



**HAL**  
open science

## Méthodes Level Set pour l'interaction fluide-structure

Georges-Henri Cottet, Emmanuel Maitre, Thomas Milcent

► **To cite this version:**

Georges-Henri Cottet, Emmanuel Maitre, Thomas Milcent. Méthodes Level Set pour l'interaction fluide-structure. Springer, 86, XI, 198 p., 2021, Mathématiques et Applications, 978-3-030-70075-1. 10.1007/978-3-030-70075-1 . hal-02373640

**HAL Id: hal-02373640**

**<https://hal.science/hal-02373640>**

Submitted on 21 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

G.-H. Cottet, E. Maitre et T. Milcent

Formulation Eulerienne et  
méthodes level set pour des  
problèmes d'interaction fluide-  
structure

21 novembre 2019

Springer



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b> .....	1
<b>2</b>	<b>Méthodes Level Set et interfaces lagrangiennes</b> .....	5
2.1	Capture ou suivi d'interfaces .....	5
2.2	Méthodes Level Set et géométrie .....	7
2.3	Expression de forces de surface au moyen de fonction Level Set	9
2.3.1	Exemple 1 : traitement d'images .....	14
2.3.2	Exemple 2 : tension superficielle .....	15
2.4	Aspects numériques I : consistance et précision .....	18
2.4.1	Redistanciation de $\varphi$ .....	20
2.4.2	Renormalisation de $\varphi$ .....	21
2.4.3	Comparaison des deux approches .....	22
2.5	Aspects numériques II : stabilité .....	25
2.5.1	Schéma explicite .....	27
2.5.2	Schéma implicite .....	30
2.5.3	Schéma semi-implicite .....	31
<b>3</b>	<b>Quelques outils mathématiques</b> .....	35
3.1	Caractéristiques et flots associés à un champ de vitesse .....	35
3.2	Déterminant et cofacteurs .....	39
3.3	Changements de variables .....	39
3.4	Formules de Reynolds .....	40
3.5	Conservation de la masse .....	42
3.5.1	Conservation de la masse en eulérien .....	42
3.5.2	Conservation de la masse en lagrangien .....	43
3.6	Conservation de la quantité de mouvement .....	43
3.6.1	Conservation de la quantité de mouvement en eulérien	43
3.6.2	Conservation de la quantité de mouvement en lagrangien	44

<b>4</b>	<b>Interaction d'un fluide incompressible avec une membrane élastique</b>	47
4.1	De la méthode de frontière immergée aux méthodes eulériennes	47
4.2	Membrane immergée : sans cisaillement	49
4.2.1	Formulation level set de la déformation élastique d'une hypersurface immergée : cas incompressible	49
4.2.2	Généralisation aux écoulements compressibles	55
4.2.3	Cas des forces de courbures	56
4.2.4	Modèles de fluides de Korteweg généralisés	58
4.3	Membrane immergée : avec cisaillement	59
4.3.1	Approche Level set pour les surfaces	59
4.3.2	Le tenseur surfacique $\mathcal{A}$	61
4.3.3	Invariants de $\mathcal{A}$ et force élastique associée	61
4.4	Schémas numériques explicites et semi-implicites en temps	62
4.4.1	Description du schéma semi-implicite	62
4.4.2	Illustrations numériques	63
4.5	Illustrations numériques et exemples de codes de calcul	67
4.5.1	Membrane sans cisaillement	67
4.5.2	Membrane avec cisaillement	70
<b>5</b>	<b>Corps solides immergés dans un fluide : cas des solides élastiques</b>	77
5.1	Introduction	77
5.1.1	Introduction	79
5.2	Matériaux hyperélastiques en formulation lagrangienne	80
5.2.1	Principe d'indifférence matérielle	81
5.2.2	Matériaux isotropes	82
5.3	Matériaux hyperélastiques en formulation eulérienne	84
5.3.1	Cas incompressible	85
5.3.2	Cas compressible	85
5.4	Lois de comportement classiques	86
5.4.1	Modèle de couplage fluide / structure élastique	87
5.4.2	Schémas numériques	88
5.4.3	Cas test de la cavité entraînée avec une balle élastique	89
5.5	Cas compressible	92
5.5.1	Modèle de couplage fluide / structure élastique	92
5.5.2	Schéma numérique	92
5.5.3	Résultats numériques	95
<b>6</b>	<b>Corps solides immergés dans un fluide incompressible : cas des solides rigides</b>	99
6.1	Introduction	99
6.2	La méthode de pénalisation pour un solide de vitesse donnée	100
6.3	Le cas d'un solide rigide en interaction avec le fluide	100
6.4	Remarques sur la mise en oeuvre numérique	103

6.5	Extensions de la méthode de pénalisation .....	105
6.6	Illustrations numériques .....	106
<b>7</b>	<b>Calculs d'interactions entre solides par méthode level set</b> .	117
7.1	Introduction .....	117
7.2	Traitement par méthode level set des forces d'interaction ....	118
7.2.1	Modèle de répulsion ponctuel .....	118
7.2.2	Répulsion surfacique par méthode level set .....	119
7.2.3	Prise en compte de forces de cohésion et d'amortissement	120
7.2.4	Illustrations numériques .....	121
7.3	Une méthode efficace pour traiter les contacts entre multiples objets .....	124
7.3.1	Motivation .....	124
7.3.2	L'algorithme .....	124
7.3.3	Illustrations numériques .....	128
<b>8</b>	<b>Annexes</b> .....	135
8.1	Calcul de la courbure avec une fonction Level Set .....	135
8.1.1	Exemple de l'ellipsoïde .....	136
8.1.2	Exemple du Tore ( $R > r$ ) .....	136
8.2	Equations sur $Z_1$ et $Z_2$ .....	137
8.3	Autre expression de $Z_1$ en fonction de $ \nabla\varphi $ .....	138
8.4	Preuve que $Z_1$ est la variation d'aire locale .....	139
8.5	Approximation volumique d'intégrales surfaciques .....	140
8.6	Calcul de la force élastique .....	141
8.7	Illustrations analytiques pour $Z_2$ .....	143
8.7.1	Deformations avec $\Gamma_t = \Gamma_0$ .....	143
8.7.2	Deformations avec $\Gamma_t \neq \Gamma_0$ .....	146
8.8	Schémas WENO pour l'équation de transport .....	149
	Littérature .....	154



# Chapitre 1

## Introduction

Les problèmes d'interaction fluide-structure interviennent dans de nombreux domaines de l'ingénierie : mécanique des structures immergées, aéroélasticité, biomécanique, effets de lubrification dans des écoulements de conduite, transports de particules, transport de sédiments, érosion des littoraux ... D'un point de vue mathématique et numérique ces problèmes représentent un réel défi dans la mesure où les fluides et les solides sont naturellement décrits par des modèles de nature différente, eulérienne pour les fluides et lagrangienne pour les solides, qui nécessitent des méthodes de discrétisation adaptées à ces modèles. Les méthodes traditionnelles pour traiter ces problèmes dites ALE (pour Arbitrary Lagrangian Eulerian) sont calquées sur ces différentes modélisations. Elles utilisent une discrétisation eulérienne des fluides et une discrétisation lagrangienne des solides, avec des maillages adaptés et des conditions de couplage appropriées pour traduire la continuité des vitesses et des efforts aux interfaces.

Dans les 10 dernières années sont apparues des alternatives à ces méthodes basées sur des modélisations eulériennes des deux types de milieux. Fluides et solides sont considérés comme un seul système avec des lois de comportement qui varient en espace et en temps. L'intérêt de ces méthodes est la possibilité qu'elles offrent d'utiliser un seul modèle numérique et un seul maillage pour l'ensemble du système, avec l'inconvénient de donner une description moins fine de l'interface et des conditions que l'on impose sur celle-ci.

Les méthodes de frontières immergées (IBM, pour Immersed Boundary Methods), proposées par Peskin dès 1972, peuvent être vues comme une classe de méthodes intermédiaires entre les 2 approches évoquées plus haut. Les solides, dans ce cas des membranes élastiques, sont immergées dans le fluide sans qu'il soit nécessaire d'appuyer un maillage du fluide sur ces solides, mais ils sont suivis de manière lagrangienne à l'aide de marqueurs advectés par le fluide.

Pour une revue assez complète de ces différentes méthodes on se référera au livre récent de T. Richter [96] pour les méthodes ALE et Eulériennes, et à l'article de revue [76] pour les méthodes de frontière immergée.



L'objet du présent livre est de décrire des modélisations eulériennes de l'interaction fluide-structure s'appuyant sur des fonctions Level Set. Les méthodes level set sont bien connues depuis les ouvrages de Sethian [99] et Osher [89] pour le traitement d'images et le calcul d'écoulements multiphasiques. Elles permettent le suivi implicite d'interfaces lagrangiennes (avec des champs d'advection physique pour les écoulements multiphasiques ou virtuels pour le traitement d'images) par résolution d'équations aux dérivées partielles de transport. Depuis une dizaine d'années, notamment par les auteurs de cet ouvrage, elles sont aussi utilisées pour modéliser les forces résultant de déformations de solides élastiques ou pour traiter des contacts entre objets et permettre de faire des calculs d'interaction fluide-structure dans un cadre eulérien. Ce livre reprend ces différents travaux. Son objectif est de décrire les modèles et non pas les méthodes de discrétisation numérique, sauf pour ce qui concerne les discrétisations en temps explicite ou implicite qui impactent la stabilité des modèles. De fait, un des intérêts des méthodes eulériennes est qu'elles permettent d'utiliser des méthodes conventionnelles en dynamique des fluides (différences finies, volumes finis ..) sans faire intervenir de questions spécifiques au couplage avec les structures solides. Dans cet ouvrage, les techniques de discrétisation spatiale utilisées pour discrétiser les équations ne sont évoquées que brièvement pour décrire les illustrations numériques.

Le plan du livre est le suivant. Dans le chapitre 2 nous faisons des rappels sur les techniques de capture ou de suivi d'interface. Nous montrons notamment comment utiliser des fonction Level Set pour traduire de manière volumique des forces surfaciques, ce qui est évidemment un point central dans ces méthodes. Nous développons les exemples de méthodes Level Set évoqués précédemment en traitement d'image et pour les écoulements multiphasiques, et nous abordons les questions de stabilité en méthodes Level Set dans l'exemple du traitement des termes de tension superficielle, questions qui seront reprises dans le chapitre 4. Le chapitre 3 complète les rappels du chapitre 2 par des notions de calcul différentiel sur les trajectoires dans les descriptions lagrangiennes des écoulements. Le chapitre 4 traite du premier exemple d'interaction fluide-structure, celui d'une membrane élastique immergé dans un fluide, d'abord dans le cas incompressible puis dans le cas général. Ce chapitre contient des exemples de code écrits en matlab pour permettre au lecteur d'expérimenter lui-même ces méthodes. Le chapitre 5 généralise l'approche Level Set aux corps élastiques quelconques, avec à nouveau une distinction entre les cas de fluides compressibles ou incompressibles. Le chapitre 6 traite le cas de solides rigides où l'interaction fluide structure est traitée par méthode de pénalisation. Le chapitre 7 s'intéresse au traitement par méthodes Level Set des contacts entre objets, qu'ils soient élastiques ou rigides. Nous décrivons en particulier un algorithme rapide pour le traitement de contacts multiples. Enfin une annexe détaille certains éléments techniques de calcul différentiel utilisés dans le livre. Les chapitres 4 à 7 sont largement indépendants les uns des autres.

Pour finir cette introduction, un point sur la terminologie. Bien que des termes comme *Ensembles de niveau*, voire *Surfaces Implicites*, auraient pu convenir, nous utilisons tout au long de ce livre l'anglicisme *Level Set* car c'est le terme qui est couramment utilisé, y compris en langue française. Nous espérons que le lecteur ne nous en tiendra pas rigueur.

## Littérature

1. R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi-conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125 :150–160, 1996.
2. R. Abgrall and S. Karni. Computations of compressible multifluids. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :594–623, 2001.
3. F Acker, RB de R Borges, and Bruno Costa. An improved weno-z scheme. *Journal of Computational Physics*, 313 :726–753, 2016.
4. P Angot, C-H Bruneau, and P Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999.
5. T.-D. Aslam. A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. *Journal of Computational Physics*, 193 :349–355, 2003.
6. S Balachandar and J K Eaton. Turbulent dispersed multiphase flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42 :11–133, 2010.
7. P.T. Barton, R. Deiterding, D. Meiron, and D. Pullin. Eulerian adaptative finite difference method for high-velocity impact and penetration problems. *Journal of Computational Physics*, 240 :76–99, 2013.
8. J. Thomas Beale and John Strain. Locally corrected semi-lagrangian methods for stokes flow with moving elastic interfaces. *Journal of Computational Physics*, 227(8) :3896 – 3920, 2008.
9. Caroline Bernier, Mattia Gazzola, Renaud Ronsse, and Philippe Chatelain. Simulations of propelling and energy harvesting articulated bodies via vortex particle-mesh methods. *Journal of Computational Physics*, 392 :34 – 55, 2019.
10. T Biben, K Kassner, and C Misbah. Phase-field approach to three-dimensional vesicle dynamics. *Physical Review E*, 72(4) :041921, 2005.
11. T Biben and C Misbah. An advected-field method for deformable entities under flow. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 29(2) :311–316, 2002.
12. T Biben and C Misbah. Tumbling of vesicles under shear flow within an advected-field approach. *Physical Review E*, 67(3) :031908, 2003.
13. Daniele Boffi, Lucia Gastaldi, and Luca Heltai. Stability results and algorithmic strategies for the finite element approach to the immersed boundary method. In *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 575–582. Springer, 2006.
14. Daniele Boffi, Lucia Gastaldi, and Luca Heltai. Numerical stability of the finite element immersed boundary method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(10) :1479–1505, 2007.
15. John A Bogovic, Jerry L Prince, and Pierre-Louis Bazin. A multiple object geometric deformable model for image segmentation. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(2) :145–157, 2013.
16. Claire Bost, Georges-Henri Cottet, and Emmanuel Maitre. Linear stability analysis of a Level Set model of immersed elastic membrane. Unpublished. *Preprint HAL* <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00388528/PDF/stability.pdf>, 2009.
17. Claire Bost, Georges-Henri Cottet, and Emmanuel Maitre. Convergence analysis of a penalization method for the three-dimensional motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(4) :1313–1337, August 2010.

18. JU Brackbill, Douglas B Kothe, and Charles Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics*, 100(2) :335–354, 1992.
19. A. De Brauer, A. Iollo, and T. Milcent. A cartesian scheme for compressible multimaterial models in 3d. *Journal of Computational Physics*, 313 :121–143, 2016.
20. Didier Bresch, Thierry Colin, Emmanuel Grenier, Benjamin Ribba, and Olivier Saut. Computational modeling of solid tumor growth : the avascular stage. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(4) :2321–2344, 2010.
21. J-P Caltagirone. Sur l’interaction fluide-milieu poreux ; application au calcul des efforts exercés sur un obstacle par un fluide visqueux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 318(5) :571–577, 1994.
22. M-P Cani and M Debrun. Animation of deformable objects using implicit surfaces. *IEEE Trans. Visualization Comput. Graphics*, 3(1) :39–50, 1997.
23. Henri Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, 1977.
24. Marcos Castro, Bruno Costa, and Wai Sun Don. High order weighted essentially non-oscillatory weno-z schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 230(5) :1766–1792, 2011.
25. Y.C. Chang, T.Y. Hou, B Merriman, and S. Osher. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 124 :449–464, 1996.
26. Li-Tien Cheng and Yen-Hsi Tsai. Redistancing by flow of time dependent eikonal equation. *Journal of Computational Physics*, 227(8) :4002–4017, 2008.
27. M Coquerelle and G-H Cottet. A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies. *Journal of Computational Physics*, 227(21) :9121–9137, 2008.
28. Mathieu Coquerelle. *Calcul d’interaction fluide-structure par méthode vortex et application à la synthèse d’images*. PhD thesis, Grenoble Alpes University, 2008.
29. Georges-Henri Cottet and Emmanuel Maitre. A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid–structure interaction problems. *Comptes Rendus Mathématique*, 338(7) :581–586, 2004.
30. Georges-Henri Cottet and Emmanuel Maitre. A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Mathematical models and methods in applied sciences*, 16(03) :415–438, 2006.
31. Georges-Henri Cottet and Emmanuel Maitre. A semi-implicit level set method for multiphase flows and fluid–structure interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 314 :80–92, 2016.
32. Georges-Henri Cottet, Emmanuel Maitre, and Thomas Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(3) :471–492, May 2008.
33. SL Dance and MR Maxey. Incorporation of lubrication effects into the force-coupling method for particulate two-phase flow. *Journal of computational Physics*, 189(1) :212–238, 2003.
34. Charles Dapogny and Pascal Frey. Computation of the signed distance function to a discrete contour on adapted triangulation. *Calcolo*, 49(3) :193–219, 2012.
35. Michel C Delfour and J-P Zolésio. *Shapes and geometries : metrics, analysis, differential calculus, and optimization*, volume 22. Siam, 2011.
36. Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed*. EDP sciences, 2016.
37. Michel Demazure. *Catastrophes et bifurcations*. Ellipses Paris, 1989.

38. Fabian Denner and Berend GM van Wachem. Numerical time-step restrictions as a result of capillary waves. *Journal of Computational Physics*, 285 :24–40, 2015.
39. Ronald J DiPerna and Pierre-Louis Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3) :511–547, 1989.
40. J Donea, S Giuliani, and JP Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1) :689–723, 1982.
41. Björn Engquist, Anna-Karin Tornberg, and Richard Tsai. Discretization of dirac delta functions in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 207(1) :28–51, 2005.
42. D Enright, R Fedkiw, J Ferziger, and I Mitchell. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *Journal of Computational physics*, 183(1) :83–116, 2002.
43. Lawrence C Evans and Joel Spruck. Motion of level sets by mean curvature. ii. *Transactions of the american mathematical society*, 330(1) :321–332, 1992.
44. Lawrence Craig Evans and Ronald F Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. *CRC Press*, 1992.
45. H. Falahaty, A. Khayyer, and H. Gotoh. Enhanced particle method with stress point integration for simulation of incompressible fluid-nonlinear elastic structure interaction. *Journal of Fluids and Structures*, 81 :325–360, 2018.
46. R.D. Falgout, J.E. Jones, and U.M. Yang. The design and implementation of hypre, a library of parallel high performance preconditioners. *chapter in Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers, A.M. Bruaset and A. Tveito, eds., Springer-Verlag, UCRL-JRNL-205459*, 51 :267–294, 2006.
47. R.D. Falgout and U.M. Yang. Hypre : a library of high performance preconditioners. *Computational Science - ICCS 2002 Part III, P.M.A. Sloot, C.J.K. Tan, J.J. Dongarra, and A.G. Hoekstra, eds., vol. 2331 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, UCRL-JC-146175*, pages 632–641, 2002.
48. C. Farhat, A. Rallu, and S. Shankaran. A higher-order generalized ghost fluid method for the poor for the three-dimensional two-phase flow computation of underwater implosions. *Journal of Computational Physics*, 227(16) :7674–7700, 2008.
49. N. Favrie, S Gavrilyuk, and S Ndanou. A thermodynamically compatible splitting procedure in hyperelasticity. *Journal of Computational Physics*, 270(C) :300–324, 2014.
50. N. Favrie and S. L. Gavrilyuk. Diffuse interface model for compressible fluid – Compressible elastic-plastic solid interaction. *Journal of Computational Physics*, 231(7) :2695–2723, 2012.
51. N. Favrie, S.L. Gavrilyuk, and R. Saurel. Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations. *Journal of Computational Physics*, 228(16) :6037–6077, 2009.
52. S. Galera, P.-H. Maire, and J. Breil. A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ALE scheme using VOF interface reconstruction. *Journal of Computational Physics*, 229(16) :5755–5787, 2010.
53. Cédric Galusinski and Paul Vigneaux. On stability condition for bifluid flows with surface tension : Application to microfluidics. *Journal of Computational Physics*, 227(12) :6140–6164, 2008.
54. S.L. Gavrilyuk, N. Favrie, and R. Saurel. Modelling wave dynamics of compressible elastic materials. *Journal of Computational Physics*, 227(5) :2941–2969, 2008.

55. Mattia Gazzola, Philippe Chatelain, Wim M Van Rees, and Petros Koumoutsakos. Simulations of single and multiple swimmers with non-divergence free deforming geometries. *Journal of Computational Physics*, 230(19) :7093–7114, 2011.
56. David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 2015.
57. R Glowinski, T-W Pan, T I Hesla, and D D Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 25(5) :755–794, 1999.
58. R Glowinski, TW Pan, TI Hesla, DD Joseph, and J Periaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :363–426, 2001.
59. K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, 30 :76–95, 1979.
60. S.K. Godunov. *Elements of continuum mechanics*. Nauka Moscow, 1978.
61. José Gomes and Olivier Faugeras. Reconciling distance functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2) :209–223, 2000.
62. Y. Gorsse, A. Iollo, T. Milcent, and H. Telib. A simple cartesian scheme for compressible multimaterials. *Journal of Computational Physics*, 272 :772–798, 2014.
63. Boyce E Griffith and Charles S Peskin. On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *Journal of Computational Physics*, 208(1) :75–105, 2005.
64. J.-L. Guermond, P. Mineev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :6011–6045, 2006.
65. A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, iii. *Journal of Computational Physics*, 71(1) :231–303, 1987.
66. F. Hecht. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265, 2012.
67. G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics. A continuum approach for engineering*. J. Wiley and Sons, 2000.
68. Howard H Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2) :335–352, 1996.
69. X.Y. Hu, N.A. Adams, and G. Iaccarino. On the hllc riemann solver for interface interaction in compressible multi-fluid flow. *Journal of Computational Physics*, 228 :6572–6589, 2009.
70. J Janela, A Lefebvre, and B Maury. A penalty method for the simulation of fluid-rigid body interaction. In *ESAIM : Proceedings*, volume 14, pages 115–123. EDP Sciences, 2005.
71. M Jedouaa. *Interface capturing methods for interacting immersed objects*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2017.
72. Meriem Jedouaa, C-H Bruneau, and Emmanuel Maitre. An efficient interface capturing method for a large collection of interacting bodies immersed in a fluid. *Journal of Computational Physics*, 378 :143–177, 2019.
73. G.S. Jiang and C.W. Shu. Efficient implementation of Weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1) :202–228, 1996.

74. A. Kapahi, S. Sambasivan, and H.S. Udaykumar. A three-dimensional sharp interface cartesian grid method for solving high speed multimaterial impact, penetration and fragmentation problems. *Journal of Computational Physics*, 241 :308–332, 2013.
75. Stefan Kern and Petros Koumoutsakos. Simulations of optimized anguilliform swimming. *Journal of Experimental Biology*, 209(24) :4841–4857, 2006.
76. Woojin Kim and Haecheon Choi. Immersed boundary methods for fluid-structure interaction : A review. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2019.
77. Ron Kimmel and James A Sethian. Computing geodesic paths on manifolds. *Proceedings of the national academy of Sciences*, 95(15) :8431–8435, 1998.
78. G. Kluth and B. Despres. Discretization of hyperelasticity on unstructured mesh with a cell-centered Lagrangian scheme. *Journal of Computational Physics*, 229(24) :9092–9118, 2010.
79. Long Lee and Randall J LeVeque. An immersed interface method for incompressible navier–stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(3) :832–856, 2003.
80. R J Leveque and Z Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(4) :1019–1044, 1994.
81. H. Luo, R. Mittal, X. Zheng, S.A. Bielaowicz, R.J. Walsh, and J.K. Hahn. An immersed-boundary method for flow – structure interaction in biological systems with application to phonation. *Journal of Computational Physics*, 227(22) :9303–9332, 2008.
82. E Maitre, T Milcent, G-H Cottet, A. Raoult, and Y Usson. Applications of level set methods in computational biophysics. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(11) :2161–2169, 2009.
83. Emmanuel Maitre, Chaouqi Misbah, Philippe Peyla, and Annie Raoult. Comparison between advected-field and level-set methods in the study of vesicle dynamics. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 241(13) :1146–1157, 2012.
84. B Maury. A many-body lubrication model. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(9) :1053–1058, 1997.
85. T Milcent. *Une approche eulérienne du couplage fluide-structure, analyse mathématique et applications en biomécanique*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2009.
86. Thomas Milcent and Emmanuel Maitre. Eulerian model of immersed elastic surfaces with full membrane elasticity. *Communications in Mathematical Sciences*, 14(3) :857–881, 2016.
87. G.H. Miller and P. Colella. A conservative three-dimensional eulerian method for coupled solid-fluid shock capturing. *Journal of Computational Physics*, 183(1) :26–82, 2002.
88. Chohong Min. On reinitializing level set functions. *Journal of computational physics*, 229(8) :2764–2772, 2010.
89. S Osher and R Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153. Springer Science & Business Media, 2006.
90. C S Peskin and B F Printz. Improved volume conservation in the computation of flows with immersed elastic boundaries. *Journal of computational physics*, 105(1) :33–46, 1993.
91. Charles S Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25(3) :220 – 252, 1977.
92. Charles S Peskin. The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11 :479–517, 2002.

93. Stéphane Popinet. Numerical models of surface tension. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50 :49–75, 2018.
94. Jianliang Qian, Yong-Tao Zhang, and Hong-Kai Zhao. Fast sweeping methods for eikonal equations on triangular meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(1) :83–107, 2007.
95. T. Richter. A fully eulerian formulation for fluid-structure-interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 233 :227–240, 2013.
96. Thomas Richter. *Fluid-structure interactions : models, analysis and finite elements*, volume 118. Springer, 2017.
97. Giovanni Russo and Peter Smereka. A remark on computing distance functions. *Journal of Computational Physics*, 163(1) :51–67, 2000.
98. G. Scovazzi, M.A. Christon, T.J.R. Hughes, and J.N. Shadid. Stabilized shock hydrodynamics : I. a Lagrangian method. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 196 :923–966, 2007.
99. J A Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press, 1999.
100. James A Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4) :1591–1595, 1996.
101. James A Sethian. Fast marching methods. *SIAM review*, 41(2) :199–235, 1999.
102. N Sharma and N-A Patankar. A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 205(2) :439–457, 2005.
103. Yiqing Shen and Gecheng Zha. Improvement of the weno scheme smoothness estimator. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 64(6) :653–675, 2010.
104. D Shiels, A Leonard, and A Roshko. Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters. *Journal of Fluids and Structures*, 15(1) :3–21, 2001.
105. Chi-Wang Shu. High order eno and weno schemes for computational fluid dynamics. In *High-order methods for computational physics*, pages 439–582. Springer, 1999.
106. Peter Smereka. The numerical approximation of a delta function with application to level set methods. *Journal of Computational Physics*, 211(1) :77–90, 2006.
107. John M Stockie and Brian R Wetton. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes. *Journal of Computational Physics*, 154(1) :41–64, 1999.
108. John M Stockie and Brian TR Wetton. Stability analysis for the immersed fiber problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 55(6) :1577–1591, 1995.
109. K. Sugiyama, S. Li, S. Takeuchi, S. Takagi, and Y. Matsumoto. A full eulerian finite difference approach for solving fluid-structure coupling problems. *Journal of Computational Physics*, 230 :596–627, 2011.
110. Mark Sussman and Emad Fatemi. An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM Journal on scientific computing*, 20(4) :1165–1191, 1999.
111. Mark Sussman, Peter Smereka, and Stanley Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational physics*, 114(1) :146–159, 1994.
112. Mamadou Sy, Didier Bresch, Francisco Guillén-González, Jérôme Lemoine, and Maria Angeles Rodríguez-Bellido. Local strong solution for the incompressible korteweg model. *Comptes rendus Mathématique*, 342(3) :169–174, 2006.



113. E.F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4 :25–34, 1994.
114. B. Valkov, C.-H Rycroft, and K. Kamrin. Eulerian method for multiphase interactions of soft solid bodies in fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 82(4) :041011, 2015.
115. B Vowinkel, J Withers, P Luzzatto-Fegiz, and Meiburg E. Settling of cohesive sediment : particle-resolved simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 858 :5–44, 2010.
116. J Walter, A-V Salsac, D Barthès-Biesel, and P Le Tallec. Coupling of finite element and boundary integral methods for a capsule in a stokes flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 83(7) :829–850, 2010.
117. M Y Wang and X Wang. “color” level sets : a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(6) :469–496, 2004.
118. H. Zhao, J. B. Freund, and R. D. Moser. A fixed-mesh method for incompressible flow-structure systems with finite solid deformations. *Journal of Computational Physics*, 227 :3114–3140, 2008.
119. Hong-Kai Zhao, Tony Chan, Barry Merriman, and Stanley Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of computational physics*, 127(1) :179–195, 1996.
120. Hongkai Zhao. A fast sweeping method for eikonal equations. *Mathematics of computation*, 74(250) :603–627, 2005.