée d'ordre  $n$ . Pour une hypersurface  $H$  de  $\mathbb{P}^k$ , générique au sens de Zariski, nous donnons une vitesse de convergence explicite des préimages  $f^{-n}(H)$  vers le  $(1, 1)$ -courant de Green de  $f$ .

## Abstract

**Equidistribution speed towards the Green current for endomorphisms of  $\mathbb{P}^k$ .** Let  $f$  be a non-invertible holomorphic endomorphism of  $\mathbb{P}^k$ . For a hypersurface  $H$  of  $\mathbb{P}^k$ , generic in the Zariski sense, we give an explicit speed of convergence of  $f^{-n}(H)$  towards the dynamical Green  $(1, 1)$ -current of  $f$ .

---

## 1. Introduction

Dans cette note, nous considérons un endomorphisme holomorphe  $f$  de degré algébrique  $d \geq 2$  de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^k$ . Un objet classique dans l'étude dynamique de ces systèmes est le  $(1, 1)$  courant de Green  $T$  associé à  $f$ . Ce courant est positif fermé de masse 1 et totalement invariant i.e.  $d^{-1}f^*T = T$ . Il porte de nombreuses informations sur la dynamique de  $f$ . D'après les résultats de Fornæss-Sibony, Favre-Jonsson et Dinh-Sibony, si  $H$  est une hypersurface générique, la suite  $d^{-n}(f^n)^*[H]$  converge vers  $\deg(H)T$  dans le sens des courants. De plus,  $T$  admet des potentiels locaux continus, ce qui permet de définir ses auto-intersections  $T^p := T \wedge \cdots \wedge T$ . Dinh et Sibony ont proposé la conjecture suivante.

**Conjecture 1.1** *Soient  $f$  et  $T$  comme ci-dessus. Si  $H$  est un ensemble analytique de codimension pure  $p$ , générique au sens de Zariski, alors la suite  $d^{-pn}(f^n)^*[H]$  converge vers  $\deg(H)T^p$  à vitesse exponentielle.*

---

*Email address:* taflin@math.jussieu.fr (Johan Taflin).

Le but de cette note est d'expliquer une démonstration dans le cas  $p = 1$ , qui repose sur un résultat plus général sur les courants. Nous renvoyons à [1] pour la théorie des courants et des fonctions plurisousharmoniques (psh). Si  $S$  est un courant positif fermé de bidegré  $(1, 1)$  et de masse 1, il est cohomologue à  $T$  et il existe une unique fonction quasi-psh  $u$  telle que  $S = T + dd^c u$  et  $\max_{\mathbb{P}^k} u = 0$ . On appelle  $u$  le *potentiel dynamique* de  $S$ .

Le théorème suivant, obtenu dans [7], implique la Conjecture 1.1 pour  $p = 1$ . Il suffit de prendre  $S = \deg(H)^{-1}[H]$ , pour une hypersurface  $H$  ne contenant pas d'élément de  $\mathcal{A}_\lambda$ . On se réfère à [7] pour une historique du problème et une bibliographie plus exhaustive.

**Théorème 1.2** *Soient  $f, T$  comme ci-dessus et soit  $1 < \lambda < d$ . Il existe une famille finie  $\mathcal{A}_\lambda$  d'ensembles analytiques irréductibles périodiques telle que si  $S$  est un  $(1, 1)$ -courant positif fermé de masse 1 dont le potentiel dynamique  $u$  vérifie  $\|u\|_{L^1(X)} \leq C$  pour tout  $X \in \mathcal{A}_\lambda$ , alors la suite  $S_n := d^{-n}(f^n)^*(S)$  converge vers  $T$  à vitesse exponentielle. Plus précisément, pour tout  $0 < \beta \leq 2$  et  $\phi \in \mathcal{C}^\beta(\mathbb{P}^k)$  nous avons*

$$|\langle S_n - T, \phi \rangle| \leq A \|\phi\|_{\mathcal{C}^\beta} (\lambda/d)^{n\beta/2}, \quad (1)$$

où  $A > 0$  est une constante qui dépend de  $C$  et  $\beta$  mais qui est indépendante de  $S$ ,  $\phi$  et  $n$ .

Dans la démonstration, nous sommes amenés à faire une récurrence sur une famille d'ensembles analytiques invariants de  $\mathbb{P}^k$ , dont les éléments de  $\mathcal{A}_\lambda$  sont les éléments minimaux. C'est pourquoi les outils des Sections 3 et 4 sont développés pour des ensembles analytiques de  $\mathbb{P}^k$ . La présence de singularités entraîne des difficultés techniques importantes que l'on surmonte en utilisant plusieurs inégalités de type Lojasiewicz (voir [7] pour plus de détails).

Dans cette note les symboles  $\lesssim$  et  $\gtrsim$  indiquent des inégalités à une constante multiplicative près.

## 2. Réduction du problème

La preuve du Théorème 1.2 suit en partie la stratégie introduite par Fornæss et Sibony dans [6] qui se base sur des estimations volumiques et sur la théorie du pluripotential. Puisque  $T$  est totalement invariant, le potentiel dynamique de  $S_n$  est  $u_n := d^{-n}u \circ f^n$ . Grâce à la théorie de l'interpolation entre espaces de Banach, il suffit de montrer le Théorème 1.2 pour  $\beta = 2$ . Dans ce cas, on a

$$|\langle S_n - T, \phi \rangle| = |\langle dd^c u_n, \phi \rangle| = |\langle u_n, dd^c \phi \rangle| \lesssim \|u_n\|_{L^1(\mathbb{P}^k)} \|\phi\|_{\mathcal{C}^2},$$

ce qui implique que (1) est équivalent à

$$\|u_n\|_{L^1(\mathbb{P}^k)} \lesssim (\lambda/d)^n. \quad (2)$$

Pour obtenir cette inégalité, nous montrons que les sous-niveaux  $K_n = \{x \in \mathbb{P}^k \mid u_n(x) \leq -(\lambda/d)^n\}$  ont un volume qui décroît à une vitesse exponentielle. La première observation dans ce sens est que  $f^n(K_n) = \{u \leq -\lambda^n\}$ . Or, il est classique qu'il existe  $a > 0$  tel que  $\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-au)\omega^k < \infty$ , d'où

$$|f^n(K_n)| \lesssim \exp(-a\lambda^n). \quad (3)$$

Nous allons maintenant expliquer comment, sous les hypothèses du Théorème 1.2, obtenir une majoration du volume de  $K_n$  en fonction de celui de  $f^n(K_n)$ , ce qui impliquera le Théorème 1.2.

### 3. Ensembles exceptionnels et estimation du volume

Soit  $X \subset \mathbb{P}^k$  un ensemble analytique invariant par  $f$  i.e.  $f(X) = X$ . On note  $g$  la restriction de  $f$  à  $X$ . La *multiplicité locale* de  $g$  en un point  $x \in X$  est le nombre maximal de points dans  $g^{-1}(z)$  proche de  $x$  pour  $z \in X$ . La contraction du volume par  $g$  au voisinage d'un point est très fortement reliée à la multiplicité locale de  $g$  en ce point.

Le théorème suivant, dû à Dinh [2], permet de contrôler la multiplicité des  $g^n$  en dehors d'un ensemble analytique propre invariant.

**Théorème 3.1** *Il existe une fonction  $\kappa_-$  sur  $X$  semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski telle que pour tout  $\lambda > 1$  l'ensemble  $E_\lambda(X) := \{\kappa_- \geq \lambda\}$  est un ensemble analytique propre de  $X$  qui est invariant par  $g$ . De plus, quitte à remplacer  $g$  par une itérée  $g^{n_0}$  et  $\lambda$  par  $\lambda^{n_0}$ , la multiplicité locale de  $g$  est inférieure à  $\lambda$  en dehors de  $E := g^{-1}(E_\lambda(X))$ .*

Nous dirons que  $E_\lambda(X)$  est un ensemble exceptionnel de  $X$  car il est invariant et qu'il contient l'image de tous les points où les itérées  $g^n$  ont une grande multiplicité. Nous allons voir en Section 4 que pour obtenir l'inégalité (2) sur  $\mathbb{P}^k$  nous avons besoin d'une inégalité similaire sur  $E_\lambda(\mathbb{P}^k)$ . Et plus généralement, pour obtenir (2) sur  $X$  nous avons besoin d'une inégalité similaire sur  $E_\lambda(X)$ . De fil en aiguille, cela nous pousse à définir une famille  $\mathcal{B}_\lambda$  d'ensembles exceptionnels sur lesquels nous ferons une récurrence.

Fixons  $1 < \lambda < d$ . Nous construisons la famille  $\mathcal{B}_\lambda$  comme suit. Premièrement, l'espace projectif  $\mathbb{P}^k$  est un élément de  $\mathcal{B}_\lambda$ . Puis, si  $X \in \mathcal{B}_\lambda$  alors toutes les composantes irréductibles de  $E_\lambda(X)$  appartiennent aussi à  $\mathcal{B}_\lambda$ . Cette famille est finie et puisque les fonctions  $\kappa_-$  sont semi-continues supérieurement, il existe  $\delta < \lambda$  tel que  $\mathcal{B}_\delta = \mathcal{B}_\lambda$ . De plus, nous définissons la famille  $\mathcal{A}_\lambda$  qui intervient dans le Théorème 1.2 comme la famille des éléments de  $\mathcal{B}_\lambda$  qui sont minimaux pour l'inclusion. Les éléments de  $\mathcal{A}_\lambda$  nous permettent d'initier la récurrence car si  $X \in \mathcal{A}_\lambda$  alors  $E_\lambda(X) = \emptyset$ .

Fixons  $X \in \mathcal{B}_\lambda$  et rappelons que  $E = g^{-1}(E_\lambda(X))$ . Le contrôle de la multiplicité en dehors de  $E$  nous permet d'établir des estimations du volume pour  $g$ . C'est l'objet du résultat suivant qui s'obtient en généralisant aux ensembles analytiques des inégalités à la Lojasiewicz dues à Dinh et Sibony [4].

**Théorème 3.2** *Soit  $1 < \delta < \lambda$  comme ci-dessus. Il existe des constantes  $b \geq 1$  et  $N \geq 1$  telles que si  $0 < t < 1/2$ ,  $r < t/2$  et  $B$  est une boule de rayon  $r$  qui n'intersecte pas le  $t$ -voisinage  $E_t$  de  $E$  alors  $g(B)$  contient une boule de rayon  $r'$  avec  $r' \gtrsim t^N r^{b\delta}$ . De plus,  $b$  ne dépend que de  $X$ .*

Le dernier point permet, quitte encore une fois à remplacer  $g$  par une itérée, de supposer que  $b = 1$ . L'avantage de ce théorème est que quitte à augmenter  $E$  (en diminuant  $\lambda$ ), ces estimations deviennent aussi précises que possible.

### 4. Estimations exponentielles

Dans cette section, nous considérons un courant  $S$  dont le potentiel dynamique  $u$  vérifie les hypothèses du Théorème 1.2. Comme en Section 3, nous fixons  $X \in \mathcal{B}_\lambda$  et  $E \subset X$ . Par abus de notation nous continuons à noter  $K_n$  l'ensemble  $\{x \in X \mid u_n(x) \leq -(\lambda/d)^n\}$ . La dernière étape pour avoir (2) sur  $X$  consiste à montrer que les ensembles  $g^i(K_n) \subset X$  ne sont pas concentrés autour de  $E$ , afin de leur appliquer le Théorème 3.2. Pour cela, nous allons utiliser différentes estimations exponentielles.

Un résultat classique de Hörmander donne une borne uniforme à  $\exp(-v)$  dans  $L^1(\mathbb{B}_{1/2})$  pour toutes les fonctions  $v$ , psh sur la boule unité  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{C}^k$ , négatives et telles que  $v(0) \geq -1$ . Des résultats analogues

existent pour des familles compactes de fonctions quasi-psh. Nous dirons qu'une fonction  $u$  sur  $\mathbb{P}^k$  est *psh modulo  $T$*  si  $dd^c u + T$  est positif. Un point clef dans notre approche est que, quitte à réduire le domaine d'intégration, la continuité Hölder des potentiels de  $T$  permet d'établir des estimations exponentielles uniformes pour des familles non-compactes de fonctions psh modulo  $T$ .

Dans le résultat suivant, nous voyons  $T$  comme un courant sur la boule unité  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{C}^k$  et notons  $(K, \alpha)$  les constantes de Hölder de son potentiel sur  $\mathbb{B}$ .

**Lemme 4.1** *Soit  $v$  une fonction psh modulo  $T$  sur  $\mathbb{B}_t$  telle que  $v \leq 0$  et  $v(0) > -\infty$ . Soient  $0 < s < -v(0)^{-1}$  et  $t > 0$  tels que  $Kt^\alpha \leq s^{-1}$ . Il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $v$ ,  $s$  et  $t$  telle que  $\int_{\mathbb{B}_{t/2}} \exp(-sv/2) \nu \leq ct^{2k}$ .*

La première conséquence est le résultat suivant qui explique la récurrence sur les éléments de  $\mathcal{B}_\lambda$ .

**Lemme 4.2** *Soient  $\lambda_1, \lambda_2 > 1$  tels que  $\delta < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda$ . Supposons que pour tout élément  $Y$  de  $\mathcal{B}_\lambda$ , strictement inclus dans  $X$  nous avons  $\|u_n\|_{L^1(Y)} \lesssim (\lambda_1/d)^n$ . Alors, il existe des constantes  $c, \eta \geq 1$  et  $n_0 \geq 1$  telles que si  $n \geq n_0$  alors  $\int_{E_{t_n}} \exp(-(d/\lambda_2)^n u_n) \omega^n \leq c$ , où  $t_n = (\lambda_2/d)^{n\eta}$ .*

Supposons maintenant que l'hypothèse de ce lemme est vérifiée sur  $X$ . C'est automatique pour  $X \in \mathcal{A}_\lambda$  par minimalité. Et supposons aussi par l'absurde qu'il existe une infinité de  $n \in \mathbb{N}$  telle que  $|K_n| \gtrsim (\lambda/d)^n$ . Une deuxième conséquence du Lemme 4.1 est que  $K_n$  contient une boule  $B$  de rayon  $(\lambda/d)^{an}$  pour une constante  $a > 0$  car sinon, il existerait un recouvrement de  $X$  par des boules où la valeur au centre de  $u_n$  est contrôlée et le Lemme 4.1 contredirait la minoration de  $|K_n|$ . D'un autre côté le Lemme 4.2 assure que  $B$  n'intersecte pas  $E_{t_n/2}$ , ce qui implique par le Théorème 3.2 que  $g(B)$  contient une boule de rayon  $\gtrsim t_n^N (\lambda/d)^{a\delta n}$ . Grâce au choix des constantes, le facteur en  $t_n$  est négligeable et en appliquant encore  $n-1$  fois le même procédé, nous obtenons que  $g^n(K_n)$  contient une boule de rayon proche de  $(\lambda/d)^{a\delta^n n}$ . Ceci est en contradiction avec l'équivalent pour  $g$  de (3) car  $\delta < \lambda$ , ce qui prouve bien que le volume de  $K_n$  doit au moins décroître en  $(\lambda/d)^n$ .

*Remarque 1* Soit  $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$  un automorphisme polynomial régulier au sens de Sibony. Nous pouvons montrer un résultat analogue sur la vitesse de convergence en dehors de l'ensemble d'indétermination de  $f$ , voir aussi [3].

## Références

- [1] J.-P. Demailly, Complex analytic and differential geometry, [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html), 2009.
- [2] T.-C. Dinh, Analytic multiplicative cocycles over holomorphic dynamical systems, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 54(3-4) :243–251, 2009.
- [3] T.-C. Dinh, N. Sibony, Equidistribution towards the Green current for holomorphic maps, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(2) :307–336, 2008.
- [4] T.-C. Dinh, N. Sibony, Equidistribution speed for endomorphisms of projective spaces, *Math. Ann.*, 347(3) :613–626, 2010.
- [5] C. Favre, M. Jonsson, Brodin's theorem for curves in two complex dimensions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 53(5) :1461–1501, 2003.
- [6] J.-E. Fornæss, N. Sibony, Complex dynamics in higher dimension II, dans *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, volume 137 de *Ann. of Math. Stud.*, pages 135–182. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.
- [7] J. Taffin, Equidistribution speed towards the green current for endomorphisms of  $\mathbb{P}^k$ , preprint, arXiv :1011.0641