



**HAL**  
open science

## Thermique et électronique & un peu plus

Olivier Maurice

► **To cite this version:**

Olivier Maurice. Thermique et électronique & un peu plus. Master. Modélisation multiphysique pour l'électronique, Cergy Pontoise, France. 2019. hal-02364028v2

**HAL Id: hal-02364028**

**<https://hal.science/hal-02364028v2>**

Submitted on 23 Nov 2019 (v2), last revised 7 Dec 2019 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thermique et électronique & un peu plus

Olivier MAURICE

November 21, 2019

- 1 Algèbre tensoriel
- 2 résoudre un circuit par la méthode de Kron dans l'espace des mailles et des paires de nœuds
- 3 Phénomènes thermiques : lien entre composants thermiques et électriques
  - 1 résistance thermique
  - 2 capacité thermique
  - 3 conduction
  - 4 convection
  - 5 rayonnement
- 4 cas d'un circuit résistif
- 5 quelques autres exemples
- 6 un peu plus loin : référentiel et espace support
- 7 mécanique quantique & généralisation

L'analyse tensorielle des réseaux et la méthode de Kron permettent d'établir le système d'équations de tout problème. Et c'est déjà beaucoup.

Par contre il ne dit pas comment résoudre ce système : problème de la résolution numérique d'un système d'équations intégral-différentielles non linéaires.

L'algèbre tensoriel permet de synthétiser les propriétés des objets physiques impliqués dans les mécanismes étudiés de façon extrêmement efficace. Léon Brillouin a dit "l'algèbre tensoriel connaît mieux la physique que le physicien lui-même".

Pour ce qui nous intéresse, nous manipulerons trois natures de composantes :

- des courants électriques ;
- des forces électromotrices ;
- des températures.

Les composantes sont repérées par des symboles munis d'indices soit positionnés en haut à droite des symboles, soit en bas à droite des symboles. Nous parlons de composantes car il s'agit effectivement de composantes de vecteurs ou de **covecteurs**. Soit un circuit  $R$ , l'ensemble de tous les courants de ce circuit forme un vecteur  $\mathbf{J}$ . En définissant une base  $\mathbf{u}_a$  dont chaque vecteur est associé à une maille, nous avons :

$$\mathbf{J} = J^a \mathbf{u}_a \quad (1)$$

et d'une manière générale, *chaque fois qu'un symbole aura un indice en haut à droite, il s'agira d'une composante d'un vecteur courant*. Ainsi  $V^a$  est un courant.

Dans ces expressions, l'indice est dit muet. Il n'a pas de signification propre et le vecteur pointé par ses composantes  $J^a$  est le même que  $J^b$  ou  $J^c$ , etc.

Nous devons définir ensuite la notion de covecteur. Nous pouvons définir un dual à l'espace vectoriel qui porte les  $J^a$ . Pour cela nous définissons un invariant. C'est un concept essentiel qui stipule que qu'elle que soit la représentation d'un problème, il existe une propriété intrinsèque à l'espace étudié qui est invariante. Dans le cadre de la relativité, il s'agit de la vitesse de la lumière. Et quel que soit le référentiel choisi, cette grandeur est invariante et a toujours la même amplitude.

# 7ALGÈBRE TENSORIEL : règles de manipulations des indices

$$T_a U^a = \sum_a T_a U^a, \quad T_a^b U^a = V^b, \quad T_{ab} U_c^a = V_{bc} \quad (2)$$

$$(T_{ab})^{-1} = Y^{ba} \quad (3)$$

$$T^{abc\beta} U_{bc}^\alpha \Lambda_\beta^\sigma = L^{a\alpha\sigma} \quad (4)$$

$\Lambda_\beta^\sigma$  est une matrice.

$$g_{yx}^{-1} = y^{xy} \quad (5)$$



Pour les circuits électroniques, l'invariant est **la puissance**.  
L'autre notion dont nous avons besoin maintenant est celle de scalaire. Les scalaires sont extrêmement pratiques car ils quantifient de la façon la plus simple possible des phénomènes. Prenons un exemple. Considérons une boussole. L'aiguille est un vecteur avec sa direction. Si l'on veut indiquer une direction il est très difficile d'utiliser l'aiguille. Par contre il est très simple d'utiliser les nombres que pointe l'aiguille. Ainsi à chaque position de l'aiguille qui est un vecteur, nous pouvons associer un nombre : un scalaire. L'espace de toutes les positions possibles de l'aiguille est un espace vectoriel et à chaque composante du vecteur aiguille nous pouvons faire correspondre un nombre qui est la direction de l'aiguille.

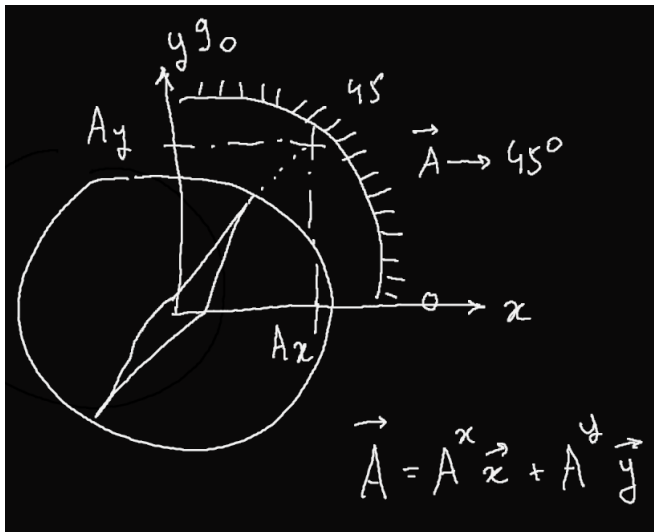


Figure: Boussole

Le choix des graduations pour faire correspondre un nombre à chaque vecteur est **arbitraire**. Un point fondamental : **nous nous dotons d'une métrique** pour établir cette correspondance.

Ainsi nous réalisons une certaine projection entre un espace vectoriel et un espace fonctionnel (Hilbertien). Or pour tout vecteur, quelle que soit sa dimension, nous pouvons définir un **produit extérieur**. Le produit extérieur de deux vecteurs, noté  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  est une fonction de la surface décrite par les deux vecteurs. Elle s'opère en deux temps : nous définissons tout d'abord un opérateur  $\mathbf{J}$  rotation qui fait tourner tout vecteur de  $\pi/2$  dans le sens positif d'un espace vectoriel orienté. En regardant la figure *boussole* :  $\mathbf{J}(\mathbf{A}_y) = -\mathbf{A}_x$ . Alors :

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \langle \mathbf{J}(\mathbf{A}), \mathbf{B} \rangle \quad (6)$$

Puisque  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  est un produit scalaire, il renvoie bien un nombre.

Considérant :

$$\mathbf{A} = A^x \mathbf{x} + A^y \mathbf{y}, \quad \mathbf{B} = B^x \mathbf{x} + B^y \mathbf{y} \quad (7)$$

alors :

$$\mathbf{J}(\mathbf{A}) = -A^y \mathbf{x} + A^x \mathbf{y} \quad (8)$$

et

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = A^x B^y - A^y B^x = \begin{vmatrix} A^x & B^x \\ A^y & B^y \end{vmatrix} = T^{xy} \quad (9)$$

Le produit direct est le déterminant  $\Delta$  de la matrice formée des composantes des deux vecteurs. Il engendre le tenseur deux fois covariant  $T^{xy}$ . Nous pourrions l'exprimer par :

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \Delta \int_x \int_y dx \wedge dy, \quad \int_x \int_y dx \wedge dy = 1 \quad (10)$$

La forme

$$\int_x \int_y dx \wedge dy$$

est appelée une 2-forme, faisant intervenir deux infinitésimaux. En généralisant à un espace à  $N$  dimensions :  $\mathbf{A} \rightarrow A^x$ ,  $x \in [1, \dots, N]$ . Idem pour  $B^y$ , alors le nombre renvoyé par le produit extérieur que nous notons  $S$  peut s'écrire sous la forme :

$$S = T^{xy} dx \wedge dy \quad (11)$$

$g_{xy}$  étant un tenseur et plus généralement un opérateur. Ici :

$$T^{xy} = A^x B^y - A^y B^x \quad (12)$$

$S$  est l'invariant fondamental : ce sera pour nous la puissance, et  $g_{yx}$  est un tenseur deux fois covariant (les deux indices sont en bas), que nous appellerons tenseur fondamental. Or l'invariant qui est une puissance peut s'exprimer par :

$$S = F_y B^y \quad (13)$$

où  $F_y$  est le dual du vecteur  $B^y$ .  $F_y$  avec l'indice en bas est le covecteur (appartenant au co-espace) qui est l'espace de nombre correspondant aux vecteurs : principe de la boussole. Alors :

$$F_y B^y = g_{xy} A^x B^y \Rightarrow F_y = g_{yx} A^x \quad (14)$$

Le tenseur fondamental  $g_{yx}$  permet de projeter un vecteur en covecteur. **C'est le seul opérateur qui permet cela.** Son inverse  $y^{xy}$  projette un covecteur en vecteur.

Il nous reste un dernier chemin à parcourir avant d'utiliser ces propriétés sans plus nous poser de questions !

Entre les composants électroniques et les équations de Maxwell (qui sont des 0, 1 ou 2-formes) nous avons bien sûr une correspondance.

$$\oiint_{ab} d\mathbf{a} \times d\mathbf{b} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{u}_E \quad \& \quad V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \epsilon \frac{S}{x} \quad (15)$$

$$J = \sigma \cdot E \Rightarrow V = \frac{1}{\sigma} \frac{x}{S} i \Rightarrow G = \sigma \frac{S}{x} \quad (16)$$

$$\phi = Li = \mu \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}, \quad \oint_c d\mathbf{c} \cdot \mathbf{H} = i \Rightarrow H \cdot w = i \quad \& \quad L = \mu \frac{S}{w} \quad (17)$$

Dans ces relations, les quantités  $\mu$ ,  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont en fait des tenseurs d'ordre 2 :

$$L_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} \mathcal{G}(S, w) \quad C^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} \mathcal{G}(S, x) \quad R_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha} \mathcal{G}(x, S) \quad (18)$$

Le produit d'un scalaire par un tenseur est un tenseur. Les fonctions  $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$  sont des fonctions de formes géométriques, scalaires. Ces tenseurs sont d'ordre 2, ils doivent donc provenir de fonctions de 2-formes. Remarquons tout d'abord que l'intégration en fonction du temps d'un scalaire est un scalaire. Soit  $e$  la force électromotrice,

$$- \int_t dt e$$

est scalaire. Nous obtenons les relations avec les 2-formes :



$$-\int_t dt \mathbf{e} = \mu_{\alpha\beta} \int_x \int_y d\bar{\mathbf{x}} \wedge d\bar{\mathbf{y}} H_z \quad (19)$$

$$Q = \epsilon^{\alpha\beta} \int_x \int_y d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} E_z \quad (20)$$

$$i = \sigma^{\alpha\beta} \int_x \int_y d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} E_z \quad (21)$$

Dans cette dernière relation nous montrons pourquoi le courant est un scalaire alors que la densité de courant est un vecteur avec  $i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \rightarrow i^x = S_y^x J^y$ .  $\bar{\mathbf{x}}$  est le covecteur dual de  $\mathbf{x}$  (soit  $\bar{x}^a = g^{ab} x_b$ ).

Ayant montré que les grandeurs  $\mu$ ,  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont tensorielles, la fonction  $\mathcal{G}$  étant scalaire, les composants  $R$ ,  $L$ , et  $C$  sont aussi des tenseurs. Etant d'ordre 2, ils doivent permettre la projection de vecteurs en covecteurs ou l'inverse. Or nous savons que la résistance relie une différence de potentiels qui est un scalaire, à un courant. Mais le courant aussi est scalaire. Cependant il est toujours colinéaire à la densité de courant qui est un vecteur. Pour toute circulation curviligne d'un courant dans un tube  $\mathbf{u}_n$ , nous pouvons définir une section d'onde  $\mathbf{n}$  d'amplitude  $1/S$  où  $S$  est la section normalisée du tube (l'amplitude de section étant comprise dans la définition de  $R$  ou  $C$  via  $\mathcal{G}$ ). Alors  $\mathbf{J} = i\mathbf{n}$ , et nous pouvons écrire :

$$u_a = R_{ab}J^b \quad (22)$$

$\mathbf{J}$  étant le vecteur de composantes  $J^b$ . Nous avons bouclé la boucle et tous les éléments sont disponibles pour généraliser le formalisme, nommé analyse tensorielle des réseaux par Gabriel KRON.

Définissons déjà un espace naturel. Nous prenons l'espace des moments. A chaque circulation **fermée** de courant, nous pouvons associer une normale, perpendiculaire à la surface de la boucle. Ainsi un vecteur que nous notons  $\mathbf{J}$  est le vecteur de toutes les boucles (ou mailles) que l'on peut constituer dans un circuit. Si  $\mathbb{M}$  est le nombre de mailles,  $\mathbb{B}$  le nombre de branches et  $\mathbb{N}$  le nombre de nœuds, la relation d'Euler - Poincaré nous dit que :

$$\mathbb{M} - \mathbb{B} + \mathbb{N} = 1 \quad (23)$$

Nous sommes habitués à décrire un circuit à partir de ses composants élémentaires. Cette relation nous permet de savoir combien de mailles sont nécessaires pour le décrire sous forme de mailles. Avec l'habitude, nous pouvons décrire directement un circuit par ses mailles.

Dans la méthode de Kron qui est l'application aux circuits électriques du formalisme de l'analyse tensorielle des réseaux, l'espace naturel est l'espace des courants  $J^\alpha$ . Les covecteurs sont les fém et différences de potentiels  $u_\beta$ . Le tenseur fondamental est  $\zeta$  tel que :

$$u_\beta = \zeta_{\beta\alpha} J^\alpha \quad (24)$$

En général la source  $u$  est connue et le courant  $\mathbf{J}$  inconnu. Nous allons apprendre à utiliser le formalisme sur des exemples. Il faut retenir :

- 1 les règles des indices ;
- 2 que l'espace naturel est le courant :  $V^a$  est un courant,  $I_b$  une fém.

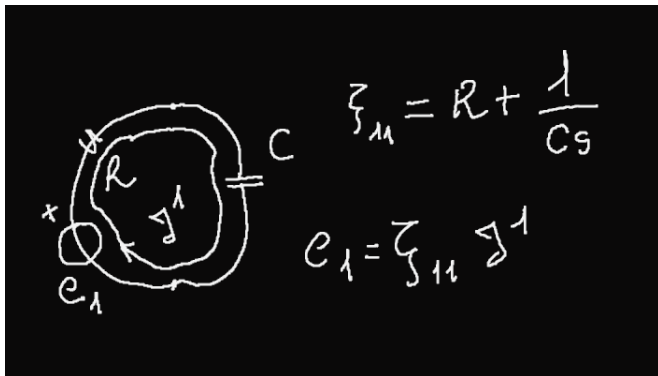


Figure: Premier circuit

s est l'opérateur de Laplace.

Sur ce premier circuit figure *Premier circuit*, le problème est de dimension 1 : il n'y a qu'une seule maille et la somme des impédances sur cette maille est  $R + 1/(sC)$ . Si nous résolvons l'équation de Maxwell - Faraday le long de cette maille nous trouvons :

$$\oint_I d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -e_1 + RJ^1 + \frac{1}{sC}J^1 = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (25)$$

A tout circuit fermé, quelle que soit son impédance doit être associée une variation de flux magnétique qui n'est nulle que si la source est continue, engendrant un courant continu et une variation de flux  $\phi_B$  nulle. Cette variation de flux est aussi égale par définition à  $LdJ/dt$ , l'**inductance appartenant à la maille**. L'équation du circuit peut finalement s'écrire :

$$e_1 = R_{11}J^1 + \frac{1}{sC_{11}}J^1 + s(L_{11}J^1) \quad (26)$$

Le circuit corrigé est donné figure *Premier circuit corrigé* avec l'inductance située au centre de la maille.

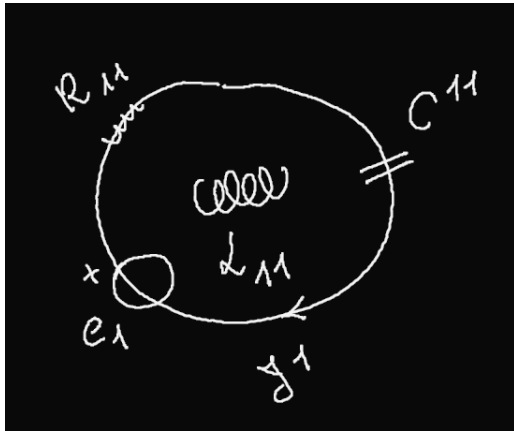


Figure: Premier circuit corrigé

La méthode de Kron exploite les changements de référentiels généralisés. Considérons l'équation d'une branche dite de Kirchhoff. C'est une source externe  $e$ , en série avec une impédance  $z$  et un courant  $I$  stimulé dans la branche. Soit  $N$  branches de même type de structure constituant un espace à  $N$  dimensions. Pour chaque branche nous pouvons écrire :

$$e_a = z_{ab}I^b + V_a \quad (27)$$

Changeons de référentiel pour passer dans celui de l'espace des courants de mailles  $J$ . Chaque branche appartient à une maille, ce qui "fabrique" le circuit des branches connectées :

$$I^b = \Lambda_c^b J^c \quad (28)$$

$\Lambda$  est une matrice de changement d'espaces.



Remplaçons cette relation dans celle de départ :

$$e_a = z_{ab} \Lambda_c^b J^c + V_a \quad (29)$$

multiplions à gauche par la transformation inverse  $\Lambda_d^a$  :

$$\Lambda_d^a e_a = \Lambda_d^a z_{ab} \Lambda_c^b J^c + \Lambda_d^a V_a \quad (30)$$

Mais les lois de Kirchhoff nous disent que  $\Lambda_d^a V_a = 0$ . En notant :

$$\Lambda_d^a z_{ab} \Lambda_c^b = \zeta_{dc}, \quad \Lambda_d^a e_a = T_d$$

L'équation du problème se simplifie en :

$$T_d = \zeta_{dc} J^c \quad (31)$$

Nous pouvons soit analyser théoriquement le circuit, et c'est le premier objectif et intérêt de l'analyse tensorielle des réseaux, soit faire une application numérique pour en calculer la réponse. Dans ce cas nous inversons  $\zeta_{\alpha\beta}$  :

$$J^\beta = y^{\beta\alpha} u_\alpha, \quad y^{\beta\alpha} = (\zeta_{\alpha\beta})^{-1} \quad (32)$$

Connaissant le courant nous en déduisons les différences de potentiels aux bornes de tous les composants du circuit. Le circuit peut aussi comporter des sources de courants. Dans ce cas une maille dite "virtuelle" incorpore le courant *connu* développé par une ddp *inconnue*. Tout se passe comme si nous avions une maille dont la composante  $a$  du courant :  $J^a$  est connue mais la "fém"  $u_a$  inconnue.

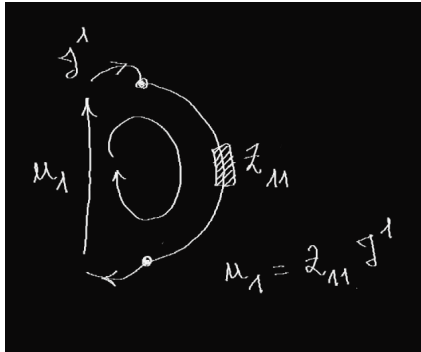


Figure: Source de courant

Dans ce circuit élémentaire,  $J^1$  et  $Z_{11}$  sont connus. Nous en déduisons la valeur de  $u_1$  inconnue.

Deux mailles peuvent être couplées :

- soit parce qu'elles sont reliées par une corde ;
- soit parce qu'elle partage une ou plusieurs branches.

Une corde  $\zeta_{21}$  est une fonction définie par :

$$\zeta_{21} = \frac{e_2}{j_1} \quad (33)$$

Un couplage par branche partagée est équivalent à une corde. Imaginons par exemple une première maille d'impédance  $a + b$  et une seconde d'impédance  $b + c$ . Ces deux mailles partagent la branche  $b$ . Le tenseur fondamental est :

$$\zeta = \begin{bmatrix} a + b & -b \\ -b & b + c \end{bmatrix} \quad (34)$$

## 28 Méthode de Kron : couplages

Les deux mailles sont orientées de la même façon et comme les courants s'opposent dans la branche partagée, le couplage est négatif.

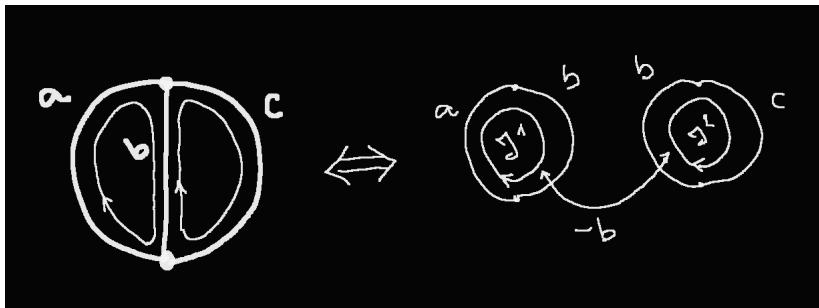


Figure: Couplage

Il peut y avoir couplage entre une source de courant et une maille alimentée par une source de tension.

## 29 Méthode de Kron : couplages

Exercice : exprimer la matrice du tenseur fondamental du circuit suivant :

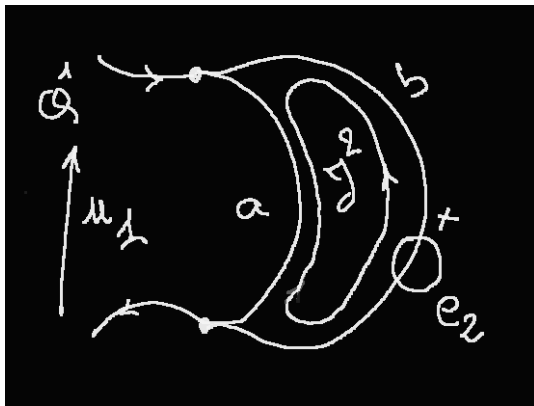


Figure: 2 sources

Nous décidons d'associer le courant  $Q^1$  à la branche d'impédance  $a$ . Le tenseur fondamental s'exprime par :

$$\zeta = \begin{bmatrix} a & a \\ a & b + a \end{bmatrix} \quad (35)$$

La première maille, virtuelle, est d'impédance  $a$ . La seconde maille de courant  $J^2$  est d'impédance  $a + b$ . Les deux courants  $Q^1$  et  $J^2$  partagent la branche  $a$ , mais suivant un sens de circulation identique. Le couplage est donc  $a$ . La première maille a une ddp  $u_1$  inconnue et la seconde  $e_2$  connue.

L'équation du circuit est :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a + b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ J^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

où l'on résout :

$$\begin{cases} aQ^1 = u_1 - aJ^2 \\ e_2 - aQ^1 = (a + b)J^2 \end{cases} \quad (37)$$



L'équation générale d'un circuit peut presque toujours (exception des systèmes en mouvements relatifs accélérés, relativistes ou non) se ramener à la forme suivante :

$$e_\alpha - R_{\alpha\beta}J^\beta - \frac{1}{C^{\beta\alpha}} \int_t dt J^\beta = L_{\alpha\beta} \frac{dJ^\beta}{dt} \quad (38)$$

Ce système se résout en général très bien en différences finies temporelles. En le réduisant à la partie dissipative (pour illustration), nous obtenons :

$$e_\alpha(t) - R_{\alpha\beta}(t)J^\beta(t) + \frac{L_{\alpha\beta}}{dt} J^\beta(t) = \frac{L_{\alpha\beta}}{dt} J^\beta(t + dt) \quad (39)$$

Que l'on peut généraliser en :

$$e_\alpha(t) - \zeta_{\alpha\beta}(t)J^\beta(t) = \frac{d}{dt} L_{\alpha\beta} J^\beta \Leftrightarrow T_\alpha = \frac{d}{dt} L_{\alpha\beta} J^\beta \quad (40)$$

Résoudre :

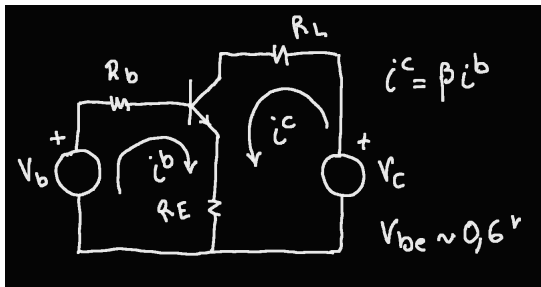


Figure: Transistor

$$\begin{bmatrix} V_b - V_{be} \\ V_c - V_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b & R_E \\ R_E & R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ \beta i_b \end{bmatrix} \quad (41)$$

Résoudre avec deux antennes de gains  $G_1$  et  $G_2$  :

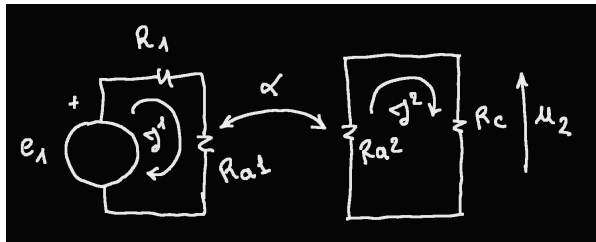


Figure: Antennes

$$e_2 = \frac{G_2}{x} \sqrt{30 G_1 R_{a1}} J^1 \Rightarrow \alpha = \frac{G_2}{x} \sqrt{30 G_1 R_{a1}} \quad (42)$$

Les équations de base de la thermique relient une puissance à une variation de température. Un système est au repos à une certaine température que l'on peut considérer comme référence. En général nous prenons la température ambiante comme référence. La puissance communiquée à un corps  $P$  se traduit alors en une déviation de température  $\theta$  par rapport à la référence. Nous aimerions intégrer cette relation dans le cadre tensoriel associé au circuit pour lequel nous voulons étudier la variation en température. La température est un scalaire, nous aimerions de fait pouvoir la relier à un vecteur. Si nous considérons une équation de la forme :

$$P \left( J^k \right) = {}^t R \theta \quad (43)$$

où  ${}^t R$  est une résistance thermique.

La température  $T$  est un scalaire comme la puissance  $P(J^k)$ . Mais la puissance est l'invariant. Par exemple pour une maille 1 entièrement résistive, la puissance est donnée par :

$$\mathcal{P} = R_{11} J^1 J^{*1} \quad (44)$$

Etant invariante, la puissance n'a pas les propriétés d'une composante de covecteur. Mais nous pouvons lui induire une propriété vectorielle en multipliant ce scalaire par le vecteur de base attaché à l'élément considéré. Soit ici :

$$\mathcal{P}_1 = R_{11} J^1 J^{*1} \cdot u_1 \quad (45)$$

Sous ce montage et uniquement de son fait, nous pouvons généraliser,  $\xi$  étant un opérateur "d'impédance thermique",  $\theta$  une variation de température et écrire :

$$\mathcal{P}_q = \xi_{qk} \theta^k \quad (46)$$

Le gradient de température  $\theta^i$  pouvant être relié classiquement à partir du scalaire qu'est la température  $T$  au vecteur associé à sa variation :  $\theta = -\mathbf{Grad} T$ . L'écriture est sous cette forme simple, homogène de celle du circuit électrique. Il ne nous reste plus qu'à étudier les formes du tenseur  $\xi$  puis regarder le couplage des deux équations électrique et thermique.

2 corps à des températures relatives  $T_1$  et  $T_2$  échangent de la chaleur sous forme d'une puissance  $\mathcal{P}$  à chaque instant. Cet échange se traduit par le biais d'une résistance thermique  $\mathcal{R}$ . Nous avons :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{k} \frac{x}{S} \Rightarrow \mathcal{Y} = k \frac{S}{x} \quad (47)$$

$S$  est la section du flux de transport et  $x$  sa longueur. Quelques valeurs :

métaux	Cu	Al	Fe	Amiante	Mica	Air fixe
k	387	200	65	0.19	0.36	0.023

Un corps a une propriété d'inertie thermique traduisant le fait que la température met un certain temps à s'établir sur l'ensemble de son volume. On appelle  $\mathcal{T}$  la capacité thermique et l'équation générale de transmission de température s'écrit :

$$P_a = \mathcal{T}_{ab} \frac{d\theta^b}{dt} + \mathcal{Y}_{ab} \theta^b \quad (48)$$

Nous notons une similitude avec un circuit électrique. L'inertie thermique  $\mathcal{T}$  correspond à l'inertie électromagnétique  $\mathcal{L}$  et la résistance thermique à la résistance électrique. La puissance étant reliée à un courant de maille, nous créons une corde quadratique donnant le ratio :

$$\frac{P_k}{J^q} = \frac{R_{ab} J^a J^{*b}}{J^a} = R_{ab} J^{*b} = u_a \quad (49)$$

La corde est un potentiel.



Le processus est un transfert de chaleur par fluide. Nous pouvons définir une résistance de transfert par convection  $R_c$  avec :

$$R_c = \frac{\theta}{h_c S} \Rightarrow \mathcal{V} = h_c S, \quad P_a = \mathcal{V}_{ab} \theta^b \quad (50)$$

A la différence de la conduction, il y a ici déplacement de matière. La convection peut intégrer le rayonnement d'un corps qui évacue de la chaleur vers le milieu ambiant. Nous écrivons de la même façon :

$$P_R = (h_R \cdot S)_{Rb} \theta^b \Leftrightarrow P_R = \mathcal{V}_{Rb} \theta^b \quad (51)$$

Nous pouvons considérer  $h_c \approx h_R \approx 7$ .

## 41 Échanges par rayonnement

Un corps rayonnant émet un flux de lumière qui peut être capté par un autre corps. Cet échange de lumière se traduit par un échange de flux thermique. Ce flux se déplace à la vitesse de la lumière et ne nécessite aucun support. Il ne faut pas le confondre avec les échanges thermiques convectifs via des masses d'air. C'est l'unique moyen de refroidissement dans l'espace. **Quelques définitions :** La **luminance**  $L^o$  énergétique d'une source est l'intensité émise par cette source dans une direction donnée en watt par stéradian :  $[W][sr]^{-1}$ . Une source obéit à la loi de Lambert si elle émet avec la même intensité dans toutes les directions. On rappelle la définition de l'angle solide  $\Omega$  :

$$\Omega = \frac{S}{r^2}, [sr] \rightarrow L^o = \frac{W}{r^2 \Omega} \quad (52)$$

$r$  étant la distance à la source,  $W$  l'intensité source décroissant en  $1/r^2$  à la distance  $r$  et  $S$  la surface (en général une portion de sphère) d'émission considérée.

La Radiance  $R^\circ$  est l'équivalent de la luminance mais exprimée pour une surface d'émission et non un angle solide d'émission. Pour une surface d'émission de surface  $\pi r^2$  à la distance  $r$  la radiance vaut  $W/(r^2)$ . Comme l'angle solide vaut lui-même  $\pi$ , nous avons  $L^\circ = W/(\pi r^2)$ . D'où :

$$R^\circ = \pi L^\circ \quad (53)$$

La radiance est en fait l'intégrale sur la surface d'émission à une distance donnée du flux de l'énergie électromagnétique exprimée par le vecteur de Poynting. Soit  $E = W/r^2$  nous pouvons écrire à une distance donnée :

$$L^\circ = \frac{E}{\pi}, \quad R^\circ = E \Rightarrow R^\circ = \pi L^\circ \quad (54)$$

Ce détail est préférable car pour certaines sources laser par exemple l'atténuation de l'intensité n'est pas en  $1/r^2$ .

**Loi de Stefan Boltzmann**

Si nous considérons un corps dont le coefficient d'absorption du rayonnement thermique ne dépend pas de la température  $T$ , soit  $\epsilon$  un coefficient d'émission totale, nous avons :

$$R^o = \epsilon \sigma T^4 \Rightarrow L^o = \frac{\epsilon}{\pi} \sigma T^4 \quad (55)$$

avec  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} [W][m]^{-2}[K]^{-4}$ . Quelques valeurs du produit  $\epsilon \sigma$  :

Matériau	$\epsilon \sigma$	Matériau	$\epsilon \sigma$
Acier	2,52	Laiton	1,2
Aluminium	2,63	Mercure	1,05
Amiante	5,33	Noir de fumée	5,45
Cuivre	0,92	Plomb	2,44
Fer	5,12	Or	2,73

## 44 Échanges par rayonnement entre deux corps

Une portion de flux de chaleur émis par le corps 1 sur le corps 2 est définie par :

$$dP_2 = L_1 \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_1 T_1^4 \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (56)$$

$r_{12}$  étant la distance entre les deux corps. Les angles  $i_1$  et  $i_2$  sont les angles d'incidence ou d'émission par rapport aux normales aux corps. Le flux total est donné par :

$$P_{12} = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_1 T_1^4 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (57)$$

Un rayonnement similaire est transmis du corps 2 vers le corps 1 :

$$P_1 = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_2 T_2^4 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (58)$$

L'interaction entre les deux corps est le bilan net des deux flux :

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_1 \epsilon_2 (T_1^4 - T_2^4) \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (59)$$

Sous cette forme nous ne pouvons pas faire apparaître le vecteur  $\theta$ . Or nous voudrions pouvoir exprimer une relation de la forme  $P_2/\theta^1$  ce qui nous définirait une corde.

## 46 Échanges par rayonnement entre deux corps

Nous repartons de la relation :

$$P_2 = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_1 T_1^4 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (60)$$

Nous définissons une température nulle de référence  $T_0$ . De fait nous pouvons définir le gradient  $(\theta^1)^4 = (T_1^4 - T_0^4)$ . Alors :

$$P_2 = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_1 (\theta^1)^4 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (61)$$

La corde est alors la fonction  $\eta$  telle que :

$$\eta_{21} = \frac{\sigma}{\pi} \epsilon_1 (\bullet)^4 \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos(i_1) dS_2 \cos(i_2)}{r_{12}^2} \quad (62)$$

# 47 Échanges par rayonnement entre deux corps

L'interaction doit être bilatérale pour retrouver la formulation complète.

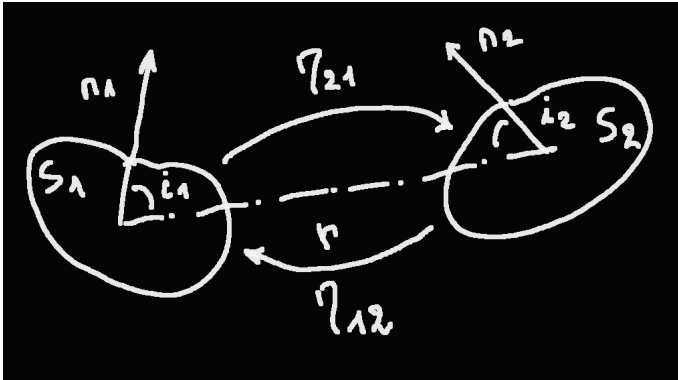


Figure: Échange thermique par rayonnement



Les lois sur les paramètres primaires sont :

$$\begin{cases} \rho(t') = \rho [1 + \alpha (t' - t)] \\ \epsilon(t') = \epsilon [1 + \beta (t' - t)] \\ \mu(t') = \mu [1 + \gamma (t' - t)] \end{cases} \quad (63)$$

Considérons une résistance alimentée par un générateur. L'équation électrique est de la forme :

$$\begin{cases} e = R [1 + \alpha\theta] J \\ e.J = \mathcal{V}\theta \end{cases} \quad f = \begin{cases} e - R [1 + \alpha\theta] J \\ e.J - \mathcal{V}\theta \end{cases} \quad (64)$$

Ce dernier circuit peut être résolu par une méthode de Newton. Le vecteur de flux est :

$$x = \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix} \quad (65)$$

Le jacobien étant :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} R(1 + \alpha\theta) & R\alpha J \\ e & -\mathcal{V} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Nous résolvons par itération pour une valeur de temps  $t$  donnée :

$$x^{q+1} = x^q - \mathcal{W}^{-1} \left( x^q \right) f \left( x^q \right) \quad (67)$$

Dans le cas d'une diode nous avons d'une part la résistance entre la jonction et son boîtier  $R_{jb}$  et d'autre part la résistance entre le boîtier et l'environnement  $R_{ba}$ . Le flux de puissance  $P$  traverse ces deux éléments et engendre un échauffement. Nous avons :

$$P = \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_{jb} + \mathcal{Y}_{ba}} \right) \theta \quad (68)$$

Électriquement, la diode est un composant d'admittance :

$$I(V) = (e^{\alpha V} - V_s) \overset{v}{\mathcal{D}}_{[-V_L, V_x]} + (e^{\beta |V|}) \overset{v}{\mathcal{D}}_{[-10V_L, -V_L]} + \dots$$

$$(e^{-\sigma V}) \overset{v}{\mathcal{D}}_{[V_x, 10V_x]} \quad (69)$$

## 51 Exemples : diode

Le schéma électrique de la diode est un générateur de courant piloté avec une résistance de forte valeur en parallèle, arbitraire dont la consommation est supposée négligeable (il suffit de prendre une résistance assez forte). La figure "diode" présente ce schéma équivalent avec la résistance arbitraire  $R$ .

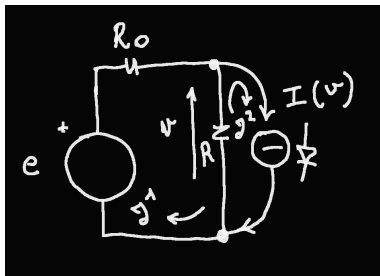


Figure: Diode

Ce schéma conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} e = (R_0 + R) J^1 - R J^2 \\ V = -R J^1 + R J^2 \end{cases} \quad (70)$$

$V$  est une inconnue, et nous avons  $J^2 = I(V)$ . Soit au final :

$$\begin{cases} e = (R_0 + R) J^1 - R I(V) \\ V = -R J^1 + R I(V) \\ V I(V) = \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_{jb} + \mathcal{Y}_{ba}} \right) \theta \end{cases} \quad (71)$$

Que nous pouvons résoudre par une méthode de Newton comme précédemment.

Nous voulons résoudre :

$$f :: \begin{cases} e - (R_0 + R) J^1 - RI(V) = 0 \\ V + RJ^1 + RI(V) = 0 \\ VI(V) - \left( \frac{1}{\mathcal{Y}_{jb} + \mathcal{Y}_{ba}} \right) \theta = 0 \end{cases} \quad (72)$$

Soit :

$$x = \begin{bmatrix} J^1 \\ V \\ \theta \end{bmatrix} \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} -R_0 + R & -R\Omega & 0 \\ R & 1 + \Omega & 0 \\ 0 & I(V) + V\Omega & -[\mathcal{Y}_{jb} + \mathcal{Y}_{ba}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (73)$$

avec

$$\Omega = \alpha e^{\alpha V} \mathcal{D}_{[-V_L, V_x]}^V + \beta e^{\beta |V|} \mathcal{D}_{[-10V_L, -V_L]}^V - \sigma e^{-\sigma V} \mathcal{D}_{[V_x, 10V_x]}^V$$

et comme précédemment par itération jusqu'à convergence de  $\delta x < \epsilon$  :

$$x^{q+1} = x^q - \mathcal{W}^{-1} \left( x^q \right) f \left( x^q \right) \quad (74)$$

## 55 Exemples : effet de l'inertie thermique

Considérons un composant avec une partie en liaison avec l'environnement et une seconde partie continuant la première. Il peut s'agir de la puce d'un microprocesseur ou d'un transistor. L'entrée du composant possède une impédance de conduction  $\mathcal{Y}_{EL}$  suivie d'une résistance de conduction vers la puce  $\mathcal{V}_{L\mu}$ . Le premier étage présente une convection vers le substrat  $\mathcal{Y}_{EA}$  et une inertie thermique traduit la transmission du flux de chaleur vers la puce  $\mathcal{T}_{L\mu}$ . Le schéma global est donné figure "Inertie T."

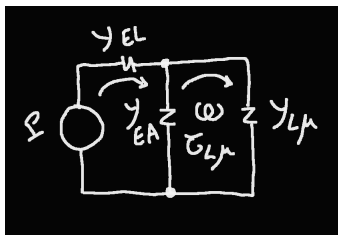


Figure: Inertie T.



## 56 Exemples : effet de l'inertie thermique

Cette inertie permet de traduire le temps de diffusion de la chaleur dans la puce. Sur des fronts thermiques rapides, la chaleur n'a pas le temps de se diffuser et reste concentrée sur une zone plus petite que la surface totale de la puce. Le lead d'entrée comporte lui une inductance (inertie électromagnétique) et le circuit électrique est de tenseur fondamental :

$$\zeta = [ (R_{11} + sL_{11}) ] \quad (75)$$

Rappelons ici les expressions générales des puissances dissipées (qui engendrent le flux de chaleur) et puissance stockée (sans dissipation) :

$$\begin{cases} P_{dissip} = \frac{1}{4} [e_k J^{*k} + e_k^* J^k] \\ P_{stock} = \frac{1}{4j} [e_k J^{*k} - e_k^* J^k] \end{cases} \quad (76)$$

## 57 Exemples : effet de l'inertie thermique

Notre système est alors modélisé par  $x = [J^1, \theta^1, \theta^2]$  et :

$$f :: \begin{cases} e_1 - (R_{11} + sL_{11}) J^1 = 0 \\ \frac{1}{4} [e_1 J^{*1} + e_1^* J^1] - (\mathcal{Y}_{EL} + \mathcal{Y}_{EA}) \theta^1 + \mathcal{Y}_{EA} \theta^2 = 0 \\ \mathcal{Y}_{EA} \theta^1 - (\mathcal{Y}_{EA} + \mathcal{Y}_{L\mu} + s\mathcal{T}_{L\mu}) \theta^2 = 0 \end{cases} \quad (77)$$

avec le jacobien (s opérateur de Laplace,  $\gamma_1^1$  spineur /  $J^{*1} = \gamma_1^1 J^1$ ) :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} R_{11} + sL_{11} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} (e_1 \gamma_1^1 + e_1^*) & -(\mathcal{Y}_{EA} + \mathcal{Y}_{EA}) & \mathcal{Y}_{EA} \\ 0 & \mathcal{Y}_{EA} & -(\mathcal{Y}_{EA} + \mathcal{Y}_{L\mu} + s\mathcal{T}_{L\mu}) \end{bmatrix} \quad (78)$$

Le spineur  $\gamma_1^1$  transforme le complexe en son conjugué :

$$\gamma_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

et comme précédemment nous devons résoudre :

$$\overset{q+1}{x} = \overset{q}{x} - \mathcal{W}^{-1} \left( \overset{q}{x} \right) f \left( \overset{q}{x} \right) \quad (80)$$

Comment prendre en compte les autres physiques :

- la mécanique ;
- la mécanique quantique ;
- la mécanique des fluides ?

L'algèbre tensoriel nous donne tous les outils pour y parvenir. Il reste, ce qui n'est pas trivial, à définir les espaces adéquats. Réécrivons notre équation de résolution à chaque instant :

$$\delta x^\alpha = -(\mathcal{W}_{\sigma\alpha})^{-1} f_\sigma \quad (81)$$

Notons :

$$(\mathcal{W}_{\sigma\alpha})^{-1} = \mathcal{M}^{\alpha\sigma}$$

Donc en remplaçant  $f$  par son développement :

$$\delta x^\alpha = -\mathcal{M}^{\alpha\sigma} \left\{ e_\sigma - \zeta_{\sigma q} x^q - \frac{d}{dt} [\mathcal{L}_{\sigma q} x^q] \right\} \quad (82)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'inertie généralisée, électromagnétique ou thermique. Comme la température, la loi de Newton de la dynamique avec dissipations ou déformations  $k$  peut être exprimée par :

$$p_q - k_{qa} v^a = \frac{d}{dt} [m_{qa} v^a] \quad (83)$$

$m$  est une inertie et  $v$  une vitesse de mouvement ou déformation et  $p$  une contrainte externe. Les composants dépendent des constantes primaires  $\mu, \epsilon, \sigma$  mais aussi des coordonnées curvilignes d'espace-temps de vecteurs  $u_0, u_1, u_2, u_3$ . Comme la température modifie les constantes primaires, les variations des coordonnées d'espace-temps modifient les fonctions  $\mathcal{G}$  qui relient les constantes primaires et les macro-composants (voir planche 14).

Notons que l'usage des potentiels  $V$  et  $I$  et des composants facilite de façon indispensable les écritures, sinon les équations deviendraient tellement compliquées que nous ne pourrions les écrire que pour des systèmes très simples.

Nous comprenons que nos équations thermo-mécano-électromagnétique s'appuie sur des variables fondamentales que sont l'espace-temps (ou l'espace laplacien) et les propriétés de la matière  $\mu, \dots$ . Entre les différents réseaux en interactions nous trouvons des interactions électromagnétiques, thermiques et gravifiques.

La mécanique quantique détermine les valeurs des fondamentaux électromagnétiques  $\mu, \epsilon, \sigma$ . La gravitation détermine le référentiel qui fixe les vecteurs d'espace-temps. Ces vecteurs curvilignes sont déterminés par la chute libre.

## 62 Un peu plus loin

Montrons comment le formalisme de l'ATR va permettre de coupler les équations de la mécanique (vibrations ici) comme pour la thermique ou l'électricité. Nous pourrions compléter ces études par l'hydrodynamique, etc. Le formalisme peut intégrer toutes les physiques. Considérons un système de deux masses couplées figure "masses couplées".

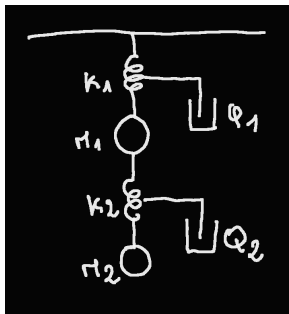


Figure: Masses couplées

Chaque masse présente une dissipation de la forme  $Qv$ , un amortissement :

$$k \int_t dtv$$

et une inertie  $mdv/dt$ . L'équation générale associée aux masses indépendantes est :

$$m_{ij} \frac{dv^j}{dt} + Q_{ij} v^j + k_{ij} \int_t dtv^j = 0 \quad (84)$$

Chaque masse constitue un nœud. La matrice d'incidence  $A$  prend comme convention que lorsqu'une force est dirigée vers un nœud la connexion entre masse et amortissement est positive et lorsque la force tire sur le nœud, la connexion est négative. Nous pouvons ainsi dresser le tableau de relations suivant :



	$k_{11}$	$k_{22}$
$m_{11}$	1	0
$m_{22}$	0	-1

Par une somme directe de toutes les masses en présence, nous pouvons construire trois tenseurs d'inertie, dissipation et amortissement :

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & m_{22} \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} \int_d t & 0 \\ 0 & k_{22} \int_t dt \end{bmatrix} \quad (85)$$

Comme pour les courants, la méthode de Kron nous invite à calculer les transformations :

$$m' = A.m.A^T, \quad Q' = A.Q.A^T, \quad k' = A.k.A^T, \quad f' = A.f \quad (86)$$

L'équation à résoudre pour le système couplé devient :

$$f'_\alpha - \frac{d}{dt} (m_{\alpha\sigma} v^\sigma) = Q'_{\alpha\sigma} v^\sigma + k'_{\alpha\sigma} \int_t dt v^\sigma \quad (87)$$

Cette équation mécanique a pour inconnue la vitesse - c'est à dire la variation des variables primaires d'espace au cours du temps. Ce sont ces mêmes variables qui interviennent par exemple dans la valeur d'un condensateur. Par le biais de ces variables, le couplage entre électrique et mécanique est réalisé.

Soit nous faisons apparaître explicitement les dépendances. Par exemple en écrivant un condensateur sous la forme

$$\epsilon \frac{S}{h}$$

avec

$$h = \int_t dt v$$

## 66Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Nous allons nous intéresser au fonctionnement d'un transducteur électrodynamique. Ce sont par exemple des haut parleurs, des microphones, mais aussi des sismographes, etc. La figure "transducteur" montre la structure de ce type de dispositif.

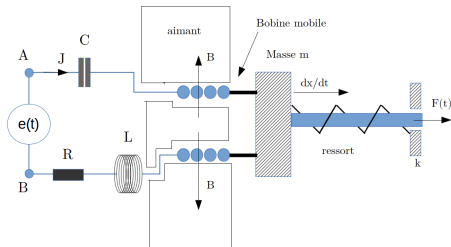


Figure: Transducteur

## 67 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Le transducteur est fait d'un aimant permanent qui produit un champ magnétique  $B$  fixe dans un entrefer annulaire. Dans cet entrefer nous plaçons une bobine réalisée avec un fil de longueur  $l$ . La bobine fait partie d'un circuit électrique  $RLC$  alimenté par une source de tension  $e(t)$ . La bobine est solidaire d'une masse  $m$  rappelée à une position d'équilibre par un ressort de dureté  $k$ . Une tige permet d'appliquer à l'ensemble une force  $F(t)$ . Lorsque la bobine est parcourue par un courant  $J$ , une force de Laplace s'exerce sur le fil d'intensité :

$$\mathbf{F}(J) = -l\mathbf{B} \times \mathbf{J} \quad (88)$$

## 68 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Lorsque la bobine se déplace à la vitesse  $v$ , la force électromotrice  $e$  apparaît à ses bornes avec :

$$e(\mathbf{v}) = -l\mathbf{B} \times \mathbf{v} \quad (89)$$

Dans le dispositif on comprend que les trois vecteurs  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{B}$  sont mutuellement perpendiculaires (il s'agit du courant dans la bobine dans l'entrefer). Les équations de Lagrange nous donnent :

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v + k \int_t dtv = F(J) + F(t) \quad (90)$$

L'état du système mécanique est décrit par la vitesse  $v$  et celui du système électrique par le courant  $J$ . Par remplacement nous obtenons

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v + k \int_t dtv - lBJ = F(t) \quad (91)$$

## 69 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Par ailleurs l'équation du circuit électrique dans l'espace des mailles s'écrit :

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C} \int_t dt J + IBv = e(t) \quad (92)$$

En utilisant l'opérateur de Laplace ces deux équations couplées s'écrivent (en considérant  $R + b$  les pertes dans le fil de la bobine) :

$$\begin{cases} (sm + \alpha + \frac{k}{s}) v - IBJ = F(s) \\ IBv + (sL + R + \frac{1}{sC}) J = e(s) \end{cases} \quad (93)$$

Il reste à compléter ce système de l'équation thermique du dispositif.

## 70 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

La puissance fournie à la bobine dépend de sa propriété dissipative. Soit  $P_b$  la puissance dissipée :  $RJJ^*$ . Soit encore  $\mathcal{V}_{fb}$  la conduction entre la bobine et l'aimant et  $\mathcal{V}_{ba}$  entre l'aimant et l'air. La température se détermine avec l'inertie thermique  $\mathcal{T}$  par :

$$P_b = \left( \mathcal{V}_{fb} + \mathcal{V}_{ba} + \mathcal{T}_{fb} \frac{d}{dt} \right) \theta \quad (94)$$

Nous pouvons alors compléter le système (93) des dépendances en température. Si la dépendance du matériau magnétique en température s'écrit :

$$B = B_0 \left( 1 - \left[ 1 + e^{-\beta(T-T_c)} \right]^{-1} \right) \quad (95)$$

$T_c$  est la température de Curie. Or

$$T - T_c = T - T_a + T_a - T_c = \theta - \theta_c.$$

## 71 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Finalement :

$$\begin{cases} F(s) + IB_0 \left(1 - [1 + e^{-\beta(\theta - \theta_c)}]^{-1}\right) J - \left(sm + \alpha + \frac{k}{s}\right) v = 0 \\ e(s) - (sL + R + \frac{1}{sC}) J - IB_0 \left(1 - [1 + e^{-\beta(\theta - \theta_c)}]^{-1}\right) v = 0 \\ RJ\gamma J - (\mathcal{V}_{fb} + \mathcal{V}_{ba} + \mathcal{T}_{fb} \frac{d}{dt}) \theta = 0 \end{cases} \quad (96)$$

Choisissons comme vecteur de base  $x^q = [J, v, \theta]$ . Notons  $S(\theta) = [1 + e^{-\beta(\theta - \theta_c)}]^{-1}$ .



## 72 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Le système devient :

$$f_{\sigma} :: \begin{cases} F(s) + IB_0 (1 - S(\theta)) J - (sm + \alpha + \frac{k}{s}) v = 0 \\ e(s) - (sL + R + \frac{1}{sC}) J - IB_0 (1 - S(\theta)) v = 0 \\ RJ\gamma J - (\mathcal{V}_{fb} + \mathcal{V}_{ba} + s\mathcal{T}_{fb}) \theta = 0 \end{cases} \quad (97)$$

d'où :

$$\mathcal{W}_{\sigma\alpha} = \begin{bmatrix} IB_0 (1 - S(\theta)) & - (sm + \alpha + \frac{k}{s}) & IB_0 J \beta e^{-\beta(\theta - \theta_c)} S^2(\theta) \\ - (sL + R + \frac{1}{sC}) & -IB_0 (1 - S(\theta)) & IB_0 v \beta e^{-\beta(\theta - \theta_c)} S^2(\theta) \\ R\gamma J + RJ\gamma & 0 & -(\mathcal{V}_{fb} + \mathcal{V}_{ba} + s\mathcal{T}_{fb}) \end{bmatrix} \quad (98)$$

## 73Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

et nous devons résoudre :

$$\delta x^\alpha = -\mathcal{M}^{\alpha\sigma} f_\sigma \quad (99)$$

Procédons un peu différemment pour le processus Newtonien.  
écrivons :

$$\mathcal{W}_{\sigma\alpha} = \mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o - s\mathcal{L}_{\sigma\alpha}$$

alors :

$$[\mathcal{W}_{\sigma\alpha}]^{-1} = [\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o - s\mathcal{L}_{\sigma\alpha}]^{-1} \quad (100)$$

Notons  $[\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o]^{-1} = \mathcal{M}^{\alpha\sigma}$ , comme :

$$\delta x^\alpha = -[\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o - s\mathcal{L}_{\sigma\alpha}]^{-1} f_\sigma \quad (101)$$

## 74 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Multiplions en haut et en bas par  $\mathcal{M}^{\alpha\sigma}$  :

$$\delta x^\alpha = - \left[ \frac{\mathcal{M}^{\alpha\sigma}}{(\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o \mathcal{M}^{\alpha\sigma} - s \mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma})} \right] f_\sigma \quad (102)$$

$\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o \mathcal{M}^{\alpha\sigma} = U$  matrice identité. De fait :

$$\delta x^\alpha = - \left[ \frac{\mathcal{M}^{\alpha\sigma}}{U - s \mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma}} \right] f_\sigma \quad (103)$$

Multiplions en haut et en bas par  $U + s \mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma}$ . Nous obtenons :

$$\delta x^\alpha = - \frac{\mathcal{M}^{\alpha\sigma} (U + s \mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma})}{U^2 - s^2 (\mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma})^2} f_\sigma \quad (104)$$

## 75 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

Comme  $U^2 = U$ , sous condition de vérifier :

$$\forall \alpha, 1 \gg \omega^2 (\mathcal{L}_{\alpha\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\alpha})^2$$

et

$$\forall \alpha \neq \sigma, (\mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma})^2 \rightarrow 0$$

Nous trouvons finalement puisque  $U^{-1} = U$  :

$$\delta x^\alpha = -(\mathcal{M}^{\alpha\sigma} + s \mathcal{M}^{\alpha\sigma} \mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma}) f_\sigma \quad (105)$$

notons :

$$y^{\alpha\sigma} = \mathcal{M}^{\alpha\sigma} \mathcal{L}_{\sigma\alpha} \mathcal{M}^{\alpha\sigma} \quad (106)$$

## 76Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

alors :

$$\delta x^\alpha = -(\mathcal{M}^{\alpha\sigma} + sy^{\alpha\sigma}) f_\sigma \quad (107)$$

C'est l'équation générale non linéaire du système étudié. Tout système possède deux régimes : un régime dit statique où les variables ne changent pas de valeur et un régime dynamique. Des paramètres déterminés en régime statique peuvent influencer les valeurs de fonctions utilisées en régime dynamique : c'est le principe de modélisation des électroniques sous valeurs d'alimentations fixées. Le régime statique est défini par :

$$\frac{d}{dt}x^\alpha = 0 \quad (108)$$

Or si les variables ne changent pas, leurs conditions limites non plus ni les stimuli :  $sx^\alpha = 0$   $sf_\sigma = 0$ .

## 77 Un peu plus loin : exemple d'un système électro-mécano-thermique

ceci revient à obtenir :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}^{\alpha\sigma} + \frac{d^2}{dt^2}y^{\alpha\sigma} = 0 \quad (109)$$

Autrement dit, ni la métrique  $\mathcal{M}$  si l'inertie  $sy$  ne peuvent varier au cours du temps. Ceci exclue les espaces courbes, nous le verrons plus loin.

L'ensemble de la variété  $x^\alpha$  ou  $(\mathcal{M}, g = y^{-1})$  est plongée dans l'espace temps  $(x, y, z, t)$  ou  $(x, y, z, s)$ .

Les formes exploitables de la matières ordinaires peuvent être modélisées sous la forme du produit d'une fonction de propriété (par exemple la perméabilité  $\mu$ ) par une fonction de forme géométrique  $\mathcal{G}(x, y, z)$ . Cette dernière résulte du plongement alors que la propriété provient de l'espace quantique sous-jacent.

La relation de Planck  $E = h\nu$  relie l'énergie d'une particule à la fréquence d'oscillation du résonateur associé à cette particule. Les particules sont classées en deux types fondamentaux :

- les bosons ;
- les fermions.

Les bosons sont des particules qui interviennent dans les interactions entre systèmes. Ce sont par exemple les photons qui ne comportent qu'une composante transverse du champ électromagnétique. Comme le champ est une force normalisée, et que la relation de Newton relie la force longitudinale à la masse ( $\mathbf{F} = m\gamma$ ), le photon n'a pas de masse.

Les fermions possèdent une charge qui leur confère une interaction de Coulomb et donc une masse. La mécanique quantique est le monde des probabilités de mesures inférieures à 1.

Lorsque nous travaillons dans le monde macroscopique où les particules sont en très grand nombre, nous intégrons la fonction d'onde de Schrödinger qui exploite la relation de Planck :

$$\psi = A \exp(j\omega t - kx) \rightarrow A \exp\left(j2\pi \frac{E}{h} t - jx2\frac{\pi}{h} mv\right) \quad (110)$$

Si nous dérivons  $\psi$  par rapport au temps nous retrouvons l'énergie. Si nous la dérivons par rapport à l'espace nous retrouvons l'impulsion. Écrivons d'une façon générale avec l'énergie  $W$  :

$$\psi = A \exp\left(j \frac{2\pi}{h} \int_t dt W\right) \quad (111)$$



Définissons alors l'opérateur :

$$H = j \frac{h}{2\pi} \frac{d}{dt} \quad (112)$$

La mesure :

$$m = \int_{\nu} d\nu \psi H \psi^* = |A|^2 \int_{\nu} d\nu W \quad (113)$$

S'interprète comme la probabilité d'observer la particule dans l'état d'énergie  $W$  après avoir normalisé à 1 la probabilité qu'elle soit dans cet état dans tout l'espace  $\Omega$  :

$$|A|^2 \int_{\Omega} d\nu W = 1 \quad (114)$$

# 81 Changement d'échelle & mécanique quantique

Si nous appliquons ce principe au calcul de la probabilité d'avoir un électron dans un segment  $x$  si une différence de potentiel  $V$  est appliquée sur  $X$ . En utilisant l'hamiltonien :

$$H = j \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \quad (115)$$

Nous trouvons  $P(x) = x/X$ . La conductivité du segment est alors donnée par  $\sigma = kQx/(SX)$ ,  $Q$  étant la charge totale disponible ( $k$  est telle que  $v = kE$ ).

Nous voyons que le changement d'échelle est une opération d'intégration. De l'espace des nœuds nous rejoignons l'espace des branches par intégration du point. Nous atteignons ensuite l'espace des mailles par intégration de branches, etc. L'opérateur d'intégration est le dual d'un opérateur appelé "*de bord*" :  $\partial$ . Le bord d'une branche est ainsi une paire de nœuds, etc.

**Définition** : 2 systèmes sont dans deux référentiels dès lors qu'ils n'interagissent que par des cordes et non par des branches.

Quand deux systèmes sont en vitesses relatives  $v(t)$ , nous définissons le coefficient de dilatation  $\gamma = [1 - v(t)^2/c^2]^{-1/2}$ .

**Contraction des longueurs** : la dimension d'un corps est contractée dans la direction du mouvement d'un facteur  $\gamma$  pour un observateur dans un référentiel *au repos* regardant le corps se mouvoir depuis son référentiel. Ce même observateur verra un intervalle de temps - pour une horloge mobile par rapport à lui - se réduire du même facteur. C'est la **contraction du temps**. Un passager de l'horloge mobile a un temps de durée moindre que celui qui l'observe. Notons que le changement de référentiel ne peut se faire qu'à même échelle.

Ces effets de contraction étant attachés à la vitesse entre deux systèmes non connectés, ils ne peuvent concerner que les aspects dynamiques des systèmes. Or la dynamique du système se voit via son énergie cinétique - autrement dit son inertie. Considérons une matrice de changement d'espace  $\Lambda$ . En reportant la transformation sur l'équation (107) nous obtenons :

$$f_\sigma = \Lambda_\sigma^\xi f_\xi \Rightarrow \delta x^\alpha = -(\mathcal{M}^{\alpha\sigma} + sy^{\alpha\sigma}) \Lambda_\sigma^\xi f_\xi \quad (116)$$

Multiplions à gauche par la transformation inverse  $\Lambda_\mu^\alpha$  :

$$\Lambda_\mu^\alpha \delta x^\mu = -\Lambda_\mu^\alpha (\mathcal{M}^{\mu\sigma} + sy^{\mu\sigma}) \Lambda_\sigma^\xi f_\xi \quad (117)$$

notons :

$$\mathcal{N}^{\alpha\xi} = \Lambda_\mu^\alpha \mathcal{M}^{\mu\sigma} \Lambda_\sigma^\xi$$

Par ailleurs :

$$\frac{d}{dt} \left( \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} \right) = \frac{d\Lambda_{\mu}^{\alpha}}{dt} y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\alpha} \frac{dy^{\mu\sigma}}{dt} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \frac{d\Lambda_{\sigma}^{\xi}}{dt}$$

Pour résoudre ces éléments nous utilisons une astuce :

$d/dt = d/dx \, dx/dt$ . Après quoi :

$$\frac{d\Lambda_{\mu}^{\alpha}}{dt} = \frac{d\Lambda_{\mu}^{\alpha}}{dx^q} \frac{dx^q}{dt} = \Gamma_{\mu q}^{\alpha} v^q \quad (118)$$

La matrice  $\Gamma_{\mu q}^{\alpha}$  est appelée coefficient de Christoffel. En notant :

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha} \frac{dy^{\mu\sigma}}{dt} \Lambda_{\sigma}^{\xi} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \frac{dy^{\mu\sigma}}{dx^q} v^q \Lambda_{\sigma}^{\xi} = \zeta_q^{\alpha\xi} v^q$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} \right) = \Gamma_{\mu q}^{\alpha} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \zeta_{q}^{\alpha\xi} v^q + \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q \quad (119)$$

L'équation (117) peut alors s'écrire :

$$\delta x^{\alpha} = -\mathcal{N}^{\alpha\xi} f_{\xi} - \left( \Gamma_{\mu q}^{\alpha} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \zeta_{q}^{\alpha\xi} v^q + \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q \right) f_{\xi} \quad (120)$$

L'équation fondamentale

$$\delta x^{\alpha} = - \left( \mathcal{N}^{\alpha\xi} + \zeta_{q}^{\alpha\xi} v^q \right) f_{\xi}$$

est complétée de termes issus de la variation temporelle des changements de bases :

$$\left( \Gamma_{\mu q}^{\alpha} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q \right) f_{\xi}$$

Ici  $v^q$  est la vitesse généralisée, c'est à dire  $\dot{x}^{\alpha}$ .

Nous aurions pu ajouter d'autres physiques comme la mécanique des fluides, etc. Toutes les équations découlent de l'équation générique de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^q} - \frac{\partial V}{\partial x^q} + \frac{\partial F}{\partial v^q} = e_q \quad (121)$$

$T$ ,  $V$  et  $F$  étant les énergies cinétique, potentielle et de dissipation,  $e$  un stimuli. Nous avons vu que l'inertie est intimement liée à l'énergie cinétique et à la dynamique du système.

D'une manière générale nous pouvons dire que la nature tente de rendre extrême cette énergie. Soit l'action  $s$ , nous écrivons que :

$$s = 2 \int_A^B dt \mathcal{L}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \quad (122)$$

doit être un extrémum. C'est le principe de *moindre action de Maupertuis*.

L'espace de  $f$  incluant le temps et les intervalles de valeurs possibles pour les  $x^\alpha$ , prend toutes les valeurs nominales possibles en faisant évoluer les valeurs des composantes  $f_\xi$ . Cet espace constitue une variété lisse (car physique) dont nous pouvons tenter de déterminer les extréma. Le jacobien  $\mathcal{W}$  est la première forme fondamentale du problème. Si nous construisons l'ensemble  $u^{\alpha\beta} = x^\alpha \otimes x^\beta$ , nous pouvons déterminer la seconde forme quadratique fondamentale :

$${}^2\mathcal{W} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (123)$$

Le déterminant  $\left| {}^2\mathcal{W} \right|$  est la clé qui indique ce qui se passe en tout point  $A$  de la variété  $f$ . Si cette valeur est positive, le point  $A$  constitue un extrémum local. Si elle est négative,  $A$  est un point selle. Si elle est nulle, nous n'avons pas d'information.

Physiquement, nous pouvons considérer que la nullité de la seconde forme quadratique fondamentale est une anomalie, un problème mal posé.



Les valeurs extra-ordinaires que peuvent prendre les  $f_{\xi}$  doivent être explorées. Si les observables  $x^{\alpha}$  restent dans l'ensemble des valeurs nominales, le système n'est pas perturbé. Dans le cas contraire, le système est dit perturbé. Cela traduit une déformation de la variété  $f$  sous la contrainte  $f_{\xi}$ . La variété  $f$  étant bornée par la surface atteinte avec les valeurs maximales des stimuli  $f_{\xi}$ . Mais le système étant couplé, les valeurs maximales acceptables ne sont pas les valeurs maximales des éléments constitutifs  $z_{\sigma\alpha}$ . Pour exemple une maille contenant un condensateur et un écrêteur a un courant maximum qui est le plus petit des maxima des deux composants et non le plus grand des deux.

Les incertitudes des changements de bases ou des stimuli peuvent être intégrées dans leurs intervalles d'appartenance. L'incertitude sur la connaissance du système ou sa précision de fabrication doit être ajoutée aux tenseur  $\mathcal{M}$  et  $y$ . Mais l'incertitude sur  $y$  ne dépendant pas du temps, cette incertitude n'intervient pas dans la recherche des solutions, et en tenant compte des incertitudes :

$$\delta x^\alpha = - \left( \mathcal{M}^{\alpha\sigma} + \frac{d}{dt} y^{\alpha\sigma} \right) f_\sigma \mp \epsilon \mathcal{M}^{\alpha\sigma} f_\sigma \quad (124)$$

où  $\epsilon \mathcal{M}^{\alpha\sigma}$  est l'amplitude de l'incertitude sur  $\mathcal{M}$ . Les autres expressions s'en déduisent.

Les stimuli, principalement exogènes (les stimuli endogènes sont liés au fonctionnel), peuvent être associés à une valeur statique  $\bar{f}_\xi$  et une valeur dynamique  $f_\xi$ , une probabilité d'amplitude  $Pa$  est une probabilité de phase  $P\phi$  déclinée en solutions :

$$x^\alpha (\bar{f}_\xi, f_\xi, Pa_\xi, P\phi_\xi) = (\chi_\xi, \chi_\xi, Xa_\xi, X\phi_\xi)$$

Les seuils qui engendrent une non convexité sur la variété  $f$  ont aussi une probabilité associée à la défaillance par écart au seuil  $Qa$  et  $Q\phi$ .

$$(\bar{x}^\alpha, x^\alpha, Qa^\alpha, Q\phi^\alpha)$$

Le risque  $\mathcal{R}$  de perturber le système s'exprime alors par :

$$\mathcal{R} = |XaQa.X\phi Q\phi^*| \quad (125)$$

La variation de la vitesse généralisée traduit une courbure  $\mathcal{C}$  dès lors qu'il y a plus d'une composante variante. En effet si :

$$\exists v^{(q)} / \forall \xi \neq \{q, 0\} v^\xi = 0, v^\xi \in S, \frac{\partial v^{(q)}}{\partial u^q} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}(S) = 0 \quad (126)$$

$u^q$  est la composante normalisée dans la direction de l'espace  $\mathbf{u}_q$ .

- Le régime statique engendre par définition un espace plat ;
- Tout problème réduit à une variété qui appartient à l'espace des droites est par définition un espace plat. La courbure éventuelle de cette droite n'est d'ailleurs pas perceptible dans l'espace de la droite.

Lorsque nous nous déplaçons sur une surface, la détection d'une surface courbe se traduit par le fait que le travail dépend du chemin emprunté. Si nous considérons deux stimuli  $f_\xi$  et  $g_\xi$  appliqués simultanément en  $t$  et  $t + dt$ , l'application de  $f$  puis  $g$  ne conduira pas au même point que l'application de  $g$  puis  $f$ . Si nous admettons que :

**Postulat** : *la projection du stimuli de son référentiel propre dans le référentiel du récepteur implique un changement d'espace.*

La non commutativité des applications des stimuli est traduite via les propriétés des coefficients de Christoffel.

Ce qui signifie que le chemin :

$$D_{1 \rightarrow 2} = (\Gamma_{\mu q}^{\alpha} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q) f_{\xi} + (\Gamma_{\mu q}^{\beta} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\beta} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q) g_{\xi} \quad (127)$$

doit être non identique à celui :

$$D_{2 \rightarrow 1} = (\Gamma_{\mu q}^{\beta} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\beta} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q) g_{\xi} + (\Gamma_{\mu q}^{\alpha} v^q y^{\mu\sigma} \Lambda_{\sigma}^{\xi} + \Lambda_{\mu}^{\alpha} y^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma q}^{\xi} v^q) f_{\xi} \quad (128)$$

La courbure peut être définie comme une fonction  $F$  de cette différence :

$$C(S) = F(|D_1 - D_2|) \quad (129)$$

Comme le choix d'un changement d'espace impacte aussi l'expression de la métrique, puisque

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^q} = \frac{\partial}{\partial u^q} y^{\alpha\sigma} f_\sigma$$

et

$$x^\alpha = \Lambda_q^\alpha u^q \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^q} = \Lambda_q^\alpha$$

et donc :

$$\frac{\partial}{\partial \omega^k} \Lambda_q^\alpha \dot{\omega}^k = \Gamma_{qk}^\alpha \dot{\omega}^k = \frac{\partial}{\partial \omega^k} \frac{\partial}{\partial u^q} y^{\alpha\sigma} f_\sigma \dot{\omega}^k \Rightarrow \frac{\partial}{\partial f_\sigma} \Gamma_{qk}^\alpha = \frac{\partial}{\partial \omega^k} \frac{\partial}{\partial u^q} y^{\alpha\sigma} \quad (130)$$

Comme la métrique est influencée par le stimuli, nous pouvons chiffrer la courbure par :

$$C(S) = \frac{\partial^2 D}{\partial f_\xi \partial g_\xi} - \frac{\partial^2 D}{\partial g_\xi \partial f_\xi} = \left[ \frac{\partial}{\partial f_\xi}, \frac{\partial}{\partial g_\xi} \right] D \quad (131)$$

De fait une métrique changeante, comme un composant qui change d'impédance en fonction de courants, courbe l'espace et le comportement du système dépendra de l'ordre d'application des contraintes. Ainsi agresser un système par un coup de foudre direct puis par une onde trans-électromagnétique ne donnera pas le même résultat que si nous appliquons d'abord l'onde puis le coup de foudre.



En fait dans ce cas l'espace est non seulement courbe mais souvent tordu. C'est à dire que les solutions après application de  $f$  puis  $g$  ne sont pas les mêmes que celles obtenues après application de  $g$  puis  $f$ .

La torsion  $\mathcal{T}$  est donnée par la distance entre les solutions :

$$\mathcal{T} = |x^\alpha(f \circ g) - x^\alpha(g \circ f)| \quad (132)$$

La torsion est le critère de justification de l'ordre d'application des contraintes dans le calcul du risque de défaillance du système.

## 97 Autre approche pour établir l'équation non linéaire

Nous profitons du développement :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \epsilon(x) \quad (133)$$

Repartons de

$$\delta X^\alpha = -(\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o - s\mathcal{L}_{\sigma\alpha})^{-1} f_\sigma \quad (134)$$

Soit :

$$\delta X^\alpha = -\frac{1}{\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o (1 - s\mathcal{L}_{\sigma\alpha}/\mathcal{W}_{\sigma\alpha}^o)} f_\sigma \quad (135)$$

Finalement en se limitant au premier ordre :

$$\delta X^\alpha = -\mathcal{M}^{\alpha\sigma} [1 + s\mathcal{L}_{\sigma\alpha}\mathcal{M}^{\alpha\sigma}] f_\sigma \quad (136)$$

où nous retrouvons :

$$\delta X^\alpha = -(\mathcal{M}^{\alpha\sigma} + sy^{\alpha\sigma}) f_\sigma \quad (137)$$