



HAL
open science

Concentration et confinement des fonctions propres dans un ouvert borné

Assia Benabdallah, Matania Ben-Artzi, Yves Dermenjian

► **To cite this version:**

Assia Benabdallah, Matania Ben-Artzi, Yves Dermenjian. Concentration et confinement des fonctions propres dans un ouvert borné. 2019. hal-02375041

HAL Id: hal-02375041

<https://hal.science/hal-02375041>

Preprint submitted on 21 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Concentration et confinement des fonctions propres dans un ouvert borné

Assia Benabdallah[†], Matania Ben-Artzi[‡] & Yves Dermenjian[†],
[†] Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France
[‡] Hebrew University, Jerusalem, Israël

21 novembre 2019

Résumé

Si ω et $\Omega, \omega \subset \Omega$, sont deux ouverts bornés de \mathbb{R}^2 où $\Omega := (0, L) \times (0, H)$ et $\omega := (l_1, l_2) \times (a, b), 0 \leq l_1 < l_2 \leq L, 0 \leq a < b \leq H$, on vérifie à la main qu'il existe une constante C_ω telle que $0 < C_\omega \leq R_\omega(u) := \frac{\|u\|_{L^2(\omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} < \frac{\text{Vol}(\omega)}{\text{Vol}(\Omega)}$ pour toute fonction propre u du Laplacien-Dirichlet $-\Delta$ sur Ω . Comme cette double inégalité est inexacte pour un opérateur autoadjoint elliptique A dont les coefficients ne sont plus constants, on examine ici la possibilité de distinguer deux familles de fonctions propres normalisées de l'opérateur $A : \mathcal{F}_G$ pour fonctions propres guidées et \mathcal{F}_{NG} pour fonctions propres non guidées, telles que
- $\forall \omega \subset \Omega, \exists C_\omega > 0, u \in \mathcal{F}_{NG} \implies R_\omega(u) > C_\omega$,
- $\exists \omega \subset \Omega, \omega \neq \emptyset, \implies \inf_{u \in \mathcal{F}_G} R_\omega(u) = 0$.

On donne ici, sur deux modèles très simples en dimension 2¹, une condition suffisante, et parfois nécessaire, qui devrait permettre de caractériser ces ensembles. Nous prouvons dans certains cas que ces deux composantes constituent une partition. Le milieu étant stratifié, nous pouvons passer de la représentation habituelle du spectre de l'opérateur A , i.e. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, à une représentation en deux dimensions qui permet de comprendre la répartition des valeurs propres associées ainsi que d'autres résultats reliés : interprétation microlocale, mesure de défaut de sous-suites, ...

1 Introduction : objectifs et les trois modèles de base

Pour un opérateur elliptique autoadjoint agissant dans un ouvert Ω borné ou non, on sait que les variations du ou des coefficients de diffusion de la partie principale, ainsi que des conditions au bord particulières à la frontière de Ω , créent un phénomène de concentration de l'énergie. La littérature étant abondante, nous ne donnerons que quelques exemples,

1. en 1930, Epstein [8] a mis en évidence, en milieu non borné, des ondes guidées acoustiques pour une famille de vitesses, chacune étant une fonction analytique ne dépendant que de la coordonnée verticale, ce qui a donné naissance à de nombreux travaux. Les applications vont de l'acoustique aux fibres optiques², (cf. [11] ainsi que [13] et sa bibliographie).

1. facilement prolongeable à des dimensions supérieures.

2. Les fibres optiques sont de très bonnes illustrations. La fibre monophasée correspond au modèle traité ici, c'est à dire deux vitesses avec un cœur d'indice plus grand (donc avec la vitesse la plus petite), est un bon exemple de la concentration de l'énergie dans le cœur. Cette concentration est d'autant plus grande que le rayon transversal de celui-ci est petit (c'est l'analogue du h_0 de ce travail). La difficulté est de bien placer la source face au cœur, ce qui amène souvent à lui préférer la fibre multiphasée (traitée plus tard) qui a d'autres ennuis car il faut espacer les pulses dans le temps.

2. le système de l'élasticité linéaire à surface libre dans le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ crée un couplage à la frontière donnant naissance à une onde particulière, l'onde de Rayleigh. Elle est particulièrement destructrice lors d'un tremblement de terre ([12], [6]). Les noms des physiciens Lamb, Love et Stoneley ont aussi été donnés à des phénomènes voisins ([5]).

Dans ces deux items, les fonctions propres le sont en un sens généralisé car elles n'appartiennent pas au domaine de l'opérateur mais des sous-familles guidées sont quand même distinguées. Dans le travail présenté ici, nous modifions le cadre pour nous placer dans le suivant :

Hypothèse générale (H0)
$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \Omega := (0, L) \times (0, H) \text{ et } \omega := (l_1, l_2) \times (a, b), 0 \leq l_1 < l_2 \leq L, 0 \leq a < b \leq H, \\ \bullet \text{ la fonction scalaire } c : x = (x_1, x_2) \rightarrow c(x) \text{ est constante par morceau ou est de classe } C^1, \\ \bullet \text{ la fonction } c \text{ est monotone croissante et } c(x) = c(x_2), 0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max} < +\infty, \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} A = -c\Delta \text{ de domaine } D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \text{ opérant dans } \mathcal{H} := L^2(\Omega, c^{-1}dx) \\ \text{ou} \\ A = -\nabla \cdot (c\nabla) \text{ de domaine } D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega); Au \in L^2(\Omega)\}, \text{ opérant dans } L^2(\Omega, dx). \end{array} \right. \end{array} \right.$

Nous complétons l'hypothèse **(H0)** afin de distinguer nos deux modèles de base :

Modèle à N sauts : Hypothèse (H1)
<ul style="list-style-type: none"> • l'ouvert $\Omega := (0, L) \times (0, H) \subset \mathbb{R}^2$ est partagé en $N + 1$ parties, $\Omega_0 := (0, L) \times (0, h_0)$, $\Omega_i := (0, L) \times (h_{i-1}, h_i), i = 1, \dots, N$, avec $0 = h_{-1} < h_0 < \dots < h_i < h_{i+1} < \dots < h_{N-1} < h_N = H$, qui sont séparées par N interfaces horizontales $S_i := (0, L) \times \{h_i\}, i = 0, \dots, N - 1$, • une fonction scalaire c prenant $N + 1$ valeurs, à savoir $c(x) = \begin{cases} c_0 \text{ si } 0 < x_2 < h_0, \\ c_1 \text{ si } h_0 < x_2 < h_1, \\ \vdots \\ c_N \text{ si } h_{N-1} < x_2 < H, \end{cases}$ <p style="text-align: center;">avec $c_0 < c_1 < \dots < c_{N-1} < c_N$.</p>

Modèle C^1 : (H3) La fonction scalaire c est strictement croissante et appartient à $C^1([0, H])$.
--

Nous partons donc d'un ouvert Ω borné et d'un opérateur elliptique A autoadjoint et positif et nous sommes intéressés par le rapport

$$R_\omega(v) := \frac{\int_\omega |v(x)|^2 dx}{\int_\Omega |v(x)|^2 dx}, \quad (1)$$

qui nous permettra de distinguer deux sous-familles de fonctions propres : les fonctions propres guidées et les autres. L'idée de s'intéresser au rapport (1) n'est pas nouvelle. Pour le Laplacien sur des variétés compactes, analytiques réelles avec une métrique analytique réelle, l'inégalité

$$C e^{-c\lambda_j^{\frac{1}{2}}} \|\varphi_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\varphi_j\|_{L^2(\omega)}^2 \quad (2)$$

est connue, cf. [7]. Elle est devenue un cas particulier de l'inégalité de Lebeau-Robbiano, cf. [10], pour des opérateurs à coefficients variables réguliers dans un ouvert borné. Dans un récent travail de Camille Laurent et Matthieu Léautaud, cf.[9], les auteurs généralisent (2) à des opérateurs hypoelliptiques lorsque Ω est une variété compacte sans bord, disons un tore, toujours sous la condition d'analyticité.

Nos estimations montrent en notre cas que des encadrements plus précis sur des sous-espaces vectoriels de

$L^2(\Omega)$ sont atteignables, même avec des coefficients non réguliers. En particulier, l'exposant $\lambda_j^{\frac{1}{2}}$ de (2) ne peut être remplacé par $\lambda_j^{\frac{1}{\alpha}}$ avec $\alpha > 4$ (cf. Corollaire 3). L'exemple avec $N = 1, c_0 = 1, c_1 = 2$ éclaire le type de résultats prouvés :

• **Pour la famille \mathcal{F}_{NG} (fonctions propres non guidées) le rapport $R_\omega(v)$ est uniformément minoré par une constante positive. Autrement dit, on se trouve dans le cas d'un opérateur elliptique à coefficients constants (se reporter au Théorème 2)**

• **Si (v_n) est une suite de fonctions propres guidées, i.e. contenue dans \mathcal{F}_G , alors le rapport $R_\omega(v_n) \rightarrow 0$ si $\bar{\omega} \subset \Omega_1$, i.e. est contenu dans la zone où le coefficient de diffusion a sa plus grande valeur. De plus, selon la sous-suite choisie et la localisation « microlocale » de celle-ci, le taux de la convergence de $R_\omega(v_n)$ vers 0 varie de $e^{-b_1 \lambda_n^{\frac{1}{2}}}$ à $c_\omega \lambda_n^{-3/2}$ en passant par $e^{-b_2 \lambda_n^{\frac{1}{4}}}$, λ_n étant la valeur propre associée à v_n .**

En fait, les résultats obtenus pour v_n sont beaucoup plus précis si, au lieu d'utiliser les valeurs propres λ_n , on utilise la distance introduite dans la Remarque 3. Pour le modèle avec $N = 1$, la concentration de la norme L^2 a lieu d'un côté de l'interface pour les hautes fréquences (Théorème 3, Cas 3) tandis que, pour $N = 2$, le Théorème 4 exhibe une concentration à cheval sur l'interface S_1 . Le Cas 1 du Théorème 3 ainsi que la Proposition 2 sont aussi des résultats inhabituels.

Le milieu étant stratifié, l'approche par séparation des variables s'impose et les valeurs propres seront naturellement indexées par deux indices, à savoir $(\lambda_{k,\ell}), k, \ell \geq 1$. Pour chacun des deux modèles de ce papier on construit une base orthonormée de fonctions propres $\mathcal{B} := (v_{k,\ell})_{k \geq 1, \ell \geq 1}$, associées aux valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ avec $v_{k,\ell} = a_{k,\ell} \sin(\frac{k\pi}{L} x_1) u_{k,\ell}(x_2)$ où $u_{k,\ell}(x_2)$ satisfait

$$(cu')' + (\lambda_{k,\ell} - c \frac{k^2 \pi^2}{L^2})u = 0, u(0) = u(H) = 0. \quad (3)$$

Comme l'intervalle (l_1, l_2) , largeur de ω , n'influence que la valeur des constantes encadrant $R_\omega(v)$, il sera suffisant de travailler avec les fonctions $x_2 \rightarrow u_{k,\ell}(x_2)$. Il est clair que toute suite extraite d'une base orthonormée $\mathcal{B} := (u_{k,\ell})_{k \geq 1, \ell \geq 1}$ ainsi définie, converge faiblement vers 0 dans $L^2(0, H)$. Si λ est une valeur propre multiple, il y a plusieurs possibilités : elles peuvent être toutes associées à des éléments de \mathcal{F}_G ou bien de \mathcal{F}_{NG} ou encore à des éléments des deux. C'est, en partie, cette représentation par deux indices qui est à l'origine des résultats de ce papier.

Reprenons l'exemple du modèle à un saut, i.e. $N = 1, 0 < c_0 < c_1$. La base orthonormée est constituée de deux familles décrites visuellement dans la partie gauche de la figure 1 par les valeurs propres qui leurs sont associées. Les fonctions dites guidées correspondent aux valeurs propres situées entre les deux paraboles $\lambda = c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ et $\lambda = c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ (voir la partie gauche de la Figure 1). Pour chaque k , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres entre les deux paraboles alors que, pour chaque k , il y a une infinité de valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ au-dessus de la parabole d'équation $\lambda = c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. En restant toujours dans ce modèle, ces paraboles déterminent deux zones qui deviennent coniques par un changement de variables, par exemple $(k, \lambda) \rightarrow (\kappa, \sqrt{\lambda}) = (k\pi, \sqrt{\lambda})$ permet d'établir une correspondance avec les notions microlocales habituelles en travaillant dans $\Omega \times ((\mathbb{N} \frac{\pi}{L}) \times \mathbb{R})$. L'application $(k, \lambda) \rightarrow (\frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \lambda)$ convient aussi (cf. la partie droite de la Figure 1) mais ne donne pas une correspondance immédiate avec les coordonnées microlocales.

Afin d'illustrer comment ce précédent changement de coordonnées donne un autre point de vue, notons la distance du point $(\kappa = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \lambda_{k,\ell})$ à la droite d'équation $\lambda = c_1 \kappa$ par dist et posons $\overline{\text{dist}} := (\frac{\sqrt{1+c_1^2}}{c_1} \text{dist})^{\frac{1}{2}}$. On obtient, entre autres résultats, le

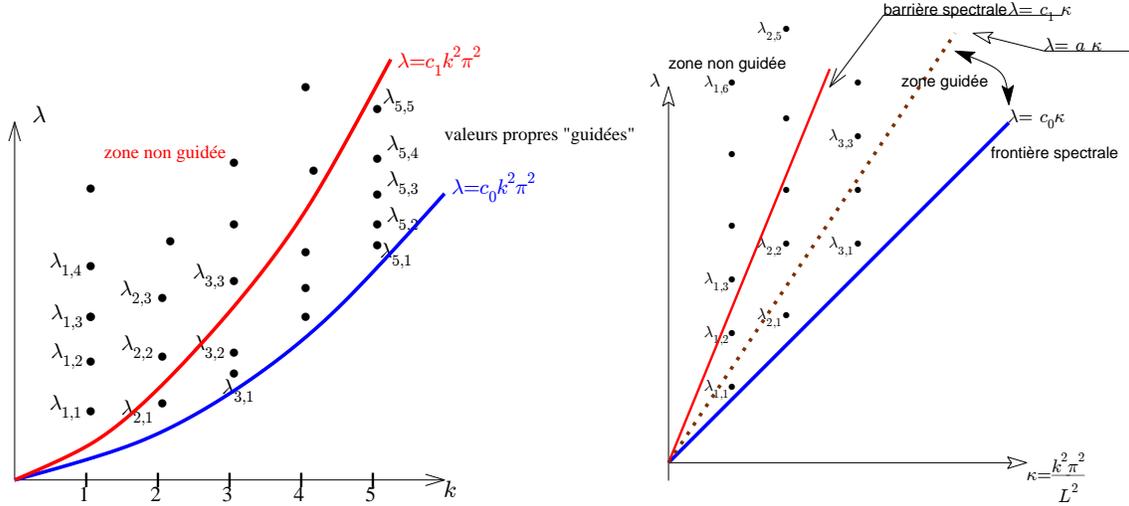


FIGURE 1 – modèle à un saut : répartition des valeurs propres

Théorème 1. Soit $N = 1, \omega = (l_1, l_2) \times (a, b), h_0 \leq a < b \leq H$ et une suite de valeurs propres $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n, k_n \rightarrow \infty$, contenue dans un cône $c_0\kappa < \lambda < (c_1 - \varepsilon)\kappa$, alors

$$R_\omega(v_{k_n, \ell_n}) = O\left(\frac{e^{-2(a-h_0)\overline{\text{dist}}_n}}{\overline{\text{dist}}_n}\right) \quad (4)$$

Dans le modèle à deux sauts, i.e. $N = 2$, nous conjecturons que les fonctions dites guidées correspondent aux valeurs propres situées entre les deux paraboles $\lambda = c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ et $\lambda = c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ que nous divisons en la **zone (0)** $= \{c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k, \ell} < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}\}$ et la **zone (I)** $= \{c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k, \ell} < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}\}$. On distinguera donc trois zones spectrales dont deux correspondant à une famille de fonctions propres guidées (voir la Figure 2). Les fonctions propres associées à la **zone (0)** sont des ondes presque rasantes en S_0 car elles arrivent sur cette interface avec un angle supérieur à l'angle limite de la réflexion totale et, malgré cela, ont une énergie essentiellement localisée dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$ tandis que les fonctions propres associées à la **zone (I)** peuvent traverser l'interface S_0 sans difficulté mais subissent une réflexion totale sur l'interface S_1 et sont donc essentiellement localisées dans $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Les résultats des sections 3 et 4 sur la décroissance exponentielle des fonctions propres feront penser à ceux de S. Agmon (cf. [1]) et d'autres travaux où les auteurs agissent principalement dans des ouverts non bornés. L'analogie s'arrête là pour plusieurs raisons :

- C'est l'influence d'un potentiel q dans l'opérateur $-\nabla \cdot (A\nabla) + q$ qui les motive, la distance d'Agmon permettant d'estimer la concentration de certaines fonctions propres en des zones dépendant de q . Nous n'avons pas de potentiel car nous considérons des opérateurs de la forme $-\nabla \cdot (c\nabla)^3$ ou $-c\Delta$ et ce sont les variations de c qui nous importent.
- Pour les valeurs propres λ inférieures à Σ , l'infimum du spectre essentiel, les fonctions propres associées décroissent exponentiellement à l'infini avec un taux lié à la différence $\sqrt{\Sigma - \lambda}$ (Theorem 4.1 de [1]).

3. Si $c \in C^1$, un changement de fonction inconnue permettrait d'introduire un potentiel mais le problème changerait.

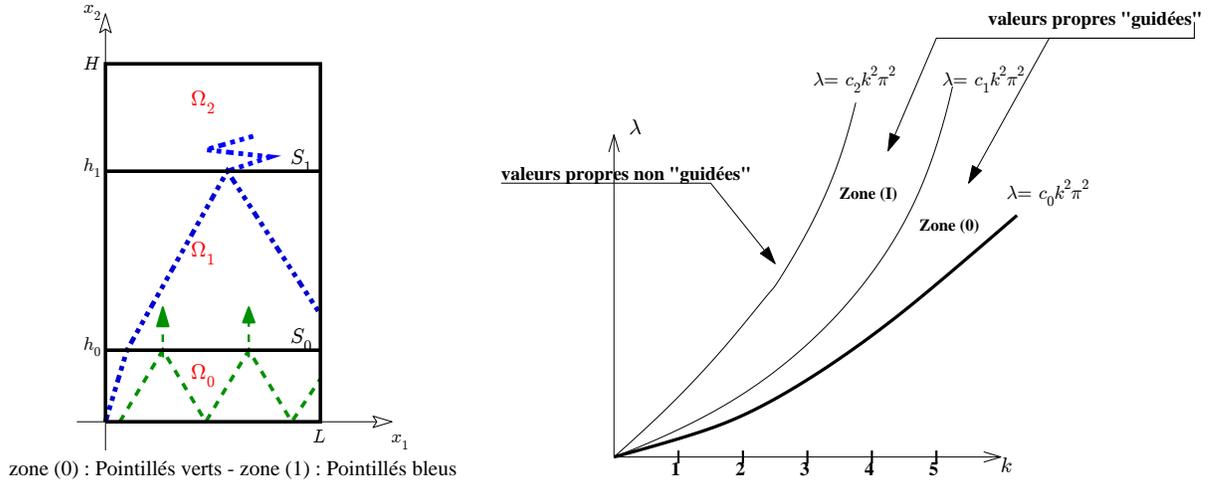


FIGURE 2 – modèle à deux sauts.

Dans le travail qui vient, bien que $\Sigma = +\infty^4$, on ne voit que pour certaines valeurs propres une décroissance d'allure exponentielle pour $x_2 \in (h_i, H)$, $i = 0, 1$.

Nous parlons donc, comme les physiciens, de solutions guidées et le substitut à Σ sera la barrière spectrale mentionnée dans la Remarque 3. Les auteurs de [2] élargissent dans un récent travail des idées d'Agmon mais l'exigence d'un potentiel $q \geq 0$, $q \neq 0$, ne permet qu'une comparaison partielle à ce stade avec nos résultats : elle pourrait être faite avec notre opérateur réduit $A_k u := -(cu')' + c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} u$ puisque le potentiel $c \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ satisfait leur condition.

Le plan de ce papier est le suivant. La section 2 établit une condition suffisante pour qu'une fonction propre se comporte comme si l'opérateur A avait un coefficient de diffusion constant. Cette condition est aussi nécessaire pour le modèle à un saut, il reste à le prouver dans les deux autres cas. Dans les sections suivantes on s'intéresse aux fonctions propres guidées. La section 3 rassemble les propriétés des suites de fonctions propres guidées du modèle à un saut. La section 4 considère aussi les fonctions propres guidées, cette fois-ci pour le modèle à deux sauts, mais elle est incomplète pour le moment. Des extensions sont en devenir : considérer un ouvert Ω qui serait un disque ainsi que Ω_0 , un disque intérieur de même centre, Ω_1 étant la couronne $\Omega \setminus \Omega_0$, ou bien travailler avec un tore plat où le coefficient de diffusion est discontinu. Nous pensons que les résultats seront analogues. Il faudrait aussi envisager la généralisation à des situations moins simples. La plupart des calculs sont renvoyés aux Annexes.

2 Fonction propre non guidée : condition suffisante

Commençons par énoncer le résultat principal de cette section. Il faut noter que la preuve ne nécessite pas la connaissance de la relation de dispersion, celle dont les racines sont les valeurs propres de l'opérateur A .

Théorème 2. Soient $\varepsilon > 0$ et un ouvert $\omega := (l_1, l_2) \times (a, b)$ avec $0 \leq l_1 < l_2 \leq L$, $0 \leq a < b \leq H$, qui sont fixés. Si nous posons $c_H := \sup_{0 < x_2 < H} c(x_2)$, alors il existe une constante C_ω strictement positive, telle que

4. Cas que [1] n'exclue pas.

l'on ait pour toute fonction propre $v_{k,\ell}$ associée à la valeur propre $\lambda_{k,\ell}$

$$\lambda_{k,\ell} > (c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \implies 0 < C_\omega \leq \frac{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\omega)}}{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}} \leq 1. \quad (5)$$

• Cette constante est invariante pour toute translation de ω .

Remarque 1. Lorsque $c \in C^1(0, H)$ mais non à $C^1([0, H])$, il faudra que les translations respectent $0 < \alpha < a < b < H - \alpha < H$ avec α fixé. Pour le modèle à un saut, on peut poser $\varepsilon = 0$ mais il faut effectuer alors une étude fine de la relation de dispersion.

2.1 Preuve du Théorème 2 pour le modèle à N sauts

Dans cette sous-section les hypothèses **(H0)** et **(H1)** sont satisfaites et nous prenons $A = -\nabla \cdot (c\nabla)$. Ne considérant que les valeurs propres $\lambda > c_H \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ (ici $c_H = c_N$), nous nous intéressons aux solutions u de

$$-(cu')' + (c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \lambda)u = 0, \quad u(0) = u(H) = 0. \quad (6)$$

Si on pose $\xi_i := (\frac{\lambda}{c_i} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2})^{\frac{1}{2}}$, la fonction propre u associée à la valeur propre $\lambda = \lambda_{k,\ell}$ (on remplace x_2 par x) s'écrit

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 \sin(\xi_0 x), 0 < x < h_0, \\ u_1(x) &= a_1 \sin(\xi_1 x) + b_1 \cos(\xi_1 x), h_0 < x < h_1, \\ &\vdots = \vdots \\ u_i(x) &= a_i \sin(\xi_i x) + b_i \cos(\xi_i x), h_{i-1} < x < h_i, \\ &\vdots = \vdots \\ u_{N-1}(x) &= a_{N-1} \sin(\xi_{N-1} x) + b_{N-1} \cos(\xi_{N-1} x), h_{N-2} < x < h_{N-1}, \\ u_N(x) &= a_N \sin(\xi_N x) + b_N \cos(\xi_N x), h_{N-1} < x < h_N = H, \\ &= \alpha \sin(\xi_N (H - x)), h_{N-1} < x < h_N = H. \end{aligned} \quad (7)$$

Quelque soit la fonction propre considérée, nous choisissons le même a_0 , par exemple 1, mais, par contre, les (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, N$, dépendent de (k, ℓ) . À l'interface S_i , $i = 0, \dots, N-1$, les conditions de transmission s'écrivent

$$\begin{aligned} a_i \sin(\xi_i h_i) + b_i \cos(\xi_i h_i) &= a_{i+1} \sin(\xi_{i+1} h_i) + b_{i+1} \cos(\xi_{i+1} h_i) \\ c_i a_i \xi_i \cos(\xi_i h_i) - c_i b_i \xi_i \sin(\xi_i h_i) &= c_{i+1} a_{i+1} \xi_{i+1} \cos(\xi_{i+1} h_i) - c_{i+1} b_{i+1} \xi_{i+1} \sin(\xi_{i+1} h_i) \end{aligned} \quad (8)$$

d'où l'écriture matricielle $S_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix}$ avec $\det S_i = -c_i \xi_i$, $\det T_i = -c_{i+1} \xi_{i+1}$ et on vérifie que

$$\begin{aligned} T_i &= \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \cos(\xi_{i+1} h_i) \\ c_{i+1} \xi_{i+1} \cos(\xi_{i+1} h_i) & -c_{i+1} \xi_{i+1} \sin(\xi_{i+1} h_i) \end{pmatrix}, \quad T_i^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \frac{\cos(\xi_{i+1} h_i)}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \\ \cos(\xi_{i+1} h_i) & -\frac{\sin(\xi_{i+1} h_i)}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \end{pmatrix}, \\ S_i &= \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \cos(\xi_i h_i) \\ c_i \xi_i \cos(\xi_i h_i) & -c_i \xi_i \sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix}, \quad S_i^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \frac{\cos(\xi_i h_i)}{c_i \xi_i} \\ \cos(\xi_i h_i) & -\frac{\sin(\xi_i h_i)}{c_i \xi_i} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Il est alors facile d'obtenir pour $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$,

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ -b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1}h_i) & \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}} \cos(\xi_{i+1}h_i) \\ -\cos(\xi_{i+1}h_i) & \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}} \sin(\xi_{i+1}h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \cos(\xi_i h_i) \\ \cos(\xi_i h_i) & -\sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ -b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \cos(\xi_i h_i) \\ -\cos(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1}h_i) & \cos(\xi_{i+1}h_i) \\ \cos(\xi_{i+1}h_i) & -\sin(\xi_{i+1}h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Lemme 1. *Les normes euclidiennes dans \mathbb{R}^2 des opérateurs linéaires associés aux matrices*

$$B_{i+1,i} := \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \cos(\xi_i h_i) \\ -\cos(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix}, B_{i,i+1} := \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1}h_i) & \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}} \cos(\xi_{i+1}h_i) \\ -\cos(\xi_{i+1}h_i) & \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}} \sin(\xi_{i+1}h_i) \end{pmatrix} \quad (12)$$

vérifient

$$\|B_{i+1,i}\| = \max\left(1, \frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i}\right), \|B_{i,i+1}\| = \max\left(1, \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}}\right) \quad (13)$$

Démonstration. On a $\|B_{i+1,i}v\|^2 = v_1^2 + \left(\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i}\right)^2 v_2^2 \leq \max\left(1, \left(\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i}\right)^2\right) (v_1^2 + v_2^2)$ si on pose $v = (v_1, v_2)$, d'où $\|B_{i+1,i}v\| \leq \max\left(1, \frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i}\right)$. Pour obtenir l'égalité on prend $v = (1, 0)$ si $\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \leq 1$ ou $v = (0, 1)$ si $\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \geq 1$. \square

Lemme 2. *Si $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ ($c_H = c_N$), on a*

$$\sqrt{\frac{c_i}{c_{i+1}}} < \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}}, i = 0, \dots, N - 1, \quad (14)$$

$$\frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}} < \sqrt{\frac{c_i(c_N - c_i)}{c_{i+1}(c_N - c_{i+1})}}, i = 0, \dots, N - 2. \quad (15)$$

$$\|B_{i+1,i}\| \leq \sqrt{\frac{c_{i+1}}{c_i}} \quad (16)$$

Démonstration. Pour la première inégalité, il suffit de remarquer que $\left(\frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}}\right)^2 = \frac{c_i}{c_{i+1}} \frac{\lambda - c_i \frac{k^2\pi^2}{L^2}}{\lambda - c_{i+1} \frac{k^2\pi^2}{L^2}}$ où le deuxième facteur est toujours plus grand que 1. Comme l'hyperbole décrite par l'application $\lambda \rightarrow \frac{\lambda - c_i \frac{k^2\pi^2}{L^2}}{\lambda - c_{i+1} \frac{k^2\pi^2}{L^2}}$ est décroissante sur l'intervalle considéré, on en déduit la seconde inégalité. La dernière inégalité est une conséquence de la première inégalité et de (13). \square

Lemme 3. *Si $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2\pi^2}{L^2}$, on a*

$$|a_0| \leq \sqrt{\frac{c_i}{c_0}} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|, i = 0, \dots, N, \quad (17)$$

et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\| \leq M |a_0|, i = 0, \dots, N - 1. \quad (18)$$

Démonstration. $\begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1}h_i) & \cos(\xi_{i+1}h_i) \\ \cos(\xi_{i+1}h_i) & -\sin(\xi_{i+1}h_i) \end{pmatrix}$ étant unitaire, on a $|a_0| \leq \|B_{1,0}\| \cdots \|B_{i,i-1}\| \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|$ d'où $|a_0| \leq \sqrt{\frac{c_i}{c_0}} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|$, $i = 0, \dots, N$ en utilisant (16). La matrice $\begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \cos(\xi_i h_i) \\ \cos(\xi_i h_i) & -\sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix}$ étant aussi unitaire, on a $\left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\| \leq \|B_{i-1,i}\| \cdots \|B_{0,1}\| |a_0|$ ce qui permet de dire, utilisant (15), que les vecteurs $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ sont bornés, pour $i = 0, \dots, N-1$, par $M_1|a_0|$ où M_1 est une constante ne dépendant pas de la valeur propre $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. \square

On voudrait que (18) reste vraie pour $i = N$ mais $\|B_{N-1,N}\| = \max(1, \frac{c_{N-1}\xi_{N-1}}{c_N\xi_N})$ tendra vers l'infini s'il existe une suite infinie de valeurs propres $(\lambda_{k_n,\ell_n})_n$, $\lambda_{k_n,\ell_n} - c_N \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2} \rightarrow 0^+$. Pour cette raison, nous considérerons les valeurs propres satisfaisant $\lambda_{k,\ell} > (c_N + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. En effet, avec ce choix⁵, on a $\frac{c_{N-1}\xi_{N-1}}{c_N\xi_N} \leq \sqrt{\frac{c_{N-1}(c_N - c_{N-1} + \varepsilon)}{c_N\varepsilon}}$ ce qui permet d'affirmer que les couples (a_i, b_i) , $i = 0, \dots, N$, sont comparables les uns avec les autres ($b_0 = 0$) et nous obtenons la

Proposition 1. *Si $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que*

$$\left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\| \leq M_\varepsilon |a_0| \leq M_\varepsilon \sqrt{\frac{c_i}{c_0}} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|, i = 0, \dots, N, \forall \lambda_{k,\ell} > (c_N + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}. \quad (19)$$

qui a pour conséquence (5). En effet, on commence par noter que

1. nous pouvons écrire $a_i \sin(\xi_i x) + b_i \cos(\xi_i x) = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cos((\xi_i - \beta_i)x)$ où $0 \leq \beta_i < 2\pi$ lorsque $h_{i-1} < x < h_i$;
2. il existe au moins un indice j , $0 \leq j \leq N$ tel que $\omega_j := \omega \cap (h_j, h_{j+1}) = (l_1, l_2) \times (d, d')$ avec $d' - d \geq \frac{b-a}{N+1}$.
3. $\int_d^{d'} u^2(x) dx = \frac{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}{2} (d' - d) \left[1 + \frac{\sin((\xi_j - \beta_j)(d' - d))}{(\xi_j - \beta_j)(d' - d)} \right]$.

Puis, si $\xi_j - \beta_j = 0$ alors $\int_{\omega_j} u^2(x) dx = \frac{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}{2} (d' - d)$ et la preuve est finie en utilisant (19). Sinon, on a $\xi_j - \beta_j \neq 0$ et on pose $\bar{M} = \max_{\xi_i - \beta_i \neq 0} \left| \frac{\sin((\xi_i - \beta_i)(d' - d))}{(\xi_i - \beta_i)(d' - d)} \right| < 1$ qui est une quantité indépendante de l'indice i . On peut encore conclure puisque $\int_d^{d'} u^2(x) dx \geq (1 - \bar{M}) \frac{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}{2} (d' - d)$.

2.2 Preuve du Théorème 2 pour le modèle C^1

Si on suppose déjà que le coefficient c est une fonction continue de x_2 strictement croissante et strictement positive, l'opérateur $A = -\nabla \cdot (c\nabla)$ devient alors $A = -c\partial_1 - \partial_2(c\partial_2)$. Cherchant des fonctions propres v de la forme $v(x) = \sin(\frac{k\pi}{L}x_1)u(x_2)$ associées à la valeur propre λ , nous introduisons la famille d'opérateurs réduits autoajoints (A_k) , agissant dans $L^2(0, H)$, définis formellement par $A_k u = -(cu)'' + c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} u$, $u(0) = u(H) = 0$, et nous sommes amenés à résoudre l'équation

$$(cu)'' + (\lambda - c \frac{k^2 \pi^2}{L^2})u = 0, u(0) = u(H) = 0. \quad (20)$$

5. Le choix $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \varepsilon$ ne conviendrait pas.

Pour u dans le domaine de l'opérateur réduit A_k , on a $\int_0^H (cu'^2 + (c\frac{k^2\pi^2}{L^2} - \lambda)u^2)dx = 0$ ce qui implique que le spectre $\sigma(A_k)$ vérifie $\sigma(A_k) \subset ((\inf c)\frac{k^2\pi^2}{L^2}, +\infty)$. Lorsque le coefficient c a un peu de régularité on peut se ramener à la forme $F'' + QF = 0$. Par exemple, si le coefficient c est deux fois dérivable, le changement de fonction $F = \frac{u}{\sqrt{c}}$ donne

$$F'' + \frac{c'^2 - 2cc'' + 4(\lambda - c\frac{k^2\pi^2}{L^2})c}{4c^2}F = 0, \quad (21)$$

ce qui donne à penser que la solution u aura un comportement sinusoïdal pour $\lambda > \max_x(c\frac{k^2\pi^2}{L^2} + \frac{cc''}{2})$. Intuitivement, on serait dans la situation non guidée de la Figure 1.

Nous décomposons la preuve en quatre étapes.

• **Étape 1 : Se ramener à $F'' + QF = 0$.**

La transformation de Liouville demande le changement de variable $s = \int_0^x \frac{1}{c(t)}dt$. Cette application, $g : x \rightarrow s$, est positive, croissante et de classe C^1 . Sa réciproque g^{-1} est aussi positive, croissante et de classe C^1 . Posant $F(s) = u(g^{-1}(s))$, on vérifie que

$$\begin{aligned} F'(s) &= u'(g^{-1}(s))c(g^{-1}(s)) \\ F''(s) &= u''(g^{-1}(s))(c(g^{-1}(s)))^2 + u'(g^{-1}(s))c'(g^{-1}(s))c(g^{-1}(s)) \end{aligned}$$

ce qui implique $u''(g^{-1}(s))c(g^{-1}(s)) = \frac{F''(s)}{c(g^{-1}(s))} - u'(g^{-1}(s))c'(g^{-1}(s))$. Comme $cu'' + c'u' + (\lambda - c\frac{k^2\pi^2}{L^2})u = 0$, on a

$$\begin{aligned} F'' + QF &= 0. \\ Q(s) &= (\lambda - \frac{k^2\pi^2}{L^2}c \circ g^{-1}(s))c \circ g^{-1}(s) \end{aligned}$$

Pour ces opérations on a supposé que c est dérivable. La fonction Q est positive dès que λ est assez grand.

• **Étape 2 : utiliser la transformation de Prüfer modifiée**

La résolution de $F'' + QF = 0$, se ramène à la résolution des deux équations différentielles du premier ordre suivantes (cf. [14])

$$\begin{cases} \phi'(s) = -Q^{1/2} - \frac{1}{4}\frac{Q'}{Q}\sin(2\phi) \\ \frac{1}{R}R'(s) = \frac{1}{4}\frac{Q'}{Q}\cos(2\phi). \end{cases} \implies \begin{cases} F(s) = R(s)Q^{-1/4}\cos(\phi(s)), \\ F'(s) = R(s)Q^{1/4}\sin(\phi(s)). \end{cases} \quad (22)$$

• **Étape 3 : Propriétés de l'amplitude R et de la phase ϕ**

Posant $\bar{c}(s) := c(g^{-1}(s))$, $\bar{c}_M := \int_0^H \frac{1}{c(t)}dt$, nous avons $F'' + QF = 0$ sur l'intervalle $(0, \bar{c}_M)$. On note $c_0 := c(0)$ et $c_H := c(H)$.

Lemme 4. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que $c \in C^1([0, H])$. On a

1.

$$\begin{aligned} (\lambda \geq c_H \frac{k^2\pi^2}{L^2}) &\implies c_0^2(\frac{\lambda}{c(H)} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}) \leq Q \leq c_H^2(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}) \\ (\lambda \geq (c_H + \varepsilon)\frac{k^2\pi^2}{L^2}) &\implies \left| \frac{Q'}{Q}(t) \right| \leq \frac{c'}{c}(1 + \frac{\varepsilon}{c}) \end{aligned} \quad (23)$$

2. Si $\lambda \geq (c_H + \varepsilon)\frac{k^2\pi^2}{L^2}$, les solutions ϕ et R de l'équation différentielle (22) vérifient

$$\phi(s) \sim - \int_0^s Q^{1/2}(t)dt \text{ quand } (\frac{\lambda}{\bar{c}} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}) \rightarrow \infty \quad (24)$$

$$R(s) = Ce^{\frac{1}{4}\int_0^s \frac{Q'}{Q}\cos(2\phi)dr}, C \neq 0. \quad (25)$$

Démonstration. De $Q'(s) = \bar{c}'(\lambda - 2\bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2})$ on voit que $\frac{Q'}{Q} = \frac{\bar{c}'}{\bar{c}}(\frac{\lambda - 2\bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2}}{\lambda - \bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2}}) = \frac{\bar{c}'}{\bar{c}}(1 - \frac{\bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2}}{\lambda - \bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2}})$ et comme, avec l'hypothèse faite, on a $\lambda - \bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2} \geq \varepsilon\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ on arrive à $\frac{\bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2}}{\lambda - \bar{c}\frac{k^2\pi^2}{L^2}} \leq \frac{\bar{c}}{c_H + \varepsilon} < 1$. Si on avait supposé $\lambda \geq (2c_H + \varepsilon)\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ on aurait $0 < \frac{Q'}{Q}(s) < \frac{\bar{c}'}{\bar{c}}$. Noter que pour (24) la condition $(\frac{\lambda}{\bar{c}} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}) \rightarrow \infty$ est remplie si $k \rightarrow \infty$ mais aussi quand $\lambda = \lambda_{k,\ell}$ avec $\ell \rightarrow \infty$. \square

L'amplitude R n'est jamais nulle sinon elle le serait identiquement. En imposant $\phi(0) = 0$ ou $\phi(0) = \pi/2$ on obtient deux solutions linéairement indépendantes d'où la solution cherchée correspond à $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ (à un multiple près)⁶. On a donc trouvé la forme écrite de la fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda \geq (c_H + \varepsilon)\frac{k^2\pi^2}{L^2}$:

$$u(x) = R(g(x))(Q(g(x)))^{-1/4} \cos(\phi(g(x))) \text{ avec } g(x) = \int_0^x \frac{1}{c(t)} dt. \quad (26)$$

• **Étape 4 : Estimation de $\|u\|_{L^2}^2$**

Corollaire 1. Soient $\varepsilon > 0$ et un ouvert $\omega \subset \Omega$. Il existe une constante $a_{\varepsilon;\omega} > 0$, indépendante par translation de ω dans Ω , telle

$$a_{\varepsilon;\omega} \leq \frac{\int_{\omega} |u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} \leq 1 \quad (27)$$

pour la famille des fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda > (c_H + \varepsilon)\frac{k^2\pi^2}{L^2}$, hormis un ensemble fini.

Démonstration. Il vient du Lemme 4 que le module de la fonction R est borné inférieurement et supérieurement par deux constantes strictement positives : $r_1 < |R| < r_2$ puisque $0 < s < \bar{c}_M$, et si on joint ce résultat à l'encadrement de Q de (23) on peut affirmer que pour $0 < a < b < H$

$$\begin{aligned} r_1^2 c_H^{-1} \left(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)^{-1/2} \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx &\leq \int_a^b (R(g(x)))^2 (Q(g(x)))^{-1/2} \cos^2(\phi(g(x))) dx \\ &\leq r_2^2 c_0^{-1} \left(\frac{\lambda}{c_H} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)^{-1/2} \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

On a un encadrement similaire pour $\int_0^H (R(g(x)))^2 (Q(g(x)))^{-1/2} \cos^2(\phi(g(x))) dx$ ce qui veut dire qu'il suffit de regarder le rapport $\int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx / \int_0^H \cos^2(\phi(g(x))) dx$. Comme ϕ' est négative pour les valeurs propres considérées, à l'exception éventuelles d'un nombre fini, la fonction $x \rightarrow \phi(g(x))$ est strictement décroissante. Avec le nouveau changement de variable $t = \phi(g(x))$, on a $dx = \frac{c(g^{-1}(\phi^{-1}(t)))}{\phi'(\phi^{-1}(t))} dt$ d'où

$$\int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx = \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \frac{c(g^{-1}(\phi^{-1}(t)))}{-\phi'(\phi^{-1}(t))} \cos^2 t dt. \quad (29)$$

6. La dimension du sous-espace propre de chacune des valeurs propres de cet opérateur est de dimension 1. En effet, soient u_1 et u_2 deux fonctions propres associées à λ . Le wronskien $W = cu_1' u_2 - cu_2' u_1$ a une dérivée nulle sur $(0, H)$ ce qui montre que les vecteurs (u_1, cu_1') et (u_2, cu_2') sont colinéaires.

7. Dès que $2\varepsilon < c_H - c_0$, il existe $0 < d < \frac{c_0}{c_H}$ tel que $d < (\frac{\lambda}{c_H} - \frac{k^2\pi^2}{L^2})(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2\pi^2}{L^2})^{-1} < 1$

On peut oublier $c(g^{-1}(\phi^{-1}(t)))$ car on le contrôle très bien. On se rappelle que $-\phi' = Q^{1/2} + \frac{1}{4}\frac{Q'}{Q}\sin(2\phi)$. Comme $\lambda > (c_H + \varepsilon)\frac{k^2\pi^2}{L^2}$, on a

$$(1 - \varepsilon_1)Q^{1/2} \leq -\phi' \leq (1 + \varepsilon_1)Q^{1/2} \quad (30)$$

à l'exception éventuelle d'un nombre fini de valeurs propres $\lambda \in \Lambda$ (le cardinal de Λ dépend de ε) et, par suite,

$$\begin{aligned} \frac{M}{1 + \varepsilon_1} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \frac{\cos^2 t}{Q^{1/2}(t)} dt &\leq \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx \leq \frac{M}{1 - \varepsilon_1} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \frac{\cos^2 t}{Q^{1/2}(t)} dt \\ \frac{M(1 - \varepsilon_2)}{c_H(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2\pi^2}{L^2})^{1/2}} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \cos^2 t dt &\leq \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx \leq \frac{M(1 + \varepsilon_2)}{c_0(\frac{\lambda}{c_H} - \frac{k^2\pi^2}{L^2})^{1/2}} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \cos^2 t dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Dans l'intégrale $\int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}[\phi(g(a)) - \phi(g(b)) + \frac{\cos(2(\phi(g(a)))) - \cos(2(\phi(g(b))))}{2}]$ le dernier terme du crochet est majoré par 1. Pour $\phi(g(a)) - \phi(g(b)) = (g(b) - g(a))(-\phi'(d_1))$ on a vu que l'on contrôle $\phi'(d_1)$ indépendamment de la position de a et b (utiliser (23) et (30)). Il reste à constater que $(g(b) - g(a)) = (b - a)\frac{1}{d_2}$ pour un réel $\frac{1}{c_H} < d_2 < \frac{1}{c_0}$ ce qui montre que c'est la différence $(b - a)$ qui importe. On fait de même pour $\int_{\phi(g(H))}^{\phi(g(0))} \cos^2 t dt$ ce qui permet de conclure pour un parallélépipède puisque $\int_{l_1}^{l_2} \sin^2(k\pi x_1) dx_1 = \frac{l_1 - l_2}{2} - [\frac{\sin(2k\pi x_1)}{4k\pi}]_{l_1}^{l_2}$. Il n'y a pas de difficulté à généraliser ceci à n'importe quel ouvert ω puisque ce dernier contient toujours un parallélépipède. \square

3 Concentration : cas du modèle à un saut

Maintenant nous considérons les ondes guidées pour un milieu avec un coefficient de diffusion ayant deux valeurs. De manière intuitive, les fonctions propres sont celles dont l'essentiel de la masse est concentrée dans une partie de l'ouvert Ω . Ici, ces fonctions propres correspondent exactement aux ondes ayant une réflexion dite totale sur l'interface.

On pose par commodité, dans cette section, $c_0 = 1, L = 1$ et parfois $h_0 = \frac{1}{2}$. Ces restrictions n'ont aucune conséquence sur la généralité des résultats car des transformations unitaires permettent de se ramener au cas général (cf. Remarque 10). Avant de détailler la formulation des $v_{k,\ell}$, précisons quelques notations dans lesquelles les $\lambda_{k,\ell}$ sont les valeurs propres de l'opérateur A que nous choisirons de la forme $A = -c\Delta$ (la forme divergente $-\nabla \cdot c\nabla$ donnerait des résultats généraux analogues)

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0(k, \ell) := (\lambda_{k,\ell} - k^2\pi^2)^{1/2}, \\ \xi'_1 &= \xi'_1(k, \ell) := (k^2\pi^2 - \frac{\lambda_{k,\ell}}{c_1})^{1/2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Les fonctions propres dites guidées sont de la forme

$$v_{k,\ell}(x) = a_{k,\ell}\sqrt{2}\sin(k\pi x_1) \begin{cases} \sin(\xi_0 x_2) & \text{si } 0 < x_2 < h_0, \\ \frac{\sin(\xi_0 h_0)}{\sinh(\xi'_1(H - h_0))} \sinh(\xi'_1(H - x_2)) & \text{si } h_0 < x_2 < H, \end{cases} \quad (33)$$

où les quantités $\lambda_{k,\ell}, \xi_0$ et ξ'_1 sont liées par la relation de dispersion

$$\frac{\tanh(\xi'_1(H - h_0))}{\xi'_1} = -\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{\xi_0}. \quad (34)$$

Cette relation exprime la continuité des traces des fonctions propres et de leurs dérivées normales en $x_2 = h_0$.

Remarque 2. Si $(u_{k_n, \ell_n})_n$ est une suite de solutions guidées, il n'est pas possible que $\xi_0(k_n, \ell_n) \rightarrow 0$ puisque l'on aurait à la fois $\xi'_1 \rightarrow \infty$ et $\frac{\tanh(\xi'_1(H-h_0))}{\xi'_1} \rightarrow -h_0$, ce qui est impossible puisque l'expression de gauche est positive. Par conséquent, $\xi'_1(k_n, \ell_n) \rightarrow +\infty$ et ξ_0 borné implique $\sin(\xi_0 h) \rightarrow 0$. De même, $\sin(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ implique $\xi'_1 \rightarrow \infty$.

Les coefficients $a_{k, \ell}$ servent à la normalisation des fonctions propres. Noter que les solutions ne vérifient ni $\xi'_1 = 0$ ni $\xi_0 = 0$.

Remarque 3. Les quantités ξ_0 et ξ'_1 ont une interprétation spectrale géométrique simple si on pose $\kappa := k^2 \pi^2$: dans le nouveau repère (κ, λ) ⁸ les paraboles deviennent des droites et la quantité $(\xi'_1)^2$ est égale à $\frac{\sqrt{1+c_1^2}}{c_1} d(M_{\lambda_{k, \ell}}, B)$ où $d(M_{\lambda_{k, \ell}}, B)$ est la distance du point $M_{\lambda_{k, \ell}} = (\kappa, \lambda_{k, \ell})$ à la barrière spectrale d'équation $\lambda = c_1 \kappa$. De son côté, $\sqrt{2} \xi_0^2$ est la distance de $M_{\lambda_{k, \ell}}$ à la frontière spectrale d'équation $\lambda = \kappa$.

Pour k fixé, on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}_k := \max\{\ell; \ell \geq 1, \lambda_{k, \ell} < c_1 k^2 \pi^2\}$. C'est le plus grand entier ℓ tel que $\lambda_{k, \ell}$ est une valeur propre guidée. On posera aussi dans l'article

$$C_{k; \omega} := \text{vol}(\omega) \left(1 - \frac{\sin(k\pi(l_2 - l_1))}{k\pi(l_2 - l_1)} \cos(k\pi(l_2 + l_1)) \right), \quad (35)$$

$$R_{k, \ell; \omega} := \frac{\int_{\omega} |v_{k, \ell}(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |v_{k, \ell}(x)|^2 dx} \quad (36)$$

pour les fonctions propres $v_{k, \ell}$, $1 \leq \ell \leq \mathcal{L}$, $k \geq 1$, avec $\omega := (l_1, l_2) \times (a, b)$, $0 \leq l_1 < l_2 \leq 1$, $0 \leq a < b \leq H$ et $v_{k, \ell}(x) := a_{k, \ell} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k\pi x_1) u_{k, \ell}(x_2)$ où $L = 1$, $u_{k, \ell}$ étant défini implicitement par (33). Noter qu'il ne faut pas confondre les nombres réels l_1 et l_2 avec les entiers ℓ_n , que l'on utilise. Quand il n'y a aucune possibilité d'ambiguïté, la notation C désigne une constante strictement positive qui peut prendre différentes valeurs. Noter qu'étudier les $v_{k, \ell}$ revient à étudier les $u_{k, \ell}$.

3.1 Les énoncés

Théorème 3. *Suivant la localisation de l'ouvert $\omega := (l_1, l_2) \times (a, b) \subset \Omega$ on a*

- Cas 1 : $\omega \subset \Omega_1$, i.e. $h_0 \leq a < b$, et une suite de fonctions propres guidées $(v_{k_n, \ell_n})_{n \geq 1}$.

Si la suite $(v_{k_n, \ell_n})_n$ vérifie $\xi'_1 \rightarrow \infty$, alors on a

$$\frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{l_2 - l_1}{h_0} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}} \frac{e^{-2\xi'_1(a-h_0)}}{\xi'_1}. \quad (37)$$

Avec $k_n \rightarrow \infty$, ceci a lieu, en particulier, dans les deux cas suivants : $\ell_n \leq \mathcal{L}_{k_n} - 1$, ou bien s'il existe une constante d , $c_0 = 1 < d < c_1$, telle que $(k_n \pi)^2 < \lambda_{k_n, \ell_n} \leq d(k_n \pi)^2$.

- Cas 2 : $\omega \subset \Omega_0$ et une suite de fonctions propres guidées $(v_{k_n, \ell_n})_{n \geq 1}$.

1. Si la suite $(v_{k_n, \ell_n})_n$ vérifie $\xi'_1 \rightarrow \infty$, alors on a l'encadrement suivant pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $k \geq N(\varepsilon)$,

$$\frac{\text{vol}(\omega)}{h_0} (1 - \varepsilon) \leq \frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{5}{2} \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0} (1 + \varepsilon). \quad (38)$$

Ceci a lieu, en particulier, si $\ell_n \leq \mathcal{L}_{k_n} - 1$ ou bien s'il existe une constante d , $c_0 = 1 < d < c_1$, telle que $(k_n \pi)^2 < \lambda_{k_n, \ell_n} \leq d(k_n \pi)^2$.

8. Ce n'est pas celui qui correspond exactement aux coordonnées microlocales usuelles.

2. Pour la suite de fonctions propres guidées associées aux $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall k > N \implies \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0 + \frac{2}{3}(H - h_0)}(1 - \varepsilon) \leq \frac{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0}(1 + \varepsilon). \quad (39)$$

Si, de plus, $\xi'_1 \rightarrow \infty$ pour une suite extraite, celle-ci vérifie

$$\frac{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{1}{h_0} \text{vol}(\omega). \quad (40)$$

• **Cas 3** : ω est une bande ouverte à cheval sur l'interface, i.e. $\omega := (0, L) \times (h_0 - \alpha_-, h_0 + \alpha_+)$, $0 < \alpha_- < h_0$, $\alpha_+ < H - h_0$. On pose $\omega_i := \omega \cap \Omega_i$, $i = 0, 1$, et soit $(v_{k_n, \ell_n})_n$ une suite de fonctions propres guidées. Si $\xi'_1 \rightarrow \infty$ pour la suite de fonctions propres guidées $(v_{k_n, \ell_n})_n$ il alors existe une constante positive $\bar{a} = \bar{a}(\alpha_-) < 1$ telle que, pour tout n , on a

$$\frac{1}{2\alpha_-} \frac{\sin^2(\xi_0 h)}{\xi'_1} (1 + o(e^{-\xi'_1 \alpha_+})) \leq \frac{\|v_{k_n, \ell_n}^2\|_{L^2(\omega_1)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega_0)}^2} \leq \frac{1}{1 - \bar{a}} \frac{\sin^2(\xi_0 h)}{\xi'_1} (1 + o(e^{-\xi'_1 \alpha_+})) \quad (41)$$

Ceci a lieu, en particulier, si $\ell_n \leq \mathcal{L}_{k_n} - 1$ ou bien s'il existe une constante d , $c_0 = 1 < d < c_1$, telle que $(k_n \pi)^2 < \lambda_{k_n, \ell_n} \leq d(k_n \pi)^2$.

Nous n'avons considéré que des suites de fonctions propres sans répétition et, dans le Cas 3, pour revenir à un $\omega = (l_1, l_2) \times (h_0 - \alpha_-, h_0 + \alpha_+)$, il suffit de multiplier par le coefficient $2 \int_{l_1}^{l_2} \sin^2(k\pi x_1) dx_1$ les résultats affichés.

Corollaire 2. Soit $\omega := (l_1, l_2) \times (a, b) \subset \Omega$ et une suite de fonctions propres guidées $(v_{k, \ell})_k$, l'indice ℓ étant fixé. On a alors

• **Cas 1** : $\omega \subset \Omega_1$, i.e. $h_0 \leq a < b$,

$$a_1 \lambda_{k, \ell}^{-\frac{3}{2}} e^{-a_2 \lambda_{k, \ell}^{\frac{1}{2}}} \|v_{k, \ell}\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim \|v_{k, \ell}\|_{L^2(\omega)}^2, k \rightarrow \infty, \quad (42)$$

où $a_1 = \frac{(l_2 - l_1)(\ell\pi)^2}{h_0^3} \left(\frac{c_1}{c_1 - 1}\right)^{\frac{3}{2}}$ et $a_2 = 2(a - h_0) \sqrt{\frac{c_1 - 1}{c_1}}$.

• **Cas 2** : $\omega \subset \Omega_0$, i.e. $0 \leq a < b < h_0$,

$$\frac{\|v_{k, \ell}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k, \ell}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{1}{h_0} \text{vol}(\omega) \left(1 - \frac{\sin(\ell \frac{\pi}{h_0} (b - a))}{2\ell \frac{\pi}{h_0} (b - a)} \cos(2\ell \frac{\pi}{h_0} (a + b))\right), k \rightarrow \infty, \quad (43)$$

• **Cas 3** : ω est une bande ouverte à cheval sur l'interface, i.e. $\omega := (0, L) \times (h_0 - \alpha_-, h_0 + \alpha_+)$, $0 < \alpha_- < h_0$, $\alpha_+ < H - h_0$. On pose $\omega_i := \omega \cap \Omega_i$, $i = 0, 1$,

$$\frac{2}{3\alpha_-} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\xi'_1} (1 + o(e^{-\xi'_1 \alpha_+})) \leq \frac{\|v_{k, \ell}\|_{L^2(\omega_1)}^2}{\|v_{k, \ell}\|_{L^2(\omega_0)}^2} \leq \frac{2}{\alpha_-} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\xi'_1} (1 + o(e^{-\xi'_1 \alpha_+})) \quad (44)$$

où $\sin^2(\xi_0 h_0) \sim \frac{c_1}{\pi^2 h^2 (c_1 - 1)} \frac{1}{k_n^2}$ et $\xi'_1 \rightarrow \infty$.

Remarque 4. Il est important de noter que

1. Lorsque $\omega = \Omega_1$ et $\xi_1' \rightarrow \infty$ pour la suite considérée, le cas 1 du Corollaire 2 dit que la norme L^2 se concentre dans Ω_0 en $O(\frac{1}{\xi_1'})$. De plus, pour $\omega = (0, 1) \times (h_0 - \varepsilon, h_0)$, $\varepsilon > 0$, le Cas 2-item 1 du Théorème 3 implique que $\liminf_{k \rightarrow \infty} R_{k, \ell_n, \omega} > 0$, (cf. (51)), l'indice ℓ_n pouvant varier avec k .
2. Pour le modèle à un saut, il est certain que la courbe $\lambda = c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ définit la frontière entre les valeurs propres guidées et celles qui ne le sont pas. Ceci n'est pas encore prouvé pour le problème à plusieurs sauts.

Il reste à étudier la suite $(v_{k, \mathcal{L}_k})_k$, c'est à dire la suite des fonctions propres dont les valeurs propres sont les plus proches de la barrière spectrale. Pour cette suite on a $\xi_0 = \xi_0(k, \mathcal{L}_k) \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$ mais les comportements de $\xi_1'(k, \mathcal{L}_k)$ et $\sin^2(\xi_0 h_0)$ sont plus délicats à déterminer car l'item 2 du Lemme 5 ne répondra à toutes les possibilités. Par souci de simplicité rappelons que $h_0 = \frac{1}{2}$ ⁹. Il faut se reporter à l'Annexe B pour certains détails énoncés et utilisés dans le Cas 1 du Corollaire 2 et la Proposition 2.

Proposition 2. Supposons $h_0 = \frac{1}{2}$, $\bar{\omega} \subset \Omega_1$

1. Si $\sqrt{c_1 - 1} \in \mathbb{N}$, il existe des constantes positives C_1, C_1', C_2, C_2' telles que la suite de fonctions propres guidées correspondant aux valeurs propres $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ vérifie l'encadrement

$$C_1' e^{-C_2' \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_1 e^{-C_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (45)$$

2. Si $\sqrt{c_1 - 1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que la suite de fonctions propres guidées correspondant aux valeurs propres $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ vérifie l'encadrement

$$C_1 e^{-C_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2 \leq \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (46)$$

3. Si $\sqrt{c_1 - 1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, il existe des constantes positives C_1, C_1', C_2, C_2' et une sous-suite de fonctions propres guidées correspondant aux valeurs propres $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ vérifiant l'encadrement

$$C_1' e^{-C_2' \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_1 e^{-C_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (47)$$

Corollaire 3. Soient (φ_j) une base orthonormale de fonctions propres associées à la suite croissante des valeurs propres $\mu_j \leq \mu_{j+1} \leq \dots$ de l'opérateur $A = -\nabla \cdot (c\nabla)$ et un ouvert $\omega \subset \Omega$. On sait ([10]) qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} |a_j|^2 \leq C e^{C\mu^{\frac{1}{2}}} \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} a_j \varphi_j \right|^2 dx, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall \mu > 0. \quad (48)$$

Il n'est pas possible de remplacer le facteur $e^{C\mu^{\frac{1}{2}}}$ par $e^{C\mu^{\frac{1}{\alpha}}}$ avec $\alpha > 4$.

C'est une conséquence immédiate de la Proposition 2 en prenant une suite de fonctions propres satisfaisant cette Proposition et $\omega \subset \Omega_1$.

Lemme 5 (Lemme préparatoire). On considère une suite de fonctions propres guidées $(u_{k_n, \ell_n})_n$.

9. Ce choix ne change pas la nature du résultat puisque l'on ne fixe pas en même temps la valeur numérique de $c > 1$.

1. La constante $C_{k_n; \omega}$, définie par (35), tend vers $\text{vol}(\omega)$ si $k_n \rightarrow \infty$.
2. Si $\ell_n = \ell$ fixé, on a $\lambda_{k_n, \ell} - \lambda^\ell = o(1)$ où $\lambda^\ell = \lambda^\ell(k_n) := k_n^2 \pi^2 + \ell^2 \frac{\pi^2}{h^2}$, ce qui implique que $\xi_0(k_n, \ell) \rightarrow \ell \frac{\pi}{h}$ et $\xi'_1(k_n, \ell) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.
On a plus précisément

$$\sqrt{\frac{c_1 - 1}{c_1}} \lambda_{k_n, \ell}^{\frac{1}{2}} - \xi'_1(k_n, \ell) = \frac{\pi \ell^2}{2h_0^2} \sqrt{\frac{c_1 - 1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k_n} + o\left(\frac{1}{k_n}\right), \quad (49)$$

$$\sin(\xi_0 h_0) = -\frac{1}{\pi h_0} \sqrt{\frac{c_1 - 1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k_n} + o\left(\frac{1}{k_n}\right) \quad (50)$$

3. $(\xi'_1 = \xi'_1(k_n, \ell_n) \rightarrow 0) \implies |\sin(\xi_0 h_0)| > C > 0$.

Démonstration. L'item 1 est évident. Pour l'item 2, voir l'Annexe A. Pour l'item 3, on utilise la relation de dispersion (34) et on remarque que $\xi_0(k_n, \ell) \geq \xi_0(k_n, 1) \rightarrow \frac{\pi}{h_0}$ d'après l'item précédent. Il suffit alors d'agir par l'absurde puisque l'on aurait $-\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{\xi_0} \sim (H - h_0)$, les deux côtés ayant des signes opposés. \square

3.2 Preuves

3.2.1 Cas 1 du Théorème 3 et du Corollaire 2 : décroissance dans $\omega \subset \Omega_1$

L'ouvert ω étant contenu dans Ω_1 , la partie où le coefficient de diffusion c est au maximum, on part de

$$R_{k, \ell; \omega} = C_{k; \omega} \frac{\frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \left(\frac{\sinh(\xi'_1(b-a))}{\xi'_1(b-a)} \cosh(\xi'_1(2H - (b+a))) - 1 \right)}{h_0 \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right) + (H - h_0) \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \left(\frac{\sinh(2\xi'_1(H-h_0))}{2\xi'_1(H-h_0)} - 1 \right)}.$$

Tout repose sur les résultats de l'Annexe A à laquelle il convient de se reporter. Appliquant l'hypothèse $\ell_n = \ell$ fixe dans le Théorème 3 et les propriétés du Lemme 5 on a directement le Corollaire 2. De plus, l'estimation (37) est moins précise que (42) si les indices ℓ_n sont tous égaux puisqu'on sait que $\sin(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ dans le cas de (42).

Par contre, on peut remplacer dans (37) le terme $\xi'_1(k_n, \ell_n)$ par la racine carrée de la distance du point $M = (k^2 \pi^2, \lambda_{k_n, \ell_n})$ à la barrière spectrale, à un coefficient multiplicatif près. Se reporter à la Remarque 3 dans ce but. Noter que les quantités $1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}$ ne tendent pas vers 0 dans (37) et que, si ω touche l'interface, l'exponentielle disparaît dans (42) et (37).

3.2.2 Cas 2 du théorème 3 et du Corollaire 2 : concentration dans $\omega \subset \Omega_0$

Maintenant on a

$$R_{k, \ell; \omega} = C_{k; \omega} \frac{1 - \frac{\sinh(\xi_0(b-a))}{\xi_0(b-a)} \cos(\xi_0(a+b))}{h_0 \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right) + (H - h_0) \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \left(\frac{\sinh(2\xi'_1(H-h_0))}{2\xi'_1(H-h_0)} - 1 \right)},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$R_{k, \ell; \omega} = \text{vol}(\omega) \frac{(1 + O(\frac{1}{k})) \left(1 - \frac{\sinh(\xi_0(b-a))}{\xi_0(b-a)} \cos(\xi_0(a+b)) \right)}{h_0 \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right) + \sin^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{1}{\xi'_1 \tanh(\xi'_1(H-h_0))} - \frac{H-h_0}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \right)}. \quad (51)$$

- Pour le Corollaire 2, on sait que, d'une part $\xi_0 \rightarrow \ell \frac{\pi}{h_0}$ (cf. Lemme 5) et, d'autre part, $\xi'_1 \rightarrow \infty$. Il suffit alors d'utiliser (51).
- Pour le point 1 du Théorème 3, on a $\xi'_1 \rightarrow \infty$ et $h_0(1 - \frac{1}{2\pi}) < h_0(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}) < h_0$.
- Pour le second point, on sait que $\xi_0(k, \mathcal{L}_k) \rightarrow \infty$ mais le comportement de ξ'_1 présente une difficulté. Si $\xi'_1 \rightarrow \infty$, ce qui arrive lorsque $\sqrt{c_1 - 1}$ est un entier, on a $\frac{\|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|u_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{1}{h} \text{vol}(\omega)$. Lorsque $\sqrt{c_1 - 1}$ n'est pas un entier, ce sera le cas pour une sous-suite comme il sera montré dans l'item 2 du Lemme 6. Sinon, on vérifie que $0 < \frac{1}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \left(\frac{\sinh(2\xi'_1(H-h_0))}{2\xi'_1(H-h_0)} - 1 \right) \leq \frac{2}{3}$.

3.2.3 Cas 3 du théorème 3 et du Corollaire 2 : concentration sous l'interface S_0 .

Si R_{k_n, ℓ_n} désigne le rapport $\frac{\int_{\omega_+} u_{k_n, \ell_n}^2(x) dx}{\int_{\omega_-} u_{k_n, \ell_n}^2(x) dx}$, on a

$$R_{k_n, \ell_n} = \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \frac{\frac{\sinh(\xi'_1 \alpha_+)}{\xi'_1 \alpha_+} \cosh(\xi'_1(2H-2h_0-\alpha_+)) - 1}{1 - \frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-} \cos(\xi_0(2h_0-\alpha_-))}.$$

Comme $\xi'_1 \rightarrow \infty$, on voit que $R_{k_n, \ell_n} = \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\xi'_1 \alpha_-} \frac{1 + o(e^{-\xi'_1 \alpha_+})}{1 - \frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-} \cos(\xi_0(2h_0-\alpha_-))}$. Dans le Corollaire on utilise (50) et on remarque que

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{|\sin(2\ell\pi \frac{\alpha_-}{h})|}{2\ell\pi \frac{\alpha_-}{h}} \leq 1 - \frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-} \cos(\xi_0(2h_0-\alpha_-)) \leq 1 + \frac{|\sin(2\ell\pi \frac{\alpha_-}{h})|}{2\ell\pi \frac{\alpha_-}{h}} < \frac{3}{2}.$$

Pour le Théorème, on note que la quantité $\xi_0(k_n, \ell_n)$ ne s'approche pas de 0 car $\xi_0(k_n, \ell_n) \geq \xi_0(k_n, 1) \rightarrow \frac{\pi}{h}$. Par conséquent, il existe une constante strictement positive $\bar{a} = \bar{a}(\alpha_-) < 1$ telle que $|\frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-}| \leq \bar{a}(\alpha_-) < 1$ ce qui implique (41).

Dans les deux résultats, α_+ n'intervient plus que dans $o(e^{-\xi'_1 \alpha_+})$ ce qui peut surprendre si on voulait faire grandir α_+ mais il faut bien voir que α_+ est fixé.

On remarque, pour le premier cas particulier du Cas 3 du Théorème, que $c_1 \xi'_1(k, \mathcal{L}_k - 1) = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{k, \mathcal{L}_k - 1} > \lambda_{\mathcal{L}_k} - \lambda^{\mathcal{L}_k - 1} = (\frac{\pi}{4h})^2 (4\mathcal{L}_k - 3) \rightarrow \infty$ dans les Cas 1 et 3 de l'Annexe B. Pour le Cas 2 de l'Annexe B, on a $c_1 \xi'_1(k, \mathcal{L}_k - 1) > \lambda_{\mathcal{L}_k - 1} - \lambda^{\mathcal{L}_k - 2} \rightarrow \infty$.

3.2.4 La Proposition 2

Lorsque $\sqrt{c_1 - 1}$ est un entier strictement positif, on a toujours $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k), \xi_0(k, \mathcal{L}_k) \rightarrow \infty$, et, de plus, $\sqrt{k}, \xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$ et $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$ sont comparables. La preuve s'appuie sur la Remarque 4 qui donne

$$R_{k, \mathcal{L}_k; \omega} \sim \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{h_0} \frac{e^{-2\xi'_1(a-h_0)}}{\xi'_1} \text{ si } \xi'_1(k, \mathcal{L}_k), \xi_0(k, \mathcal{L}_k) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty. \quad (52)$$

De plus, il n'est pas possible que $\sin^2(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$. En effet, si $\sin^2(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$, il vient de la relation de dispersion que $\sin^2(\xi_0 h_0) \sim \frac{\xi_0^2}{(\xi'_1)^2}$ mais on sait aussi que ξ_0 et ξ'_1 sont reliés par $\frac{\xi_0^2}{(\xi'_1)^2} = (c_1 - 1) \frac{k^2 \pi^2}{(\xi'_1)^2} - c_1$. Cette dernière quantité explosant puisque \sqrt{k} et ξ'_1 sont comparables, nous avons montré que $\sin^2(\xi_0 h_0) > C > 0$ et on peut encadrer $R_{k, \mathcal{L}_k; \omega}$ par $\frac{e^{-2\xi'_1(a-h_0)}}{\xi'_1}$ à un facteur multiplicatif près.

Lorsque $\sqrt{c_1 - 1}$ n'est pas un entier, on a, de manière générale,

$$0 < \xi'_1(k, \mathcal{L}_k) \leq C \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}, \quad (53)$$

ce qui n'implique pas (52) mais on peut extraire une sous-suite ayant les mêmes propriétés que dans la preuve de la Proposition 2 : $\sin^2(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$, $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k), \xi_0(k, \mathcal{L}_k) \rightarrow \infty$ et, de plus, $\sqrt{k}, \xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$ et $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$ étant comparables. Ceci prouve l'item 3 (cf. Annexe B pour les détails).

On ne sait pas affirmer la même chose pour toutes les sous-suites.

Commençons par examiner l'item 2 qui concerne la suite complète. Outre (53), on montre que $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$ est comparable à \sqrt{k} et ξ_0^2 est comparable à k^2 , ce qui implique $\frac{\xi_0^2}{(\xi'_1)^2} \geq Ck$. Si $\sin(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$, la relation de dispersion implique $\xi_0^2 \frac{\tanh^2(\xi'_1(H-h_0))}{(\xi'_1)^2} \rightarrow 0$. Par conséquent, $\xi'_1 \rightarrow \infty$, et comme $\tanh(\xi'_1(H-h_0)) \rightarrow 1$, il faudrait que $\frac{\xi_0^2}{(\xi'_1)^2} \rightarrow 0$ ce qui contredit la croissance en k .

Maintenant nous savons que $\sin^2(\xi_0 h_0) > C > 0$, (C ne dépendant pas de la sous-suite considérée). On a donc

$$R_{k, \mathcal{L}_k; \omega} \sim \text{vol}(\omega) \times \frac{\sin^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{\sinh(\xi'_1(b-a))}{\xi'_1(b-a)} \cosh(\xi'_1(2H - (a+b))) - 1 \right)}{h_0 \sinh^2(\xi'_1(H-h_0)) + (H-h_0) \sin^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{\sinh(2\xi'_1(H-h_0))}{2\xi'_1(H-h_0)} - 1 \right)}.$$

À cause de (53) on doit regarder les comportements de ce rapport pour des sous-suites où l'on aurait l'une des situations suivantes : $\xi'_1 \rightarrow 0$, $\xi'_1 \rightarrow \infty$ ou $0 < a_1 < \xi'_1 < b_1 < \infty$. On obtient

$$R_{k, \mathcal{L}_k; \omega} \sim \text{vol}(\omega) \sin^2(\xi_0 h_0) \frac{(b-a)^2 + 12(H - \frac{a+b}{2})^2}{6(h_0 + \frac{2}{3})(H-h_0)^2} \text{ si } \xi'_1 \rightarrow 0, \quad (54)$$

$$R_{k, \mathcal{L}_k; \omega} \sim \text{vol}(\omega) \sin^2(\xi_0 h_0) \frac{1}{h_0(b-a)} \frac{e^{-2(a-h_0)\xi'_1}}{\xi'_1} \text{ si } \xi'_1 \rightarrow \infty, \quad (55)$$

$$0 < C_1 \leq R_{k, \mathcal{L}_k; \omega} \leq C_2 \text{ si } 0 < a_1 < \xi'_1 < b_1 < \infty. \quad (56)$$

ce qui donne l'encadrement peu précis (46) si, au lieu de $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$, on introduit la valeur propre associée $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$. Il faut noter la différence des exposants entre (42) et (45) : l'exposant indiquant la décroissance est $\lambda^{\frac{1}{4}}$ si la suite des points M_λ longe la barrière spectrale alors qu'il est $\lambda^{\frac{1}{2}}$ si les points sont du type $(k_n^2 \pi^2, \lambda_{k_n, \ell})$, ℓ étant fixé.

4 Concentration : cas du modèle à deux sauts

Pour alléger l'écriture nous remplacerons provisoirement x_2 par x . L'équation à satisfaire dans $L^2(0, H)$ est

$$-(cu')' + (c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \lambda)u, \quad u(0) = u(H) = 0, \quad (57)$$

et nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &:= \psi(x) \text{ si } 0 < x < h_0, \psi_1(x) := \psi(x) \text{ si } h_0 < x < h_1, \psi_2(x) := \psi(x) \text{ si } h_1 < x < H, \\ \xi_0^2 &:= \frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \xi_1^2 := \frac{\lambda}{c_1} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, (\xi'_1)^2 := \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\lambda}{c_1}, \xi_2^2 := \frac{\lambda}{c_2} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, (\xi'_2)^2 := \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\lambda}{c_2}, \end{aligned} \quad (58)$$

étant entendu que les valeurs ξ_0^2 , ξ_1^2 , ξ_1' et ξ_2' seront toujours des nombres réels positifs quand nous les utiliserons. On vérifie que

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 \sin(\xi_0 x) \\ u_1(x) &= a_1 \sin(\xi_1 x) + b_1 \cos(\xi_1 x) \text{ si } \xi_1^2 > 0, \\ u_1(x) &= a_1' \sinh(\xi_1' x) + b_1' \cosh(\xi_1' x) \text{ si } \xi_1^2 < 0, \\ u_2(x) &= a_2 \sinh(\xi_2'(H-x)) \text{ si } \xi_2^2 < 0, \\ u_2(x) &= a_2 \sin(\xi_2(H-x)) \text{ si } \xi_2^2 > 0. \end{aligned} \quad (59)$$

et on obtient trois relations de dispersion suivant la position de la valeur propre λ :

$$\text{Zone(0)} \quad -\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} = \frac{\frac{\tanh(\xi_1'(h_1-h_0))}{c_1 \xi_1'} + \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{c_2 \xi_2'}}{1 + \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \tanh(\xi_1'(h_1-h_0)) \tanh(\xi_2'(H-h_1))} \text{ si } \xi_1^2 < 0, \quad (60)$$

$$\text{Zone(I)} \quad \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{c_2 \xi_2'} = \frac{\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} + \frac{\tan(\xi_1(h_1-h_0))}{c_1 \xi_1}}{\frac{c_1 \xi_1}{c_0 \xi_0} \tan(\xi_0 h_0) \tan(\xi_1(h_1-h_0)) - 1} \text{ si } \xi_1^2 > 0 \text{ et } (\xi_2')^2 > 0, \quad (61)$$

$$\text{Zone(II)} \quad \frac{\tan(\xi_2(H-h_1))}{c_2 \xi_2} = \frac{\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} + \frac{\tan(\xi_1(h_1-h_0))}{c_1 \xi_1}}{\frac{c_1 \xi_1}{c_0 \xi_0} \tan(\xi_0 h_0) \tan(\xi_1(h_1-h_0)) - 1} \text{ si } \xi_1^2 > 0 \text{ et } \xi_2^2 > 0. \quad (62)$$

Si on considère, à k fixé, la position des valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ par rapport aux valeurs limites $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ et $c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, on constate que

- lorsque $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell} < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, la restriction à Ω_0 de la solution $u_{k,\ell}$ arrive sur l'interface S_0 avec un angle supérieur à l'angle limite de la réflexion totale ;
- lorsque $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell} < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, la restriction à $\Omega_0 \cup \Omega_1$ traverse S_0 et arrive sur l'interface S_1 avec un angle supérieur à l'angle limite de la réflexion totale ;
- lorsque $c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell}$, la solution $u_{k,\ell}$ est, dans chaque région Ω_0 , Ω_1 et Ω_2 , une combinaison linéaire de sinus et cosinus sans réflexion totale sur une interface.

4.1 Zone (0) : cas de la relation de dispersion (60)

Dans cette sous-section nous considérons donc les valeurs propres λ telles que $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. Il y en a une infinité formant une suite à deux indices $\lambda_{k,\ell}$, $k = 1, \dots, 1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k$, l'entier \mathcal{L}_k étant une fonction monotone croissante de k .

Proposition 3. *Posant $a_0 = 1$, on a, à une constante de normalisation près,*

$$u_0(x) = \sin(\xi_0 x) \quad (63)$$

$$u_1(x) = \cosh(\xi_1'(x-h_0)) \left[\sin(\xi_0 h_0) + \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1'} \cos(\xi_0 h_0) \tanh(\xi_1'(x-h_0)) \right] \quad (64)$$

$$u_2(x) = \frac{\cosh(\xi_1'(h_1-h_0))}{\sinh(\xi_2'(H-h_1))} \left[\sin(\xi_0 h_0) + \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1'} \cos(\xi_0 h_0) \tanh(\xi_1'(h_1-h_0)) \right] \sinh(\xi_2'(H-x)) \quad (65)$$

Proposition 4 (Estimations préparatoires). *Lorsque l'indice ℓ est fixé, $1 \leq 2\ell L$, on a*

1.

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\ell \pi}{h_0} \left(1 - \frac{h_0^2}{2\ell^2 \pi^2} M_{k,\ell} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) \text{ avec } \frac{c_0^2 \ell^2}{\sqrt{c_1(c_1-c_0)}} < M_{k,\ell} < 2 \frac{c_0^2 \ell^2}{\sqrt{c_1(c_1-c_0)}}, \\ \sin(\xi_0 h_0) &= (-1)^{\ell+1} \frac{h_0^2}{2\ell \pi} \frac{M_{k,\ell}}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right), \\ \cos(\xi_0 h_0) &= (-1)^\ell \left(1 - \frac{h_0^2}{4\ell^2 \pi^2} \frac{M_{k,\ell}^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (66)$$

2.

$$\xi'_1 = \sqrt{\frac{c_1 - c_0}{c_1}} \frac{k\pi}{L} \left(1 - \frac{c_0 \ell^2 L^2}{2(c_1 - c_0) h_0^2} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right), \xi'_2 = \sqrt{\frac{c_2 - c_0}{c_2}} \frac{k\pi}{L} \left(1 - \frac{c_0 \ell^2 L^2}{2(c_2 - c_0) h_0^2} \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right), \quad (67)$$

$$\sqrt{\frac{c_1 - c_0}{c_0 c_1}} \lambda_{k,\ell}^{\frac{1}{2}} - \xi'_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\ell^2 L}{h_0^2} \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - c_0}} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

3.

$$\frac{\cosh(\xi'_1(h_1 - h_0))}{\sinh(\xi'_2(H - h_1))} \left[\sin(\xi_0 h_0) + \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1} \cos(\xi_0 h_0) \tanh(\xi'_1(h_1 - h_0)) \right] = (-1)^{\ell+1} \frac{(1 + o(1))}{k}$$

$$\times e^{-(\xi'_2(H-h_1) - \xi'_1(h_1-h_0))} \frac{c_0 \ell}{h_0 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}} \left[\frac{h_0^3 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}}{2\pi} \frac{M_{k,\ell}}{c_0} \frac{1}{\ell^2} - L \right] \quad (68)$$

Remarque 5. L'onde associée à la fonction propre dans Ω_0 devient rasante le long de l'interface S_0 lorsque $k \rightarrow \infty$. En effet, d'après (66) la quantité ξ_0 est équivalente à $\frac{\ell\pi}{h_0}$ ce qui fait que l'angle d'incidence θ_0 de l'onde par rapport à la normale à S_0 vérifie $\tan \theta_0 \sim \frac{h_0}{L\ell} k$. Asymptotiquement (en k) il n'y aurait donc plus de transmission entre Ω_0 et $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Maintenant, en vue de considérer la localisation d'une suite de fonctions propres $u_{k,\ell}$ lorsque $k \rightarrow \infty$, ℓ étant fixe, sur un ouvert $\omega := (0, L) \times (a, b) \subset \Omega$, nous négligeons la largeur de l'ouvert Ω et nous nous contentons d'estimer la norme L^2 de la suite de fonctions associées $\psi_{k,\ell}$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Proposition 5. Si $\omega := (0, L) \times (a, b) \subset \Omega$, $0 \leq a < b \leq H$, on a les cas suivants lorsque $k \rightarrow \infty$,

- $\omega \subset (0, h_0)$

$$\int_{(a,b)} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = \frac{b-a}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 b) - \sin(2\xi_0 a)}{2\xi_0(b-a)} \right) \rightarrow \frac{b-a}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\frac{\ell\pi}{h_0} b) - \sin(2\frac{\ell\pi}{h_0} a)}{2\frac{\ell\pi}{h_0}(b-a)} \right) \quad (69)$$

$$\int_{(0,h_0)} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = \frac{h_0}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right) \rightarrow \frac{h_0}{2} \quad (70)$$

- $\omega \subset (h_0, h_1)$

$$\int_{(a,b)} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = \frac{\ell^2 c_0^2}{2h_0^2 c_1(c_1 - c_0)} \left(\frac{h_0^3 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}}{2\pi \ell^2 c_0} M_{k,\ell} - L \right)^2 \frac{e^{2\xi'_1(b-h_0)}}{2k^2 \xi'_1} (1 + o(1)) \quad (71)$$

$$\int_{(h_0,h_1)} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = \frac{\ell^2 c_0^2}{2h_0^2 c_1(c_1 - c_0)} \left(\frac{h_0^3 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}}{2\pi \ell^2 c_0} M_{k,\ell} - L \right)^2 \frac{e^{2\xi'_1(h_1-h_0)}}{2k^2 \xi'_1} (1 + o(1)) \quad (72)$$

- $\omega \subset (h_1, H)$.

$$\int_a^b |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = \frac{\ell^2 c_0^2}{2h_0^2 c_1(c_1 - c_0)} \left(\frac{h_0^3 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}}{2\pi \ell^2 c_0} M_{k,\ell} - L \right)^2 \frac{e^{-2(\xi'_2(a-h_1) - \xi'_1(h_1-h_0))}}{2k^2 \xi'_2} (1 + o(1)) \quad (73)$$

$$\int_{h_1}^H |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = \frac{\ell^2 c_0^2}{2h_0^2 c_1(c_1 - c_0)} \left(\frac{h_0^3 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}}{2\pi \ell^2 c_0} M_{k,\ell} - L \right)^2 \frac{e^{2\xi'_1(h_1-h_0)}}{2k^2 \xi'_2} (1 + o(1)) \quad (74)$$

Remarque 6. *Le théorème précédent nous amène aux précisions suivantes*

1. Dans (70) la convergence vers $\frac{h_0}{2}$ se fait par valeurs supérieures. Une partie de l'énergie fuit donc vers $\Omega_1 \cup \Omega_2$.
2. L'introduction du terme $M_{k,\ell}$ est d'origine technique car nous ne connaissons pas exactement la solution de (60). À cause de cette imprécision nous supposons que

$$(H) \quad L < \frac{c_0 h_0^3}{2\pi} \text{ ou } L > \frac{c_0 h_0^3}{\pi}, \quad (75)$$

ce qui implique $A_{c_0, c_1, k, \ell} := \left(\frac{h_0^3 \sqrt{c_1(c_1 - c_0)}}{2\pi \ell^2 c_0} M_{k, \ell} - L \right)^2 > 0$.

3. La normalisation de chaque fonctions propre $u_{k,\ell}$ étant la même pour $x_2 \in (0, H)$, il est facile de voir qu'avec celle-ci

$$\|u_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim \frac{\ell^2 c_0^2}{2h_0^2 c_1 (c_1 - c_0)} A_{c_0, c_1, k, \ell} \left(\frac{1}{\xi'_1} + \frac{1}{\xi'_2} \right) \frac{e^{2\xi'_1(h_1 - h_0)}}{2k^2} \quad (76)$$

Théorème 4 (concentration autour de S_1). *On suppose que ℓ fixé et que l'hypothèse (75) est satisfaite, alors l'essentiel de l'énergie de la suite $(u_{k,\ell})_{k \geq 1}$ se concentre au voisinage de l'interface $S_1 = \{(x_1, h_1); 0 < x_1 < L\}$. Plus précisément, si $0 < \varepsilon < \inf(H - h_1, h_1 - h_0)$, on a*

$$\frac{\int_{(0,L) \times (h_1 - \varepsilon, h_1)} |u_{k,\ell}|^2 dx}{\int_{\Omega} |u_{k,\ell}|^2 dx} \sim \frac{\xi'_2}{\xi'_1 + \xi'_2} \quad (77)$$

$$\frac{\int_{(0,L) \times (h_1, h_1 + \varepsilon)} |u_{k,\ell}|^2 dx}{\int_{\Omega} |u_{k,\ell}|^2 dx} \sim \frac{\xi'_1}{\xi'_1 + \xi'_2} \quad (78)$$

sachant que $\frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \sqrt{\frac{c_2(c_1 - c_0)}{c_1(c_2 - c_0)}} (1 + o(\frac{1}{k}))$ avec une limite strictement inférieure à 1.

La remarque 5 fait penser que l'hypothèse (75) n'est pas essentielle pour qu'il y ait concentration dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Remarque 7. *Il faudrait comprendre la raison pour laquelle il n'y a pas de concentration de l'énergie au voisinage de l'interface S_0 . Posant $x = h_0(1 - y)$, $y \rightarrow 0^+$, on a $\sin(\xi_0 x) = (-1)^{\ell+1} \ell \pi (y + \frac{h_0^2}{2\ell^2 \pi^2} \frac{M_{k,\ell}}{k} + \frac{y}{k} + o(\frac{1}{k}))$. Ainsi, à k fixé, $\sin(\xi_0 x) \sim (-1)^{\ell+1} \frac{h_0^2}{2\ell^2 \pi^2} \frac{M_{k,\ell}}{k}$ lorsque $y \rightarrow 0^+$. Toujours dans ce cadre,*

1. si ℓ est impair, $\psi_0(x)$ est petit et positif, sa dérivée, négative, est proche de $-\frac{\ell\pi}{h_0}$. Elle décroît et est concave mais cette concavité ($-\frac{\ell\pi M_{k,\ell}}{2k}$) devient petite lorsque k augmente. Après avoir dépassé $x = h_0$, la courbe continue à décroître mais la concavité change de sens d'autant plus fortement que k augmente.
2. si ℓ est pair, les variations sont analogues mais symétriques.

Ces comportements n'expliquant pas vraiment la situation il faudrait peut-être chercher une explication utilisant le lien entre la dérivée normale et la dérivée tangentielle.

4.2 Zone (I) : cas de la relation de dispersion (61)

Puisque $\xi_1^2 > 0$ on a

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 \sin(\xi_0 x) \\ u_1(x) &= a_1 \sin(\xi_1 x) + b_1 \cos(\xi_1 x), \\ u_2(x) &= a_2 \sinh(\xi_2'(H - x)) \end{aligned} \quad (79)$$

Notation : Soient (f_n) et (g_n) sont deux suites. La notation $f_n \cong g_n$ signifiera que ces quantités sont comparables, i.e. qu'il existe des nombres réels positifs $M_1, M_2 > 0$ tels $M_1 \leq \frac{f_n}{g_n} \leq M_2$ dès que n est assez grand.

Théorème 5. On suppose que la suite $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n$ appartient à la zone (I), i.e. $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k_n, \ell_n} < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{c_2 - c_1}{2}$. Si la suite vérifie $(c_1 + \varepsilon) \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k_n, \ell_n} < (c_2 - \varepsilon) \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2}$, la suite des fonctions propres associées $(u_{k_n, \ell_n})_n$ concentre leurs normes L^2 dans $\Omega_0 \cup \Omega_1$:

$$h_1 \leq a < b < H \implies \int_a^b |u_{k, \ell}(x)|^2 dx \cong \frac{e^{-2\xi_2'(a-h_1)}}{\xi_2'} \quad (80)$$

$$\int_{\Omega_0} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \cong \int_{\Omega_1} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \quad (81)$$

2. Si la suite des quantités $(\xi_2')_n$, correspondant à la suite $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n$, tend vers 0 alors la norme L^2 des fonctions propres associées $(u_{k_n, \ell_n})_n$ est répartie de manière comparable sur les $\Omega_i, i = 0, 1, 2$:

$$\int_{\Omega_0} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \cong \int_{\Omega_1} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \cong \int_{\Omega_2} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \quad (82)$$

3. Si la suite des quantités $(\xi_1)_n$, correspondant à la suite $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n$, tend vers 0 alors la norme L^2 des fonctions propres associées $(u_{k_n, \ell_n})_n$ se concentre dans Ω_1 :

$$h_1 \leq a < b \leq H \implies \int_a^b |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \cong \frac{e^{-2\xi_2'(a-h_1)}}{\xi_2'} \quad (83)$$

$$\frac{h_0}{2} \sim \int_{\Omega_0} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \gg \int_{\Omega_2} |u_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \cong \frac{1}{\xi_2'} \quad (84)$$

Démonstration. Utiliser les trois cas particuliers de l'Annexe C. □

Il faut noter que toutes les possibilités n'ont pas été examinées car il se pourrait, par exemple, que la suite des valeurs propres vérifie $\alpha_1 > \xi_1 > \alpha_2 > 0$ sans que l'on soit dans la situation 1 du théorème 5.

Conclusion Beaucoup reste à faire dans cette voie, en particulier la généralisation à un coefficient de diffusion seulement continu mais les résultats obtenus disent déjà ce qu'il est possible d'espérer. Il faut noter que si l'étude très précise du cas $N = 1$ (Section 3) résulte d'une résolution presque explicite de la relation de dispersion, ce n'est plus le cas dans la Section 4.2. D'autre part, nous aurions pu aussi considérer l'énergie $|u_{k, \ell}|^2 + |\nabla u_{k, \ell}|^2$ au lieu de $|u_{k, \ell}|^2$, un rapide coup d'oeil montre que dans la plupart des cas la valeur du rapport $R_\omega(v)$ dans (1) change mais pas sa nature.

Annexes

A Item 2 du Lemme 5 et Théorème 3 : indications

Remarque 8. Comme les valeurs propres guidées $\lambda_{k,\ell}$ vérifient $k^2\pi^2 < \lambda_{k,\ell} < c_1 k^2\pi^2$, elles sont comparables à $k^2\pi^2$.

- Les notations définies en (32) seront parfois étendues au cours du texte en y remplaçant la valeur propre $\lambda_{k,\ell}$ par la variable λ parcourant un intervalle de \mathbb{R} mais aucune confusion ne sera possible.
- L'entier k est provisoirement fixé, la constante c_1 est supposée strictement supérieure à 1. On a $\mathcal{L} = \mathcal{L}_k$ valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ classées dans l'ordre croissant $k^2\pi^2 < \lambda_{k,1} < \lambda_{k,2} < \dots < \lambda_{k,\mathcal{L}} < c_1 k^2\pi^2$. Elles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe représentant la fonction croissante $\lambda \mapsto \frac{1}{\xi_1} \tanh(\xi_1'(H - h_0))$ avec la courbe $\lambda \mapsto -\frac{1}{\xi_0} \tan(\frac{\xi_0}{2})$ où, ici, $\xi_0 = (\lambda - k^2\pi^2)^{1/2}$, $\xi_1 = (k^2\pi^2 - \frac{\lambda}{c_1})^{1/2}$. La figure 3 représente ceci où on a posé

$$\lambda_\ell = \lambda_\ell(k) = k^2\pi^2 + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}, \lambda^\ell = \lambda^\ell(k) := k^2\pi^2 + \ell^2 \frac{\pi^2}{h_0^2}, 1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k + 1. \quad (\text{A.1})$$

Maintenant, nous nous intéressons à l'intervalle $I_{k,\ell} := (\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1})$:

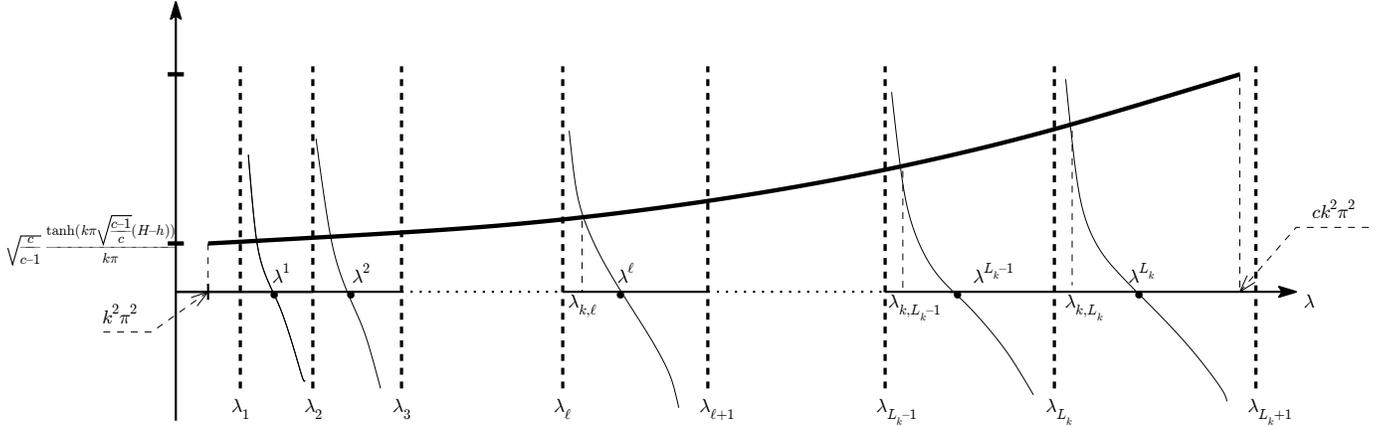


FIGURE 3 – répartition des valeurs propres

1. la longueur de l'intervalle $I_{k,\ell}$ est égale à $2\ell \frac{\pi^2}{h_0^2}$ et ne dépend donc pas de l'indice k ;
2. le milieu de l'intervalle est $(\lambda_\ell + \lambda_{\ell+1})/2 = k^2\pi^2 + (4\ell^2 + 1) \frac{\pi^2}{4h_0^2}$;
3. $\lambda^\ell = \frac{\lambda_\ell + \lambda_{\ell+1}}{2} - \frac{\pi^2}{4h_0^2}$;
4. la restriction de la courbe $\lambda \mapsto -\frac{1}{\xi_0} \tan(\xi_0 h_0)$ à l'intervalle $I_{k,\ell}$ est indépendante de l'indice k ce qui se voit immédiatement par le changement de variable $\mu = \lambda - k^2\pi^2 - (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}$ et $\mu \in (0, 2\ell \frac{\pi^2}{h_0^2})$. D'autre part, sur $I_{k,\ell}$, la courbe en tangente hyperbolique dépend de k et s'écroule de plus en plus vers l'axe des abscisses lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui prouve que la suite $(\lambda_{k,\ell})_k$ tend vers λ^ℓ quand $k \rightarrow \infty$, l'indice ℓ restant fixe,

5. La quantité ξ_0 devient alors $\sqrt{\mu + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}}$. Si μ^ℓ correspond à λ^ℓ et $\mu_{k,\ell}$ à $\lambda_{k,\ell}$, on obtient

$$\frac{\tanh(\xi_1'(H - h_0))}{\xi_1'} = \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k\pi} \left(1 + \frac{1}{2(c_1 - 1)k^2} \left(\frac{\mu - \mu^\ell}{\pi^2} + \frac{\ell^2}{h_0^2} \right) + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\tan(\xi_0 h)}{\xi_0} = \frac{h_0^3}{2\ell^3 \pi^3} (\mu^\ell - \mu) + o(\mu^\ell - \mu), \quad (\text{A.3})$$

$$\mu^\ell - \mu_{k,\ell} = 2 \frac{\ell^3 \pi^2}{h_0^3} \sqrt{\frac{c_1}{c_+ - 1}} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right). \quad (\text{A.4})$$

De son côté, la relation de dispersion (34) s'écrit (μ étant la solution $\mu_{k,\ell}$)

$$\mu^\ell - \mu_{k,\ell} = 2 \frac{\ell^3 \pi^3}{h_0^3} \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) + o(\mu^\ell - \mu) \quad (\text{A.5})$$

Il n'y a plus qu'à rassembler ces résultats et revenir aux notations ξ_0, ξ_1' et $\lambda_{k,\ell}$ pour avoir le Lemme 5 (cf. [3] pour plus de détails).

• Examinons maintenant le Théorème 3. On suppose provisoirement que ω est une bande $(0, 1) \times (a, b)$ de Ω_+ et on appelle $R_{k,\ell;\omega}$ le rapport $\frac{\|u_{k,\ell}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|u_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}^2}$ ¹⁰. Les hypothèses du Théorème 3 impliquent déjà que $\xi_1'(k, \ell) \rightarrow \infty$ car la distance des points $(k^2 \pi^2, \lambda_{k,\ell})$ à la barrière spectrale tend vers l'infini avec k . On vérifie que

$$\begin{aligned} \int_{\omega} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx &= a_{k,\ell}^2 \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{2(1 - e^{-2\xi_1'(H-h_0)})^2} \left\{ \frac{e^{-2\xi_1'(a-h_0)}}{\xi_1'} (1 + o(1)) - 4(b-a)e^{-2\xi_1'(H-h_0)} \right\} \\ &\sim a_{k,\ell}^2 \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{2} \frac{e^{-2\xi_1'(a-h_0)}}{\xi_1'}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\Omega_-} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = a_{k,\ell}^2 \frac{h_0}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{\Omega_+} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx = a_{k,\ell}^2 \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{2\xi_1'} [1 - 2(H - h_0)\xi_1' e^{-2\xi_1'(H-h_0)} + o(e^{-2\xi_1'(H-h_0)})]. \quad (\text{A.8})$$

Pour cette dernière relation on a utilisé l'équivalence $\sin^2(\xi_0 h_0) \sim \frac{\xi_0^2}{(\xi_1')^2} \cos^2(\xi_0 h_0)$, conséquence de la relation de dispersion (34). On arrive ainsi à

$$R_{k,\ell;\omega} \sim \frac{\sin^2(\xi_0 h_0) e^{-2\xi_1'(a-h_0)}}{\xi_1' h \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right) + \sin^2(\xi_0 h_0) (1 + O(\xi_1' e^{-2\xi_1'(H-h_0)}))}. \quad (\text{A.9})$$

Pour l'item 1, on utilise le Lemme 5 qui implique $\sin^2(\xi_0 h_0) \sim \frac{\xi_0^2}{(\xi_1')^2}$, d'où

$$R_{k,\ell;\omega} \sim \frac{(\ell\pi)^2 e^{-2\xi_1'(a-h_0)}}{h_0^3 (\xi_1')^3}. \quad (\text{A.10})$$

C'est maintenant la relation (49) qui permet d'obtenir (42). Cf. [4] pour plus de détails.

• Pour l'item 2, on note que les relations (A.6)-(A.9) sont toujours valables car $c_1(\xi_1'(k_n, \ell_n))^2 \geq (c_1 -$

10. Pour revenir au cas général il suffira de multiplier les limites, lim sup et lim inf, du rapport par $l_2 - l_1$.

d) $k_n^2 \pi^2 \rightarrow \infty$. De plus, $\xi_0(k_n, \ell_n) \geq \xi_0(k_n, 1)$ ¹¹ implique $\liminf \xi_0(k_n, \ell_n) > 0$ puisque $\xi_0(k_n, 1) \rightarrow \frac{\pi}{h}$ d'après le Lemme 5. Ces trois constatations amènent à

$$R_{k, \ell; \omega} \sim \frac{1}{h_0} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}} \frac{e^{-2\xi_1'(a-h_0)}}{\xi_1'} \quad (\text{A.11})$$

Remarque 9. Il faut noter que l'équivalence (A.9) n'exige pas que l'indice ℓ soit constant mais seulement que $\xi_1' \rightarrow \infty$ tandis que (A.11) n'exige pas non plus que ℓ soit constant mais que $\xi_1' \rightarrow \infty$ et $\liminf \xi_0(k_n, \ell_n) > 0$.

B Proposition 2 : indications

Remarque 10. Choisir $h_0 = \frac{1}{2}$ n'est pas restrictif. En effet, partons des trois éléments : l'ouvert $\Omega = (0, 1) \times (0, H)$ avec une interface en $x_2 = h$, le coefficient de diffusion c et le couple $(A, D(A))$ introduits dans la Section 1 et posons

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= (0, 1) \times (0, \tilde{H}), \Omega = (0, 1) \times (0, H), 2h\tilde{H} = H, \\ \varphi : \tilde{\Omega} &\mapsto \Omega, \varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} (\tilde{x}_1, 2h\tilde{x}_2) & \text{si } 0 < \tilde{x}_2 < \frac{1}{2}, \\ (\tilde{x}_1, 2h(\tilde{x}_2 - \frac{1}{2}) + h) & \text{si } \frac{1}{2} < \tilde{x}_2 < \tilde{H}, \end{cases} \\ c(x) &= (2h)^2 \tilde{c}(\varphi^{-1}(x)), \\ U : L^2(\tilde{\Omega}, \tilde{c}^{-1}d\tilde{x}) &\mapsto L^2(\Omega, \bar{c}^{-1}dx), (U\tilde{f})(x) = \sqrt{2h}\tilde{f}(\varphi^{-1}(x)), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

on vérifie que

1. U est une application unitaire entre ces deux espaces d'Hilbert ;
2. l'interface de Ω est ramenée de $x_2 = h$ à $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}$;
3. $U^{-1}AU = \tilde{A}$ où le couple $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ est défini par $\tilde{A} = -\tilde{c}\Delta$ et $D(\tilde{A}) := \{\tilde{u} \in H_0^1(\tilde{\Omega}); \tilde{A}\tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega})\}$.

Comme $c_{|\tilde{\Omega}_-}$ n'est pas égal à 1 mais à $(2h)^2$ il faut corriger les valeurs propres par ce coefficient multiplicatif mais les fonctions propres sont inchangées.

Les quantités $\xi_1'(k, \ell)$, $1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k$, sont les indicateurs du taux de décroissance des fonctions propres guidées dans la partie Ω_+ et elles vérifient

$$\xi_1'(k, 1) > \xi_1'(k, 2) > \cdots > \xi_1'(k, \mathcal{L}_k) > 0. \quad (\text{B.2})$$

Remarque 11. Pour $h = \frac{1}{2}$, $c_1 = 2$, des calculs assez simples aboutissent aux inégalités plus précises suivantes

$$\begin{aligned} \pi &< \xi_0(k, 1) < \xi_0(k, 2) < \cdots < \pi(k-2) < \xi_0(k, \mathcal{L}_k) < \pi k \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{k^2-1} &> \xi_1'(k, 1) > \xi_1'(k, 2) > \cdots > \sqrt{2}\pi\sqrt{k-1} > \xi_1'(k, \mathcal{L}_k) > \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{k-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dans ce cas particulier, la quantité $\xi_1'(k, \mathcal{L}_k)$ est de l'ordre de \sqrt{k} donc du même ordre que $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$. Ceci servira de guide dans ce qui suit mais, malheureusement, nous n'avons pas ce résultat dans le cas général, sans l'exclure cependant.

11. L'interprétation géométrique de la Remarque 3 rend évidente cette inégalité.

Dans la suite on n'impose plus $c_1 = 2$ mais, comme on suppose $h_0 = \frac{1}{2}$, on a

$$\lambda_\ell = \lambda_\ell(k) = k^2\pi^2 + (2\ell - 1)^2\pi^2, \lambda^\ell = \lambda^\ell(k) := k^2\pi^2 + 4\ell^2\pi^2, 1 \leq \ell \leq L + 1. \quad (\text{B.4})$$

Appelant $\bar{\mathcal{L}}_k$ le plus petit entier vérifiant $c_1 k^2 \pi^2 \leq \lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k+1}$, on est confronté à trois possibilités pour situer $\mathcal{L} = \mathcal{L}_k$ (le plus grand entier tel que $\lambda_{k, \mathcal{L}_k} < c_1^2 k^2$), dans les intervalle $I_{k, \ell} = (\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1})$:

1. **Cas 1**, i.e. $\lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k} \leq c_1 k^2 \pi^2 \leq \lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k+1}$, représenté à gauche dans la figure 3, d'où $\mathcal{L}_k = \bar{\mathcal{L}}_k$;
2. **Cas 2**, i.e. $\lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k}$ et les deux courbes ont un point commun dans cet intervalle (centre de la Figure 3) d'où $\mathcal{L}_k = \bar{\mathcal{L}}_k$;
3. **Cas 3**, i.e. $\lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda_{\bar{\mathcal{L}}_k}$ et les deux courbes n'ont pas de point commun dans cet intervalle (à droite de la Figure 3) d'où $\mathcal{L}_k = \bar{\mathcal{L}}_k - 1$. Ce dernier cas ressemble alors au premier, moyennant le décalage d'une unité.

Remarque 12. Dans les deux derniers cas, la double inégalité $\lambda_{\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k}$ implique que

$$k \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} < \mathcal{L}_k < k \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, d'une part k et \mathcal{L}_k sont comparables¹² et, d'autre part, ces deux cas ne pourront jamais se produire si $\sqrt{c_1 - 1}$ est un entier. Plus généralement, que $\sqrt{c_1 - 1}$ soit un rationnel $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, ou un irrationnel, (B.5) ne sera pas vérifiée pour une suite (k_n) tendant vers l'infini et donc les cas 2 et 3 ne pourront pas se produire pour ces entiers k_n . C'est cette suite qui vérifiera (47).

L'existence de cette suite (k_n) découle des deux points qui suivent.

- Soit $\sqrt{c_1 - 1} = \frac{p}{q}$, $p, q > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ et considérons la suite (k_n) définie par $k_n = 2nq$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $k \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} < \mathcal{L}_k < k \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} + \frac{1}{2}$ devient $np < \mathcal{L}_k < np + \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.
- Soit $\alpha := \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} \notin \mathbb{Q}$. L'inégalité (B.5) s'écrit donc $k\alpha < \mathcal{L}_k < k\alpha + \frac{1}{2}$, ou encore $\mathcal{L}_k - \frac{1}{2} < k\alpha < \mathcal{L}_k$. Nous agissons par l'absurde en montrant que la proposition :

$$\exists N = N(\alpha), \forall k > N, \exists L \in \mathbb{N} \implies L - \frac{1}{2} < k\alpha < L \quad (\text{B.6})$$

est fausse. Soit un entier $k > N$ quelconque. Il vérifie par hypothèse $L - \frac{1}{2} < k\alpha < L$ et soit l'entier $p, p \geq 1$, tel que $L - \frac{1}{2} < (k + p - 1)\alpha < L < (k + p)\alpha$. Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on a $(k + p)\alpha < L + \frac{1}{2}$, ce qui montre ce que nous voulons. Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, nous posons $\alpha = \frac{1}{2} + \beta$ d'où $\beta < \frac{1}{2}$. Considérons l'analogue de (B.6) pour β . Si cette nouvelle proposition est exacte, elle est vérifiée pour un $N' = N(\beta)$ et choisissons $k = 2p$, $k > \max(N, N')$. Comme on a supposé que (B.6) est vraie, on devrait avoir $L - \frac{1}{2} < p + k\beta < L$ d'où $(L - p) - \frac{1}{2} < k\beta < (L - p)$ et l'on peut recommencer le raisonnement utilisé pour $\alpha < \frac{1}{2}$.

Lemme 6. On considère la suite des valeurs propres $(\lambda_{k, \mathcal{L}_k})_{k \geq 1}$. Les entiers k et \mathcal{L}_k sont toujours comparables. De plus,

1. **Cas 1 et 3** : les quantités k , \mathcal{L}_k , $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$ et $(\xi_1^k)^2$ sont comparables entre elles ;

12. i.e. il existe deux constantes positives a_1, a_2 telles que $0 < a_1 \leq \frac{k}{\mathcal{L}_k} \leq a_2$ pour les quantités variables k et \mathcal{L}_k .

2. **Cas 2** : les quantités $k, \mathcal{L}_k, \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$ sont comparables entre elles et $\frac{(\xi'_1)^2}{\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}} = O(1)$.

Démonstration. Nous étudions les trois cas séparément.

Cas 1 $\lambda^{\mathcal{L}_k} \leq c_1 k^2 \pi^2 \leq \lambda_{\mathcal{L}_k+1}$.

\mathcal{L}_k est le plus grand entier tel que $\lambda^{\mathcal{L}_k} \leq c_+ k^2 \pi^2$, i.e. $k^2 \pi^2 + 4\mathcal{L}_k^2 \pi^2 \leq c_1 k^2 \pi^2$ d'où $2\mathcal{L}_k \leq k\sqrt{c_1 - 1}$ puis

$\mathcal{L}_k = E\left(k\frac{\sqrt{c_1-1}}{2}\right)$ ($E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x), d'où $k\frac{\sqrt{c_1-1}}{2} = L + \alpha$ avec $0 \leq \alpha < 1$.

Par suite, k et \mathcal{L}_k sont comparables et $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ est ainsi comparable à \mathcal{L}_k^2 puisque $\lambda_{\mathcal{L}_k} < \lambda_{k, \mathcal{L}_k} < \lambda^{\mathcal{L}_k}$. Pour préciser $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ nous procédons en deux étapes :

- (a) Commençons par évaluer la valeur $\Lambda_{\mathcal{L}_k}$ de $\lambda \mapsto \frac{1}{\xi'_1} \tanh(\xi'_1(H - \frac{1}{2}))$ en $\lambda = \lambda_{\mathcal{L}_k}$. En ce point on a $(\xi'_1)^2 = \frac{\pi^2}{c_1}((c_1 - 1)k^2 - (2\mathcal{L}_k - 1)^2)$. Comme $(c_1 - 1)k^2 = 4(\mathcal{L}_k + \alpha)^2$, on obtient $\xi'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1}(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4L})}$, d'où

$$\Lambda_{\mathcal{L}_k} = \frac{\tanh\left(2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1}(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k})}(H - \frac{1}{2})\right)}{2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1}\left(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k}\right)}}. \quad (\text{B.7})$$

Pour \mathcal{L}_k grand, donc k grand, la majoration $\Lambda_{\mathcal{L}_k} > \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{c_1}{L}}$ est vraie.

- (b) Nous évaluons la valeur $\bar{\Lambda}$ de la fonction $\lambda \mapsto -\frac{1}{\xi_0} \tan(\frac{\xi_0}{2})$ en $\Lambda^{\mathcal{L}_k} = \frac{\lambda_{\mathcal{L}_k} + \lambda^{\mathcal{L}_k}}{2}$, milieu des abscisses $\lambda_{\mathcal{L}_k}$ et $\Lambda^{\mathcal{L}_k}$. On a $\Lambda^{\mathcal{L}_k} = k^2 \pi^2 + (4\mathcal{L}_k^2 - \frac{4\mathcal{L}_k - 1}{2})\pi^2$ et la valeur de ξ_0 en ce point est égale à $2\pi\mathcal{L}_k(1 - \frac{4\mathcal{L}_k - 1}{8\mathcal{L}_k^2})^{1/2}$. Quand $\mathcal{L}_k \rightarrow \infty$, $\frac{\xi_0}{2} \sim \pi\mathcal{L}_k - \frac{\pi}{4}$ et

$$\bar{\Lambda}_{\mathcal{L}_k} = -\frac{\tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right)}{\xi_0} \sim \frac{1}{2\pi\mathcal{L}_k} < \Lambda_{\mathcal{L}_k}. \quad (\text{B.8})$$

Cela signifie que la valeur propre $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ satisfait $\lambda_{\mathcal{L}_k} < \lambda_{k, \mathcal{L}_k} < \Lambda^{\mathcal{L}_k}$ pour k grand, ce qui implique que

$$c_1(\xi'_1(k, \mathcal{L}_k))^2 > c_1 k^2 \pi^2 - \frac{\lambda_{\mathcal{L}_k} + \lambda^{\mathcal{L}_k}}{2} = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda^L + \frac{\lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k}}{2} > \frac{\lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k}}{2} = \frac{4\mathcal{L}_k - 1}{2} \pi^2 \rightarrow \infty. \quad (\text{B.9})$$

Comme $\xi'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1}(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k})}$, valeur de ξ'_1 en $\lambda_{\mathcal{L}_k}$, est supérieur à la valeur de ξ'_1 en $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$, on déduit de (B.9) que $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$ est comparable à $\sqrt{\mathcal{L}_k}$ et que **le taux de décroissance dans le cas 1 est de l'ordre de $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$** . On peut donc utiliser l'équivalence (A.11) sachant que $\xi_0 \rightarrow \infty$.

Cas 3 $\lambda_{\bar{L}} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\bar{L}}$, sans intersection

Ce cas est facile à traiter (Figure 4, à droite) car il signifie qu'il y a $\mathcal{L}_k = \bar{\mathcal{L}}_k - 1$ valeurs propres. Il vient

$$(4\mathcal{L}_k + 1)\pi^2 = \lambda_{\mathcal{L}_k+1} - \lambda^{\mathcal{L}_k} < c_1(\xi'_1(k, \mathcal{L}_k))^2 = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{k, \mathcal{L}_k} < \lambda^{\mathcal{L}_k+1} - \lambda_{\mathcal{L}_k} = 3(4\mathcal{L}_k + 1)\pi^2. \quad (\text{B.10})$$

Comme \mathcal{L}_k est le plus grand entier tel que $\mathcal{L}_k < \frac{\sqrt{c_1-1}}{2}k + 1$, les entiers \mathcal{L}_k et k sont comparables et sont donc aussi comparables à $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$ ce qui montre que **le taux de décroissance dans le cas 3 est de l'ordre de $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$** .

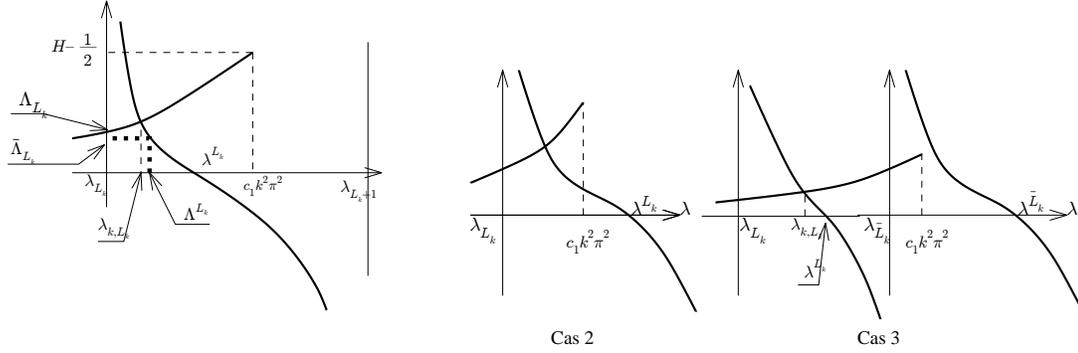


FIGURE 4 – Cas 1 à gauche, Cas 2 au milieu, Cas 3 à droite

On peut encore utiliser l'équivalence (A.11) sachant que $\xi_0 \rightarrow \infty$.

Pour les Cas 1 et 3 on a donc

$$R_{k,\ell;\omega} \sim \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{h_0} \frac{e^{-2\xi'_1(a-h_0)}}{\xi'_1}. \quad (\text{B.11})$$

Cas 2 $\lambda_{\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k}$, avec intersection

Cette situation ne peut arriver que si on a, en même temps,

(i) $\sqrt{c_1 - 1} \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ (voir Remarque 12),

(ii) $\lambda_{\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k}$, c'est à dire $k \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} < \mathcal{L}_k < k \frac{\sqrt{c_1 - 1}}{2} + \frac{1}{2}$, ce qui entraîne que k , \mathcal{L}_k et $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$ sont comparables,

(iii) $-\frac{\tan(\frac{1}{2}\sqrt{c_1 - 1}k\pi)}{\sqrt{c_1 - 1}k\pi} < H - \frac{1}{2}$.

On peut déjà majorer $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$. En effet, de $c(\xi'_1)^2 = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{k,\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{\mathcal{L}_k} = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda^{\mathcal{L}_k} + \lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k} < \lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k} = (4\mathcal{L}_k - 1)\pi^2$ on déduit que $\xi'_1 \leq \sqrt{\frac{4\mathcal{L}_k - 1}{c_1}}\pi$, cette dernière quantité étant de l'ordre de $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$ ce qui montre l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle $0 < \xi'_1(k, \mathcal{L}_k) \leq C_1 \lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$.

On voudrait améliorer la minoration de ξ'_1 mais prouver l'existence de $C_2 > 0$ telle que $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k) \geq C_2 \lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$, par exemple en prouvant que le cas 2 n'arrive pas, est encore un problème ouvert à ce jour dans le cas général. On a ainsi prouvé, à l'aide de la Remarque 12, que **le taux de décroissance dans le Cas 2 est de l'ordre de $\lambda_{k,\mathcal{L}_k-1}^{\frac{1}{4}}$** pour une suite (k_n) convenable, mais le comportement associé à $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}$ reste ouvert en général dans ce cas. \square

C Détail des calculs pour la zone (I).

Nous considérons une fonction propre associée à une valeur propre λ de la zone (I) : $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. Les conditions de transmission aux interfaces S_0, S_1 s'écrivent

$$\begin{aligned} a_1 \sin(\xi_1 h_0) + b_1 \cos(\xi_1 h_0) &= a_0 \sin(\xi_0 h_0) \\ c_1 a_1 \xi_1 \cos(\xi_1 h_0) - c_1 \xi_1 b_1 \sin(\xi_1 h_0) &= c_0 a_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \\ a_1 \sin(\xi_1 h_1) + b_1 \cos(\xi_1 h_1) &= a_2 \sinh(\xi'_2 (H - h_1)) \\ c_1 a_1 \xi_1 \cos(\xi_1 h_1) - c_1 \xi_1 b_1 \sin(\xi_1 h_1) &= -c_2 a_2 \xi'_2 \cosh(\xi'_2 (H - h_1)). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

et la résolution donne pour $(a_1; b_1)$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \frac{c_1 \xi_1 \sin(\xi_0 h_0) \sin(\xi_1 h_0) + c_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \cos(\xi_1 h_0)}{c_1 \xi_1}, \\ b_1 &= -a_0 \frac{c_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \sin(\xi_1 h_0) - c_1 \xi_1 \sin(\xi_0 h_0) \cos(\xi_1 h_0)}{c_1 \xi_1}, \\ a_1^2 + b_1^2 &= a_0^2 \left(\sin^2(\xi_0 h_0) + \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

tandis que pour a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 \frac{-c_1 \xi_1 \sinh(\xi_2'(H - h_1)) \sin(\xi_1 h_1) + c_2 \xi_2' \cosh(\xi_2'(H - h_1)) \cos(\xi_1 h_1)}{c_1 \xi_1}, \\ b_1 &= a_2 \frac{c_2 \xi_2' \sin(\xi_1 h_1) \cosh(\xi_2'(H - h_1)) + c_1 \xi_1 \sinh(\xi_2'(H - h_1)) \cos(\xi_1 h_1)}{c_1 \xi_1}, \\ a_1^2 + b_1^2 &= a_2^2 \left(\sinh^2(\xi_2'(H - h_1)) + \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cosh^2(\xi_2'(H - h_1)) \right), \\ a_2^2 &= a_0^2 \frac{\sin^2(\xi_0 h_0) + \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi_2'(H - h_1)) + \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cosh^2(\xi_2'(H - h_1))}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Cas particulier 1 : $(c_1 + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < (c_2 - \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, pour un $\varepsilon > 0$.

On ne considère ainsi que les valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ qui ne s'approchent pas trop près des bords de la zone (I), au sens qui vient d'être précisé. Avec cette hypothèse on a

$$\frac{c_2 \varepsilon}{c_1 (c_2 - c_1 - \varepsilon)} \leq \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \leq \frac{c_2 (c_2 - c_1 - \varepsilon)}{c_1 \varepsilon} \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{c_0 (c_1 - c_0 + \varepsilon)}{c_1 (c_2 - c_1 - \varepsilon)} \leq \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \leq \frac{c_0 (c_2 - c_0 + \varepsilon)}{c_1 \varepsilon}. \quad (\text{C.16})$$

Il vient alors que, pour toute suite infinie de valeurs propres distinctes vérifiant ce cas particulier, les quantités $a_1^2 + b_1^2$ et a_0^2 sont comparables (utiliser (C.13)) et que $a_2 \rightarrow 0$. Précisément, il existe deux constantes $M_1, M_2 > 0$ telles que

$$M_1 e^{-2\xi_2'(H-h_1)} \leq a_2^2 \leq M_2 e^{-2\xi_2'(H-h_1)}, \quad (\text{C.17})$$

i.e. $a_2^2 \approx e^{-2\xi_2'(H-h_1)}$ avec la notation introduite à la Section 4.2.

Nous considérons maintenant deux autres cas particuliers dont on ne peut pas affirmer pour l'instant qu'ils existent. Pour cette étude, il est intéressant de connaître les relations suivantes

$$c_2 (\xi_2')^2 + c_1 \xi_1^2 = (c_2 - c_1) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (\text{C.18})$$

$$c_2 (\xi_2')^2 + c_0 \xi_0^2 = (c_2 - c_0) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (\text{C.19})$$

$$c_0 \xi_0^2 - c_1 \xi_1^2 = (c_1 - c_0) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (\text{C.20})$$

et posons $N = \sin^2(\xi_0 h_0) + \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0)$ et $D = \sinh^2(\xi_2'(H - h_1)) + \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cosh^2(\xi_2'(H - h_1))$. **Cas particulier 2 :** $\xi_2' \rightarrow 0$.

Avec cette éventualité on vérifie que $\left(\frac{c_0\xi_0}{c_1\xi_1}\right)^2 \sim \frac{c_0(c_2-c_0)}{c_1(c_2-c_1)}$. On a $N \approx 1$ et $D = \sinh^2(\xi'_2(H-h_1)) \left(1 + \left(\frac{c_2\xi'_2(H-h_1)}{c_1\xi_1}\right)^2 \frac{\cosh^2(\xi'_2(H-h_1))}{\sinh^2(\xi'_2(H-h_1))}\right)$. Le terme a_2 exploserait, plus précisément $\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2$ est comparable à $(\xi'_2(H-h_1))^{-2}$ tandis que $a_0^2 \cong a_1^2 + b_1^2$.

Cas particulier 3 : $\xi_1 \rightarrow 0$.

Il vient que $\xi'_2 \rightarrow \infty$, $\xi_0 \rightarrow \infty$, $\left(\frac{c_2\xi'_2}{c_1\xi_1}\right)^2 \rightarrow \infty$ et $D \sim \left(\frac{c_2\xi'_2}{c_1\xi_1}\right)^2 \cosh^2(\xi'_2(H-h_1))$ ce qui donne

$$a_2^2 \sim \frac{a_0^2}{\cosh^2(\xi'_2(H-h_1))} \left(\left(\frac{c_1\xi_1}{c_2\xi'_2}\right)^2 \sin^2(\xi_0 h_0) + \left(\frac{c_0\xi_0}{c_2\xi'_2}\right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0) \right) \quad (\text{C.21})$$

d'où $a_2^2 \leq a_0^2 \frac{M}{\cosh^2(\xi'_2(H-h_1))}$ puisque $\left(\frac{c_0\xi_0}{c_2\xi'_2}\right)^2 \sim \frac{c_0(c_1-c_0)}{c_1(c_2-c_1)}$.

1. Si $\cos^2(\xi_0 h_0)$ ne tend pas vers 0 alors $a_2^2 \cong a_0^2$ mais $a_1^2 + b_1^2 \rightarrow \infty$.
2. Si $\cos^2(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ et $\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} = 0(1)$ on a $c_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \not\rightarrow 0$. Cette situation est possible à la condition que $\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} \sim -\frac{h_1-h_0}{c_1}$ (utiliser la relation de dispersion (61)) et alors $a_1^2 + b_1^2 \sim \left(\frac{c_0\xi_0}{c_1\xi_1}\right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0) \rightarrow \infty$.
3. Si $\cos^2(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ et $\left|\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0}\right| \rightarrow \infty$, on utilise encore (61) : le membre de gauche tendant vers 0, il faut que le dénominateur du côté droit tende vers l'infini mais le côté droit de (61) serait alors équivalent à $\frac{1}{c_1 \xi_1^2 (h_1-h_0)} \rightarrow \infty$ d'où une contradiction et cette situation ne peut arriver.

Références

- [1] Agmon S., *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*, Mathematical Notes, no. 29, Princeton University Press - University of Tokyo Press, 1982.
- [2] Arnold D. N., David G., Filoche M., Jerison D., and Mayboroda S., *Localization of eigenfunctions via an effective potential*, arXiv :1712.02419v4 [math.AP] (2018), 33p.
- [3] Auteurs, *Manuscrit 08/06/2018-26/08/2018*, Note personnelle (2018), 6p.
- [4] ———, *Manuscrit 18/05/2018-12/09/18*, Note personnelle (2018), 7p.
- [5] Cristofol M., *Guided waves in a stratified elastic and locally perturbed space*, Math. Meth. Applied Sciences **23** (2000), 1257–1286.
- [6] Dermenjian Y. and Guillot J.C., *Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. the limiting absorption principle*, Math. Meth. Applied Sciences **10** (1988), 87–124.
- [7] Donnelly H. and Fefferman C., *Nodal sets of eigenfunctions on riemannian manifolds*, Inv. Math. **93** (1988), 161–183.
- [8] Epstein P.S., *Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **16** (1930), 627–637.
- [9] Laurent C. and Léautaud M., *Tunneling estimates and approximate controllability for hypoelliptic equations*, arXiv :1703.10797v1 [math.AP] (2017), 63p.
- [10] Lebeau G. and Robbiano L., *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, CPDE **20** (1995), 335–356.
- [11] Pedersen M.A. and White De Wayne, *Ray theory of the general epstein profile*, J. Acoustic Soc. America **44** (1968), no. 3, 765–786.

- [12] Schulenberger J.R., *Elastic waves in the half space \mathbb{R}_+^2* , J. Differential Equations **20** (1978), 405–438.
- [13] Wilcox C.H., *Sound propagation in stratified fluids*, vol. 50, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [14] Zwillinger D., *Handbook of differential equations*, third ed., vol. 50, Academic Press, 1998.