



**HAL**  
open science

# Dynamique des systèmes perpétuellement hors d'équilibre

Clément Sire

► **To cite this version:**

Clément Sire. Dynamique des systèmes perpétuellement hors d'équilibre. Bulletin de la Societe Francaise de Physique, 1995, 101, pp.24-31. hal-02367458

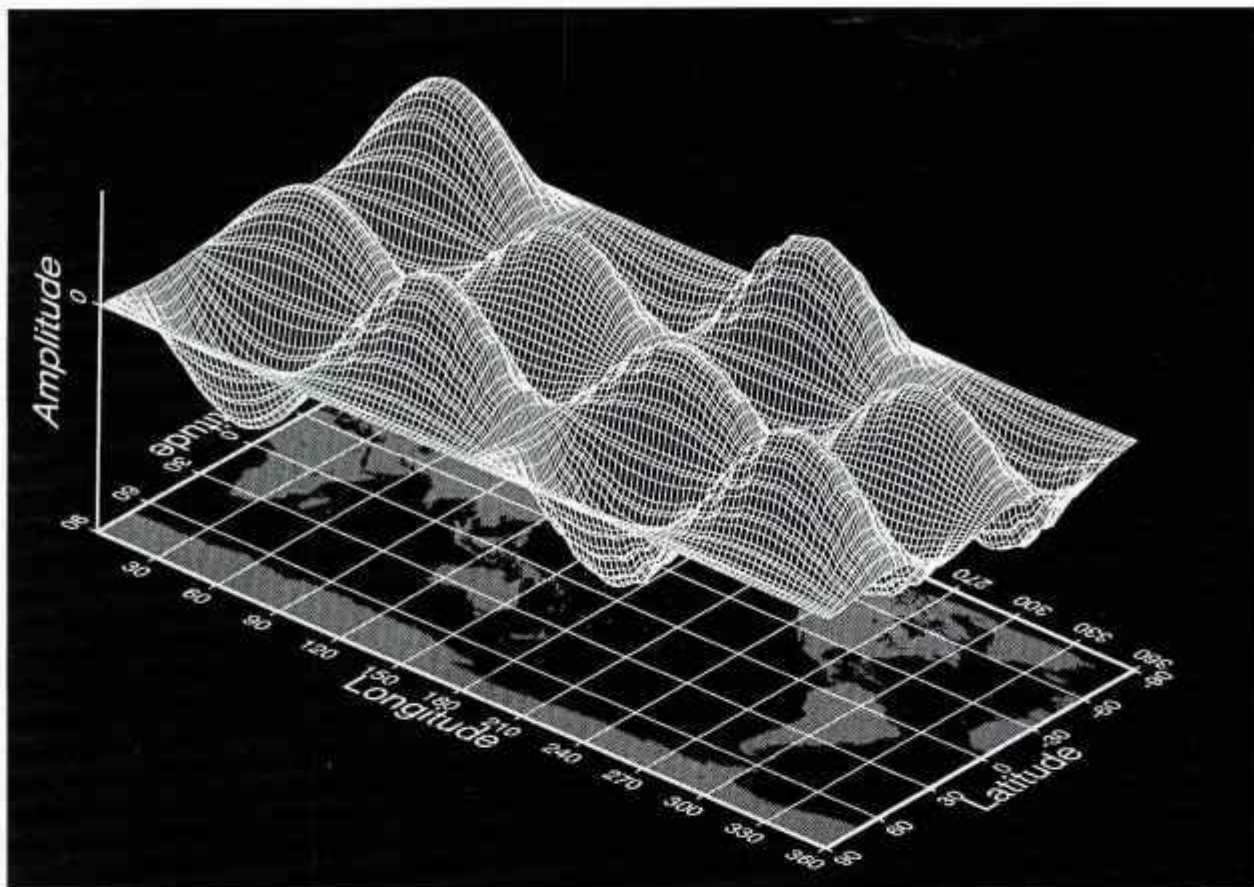
**HAL Id: hal-02367458**

**<https://hal.science/hal-02367458>**

Submitted on 20 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**NUMÉRO 101** Nouvelle série

Abonnement : 250 F

le numéro : 60 F

Publication pentannuelle :

OCTOBRE 1995

Société Française de Physique  
Siège social et Administration  
33, rue Croulebarbe  
75013 Paris - Tél. : 47.07.32.98

Reconnue d'Utilité Publique  
par décret du 15 janvier 1881  
Membre de la Société  
Européenne de Physique

## AU SOMMAIRE

- 3 Articles et échos de la physique : P. LOGNONNÉ, S. CILIBERTO, J.-M. LAGET, T. GEORGES
- 18 Les cinquante ans du C.E.A., J.-L. SIDA
- 21 Prix de la Société
- 24 Dynamique des systèmes hors d'équilibre, C. SIRE
- 32 Éditorial : M. LAMBERT

*Attention : p. 17 Cotisations et abonnements pour 1996*



# bulletin de la société française de physique

# Dynamique des systèmes perpétuellement hors d'équilibre\*

Clément Sire

Laboratoire de Physique Quantique

Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex, France E-mail: clement@siberia.ups-tlse.fr

Dans cet article, je décris la dynamique de divers systèmes, qui tentent d'atteindre une phase d'équilibre ordonnée, partant d'une condition initiale générique. Je présenterai ainsi les caractéristiques les plus importantes de la dynamique hors d'équilibre des mousses de savon, des bulles magnétiques, des monocouches amphiphiles, ou de la croissance de microcristaux, ainsi que celle décrivant des systèmes modèles, tels que le modèle d'Ising, de Potts, ou encore le modèle XY. Je présenterai ensuite la physique d'une nouvelle approximation qui a donné des résultats remarquables pour l'étude des phénomènes non linéaires hors d'équilibre. Finalement, j'appliquerai ces idées au cas de la turbulence en déclin, ce qui permet de voir ce phénomène sous un jour nouveau, et de lui attribuer des propriétés inattendues.

## Introduction

Il est courant qu'il soit pertinent, lors de la résolution d'un problème de physique, de considérer des passages à la limite des plus délicats. Cela peut être la limite de température nulle ( $T \rightarrow 0$ ), la limite thermodynamique ( $V - L^d \rightarrow \infty$ ), ou des limites plus spécifiques pour une quantité physique telle qu'une susceptibilité (de spin, de charge, supraconductrice) à fréquence ou moment nuls. Il est pourtant une limite fondamentale, le plus souvent sous-entendue et rarement évoquée dans les manuels, et qui est à la base de la thermodynamique, de la théorie de la diffusion (matrice  $S$ ) en mécanique quantique, ou encore des diverses formules de Kubo (transport, susceptibilités, ...). Il s'agit bien sûr de la limite de temps infini ( $t \rightarrow \infty$ ).

Pour ce qui est des systèmes thermodynamiques, qui nous intéressent plus particulièrement dans cet article, la définition de l'état thermodynamique impose que pour un système fini, on attende assez longtemps pour que celui-ci s'équilibre (limite  $t \rightarrow \infty$ ), avant de prendre la limite thermodynamique. Le sujet de cet article est de présenter des systèmes physiques, souvent très simples, pour lesquels cet ordre des limites n'est pas réalisé en pratique. Pour ces systèmes, une description pertinente revient à d'abord réaliser la limite de volume infini, pour ensuite étudier l'évolution en temps. Quand l'état initial n'est pas une perturbation faible de l'état d'équilibre, nous allons voir que le système n'atteint virtuellement jamais l'équilibre.

Comme nous allons rapidement le constater, cette nouvelle physique peut être observée à des échelles qui peuvent aller de microscopiques (impuretés semi-conductrices dans une matrice vitreuse) à gigantesques (amas de galaxie ?), en passant par des échelles "humaines", du millimètre (cristaux liquides, bulles magnétiques) à la dizaine de centimètres (bulles de savon). Les échelles de temps sont alors en relation avec ces diverses échelles de distances.

Dans la suite, je m'attacherai à présenter de nombreux exemples expérimentaux et quelques modèles théoriques, afin de dégager quelques idées fortes sur ces systèmes :

- existence d'une taille typique de domaines en croissance  $L(t)$ ,
- universalité des fonctions de corrélation qui sont uniquement des fonctions des distances exprimées en unité  $L(t)$ ,
- corrélations temporelles à longue portée tout à fait non triviales.

Une fois ces propriétés établies sur de nombreux exemples, j'introduirai brièvement une nouvelle méthode théorique pour l'étude des phénomènes non linéaires, en insistant plus particulièrement sur ses motivations physiques. Son efficacité sera illustrée par son application à la dynamique du modèle de Potts, qui décrit de nombreuses situations physiques (mousse de savon, bulles magnétiques, cristaux liquides...). Enfin, dans une dernière partie plus sujette à controverse, je présenterai des travaux récents sur la turbulence en déclin en deux dimensions, qui suggèrent que ce phénomène entre dans le cadre physique qui fait l'objet de cet article.

Cette forme d'évolution est décrite par le mot anglais "coarsening" (devenant grossier, pas moi, c'est la traduction), dont j'avoue ne pouvoir donner d'équivalent adéquat en français (des termes tels "vieillessement" sont restrictifs et peuvent induire en erreur). J'en appelle donc à l'indulgence du lecteur, qui notera mes efforts afin d'éviter les anglicismes les plus courants, parfois au prix de phrases alambiquées (les foudres de notre ministre nous guettent !).

## Quelques exemples de systèmes "perpétuellement hors d'équilibre"

### Le modèle d'Ising : une expérience sur des cristaux liquides

L'exemple le plus simple qui réunit toutes les particularités du coarsening est sans nul doute le modèle d'Ising de la transition ferromagnétique. Imaginons que sur chaque site  $i$  d'un réseau (carré, hexa-

gonal en  $d=2$ , cubique en  $d=3...$ ), l'on ait placé un spin  $s_i$  qui peut prendre les deux valeurs  $s_i = \pm 1$ . On définit alors un hamiltonien (fonctionnelle énergie) ferromagnétique qui favorisera les configurations où les spins sont localement alignés :

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j \quad (1)$$

avec  $J > 0$ , et où la somme se fait sur les sites  $i$ , et leurs plus proches voisins  $j$ . Pour une température  $T$  suffisamment faible par rapport à la constante d'échange  $J$ , il existe une aimantation spontanée finie, à l'équilibre. A  $T = 0$ , le système est dans un de ses deux états fondamentaux où tous les spins valent  $+1$  ou  $-1$ . A haute température, l'aimantation est nulle, et les corrélations sont d'autant plus faibles que  $T$  est élevée. La transition à  $T_c = J$  est du second ordre. La description qui va maintenant être donnée de la dynamique fortement hors d'équilibre du modèle d'Ising permettra d'introduire des concepts physiques qui s'adapteront sans peine aux autres systèmes étudiés par la suite. Préparons le système de spins dans un état de très haute température où les spins sont essentiellement aléatoires, et refroidissons-le soudainement sous  $T_c$  par exemple à  $T_f = 0$ . La température finale  $T_f$  du refroidissement n'est pas importante tant que  $T_f < T_c$ , alors qu'un refroidissement exactement à  $T_f = T_c$  conduit à des propriétés très différentes, que je n'évoquerai pas ici. Le système cherche alors à rejoindre l'un de ses deux états purs. Si celui-ci est de taille finie, il réalisera cet équilibre en un temps (par exemple, temps Monte-Carlo dans une simulation de ce type) fini, et choisira l'une des deux phases pures en fonction du faible excès (un terme de surface) d'une sorte de spin ou de l'autre, juste avant le refroidissement brusque. Si maintenant le système considéré est de taille infinie, des régions de spin  $+1$  ou  $-1$  vont croître sans jamais occuper tout l'espace. Ceci est illustré en figure 1 sur une analogie expérimentale du modèle d'Ising qui sera présentée un peu plus loin. On appellera  $L(t)$  la largeur typique de ces domaines. On peut montrer que  $L(t) \sim t^{1/2}$  ce qui dans ce cas précis peut se comprendre par un argument qualitatif. Le mouvement d'une interface est dû à la courbure et au coût énergétique

\* Certaines parties de cet article ont été reprises et développées lors du Congrès S.F.P. du 4-8 septembre 1995 à Marseille.

de celle-ci. Si l'interface entre deux domaines magnétiques est strictement rectiligne et verticale, il est, en effet, clair qu'elle n'a aucune raison de se mouvoir, ni vers la droite, ni vers la gauche. D'une façon plus précise, on peut montrer que la vitesse locale de l'interface est inversement proportionnelle au rayon de courbure,  $dL/dt \sim -\sigma/L$ , où  $\sigma$  est la tension de surface. Pour une bulle de spins  $+1$  de rayon initial  $L$  dans un fond de spins  $-1$ , la solution de cette équation montre que la bulle a disparu au bout d'un temps  $t$  donné par  $L \sim (\sigma t)^{1/2}$ .

Ce qui caractérise cette dynamique, et qui justifie l'expression "perpétuellement hors d'équilibre", est le fait que lorsque des configurations de spins prises à des temps différents sont présentées à la même échelle (par une homothétie de facteur  $L(t)^{-1}$ ), ces images sont statistiquement identiques (Figure 1). Ce fait, très général, et dont la démonstration dans les divers cas exposés ici constitue la motivation première des expérimentateurs et théoriciens du domaine, signifie que lorsque cette mise à l'échelle a été réalisée, les propriétés physiques ne dépendent plus explicitement du temps, et sont de plus universelles. Cette universalité implique que les quantités mesurées ne doivent pas dépendre des propriétés à courte portée du système expérimental ou du modèle, tant que celui-ci reste dans la classe d'universalité considérée (ici celle du modèle d'Ising). Vues à une échelle  $L(t)$  ou plus grande, les propriétés sont alors fort différentes de celles à l'équilibre. Bien sûr, dans un échantillon de taille finie, ce régime physique n'est pertinent que jusqu'au temps  $t_0$  tel que  $L(t_0)$  devienne de l'ordre de la taille linéaire du système. Pour certains systèmes physiques,  $t_0$  peut s'avérer suffisamment grand pour que ce régime foncièrement hors d'équilibre soit le régime pertinent. Une conséquence de cet état invariant d'échelle, atteint en pratique après un temps transitoire fini, se retrouve dans les fonctions de corrélation du paramètre d'ordre. Par exemple, si l'on considère la fonction de corrélation au même temps,  $G(x,t) = \langle s_x(t) s_0(t) \rangle$ , où la moyenne se fait sur les conditions initiales (ou sur le site 0), l'hypothèse d'invariance d'échelle impose que  $G(x,t) = g(x/L(t))$  à grands temps, où  $L(t) \sim t^{1/2}$  pour ce système, et où  $g$  est une fonction universelle, indépendante du temps. Ceci fournit d'ailleurs une définition plus précise de  $L(t)$ , comme étant l'échelle sur laquelle les fonctions de corrélations varient. Comme  $g(0) = \langle s^2 \rangle = 1$ , on définit souvent  $L(t)$ , tel que  $G(L(t), t) = g(1) = 1/2$ . De même, pour la fonction de corrélation à deux temps  $C(x,t,t') = \langle s_x(t) s_0(t') \rangle$ , Fisher & Huse ont proposé la forme  $C(x,t,t') = [L(t')/L(t)]^\lambda c(x/L(t))$  pour  $t \gg t'$ , où  $c$  et  $\lambda$  sont universels. Si la dépendance de  $c$  en la variable réduite  $x/L(t)$  est maintenant claire, le préfacteur traduit la décorrélation temporelle du système entre les temps  $t'$  et  $t$ . Par exemple, pour  $x = 0$ ,  $\langle s_0(t) s_0(t') \rangle = [L(t')/L(t)]^\lambda$  mesure la corrélation d'un spin (à  $x = 0$ ) au temps  $t'$ , avec ce même spin

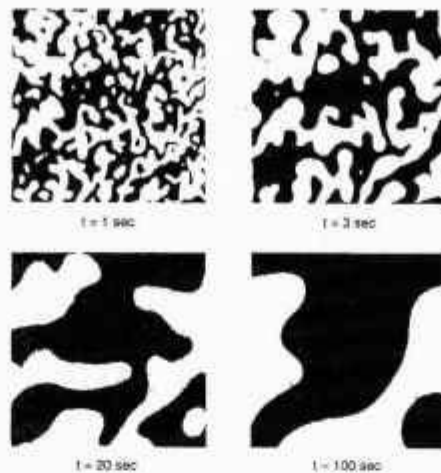


Figure 1 : Evolution du système de cristaux liquides, décrit dans le texte [M. Mason, A.N. Pargellis, B. Yurke, Phys. Rev. Lett. 70, 190 (1993)], pour quatre temps croissants. Les zones noires et blanches correspondent aux deux phases riches en "hélices" tournant de  $\pm \pi/2$ . Sachant que l'échelle de largeur des domaines  $L(t)$  croît comme  $t^{1/2}$ , et que  $L(1 \text{ min}) \approx 1 \text{ mm}$ , le lecteur pourra s'amuser à évaluer le temps nécessaire pour qu'un domaine recouvre un échantillon hypothétique de  $1 \text{ cm}^2$ . Ce genre de systèmes entre certainement dans la classe des cas pour lesquels la limite thermodynamique est effectivement prise avant celle des grands temps.

au temps  $t$ . L'exposant  $\lambda$  est en général non trivial, et il n'y a aucune relation entre celui-ci et les exposants statiques.

Afin de mesurer l'exposant  $\lambda$  pour le modèle d'Ising en  $d = 2$ , Mason et ses collaborateurs des laboratoires AT&T-Bell ont construit un analogue expérimental de celui-ci (Figure 1). Entre deux plaques de verre distante d'environ  $20 \mu\text{m}$ , se trouve confiné un cristal liquide dans la phase nématique. Les plaques de verre sont traitées spécialement, de telle sorte que les molécules s'alignent le long d'une direction donnée au contact de chacune des plaques. Les directions associées à celles-ci sont alors choisies orthogonales. Afin de minimiser l'énergie élastique dans la phase nématique, les directions des molécules entre les plaques doivent interpoler progressivement entre les deux directions imposées aux bords. Les molécules ont alors le choix de former localement une hélice tournant à droite ou à gauche, ce qui définit deux états de spin effectifs. Il est clair que les contraintes élastiques conduisent à une énergie d'interaction plus élevée entre hélices de signes opposés qu'entre celles de même signe, ce qui montre que le hamiltonien effectif est bien "ferromagnétique". La notion d'universalité assure que les interactions locales entre hélices, bien plus subtiles que dans un simple modèle d'Ising avec interaction aux plus proches voisins, ne sont pas importantes à grands temps. Les physiciens des Bell Labs ont montré que  $L(t) \sim t^\lambda$  avec  $\lambda = 0.515 \pm 0.026$  (pour une valeur théorique  $\lambda = 1/2$ ), et ont mesuré un  $\lambda = 1.246 \pm 0.079$ , en bon

accord avec les simulations de Fisher & Huse qui trouvent  $\lambda = 1.25 \pm 0.01$ . Nous verrons plus loin qu'une nouvelle technique, permettant l'étude approximative de la dynamique des systèmes non linéaires, conduit à  $\lambda = 1.289...$

#### Bulles de savon et modèle de Potts

Entre deux plaques de verre au format A4, plaçons un liquide savonneux et un gaz, généralement de l'air, mais parfois de l'hélium afin d'accélérer l'expérience. Secouons bien l'ensemble jusqu'à former de nombreuses petites bulles, puis évacuons le liquide en surplus. Le montage sera alors posé sur un photocopieur, qui, régulièrement, capturera un instantané de l'évolution de la mousse. C'est ce genre d'expériences que J.A. Glazier aux USA, ou l'équipe de J. Stavans en Israël, réalisent depuis une dizaine d'années, en prenant bien garde de drainer régulièrement l'échantillon, afin que les interfaces entre bulles (les bords de Plateau, du nom du physicien belge) restent sèches. Des expériences similaires ont été réalisées sur des monocouches lipidiques, notamment en France, par B. Berge et ses collaborateurs.

La mousse n'est généralement jamais dans une configuration stable, pas tant à cause des ruptures éventuelles d'interfaces, qui peuvent être évitées en utilisant des mousses de bonne qualité, qu'en raison des différences de pression existant entre les différentes bulles. La perméabilité  $\kappa$  des interfaces étant finie, et d'autant plus grande que le gaz remplissant les bulles est fait de molécules plus petites, ces différences de pression engendrent la croissance ou la disparition de certaines bulles. En deux dimensions, le grand von Neumann a démontré que le taux de croissance de l'aire  $A_n$  d'une bulle à  $n$  côtés peut se calculer très simplement. Pour des raisons de stabilité mécanique, exactement trois interfaces se rencontrent en chaque vertex (Figure 2), faisant entre elles un angle d'ouverture de  $120^\circ$ . Chaque interface est un arc de cercle de longueur  $l$ , et de rayon  $R$  donné par la loi de Laplace  $\Delta p = \sigma/R$ , où  $\Delta p$  est la différence de pression entre les deux côtés de l'interface, et  $\sigma$  est la tension superficielle. Le taux de croissance s'écrit alors,

$$\frac{dA_n}{dt} = \kappa \sum_{i=1}^n l_i \Delta p_i = \kappa \sigma \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{R_i} = \frac{\pi}{3} \kappa \sigma (n-6) \quad (2)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\sum l_i/R_i = \pi/3(n-6)$  est l'angle de rotation d'un vecteur suivant le contour d'une bulle (le lecteur est invité à faire ce petit calcul géométrique). Ceci montre que le taux de croissance ne dépend que du nombre de côtés  $n$  de la bulle, et non de sa forme ou de celle de ses voisines. De plus, ce résultat implique que seules les bulles à moins de six côtés décroissent, et peuvent donc disparaître, alors que celles à plus de six côtés croissent. Ce fait est à la base de l'instabilité d'une mousse bidimensionnelle, et peut être étendu approximativement en  $d = 3$ .

Les bulles à 3, 4, et 5 côtés disparaissent selon les processus (dits de type  $T_2$ ) de la Figure 3, qui peuvent générer de nouvelles bulles à moins de six côtés, puisqu'une bulle voisine d'une bulle qui disparaît peut elle-même perdre un côté dans certains cas (voir Figure 3). Il faut d'ailleurs noter que la relation topologique d'Euler-Poincaré impose que le nombre moyen de côtés reste constant :  $\langle n \rangle = 6$ . Mentionnons finalement que la loi de von Neumann a été raisonnablement vérifiée sur des modèles numériques ainsi qu'expérimentalement, et qu'elle peut être approximativement étendue au cas tridimensionnel.

Au cours de l'évolution de la mousse, le nombre de bulles diminue, et l'on peut définir une taille linéaire de domaines  $L(t)$ , comme étant le rayon de giration moyen, et qui augmente donc avec le temps. L'équation (2) suggère que l'aire moyenne d'une bulle augmente linéairement avec le temps, et donc que  $L(t) \sim t^{1/2}$ . On retrouve donc la même loi de croissance que pour le modèle d'Ising, ce qui est loin de constituer un hasard. Ceci est l'apanage des dynamiques où le paramètre d'ordre (aimantation pour le modèle Ising, aire d'une bulle pour les mousses) n'est pas localement conservé. Nous allons d'ail-

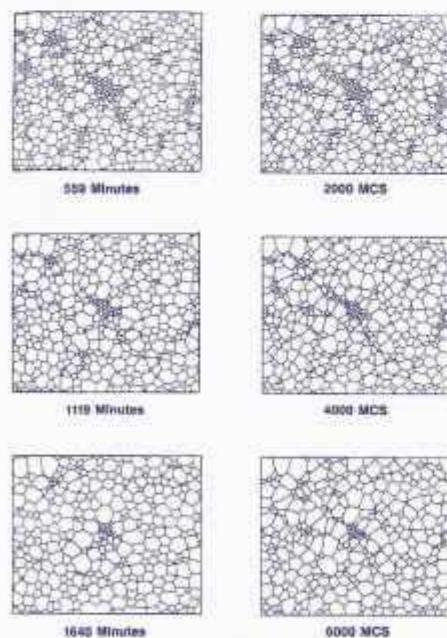


Figure 2 : Une comparaison entre une expérience sur des bulles de savon, et des simulations Monte-Carlo du modèle de Potts partant de la même condition initiale numérisée [J.A. Glazier, M.P. Anderson, G.S. Grest, J. Stavans, tiré de la thèse de J.A. Glazier, Chicago (1989)]. Chaque bulle de Potts contient une phase différente. Il faut noter le bon accord entre simulation et expérience, et la proportionnalité entre temps réel et temps Monte-Carlo. La condition initiale comprenant de grandes régions de bulles hexagonales, très stables en vertu de la loi de von Neumann (équation (2)), le système n'a pas encore atteint l'état invariant d'échelle, universel et homogène, attendu à grands temps. Cet état invariant d'échelle ne dépend pourtant pas de la condition initiale.

leurs voir un peu plus loin que les mousses de savon sont bien décrites par un modèle d'Ising généralisé, appelé modèle de Potts. Mentionnons finalement que la loi  $L(t) \sim t^{1/2}$  est parfaitement vérifiée numériquement, et expérimentalement sur des échantillons où les bords de Plateau sont régulièrement drainés. Les premières expériences réalisées dans ce domaine ont semblé négliger cet aspect, et ont conduit à des exposants de croissance plutôt de l'ordre de  $n \approx 0.4$ . Lorsque les interfaces contiennent une forte fraction de liquide, le coarsening de celles-ci devient aussi important. Nous verrons dans un prochain chapitre que l'exposant de croissance associé à une dynamique avec paramètre d'ordre conservé (ici la densité du liquide) vaut  $1/3$ . Ces expériences se trouvaient donc dans un régime intermédiaire dont l'existence a aussi été illustrée expérimentalement par B. Berge et ses collaborateurs, sur des systèmes de monocouches lipidés.

Maintenant que nous avons identifié une taille typique de domaines  $L(t)$ , il reste à exprimer la propriété d'invariance d'échelle. Ainsi, après un temps transitoire dépendant des conditions initiales, différentes photo(copie)s de la mousse seront statistiquement similaires lorsqu'elles sont mises à la même échelle, de telle façon que les rayons moyens de bulles apparaissent identiques. De façon plus quantitative, on peut par exemple s'intéresser à la densité de probabilité  $P_n(A, t)$  pour qu'une bulle ait  $n$  côtés, et une aire  $A$ . L'hypothèse d'invariance d'échelle suggère que pour des temps longs, cette distribution converge vers une fonction universelle  $p_n(A/L(t)^2)$ , qui dépend seulement de l'aire exprimée en unité  $L(t)^2$ , et non plus explicitement du temps. De plus, en intégrant sur la variable d'aire, on obtient la probabilité  $p_n$  pour qu'une bulle ait  $n$  côtés, qui à grand temps devient stationnaire, et en principe universelle, indépendante de la mousse ou du gaz employés. Cette stationnarité est bien observée expérimentalement et numériquement, avec des distributions piquées autour de  $n = 5 \sim 6$ , très similaires pour de nombreux systèmes expérimentaux. De plus, il a été montré par divers groupes, tant expérimentalement que numériquement, que la condition initiale (réseau hexagonal faiblement perturbé, ou état totalement désordonné) n'a pas d'importance quant à la nature du régime invariant d'échelle final. Ceci semblerait indiquer que l'état à grand temps d'un régime de coarsening serait une sorte de point fixe attractif universel, au sens des théories de groupe de renormalisation. A.J. Bray, et ses collaborateurs en Angleterre, ont beaucoup contribué à développer cette idée.

L'évolution d'une mousse de savon est illustrée en figure 2, où des images expérimentales sont comparées avec des simulations du modèle de Potts partant de la même condition initiale. Nous allons donc présenter brièvement ce modèle important de la physique statistique, et

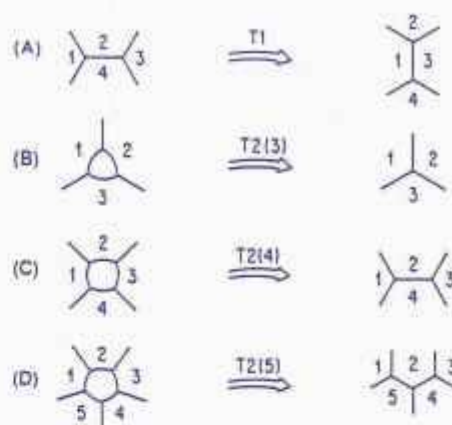


Figure 3 : Les trois processus  $T_2$  décrivent les réarrangements locaux possibles, consécutivement à la disparition d'une bulle à 3, 4, ou 5 côtés. Le processus  $T_1$ , lui, correspond à l'échange de côtés entre quatre bulles et permet de relaxer certaines contraintes mécaniques du système.

expliquer pourquoi, dans une certaine limite, celui-ci décrit convenablement les mousses de savon. En fait, son domaine d'application est bien plus large, puisqu'il a été originellement introduit afin de décrire le coarsening, lors de la formation de micrograins cristallins. Notons aussi que J.A. Glazier et F. Graner ont proposé une généralisation du modèle de Potts pour décrire des processus de réarrangements cellulaires, et ont pu ainsi reproduire très simplement certains des mécanismes effectivement observés.

Le modèle de Potts est une simple généralisation du modèle d'Ising pour un système à  $q$  phases dégénérées, au lieu de 2. Avec Satya Majumdar (maintenant à l'université de Yale), nous avons étudié sa dynamique, en utilisant une méthode qui sera qualitativement décrite dans la suite. Considérons donc un réseau en deux ou trois dimensions. En chaque site vit un spin généralisé  $s_i$ , qui peut prendre  $q$  valeurs différentes  $s_i = 1, \dots, q$ . On définit alors l'énergie d'une configuration de spins via le hamiltonien,

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \delta_{s_i, s_j} \quad (3)$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. En fait, ceci est la plus simple généralisation de l'équation (1). Ainsi, si deux spins voisins prennent la même valeur, le système gagne une énergie  $J$ , alors que la contribution d'une paire de spins voisins de valeurs différentes est nulle. Comme pour le modèle d'Ising, qui correspond exactement à  $q = 2$ , il existe une température critique en dessous de laquelle, une des  $q$  phases l'emporte spontanément sur les autres, à l'équilibre. Que la transition soit du premier ou second ordre dépend de façon cruciale de  $q$  et de la dimension. Cependant, pour la physique du coarsening, ce détail est sans importance. Préparons donc le système dans un état désordonné de haute température, où

chacune des  $q$  phases a la même densité  $1/q$ . Refroidissons alors brutalement le système sous  $T_c$ , par exemple à  $T = 0$ . Il se crée alors des domaines de chaque phase, qui, en moyenne, croissent avec le temps. Pour  $q = 2$ , (le modèle d'Ising de la fig. 1), ces domaines sont étendus, et s'interpénètrent de manière très complexe. Cependant, lorsque  $q$  augmente, ces domaines prennent de plus en plus la forme de bulles. En deux dimensions, ceci est intimement relié au fameux théorème des quatre couleurs. Celui-ci stipule que quatre est le nombre minimal de couleurs (ou phases) nécessaires, si l'on désire colorier des domaines d'extension bornée, couvrant le plan, de telle façon que deux domaines contigus ne sont jamais de la même couleur (de la même phase). Ainsi, à partir de  $q = 4$ , les domaines deviennent bornés, et de plus en plus isotropes lorsque  $q$  augmente.  $q = \infty$  décrit une mousse où chaque bulle contient une phase (couleur) d'indice différent. La nécessité de prendre  $q = \infty$ , réside dans le fait que pour  $q$  fini, deux bulles de la même phase peuvent exister dans l'échantillon, et donc éventuellement se rencontrer, ce qui conduira à leur fusion. Dans une mousse, ce processus n'est pas très physique, même s'il correspondrait à une sorte de brisure de l'interface entre les deux bulles. C'est pourquoi l'on préfère se placer dans la limite  $q \rightarrow \infty$ , où la probabilité pour que deux bulles contiennent la même phase devient strictement nulle. On voit donc que les mousses, peuvent être décrites par un proche cousin du modèle d'Ising, et on comprend mieux pourquoi, comme pour ce modèle, on trouve que  $L(t) \sim t^{1/2}$ .

Le modèle de Potts est aussi très intéressant pour des valeurs finies de  $q > 2$ . En effet, outre la description du coarsening d'un mélange de  $q$  phases, ce modèle est analogue à un modèle d'Ising, si on ne s'intéresse qu'à l'évolution d'une seule de ces phases. Ainsi, si on associe un spin  $+1$  à cette phase privilégiée, et  $-1$  aux  $q - 1$  autres phases, on peut montrer que les fonctions de corrélation impliquant la phase  $+1$ , sont celles d'un modèle d'Ising où la densité de  $+1$  reste constante, égale à  $1/q$ . Ce modèle a alors comme réalisations expérimentales le système de cristaux liquides de la figure 1, où l'on maintiendrait une phase à une concentration constante  $1/q$ . Cela pourrait être réalisé, par exemple, en inclinant les deux plaques de verre, de telle façon que les directions d'alignement des molécules fassent un angle différent de  $\pi/2$ , afin de favoriser l'une des deux phases. Comme nous le verrons ci-dessous, les bulles magnétiques constituent une autre réalisation expérimentale possible. Nous avons montré avec S.N. Majumdar que l'exposant  $\lambda$  d'autocorrélation temporelle dépend explicitement de  $q$ , ce qui serait intéressant à confirmer expérimentalement.

Cette présentation succincte du modèle de Potts sera utile plus loin, afin

d'illustrer la physique d'une nouvelle approximation décrivant le coarsening de divers systèmes. Notons finalement que d'autres systèmes physiques rentrent directement dans la même classe que les bulles de savon. Il s'agit notamment d'autres types de mousses. Par exemple, le comportement  $L(t) \sim t^{1/2}$  a été vérifié en trois dimensions sur des mousses à raser, et la mousse de bière a aussi fait l'objet de nombreuses études ! Signalons par ailleurs que les systèmes strictement tridimensionnels sont plus rarement étudiés, pour des raisons liées à la difficulté de visualiser l'intérieur de l'échantillon, et à la présence d'importants effets d'inhomogénéité, dus à la gravité. Des techniques se développent pourtant, notamment numériques, avec des algorithmes poussés de reconstruction de réseaux cellulaires à partir d'images bidimensionnelles, ou expérimentales, avec des études récentes de mousses de savon par RMN.

Dans la suite, je décris brièvement d'autres systèmes présentant une dynamique de coarsening intéressante.

## Autres exemples de systèmes en évolution perpétuelle

### Le modèle XY : dynamique de vortex

L'exemple que je vais maintenant développer présente une forte analogie avec celui de la turbulence en déclin, que l'on n'a pourtant pas l'habitude de présenter comme étant un système en régime de coarsening. L'étude de la dynamique du modèle XY peut aussi être pertinente pour la description du coarsening d'un cristal liquide (non contraint comme en figure 1).

Considérons donc sur un réseau, par exemple carré, un spin classique de norme  $s_i^2 = 1$ , et ayant deux composantes (d'où l'appellation XY). Chaque spin est donc caractérisé par un angle  $\phi_i$ , que celui-ci fait avec la direction horizontale. Le hamiltonien du système est choisi ferromagnétique, et est donc identique à celui de l'équation (1), avec un spin qui est maintenant un vecteur. Ce système, dont le paramètre d'ordre est continu, ne peut pas avoir d'ordre à longue portée en deux dimensions, en vertu du théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg. Pourtant, il existe une température  $T_c$ , au-dessus de laquelle les fonctions de corrélation (du type  $\langle s_x s_0 \rangle$ ) décroissent exponentiellement vite, alors que celles-ci décroissent seulement en loi de puissance de la distance, au dessous de  $T_c$ . Les exposants sont alors non universels, et dépendent explicitement de la température. Cette transition est connue sous le nom de transition de Kosterlitz-Thouless, et des systèmes aussi variés que le modèle de Kondo ferromagnétique, ou le gaz de Coulomb en deux dimensions sont décrits par cette même physique. Au-dessus de  $T_c$ , les vortex (défauts topologiques autour desquels la phase change d'un multiple de  $\pm 2\pi$ ) positifs et négatifs, for-

ment une sorte de plasma de charges libres, alors que ces vortex sont liés sous  $T_c$ . L'état fondamental est infiniment dégénéré (ce qui est la raison de l'absence d'aimantation spontanée en  $d = 2$ ), et correspond à une configuration où tous les spins sont alignés dans une même direction, une phase sans vortex.

De la même façon que pour le modèle d'Ising, on peut étudier le coarsening d'un système XY, initialement préparé dans un état à  $T > T_c$ , puis brusquement refroidi sous  $T_c$ , par exemple à  $T = 0$ . A l'opposé du modèle d'Ising ou du modèle de Potts, il n'existe apparemment pas de domaines bien définis, à cause de la symétrie continue du paramètre d'ordre. Pourtant, au cours de l'évolution, on constate que seuls les vortex de charge  $\pm 2\pi$  subsistent après un temps fini. Les vortex de signes opposés ont alors tendance à s'attirer, pour éventuellement s'annihiler lorsqu'ils rentrent en contact l'un avec l'autre. Le système cherche ainsi à éliminer ces défauts topologiques qui lui coûtent de l'énergie, au même titre que le modèle d'Ising, pour lequel la longueur totale des interfaces diminue avec le temps. Le nombre de vortex diminue, et leur distance mutuelle moyenne augmente donc, ce qui permet de définir une longueur de coarsening  $L(t)$ , qui, pour le modèle XY, croît comme  $L(t) \sim (t/\log(t))^{1/2}$  (voir figure 4), de façon similaire (au logarithme près) aux tailles de domaines des systèmes précédemment étudiés. La correction logarithmique est due à la longue portée de l'interaction effective entre vortex, et à des effets de diffusion en  $d = 2$  (voir la partie consacrée à la turbulence). L'origine de cette contribution, prévue théoriquement, a été confirmée expérimentalement dans des systèmes de cristaux liquides. Numériquement, cette contribution a induit de nombreux auteurs en erreur, qui ont cru voir des comportements anormaux du type  $L(t) \sim t^{0.7-0.8}$ . Des simulations récentes sur machine massivement parallèle, dues au groupe des Bell Labs, ont confirmé la nature de cette correction. Enfin, lorsque les différentes images sont mises à la même échelle, elles deviennent statistiquement identiques, ce qui se traduit encore une fois, par l'invariance des fonctions de corrélation des spins: on peut notamment écrire que  $\langle s_x(t) s_0(t) \rangle = g(x/L(t))$ , et définir un exposant  $\lambda$  d'autocorrélation temporelle, comme pour le modèle d'Ising. Il semblerait toutefois, qu'à cause de la nature particulière de la transition de Kosterlitz-Thouless,  $\lambda$  soit une fonction dépendant explicitement de la température finale de refroidissement.

### Les bulles magnétiques

Ces systèmes sont formés à partir de matériaux ferrimagnétiques, ayant une forte anisotropie axiale, et dont un fin monocristal est déposé sur un substrat bidimensionnel, avec l'axe privilégié perpendiculaire au plan. Les deux phases sont donc les deux directions le long des-

quelles le vecteur aimantation peut pointer, lorsqu'on se place sous la température de Néel.

Si l'on soumet le système à un champ magnétique  $B$  croissant, qui joue alors un peu le rôle du temps, les domaines de la phase favorisée par le champ présentent un régime de coarsening. Au fur et à mesure que le champ augmente, ces domaines passent d'un état de bulles circulaires, à un état de type mousse de savon (Figure 5). Nous avons suggéré, avec M. Seul des Bell Labs et P. Molho à Grenoble (qui réalisent de telles expériences de bulles magnétiques), qu'en décrivant un chemin  $(B, T)$  du diagramme des phases, à aimantation fixée,  $m=2/q-1$  (densité de phase +1 égale à  $1/q$ ), il serait possible de mesurer l'exposant d'autocorrélation  $\lambda$ , en fonction de  $q$ , identique à celui du modèle de Potts à  $q$  états (voir plus haut).

### Systèmes à paramètre d'ordre conservé

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des systèmes pour lesquels le paramètre d'ordre (aimantation, densité d'une des  $q$  phases) n'était pas localement conservé. Ainsi une petite bulle de phase +1 prise dans une grande région de phase -1, peut spontanément disparaître, avec comme résultat une diminution de l'énergie interfaciale. Si maintenant cette bulle contient de l'huile (et non plus des spins +1) dans un fond de vinaigre (et non de spin -1), ce processus n'est évidemment plus possible. Il y a, en effet, conservation locale du paramètre d'ordre (densité locale d'huile), et la démixtion (coarsening) ne peut se faire que par diffusion de l'huile dans le vinaigre vers des régions riches en huile, et par coalescence de bulles d'huile ou de vinaigre. Tout le monde aura reconnu le sinistre processus de la retombée d'une vinaigrette, que l'on peut heureusement enrayer par l'ajout d'une pointe de surfactant, pardon, de moutarde, qui stabilise des bulles de taille finie.

On peut s'attendre à ce que cette dynamique, plus contrainte, soit aussi plus lente que dans les cas précédemment décrits, pour lesquels  $L(t) \sim t^{1/2}$ . C'est, en effet, le cas, comme le montre l'argument suivant que l'on applique à une vinaigrette comportant une majorité d'huile. Le taux de croissance d'une bulle de vinaigre est proportionnel au gradient d'un potentiel chimique  $dL/dt \sim \nabla\mu$ , mesurant l'énergie locale que coûte la présence de vinaigre. Hors, conformément à l'analyse physique précédente, ce potentiel chimique doit vérifier une équation de diffusion, et  $\Delta\mu=0$ . A la surface de la bulle, on a alors  $\mu \sim 1/L$ , et donc  $dL/dt \sim 1/L^2$ , ce qui montre que le temps nécessaire pour dégonfler une bulle de rayon initial  $L$ , vérifie  $L \sim t^{1/3}$ . On peut montrer que cet argument donne effectivement l'exposant correct ( $1/3$  au lieu de  $1/2$ ) pour le coarsening d'un système avec un paramètre d'ordre scalaire conservé. Donnons deux exemples de tels systèmes.

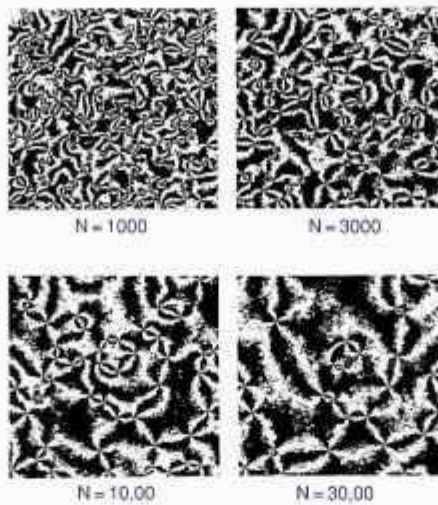


Figure 4 : L'angle  $\phi$ , associé à chaque spin d'un modèle XY sur le réseau carré, est représenté en noir ou blanc, selon que  $\sin^2(2\phi)$  est plus grand ou plus petit que  $1/2$ . Un vortex de nombre de rotation  $\pm 2\pi$  correspond donc à un point autour duquel on change quatre fois de couleur [B. Yurke, A.N. Pargellis, T. Kovacs, D.A. Huse, Phys. Rev. E 47, 1525 (1993)]. La distance moyenne entre vortex croît visiblement (comme  $(\log t)^{1/2}$  d'ailleurs), et les différentes images apparaissent bien similaires, à l'échelle près.

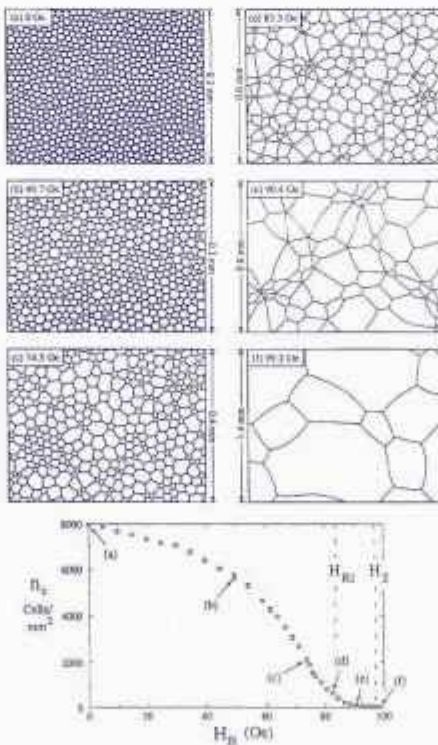


Figure 5 : Des configurations de bulles magnétiques, pour des champs croissants [K.L. Babcock, R. Seshadri, R.M. Westervelt, Phys. Rev. A 41, 1952 (1990)]. On passe d'un régime rappelant des bulles amphiphiles (Figure 6), à un autre plus proche des mousses de savon (Figure 2). La courbe représente la densité des domaines alignés parallèlement au champ, en fonction de celui-ci.

Un film de Langmuir est constitué d'un mélange uniforme de deux types de molécules amphiphiles à la surface d'un liquide aqueux, qui, lorsqu'il subit une expansion brutale, présente une séparation des deux phases. La Figure 6 présente une configuration de bulles de la phase minoritaire (20 % de dihydrocholestérol) dans un fond de dimyristoylphosphatidylcholine, ce qui doit beaucoup avancer le lecteur. Pour ce système, la taille typique des bulles de la phase minoritaire est de l'ordre de la dizaine de  $\mu\text{m}$  et la durée de l'expérience de l'ordre d'une centaine d'heures, montrant une nouvelle fois qu'à nos échelles de temps, tout se passe comme si on prenait d'abord la limite thermodynamique, puis la limite des grands temps. La distribution de probabilité  $P(R,t)$  des rayons de bulles obéit à la loi d'échelle attendue,  $P(R,t)=p(R/L(t))$ , avec  $L(t) \sim t^n$ , où  $n \approx 0.28$  est cependant légèrement inférieur à la valeur  $1/3$  prévue. Ceci est vraisemblablement dû aux fortes interactions électrostatiques existant dans les échantillons. Pour ce système, et conformément à l'argument physique présenté ci-dessus, les bulles plus grosses que la moyenne se gonflent aux dépens des plus petites qui les entourent. Cet effet d'écrantage peut être justifié par une analogie électrostatique, où les bulles représentent des charges dont la valeur (incluant le signe) est proportionnelle au taux de croissance. Une grosse bulle qui croît (donc de "charge +") est "écrantée" par ses voisines plus petites, qui se dégonflent (donc de "charge -"). On peut aussi montrer que cet écrantage de taux de croissance et aussi de taille contribue à éliminer les contraintes mécaniques présentes dans le système.

Un autre exemple, de nature totalement différente, est l'étude de la croissance de grains cristallins dans une matrice vitreuse. On dope un verre par une faible quantité (moins de 0.5 %) d'un matériau semi-conducteur (CdTe pour la Figure 7). Des échantillons identiques sont alors recuits pendant la même durée, à des températures différentes. Il se forme alors des micrograins cristallins dans l'échantillon, d'autant plus gros que la température de recuit est élevée. Ceci simule des temps croissants d'évolution de la séparation de phase, le processus étant activé. Le temps effectif peut ainsi s'écrire sous la forme  $t \sim \exp(-E_0/T)$ . Le groupe de Milan a mesuré le facteur de structure  $I(k,t)$  par diffusion de neutrons, et trouve que celui-ci est piqué autour d'une valeur du vecteur d'onde  $k_p(t)$ , qui s'interprète alors comme l'inverse d'une taille moyenne de domaines  $k_p \sim L(t)^{-1}$ . Ne connaissant pas la valeur de  $E_0$ , ils ont pu simplement vérifier que  $L(t) \sim t^n$  (plus précisément  $\log L \propto T^{-1}$ ), sans pour autant réussir à déterminer  $n$ . Cependant, ils ont pu montrer que le facteur de structure s'écrit bien sous la forme  $I(k,t)=k_p^{-3}F(k/k_p)$ , et donc que la fonction de corrélation en espace réel s'écrit comme une fonction de  $r/L(t)$  uniquement (Figure 7b).

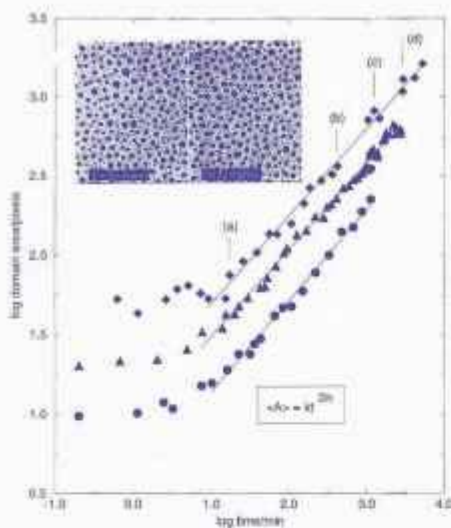


Figure 6 : Coarsening d'un film de Langmuir [M. Seul, N.Y. Morgan, C. Sire, Phys. Rev. Lett. 73, 2248 (1994)]. Les deux photographies, correspondant à des temps séparés d'un facteur proche de 8, ont été mises à la même échelle, par une homothétie de facteur 2. Pour des configurations initiales différentes, on obtient un rayon moyen de bulles  $L(t) \sim t^n$ , avec  $n \approx 0.28$ . Les corrélations entre bulles sont importantes et peuvent être décrites par une théorie d'entropie maximale.

### Autres exemples

Il existe bien sûr beaucoup d'autres systèmes, pour lesquels la physique du coarsening est pertinente. Nous avons vu qu'un critère important pour la détermination de la taille typique de domaine  $L(t)$  était l'existence éventuelle de lois de conservation locale. Il existe en fait d'autres paramètres, comme la dimension de l'espace, qui peut jouer dans les modèles de réaction diffusion (comme dans l'étude des réactions  $A + A \rightarrow \text{inerte}$  ou  $A + A \rightarrow A$ ). La dimension du paramètre d'ordre est aussi cruciale quand celui-ci est conservé. Nous avons vu que pour un paramètre d'ordre scalaire  $L(t) \sim t^{1/3}$ , alors qu'on peut montrer que  $L(t) \sim t^{1/4}$ , quand celui-ci est un vecteur. En outre, l'existence d'effets hydrodynamiques au cours de la démixtion de deux fluides, affecte aussi la dynamique des systèmes conservés, comme on le voit, plus difficiles à étudier. Enfin, la présence de désordre peut considérablement ralentir une dynamique de coarsening. Ainsi, dans un verre de spin, par exemple du type modèle d'Ising très frustré par des interactions de signes aléatoires, on attend une dynamique lente avec  $L(t) \sim \log(t)^{1/\psi}$ , car le système doit surmonter des barrières d'énergie croissante  $\Delta E \sim L^\psi$ , lors de son évolution, ce qui prend un temps de l'ordre de  $t \sim \exp(L^\psi/T)$ . La détermination de l'exposant  $\psi$  est encore un problème ouvert pour de nombreux systèmes physiques.

## L'approximation Non Linéaire Gaussienne et la Turbulence

### Origine physique

Si j'ai décidé d'exposer ici le principe de l'approximation non linéaire gaussienne (NLG), c'est qu'au-delà de ses aspects techniques qui n'entrent bien sûr pas dans le cadre d'un tel article, celle-ci est motivée par des considérations physiques très générales, qui devraient intéresser les non spécialistes du domaine. Initialement introduite par G.F. Mazenko à Chicago (vers 1990), elle a été depuis développée par plusieurs groupes. Je me propose ici de montrer son fonctionnement sur l'exemple simple de la dynamique du modèle d'Ising, avant de donner une première application de ces idées à la turbulence en déclin.

Plutôt que de travailler sur un réseau, les théoriciens préfèrent souvent se placer dans un espace continu. Ainsi peut-on définir un modèle pour l'aimantation  $m(x,t)$  (où  $x, t$  et  $m$  sont maintenant des variables continues), ayant exactement les mêmes propriétés que le modèle d'Ising sur un réseau (nature de la transition ferromagnétique, exposants). Après le refroidissement sous  $T_c$ , on cherche à décrire la croissance de régions où  $m(x,t) \approx +1$  et d'autres où  $m(x,t) \approx -1$ . L'énergie associée à une configuration de l'aimantation sera une intégrale sur l'espace, de la densité d'énergie,

$$H = \frac{1}{2} (\nabla m)^2 + V(m) \quad (4)$$

Le terme en gradient attribue un coût énergétique à une interface, à travers laquelle l'aimantation passe brutalement de  $m(x,t) \approx +1$  à  $m(x,t) \approx -1$ . Le second terme, où  $V$  est un potentiel quelconque possédant deux minima dégénérés en  $m = \pm 1$ , impose qu'en dehors des régions interfaciales, l'aimantation doit prendre des valeurs très proches de  $m = \pm 1$ , à moins d'un trop grand coût en énergie (Figure 8).  $V(m) = (m^2 - 1)^2$  est le plus simple

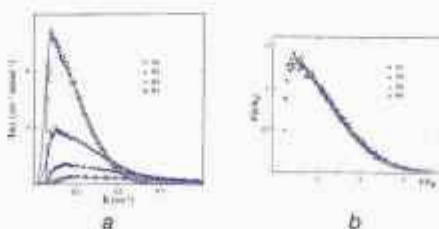


Figure 7 : (a) Le facteur de structure, en espace de Fourier, pour le système décrit dans le texte et pour différents temps effectifs de coarsening [G. Banfi, V. Degiorgio, A.R. Rennie, J.G. Baker, Phys. Rev. Lett. 69, 3401 (1992)]. (b) Une fois que le vecteur d'onde est exprimé en unité  $k_0 = L(t)^{-1}$ , les différentes courbes se superposent et sont bien décrites par une théorie de type Lifshitz-Slyozov, adaptée à ce système.



Figure 8 : (a) Coupe schématique d'une configuration de l'aimantation, à un temps donné, pendant l'évolution du modèle d'Ising continu. Les distances entre interfaces sont de l'ordre de  $L(t) \sim t^{1/2}$ , alors que leur largeur reste finie. Si on pose  $m(x,t) = \sigma(l(x,t))$ , où le profil à l'équilibre  $\sigma$  est défini dans le texte et plus loin,  $l(x,t)$  s'interprète alors comme la distance algébrique à l'interface la plus proche. Au même instant, la configuration (plus régulière) de  $l(x,t)$ , associée à celle de  $m(x,t)$ , est représentée en pointillés. La distribution de probabilité pour  $l$  est certainement plus proche d'une gaussienne que celle de  $m$ . (b) La forme d'une interface de (a) est localement identique à celle qui séparerait deux domaines infinis purs, à l'équilibre. On montre facilement que ce profil  $\sigma(l)$  est donné par  $d^2\sigma/dl^2 = V'(\sigma(l))$ , où  $V$  est le potentiel défini en équation (4).

potentiel possible. Cependant, ce modèle décrit la physique du modèle d'Ising pour tous les  $V$  ayant la propriété requise. On retrouve encore une fois la notion d'universalité.

On peut alors écrire, à partir de  $H$ , l'équation d'évolution (de Langevin) pour l'aimantation. Sur la Figure 8a, j'ai représenté schématiquement une coupe unidimensionnelle de  $m(x,t)$ . La forte non linéarité de l'équation régissant l'évolution de  $m(x,t)$  se traduit par l'existence de régions de taille typique  $L(t)$ , où l'aimantation est presque constante, et des interfaces de largeur finie, où  $m(x,t)$  évolue très brusquement.

La première approximation, à laquelle tout théoricien pourrait penser, consiste à approximer la distribution de  $m$  par une gaussienne à tout temps, ce qui rend les calculs faisables. Cette approximation est une version élaborée de l'hypothèse du champ moyen. Cette approximation s'avère cependant très mauvaise, ce qui est intuitivement clair sur la Figure 8a, puisque  $m$  prend essentiellement les deux valeurs  $\pm 1$ , très loin d'une distribution gaussienne ! L'idée de l'approximation NLG est de réaliser qu'une grande partie des effets non linéaires de l'équation d'évolution de  $m$  sont en fait très simples à comprendre. Ainsi, le profil local d'une interface en mouvement (Figure 8a) est sans nul doute très proche de celui formé par l'interface à l'équilibre, qui séparerait deux régions infinies de chacune des phases (Figure 8b). Or, on peut montrer que pour un  $V$  donné, ce profil  $\sigma(x)$  est très simple à calculer. Revenant à l'étude de la dynamique, faisons alors le changement de variable  $m(x,t) = \sigma(l(x,t))$ . Physiquement,  $l(x,t)$  mesure la distance algébrique à l'interface la plus proche, puisque lorsque seules deux régions existent (Figure 8b),



on a par définition  $l(x,t) = x$ . Comme on le voit qualitativement sur la Figure 8a, la nouvelle variable  $l(x,t)$  a une évolution beaucoup plus douce que  $m(x,t)$ . L'approximation non linéaire suppose qu'une fois le changement de variable réalisé,  $l(x,t)$  a une distribution et des corrélations de variable gaussienne, ce qui semble beaucoup plus raisonnable que pour  $m$ . On peut d'ailleurs montrer que cette approximation est exacte dans certaines limites, notamment celle de grande dimension. Cette approximation permet alors de trouver des équations fermées pour les fonctions de corrélation.

Cette hypothèse prévoit la loi d'échelle de la fonction de corrélation  $\langle m(x,t)m(0,t) \rangle = g(x/L(t))$ , avec la forme correcte pour  $L(t) \sim t^{1/2}$ . La fonction  $g$  se compare avantageusement aux simulations numériques, et on trouve un exposant  $\lambda = 1.289\dots$ , en bon accord avec les valeurs expérimentales et numériques déjà citées.

Pour le modèle de Potts, ou le modèle d'Ising équivalent ayant une aimantation fixe  $m = 2/q - 1$ , l'exposant  $\lambda$  dépend explicitement de  $q$ . La méthode NLG prévoit que  $\lambda$  augmente continûment de sa valeur à  $q = 2$  (Ising), à  $\lambda = d$  pour  $q$  infini. Les simulations numériques sont en très bon accord avec les exposants théoriques, avec un écart inférieur à 5 %. La valeur de  $\lambda = d$  pour  $q$  infini peut se comprendre à l'aide d'un argument très simple. Dans cette limite, qui, nous l'avons vu, décrit les mousses de savon, l'auto-corrélation  $\langle \delta_{s(t),s(0)} \rangle$  mesure alors la probabilité de survie d'une phase, donc d'une bulle. Elle est donc proportionnelle au nombre de bulles restant, soit  $L(t)^d$ , ce qui donne bien  $\lambda = d$ .

### Introduction à la turbulence en déclin bidimensionnelle

Considérons un fluide turbulent, de faible viscosité, dont le mouvement est entretenu par une source extérieure. On coupe alors cette source, afin d'observer la relaxation du fluide. On s'intéressera tout particulièrement à des systèmes quasi bidimensionnels, tels que ceux étudiés expérimentalement par l'équipe de P. Tabeling à l'E.N.S. de Paris.

En deux dimensions, la dynamique des vortex dans le fluide (ou tourbillons) joue un rôle fondamental au cours du déclin de la turbulence. Il semble que les physiciens s'accordent maintenant pour décrire grossièrement ce processus en trois grandes étapes. Pendant un premier temps transitoire fini, le fluide s'organise en un réseau cohérent de vortex. Suit alors une seconde période, d'autant plus longue que la viscosité est faible, pendant laquelle l'évolution du réseau de vortex se fait à énergie essentiellement constante. Dans ce régime, le déclin se réalise par l'intermédiaire de processus de fusion entre vortex tournant dans le même sens, alors que les dipôles (paires de vortex opposés), forment un état très stable,

pouvant se mouvoir de façon quasi balistique. Le nombre de vortex  $N$  diminue donc, alors que leur rayon typique  $r$ , croît. Dans un système idéalement infini, c'est ce régime, d'autant plus long que la viscosité est faible, que je me propose de placer dans la même famille que les systèmes déjà présentés dans cet article. Finalement, pour une taille de système et une viscosité finies, ce régime conduit à un état contenant un faible nombre de vortex, qui finissent par disparaître par dissipation.

La conservation de l'énergie, pendant le second régime, découle d'un résultat de Kirchoff, au siècle dernier, exact dans la limite de faible densité de vortex. Celui-ci a montré que la dynamique des centres de vortex était hamiltonienne, avec d'ailleurs le même hamiltonien effectif que pour les vortex du modèle XY. En revanche, les puristes noteront que les centres de vortex de spin obéissent à une dynamique de Langevin, et non de Hamilton. La conséquence principale de cette différence est que, dans un fluide, ce sont les vortex de mêmes signes qui s'attirent et éventuellement fusionnent, alors que ce sont les vortex de spin (quantifiés) de signes opposés qui s'attirent et s'annihilent dans le modèle XY.

De nombreuses simulations numériques et des expériences, notamment à l'E.N.S., semblent indiquer qu'au cours de la dynamique, la vorticité de cœur moyenne  $\omega$  semble être conservée. Comme l'énergie du fluide est proportionnelle à  $N\omega^2 r^4$ , il s'en suit que  $Nr^4$  reste constant. L'idée de Carnevale et de ses collaborateurs (dont Y. Pomeau, à l'E.N.S.) est d'utiliser les équations de Kirchoff pour suivre la dynamique des vortex et les lois de conservation ( $\omega$  et de  $Nr^4$ ) afin de décrire leurs fusions. Ainsi, si deux vortex de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , dont le mouvement suit la dynamique de Kirchoff, s'approchent à une distance de l'ordre de la somme de leurs rayons, ceux-ci fusionnent immédiatement. Le vortex en résultant a un rayon  $r_3$ , vérifiant  $r_3^4 = r_1^4 + r_2^4$ , en vertu de la constance de  $Nr^4$ . Les simulations numériques de ce modèle, bien que lourdes, sont bien plus aisées que pour l'équation de Navier-Stokes complète. Différents auteurs ont alors trouvé numériquement que  $N(t) \sim L(t)^{-2}$ , où la distance moyenne entre vortex se conduit comme  $L(t) \sim t^n$ , avec  $n$  dans l'intervalle 0.35 ~ 0.4.

Récemment, j'ai proposé l'étude du modèle suivant, qui, je le pense, offre un éclairage nouveau à ce genre de problèmes. Le mouvement des vortex est ainsi supposé aléatoire et diffusif, avec une constante de diffusion effective  $D$ , obtenue en moyennant les équations de Kirchoff. La conservation de l'énergie conduit alors à  $D \sim \omega^{-1}$ . Ce mouvement effectif est interprété comme étant dû à la nature fortement chaotique des équations de Kirchoff, bien connue lorsqu'il y a plus de quatre vortex dans le système. Lorsque deux vortex trop près l'un de l'autre

fusionnent, on impose la conservation de  $Nr^\alpha$ .  $\alpha = 4$  correspond à la conservation de  $\omega$  déjà évoquée, alors que d'autres valeurs pour  $\alpha$  impliquent que la constante de diffusion effective dépend elle-même du temps. Par exemple, pour  $\alpha = 2$ , on impose que la surface occupée par les vortex reste constante, ce qui est observé dans certaines expériences, où les effets de diffusion de la vorticité dans la troisième dimension sont importants.

La simplification apportée par l'hypothèse de diffusion effective permet de mettre en relation ce problème avec un modèle de réaction, exactement soluble. On peut alors montrer que la distance moyenne entre vortex voisins se conduit comme  $L(t) \sim (t/\log(t))^{\alpha/(3\alpha-4)}$ , pour  $\alpha > 2$ , et comme  $L(t) \sim t$ , pour  $\alpha = 2$ . Notons que le cas  $\alpha = 2$  reproduit, dans le cadre d'une théorie microscopique, la théorie phénoménologique de Batchelor. Cette théorie conduit à un mouvement effectif balistique des vortex, alors que le cas  $\alpha = 4$  est associé à une constante de diffusion de vortex  $D$ , indépendante du temps. En présence de viscosité, aussi petite qu'elle soit, il n'est pas clair que la théorie de Batchelor reste stable, des vortex balistiques étant sûrement plus perturbés par la viscosité (traduisant des processus eux-mêmes diffusifs), que des vortex ayant déjà un comportement diffusif. Le cas  $\alpha = 4$ , qui semble donc être le plus pertinent physiquement, conduit ainsi à  $L(t) \sim (t/\log(t))^{1/2}$ . Ce résultat est donc identique à celui déjà donné pour des vortex de spin du modèle XY. Il est donc possible, que, comme pour ce modèle, les exposants de croissance inférieurs à 1/2, observés numériquement dans les simulations de la turbulence en déclin, puissent être imputés à l'existence de la correction logarithmique. L'interprétation de celle-ci est alors essentiellement la même que pour le modèle XY. Pour  $\alpha > 2$ , il est facile de voir que comme  $Nr^\alpha$  est constant, la surface occupée par les vortex tend vers zéro à grands temps. Les vortex deviennent alors des objets effectivement ponctuels. La dynamique des vortex d'un signe donné est alors décrite par la réaction  $A + A \rightarrow A$  (diffusion et fusion de vortex du même signe). Pour le modèle XY, la réaction de diffusion associée est plutôt  $A + A \rightarrow \text{inerte}$  (diffusion et annihilation de vortex opposés s'approchant trop près l'un de l'autre). En deux dimensions, le nombre de particules  $A$  restant après un temps  $t$  se comporte de façon similaire pour ces deux réactions. Il est inversement proportionnel au nombre de sites différents, visités par un processus diffusif, ce qui conduit à  $N(t) \sim L(t)^{-2} \sim \log(t)/t$ , en  $d = 2$ .

L'analogie avec un processus de coarsening suggère aussi que les fonctions de corrélation de la vorticité (et d'autres fonctions de la vitesse) doivent devenir des fonctions de la distance en unité  $L(t)$ , à grand temps. Plus intéressant, il est concevable que les corrélations temporelles soient non triviales, et qu'il existe un

exposant  $\lambda$  d'autocorrélation temporelle, pour la vitesse ou la vorticité en un point du fluide, à la manière de ce que nous avons vu pour le modèle d'Ising ou le modèle XY.

### Conclusion et perspectives

Dans cet article, j'ai présenté une introduction à la physique du coarsening. J'espère avoir convaincu le lecteur du large champ d'application des idées physiques qui sous-tendent ce domaine. Ces systèmes thermodynamiques voient des domaines de phases pures (sans vortex pour la turbulence) croître sur une échelle de l'ordre de  $L(t)$ , dont le comportement dépend de la classe d'universalité du système. Pour des grands temps, celui-ci développe des corrélations universelles à l'échelle  $L(t)$ , qui sont indépendantes de celles obtenues dans la statique. Enfin, les corrélations temporelles décroissent lentement et permettent de définir ainsi un nouvel exposant d'autocorrélation  $\lambda$ .

La turbulence en déclin semble être un domaine approprié d'application de ces idées. Un premier modèle, où l'on considère les vortex comme des particules diffusant et fusionnant au contact l'une de l'autre, a permis de s'en rendre compte. Le prochain stade dans l'étude de ce phénomène consistera à lui appliquer l'approximation NLG. On peut imaginer que, comme cela a été déjà fait pour le modèle XY, la bonne variable ayant une évolution quasi linéaire n'est pas la vitesse

ou la vorticité, mais  $l(x,t)$ , donnant essentiellement la distance au vortex le plus proche. C'est la généralisation naturelle de la variable  $l(x,t)$  que nous avons associée au modèle d'Ising scalaire et qui représentait la distance au défaut (interface) le plus proche. La voie actuellement explorée consiste à écrire le potentiel de courant comme une fonction non linéaire de  $l(x,t)$ , qui a le profil associé à un vortex isolé à grande distance.

L'approximation NLG doit donc permettre d'exprimer en termes de théorie des champs, les idées qui ont déjà conduit à des résultats originaux, dans le cadre d'une théorie de particules (vortex). Ces deux traitements partent cependant de la même constatation : on décrit plus efficacement un système fortement non linéaire, en étudiant la dynamique de ses défauts (interfaces, vortex...) plutôt qu'en s'en tenant à la variable a priori la plus naturelle (spin, densité de matière, vitesse...). En fait, cette conclusion pourrait aussi s'appliquer à la thermodynamique statique. Les défauts excités en température proviennent, en général, de processus hautement non linéaires. L  encore, la variable la plus naturelle (en général, le paramètre d'ordre) n'est pas forcément celle sur laquelle une approximation gaussienne (linéaire), généralement employée, est la plus justifiée. Avec P. Le Doussal, à l'E.N.S. de Paris, nous travaillons sur la recherche de cette variable optimale, associée au système le plus général. ■

### Références

Pour une introduction aux travaux présentés dans cet article, le lecteur pourra consulter les articles suivants qui contiennent de nombreuses références pertinentes :

- J. Stavans, Rep. Prog. Phys. **56**, 733 (1993) : une revue sur les structures cellulaires (mousses, bulles amphiphiles...).
- A.J. Bray, Advances in Physics (1995) : une excellente revue sur les méthodes de la physique du coarsening.
- C. Sire, S.N. Majumdar, Phys. Rev. Lett. **75**, 4321 (1995) ; Phys. Rev. E (1995) ; sur la physique du modèle de Potts, et de l'approximation NLG.
- C. Sire, soumis à Phys. Rev. Lett. (mars 1995) : liens entre la turbulence en déclin et le coarsening.

## NOUVEAUX MEMBRES ADMIS   LA SOCIÉTÉ

(suite de la page 20)

- COSSEVIN Eric  
Merignac
- CREPE Sabine  
Orsay
- DALAINE Véronique  
GREMI - Orléans
- DUPONT Jean- Marc  
Dijon
- FERRON Stéphane  
Ris-Orangis
- GUERIN Stéphane  
FAC. DES SCIENCES - Dijon
- GUIDAL Michel  
Paris
- ISNARD Alexandra  
Joinville-le-Pont
- ISRAEL Jean-Yves  
Sainte-Maure
- LAFORGE Bertrand  
CE DE SACLAY - Gif-sur-Yvette
- MAMBRINI Yann  
Quimper
- MAMMAR Nassima  
Paris
- PERES Nicole  
St Max
- PUIILL Gael  
Argenteuil
- RIPP Isabelle  
Paris
- RIVELINE Daniel  
Institut Curie - Paris
- TARRIN François  
Hérouville-St-Clair
- TOUHARI Françoise  
Université / LA IN - Montpellier
- VATTOLO Diane  
Paris

(suite dans le prochain numéro)

### Troisième conférence internationale sur les matériaux intelligents 3-5 juin 1996, Lyon.

(Rens. : Mme Claude Bernavon ICIM 96, GEMPPM, Bâtiment 502, INSA de Lyon, 20, av. Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex).

### Expériences au Laboratoire des Champs Magnétiques Intenses de Grenoble.

Formulaire à demander à J.C. Vallier, Tél. (16) 76 88 10 01, Fax: (16) 76 85 56 10), avant le 8 décembre 1995.

## Bulletin d'adhésion

  retourner à la Société Française de Physique, 33, rue Croulebarbe, 75013 Paris. Tél. : 47.07.32.98. Fax : 43.31.74.26

Je demande mon admission comme membre de la Société Française de Physique en qualité de : (cocher la case qui vous concerne)

#### "Membre à cotisation normale"

- toute personne n'entrant pas dans les catégories suivantes

#### "Membre à cotisation réduite"

- jusqu'à 35 ans     retraité  
 membre de l'Union des Physiciens  
 membre d'une société nationale étrangère résidant dans son pays

#### "Dispensé de cotisation" pendant 2 ans et bulletin gratuit

- Maîtrise     D.E.A.  
 D.E.S.S.     Thèse  
 3<sup>e</sup> année d' cole d'ingénieur  
   la recherche d'un emploi

Nom (Mlle, Mme, M.) \_\_\_\_\_

Prénoms : \_\_\_\_\_

Adresse personnelle : \_\_\_\_\_

Tél. : \_\_\_\_\_

Adresse professionnelle : (  remplir impérativement) \_\_\_\_\_

Tél. : \_\_\_\_\_ Fax : \_\_\_\_\_

E mail : \_\_\_\_\_

Adresse d'expédition :

- Adresse personnelle  
 Adresse professionnelle