



**HAL**  
open science

## Modélisation de réseaux de régulation de gènes par processus déterministes par morceaux

Aurélie Muller-Gueudin, Arnaud Debussche, Alina Crudu

► **To cite this version:**

Aurélie Muller-Gueudin, Arnaud Debussche, Alina Crudu. Modélisation de réseaux de régulation de gènes par processus déterministes par morceaux. Journée de la Fédération Charles Hermite, Jun 2019, Vandoeuvre-les-Nancy, France. pp.1-37. hal-02360992

**HAL Id: hal-02360992**

**<https://hal.science/hal-02360992v1>**

Submitted on 13 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Modélisation de réseaux de régulation de gènes par processus déterministes par morceaux**

Aurélie MULLER-GUEUDIN (IECL),  
Arnaud DEBUSSCHE (ENS Rennes),  
Alina CRUDU (Université de Rennes)

21 juin 2019, Journée Fédération Charles Hermite

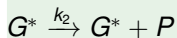
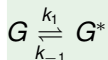
# Plan

- 1 Introduction
- 2 PDMP avec chgt de régime
- 3 PDMP avec saut
- 4 Moyennisation
- 5 Switching singulier

# Plan

- 1 **Introduction**
- 2 PDMP avec chgt de régime
- 3 PDMP avec saut
- 4 Moyennisation
- 5 Switching singulier

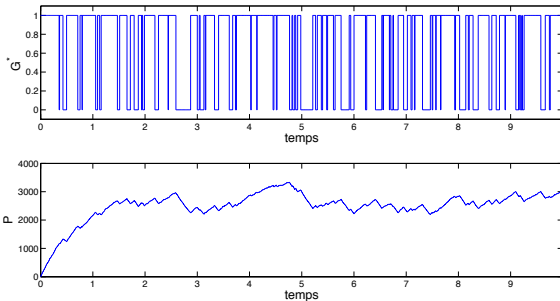
# Exemple 1: Activité intermittente d'un gène



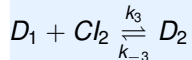
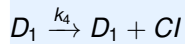
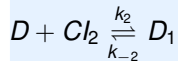
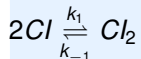
avec

$G, G^* \in \{0, 1\}$  et

$G + G^* = 1$



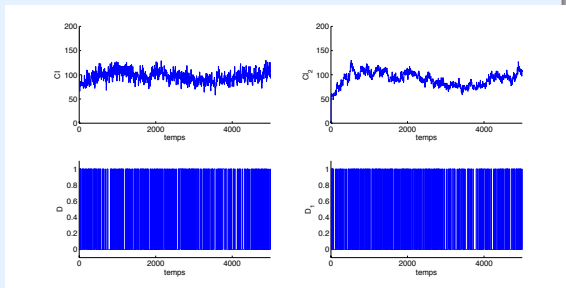
## Exemple 2: Auto-régulation du gène $Cl$



avec

$$D, D_1, D_2^* \in \{0, 1\}$$

$$\text{et } D + D_1 + D_2 = 1$$



# Modélisation: processus de Markov à sauts

$p$  = nombre d'espèces chimiques

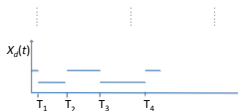
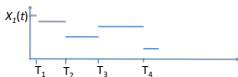
$\mathcal{R}$  = ensemble des réactions chimiques

$X(t) \in \mathbb{N}^p$  = état du système chimique,  $X(t) = (X_i(t))_{1 \leq i \leq p}$

- $X(t)$  processus de Markov à sauts
- saut  $\iff$  réaction chimique  $r \in \mathcal{R}$

$\lambda_r(X(t))$  = intensité de la réaction  $r \in \mathcal{R}$

$\gamma_r \in \mathbb{Z}^p$  = saut appliqué à  $X$  après la réaction  $r : X \longrightarrow X + \gamma_r$ .



# Processus de Markov à sauts

- $(T_i)_i$  suite de temps de sauts :  $T_0 = 0$ ,  $T_i = \tau_1 + \dots + \tau_i$
- $X$  est constant sur  $[T_{i-1}, T_i[$  et saute au temps  $T_i$

$$\mathbb{P}(\tau_i > t | X_{T_{i-1}} = x) = \exp\left(-\sum_{r \in \mathcal{R}} \lambda_r(x)t\right)$$

$$\mathbb{P}(X_{T_i} = x + \gamma_r | X_{T_{i-1}} = x) = \frac{\lambda_r(x)}{\sum_{r \in \mathcal{R}} \lambda_r(x)}$$

- Générateur:

$$Af(X) = \sum_{r \in \mathcal{R}} [f(X + \gamma_r) - f(X)] \lambda_r(x)$$



# Espèces rares/ Espèces fréquentes

- Partition des espèces :  $X = (X_C, X_D) \in \mathbb{N}^C \times \mathbb{N}^D$

$X_D$  espèces rares :  $X_D$  de l'ordre de 1

$X_C$  espèces fréquentes :  $x_C = \frac{X_C}{N}$  de l'ordre de 1

# Espèces rares/ Espèces fréquentes

- Partition des espèces :  $X = (X_C, X_D) \in \mathbb{N}^C \times \mathbb{N}^D$

$X_D$  espèces rares :  $X_D$  de l'ordre de 1

$X_C$  espèces fréquentes :  $x_C = \frac{X_C}{N}$  de l'ordre de 1

- Partition des réactions:  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C \cup \mathcal{R}_{DC}$

$\mathcal{R}_C$  réactions rapides:

$\lambda_r = N\tilde{\lambda}_r$  de l'ordre de  $N$  si  $r \in \mathcal{R}_C$

$\mathcal{R}_{DC}$  réactions lentes:

$\lambda_r$  de l'ordre de 1 si  $r \in \mathcal{R}_{DC}$

# Espèces rares/ Espèces fréquentes

- Partition des espèces :  $X = (X_C, X_D) \in \mathbb{N}^C \times \mathbb{N}^D$

$X_D$  espèces rares :  $X_D$  de l'ordre de 1

$X_C$  espèces fréquentes :  $x_C = \frac{X_C}{N}$  de l'ordre de 1

- Partition des réactions:  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C \cup \mathcal{R}_{DC}$

$\mathcal{R}_C$  réactions rapides:

$\lambda_r = N\tilde{\lambda}_r$  de l'ordre de  $N$  si  $r \in \mathcal{R}_C$

$\mathcal{R}_{DC}$  réactions lentes:

$\lambda_r$  de l'ordre de 1 si  $r \in \mathcal{R}_{DC}$

- Sauts de  $X$ :  $\gamma_r = (\gamma_r^C, \gamma_r^D) \in \mathbb{Z}^C \times \mathbb{Z}^D$

# Espèces rares/fréquentes

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x_C, x_D) &= \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C) \\ &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC}} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D) \end{aligned}$$

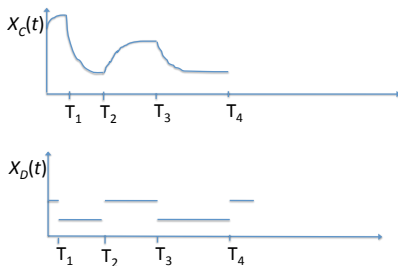
$$\begin{aligned} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \nabla_{x_C} f(x_C, x_D) \cdot \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \tilde{\lambda}_r(x_C) \\ &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC}} [f(x_C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D)] \lambda_r(x_C, x_D). \end{aligned}$$

## Théorème, Kurtz (1971, 1978)

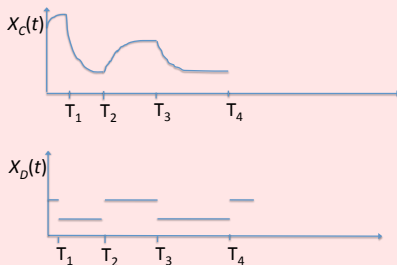
Si  $N \rightarrow \infty$ , sous certaines hypothèse, le processus converge en probabilité vers un processus  $(X_C, X_D)$  tel que:

- $X_C$  obéit à une EDO indépendante de  $X_D$ ,
- $X_D$  a une dynamique de sauts.

Le processus limite est un **processus markovien déterministe par morceaux**.



## La critique du biologiste



- 1 La variable continue  $x_C$  peut avoir un régime qui dépend de  $X_D$
- 2 La variable continue  $x_C$  peut avoir des sauts
- 3 La variable discrète  $X_D$  peut avoir des réactions rapides

# Processus markovien déterministe par morceaux (PDMP), Davis (1993)

Processus

$$x_t = (y_t, \theta_t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

à valeurs dans

$$E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}^d$$

déterminé par ses **3 caractéristiques locales**:

- 1 **Flot**  $\phi_\theta(t, y)$ : mouvement déterministe de  $y_t$  entre les sauts
- 2 **Intensité**  $\lambda$  des sauts aléatoires  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}^+$
- 3 **Mesure de transition**  $Q$

$$Q : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ x \mapsto Q(\cdot; x) \end{array}$$

Le générateur du processus est donné par

$$\mathcal{A}f(x) = F_\theta(x) \cdot \nabla_y f(x) + \lambda(x) \int_E (f(z) - f(x)) Q(dz; x),$$

$\forall x = (y, \theta) \in E$  où  $F_\theta$  est le champ de vecteurs associé au flot  $\phi_\theta$ .

# PDMP : construction

$x_t = (y_t, \theta_t)$ ,  $t > 0$  démarrant en  $x = (y, \theta)$  est un processus càdlàg:

- 1  $x_t := (\phi_\theta(t, y), \theta)$  pour  $0 \leq t < T_1$  où  $T_1$  est le 1<sup>er</sup> temps de saut

$$\mathbb{P}_x(T_1 > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\phi_\theta(s, y), \theta) ds\right), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

- 2  $x_{T_1^-} = (\phi_\theta(T_1, y), \theta)$  et  $x_{T_1}$  est de loi

$$\mathbb{P}_x(x_{T_1} \in A | T_1 = t) = Q(A; (\phi_\theta(t, y), \theta))$$

pour tout borélien  $A$  de  $E$ .

- 3 On réitère, en prenant comme point de départ  $x_{T_1}$ .



# Plan

- 1 Introduction
- 2 PDMP avec chgt de régime**
- 3 PDMP avec saut
- 4 Moyennisation
- 5 Switching singulier

# Approximation avec changement de régime

## L'indication du biologiste

Certaines réactions de  $\mathcal{R}_{DC}$  sont assez fréquentes pour induire des changements de régime sur  $x_C$ .

- Réactions  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{R}_{DC}$  :
  - rapides
  - ne modifiant pas  $X_D$  :

$$\gamma_r^D = 0 \text{ si } r \in \mathcal{S}_1$$

- *Ici, les variables rares  $X_D$  sont lentes. Si pour  $r \in \mathcal{S}_1$ ,  $\gamma_r^D \neq 0$  : des variables discrètes changent rapidement... Autre problème...*

# Approximation avec changement de régime

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_N f(x_C, x_D) &= \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C, x_D) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D)
 \end{aligned}$$

# Approximation avec changement de régime

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_N f(x_C, x_D) &= \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C) \\
 &\quad + \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C, x_D) \\
 &\quad + \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D) \\
 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} &\quad \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \tilde{\lambda}_r(x_C) \gamma_r^C + \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \tilde{\lambda}_r(x_C, x_D) \gamma_r^C \right) \cdot \nabla_{x_C} f(x_C, x_D) \\
 &\quad + \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D)
 \end{aligned}$$

# Résultat de convergence : Théorème 1

Sous certaines hypothèses, le processus de Markov  $(x_C^N, X_D^N)$  converge en loi vers le PDMP de générateur

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty f(x_C, X_D) &= \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \tilde{\lambda}_r(x_C) \gamma_r^C + \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \tilde{\lambda}_r(x_C, X_D) \gamma_r^C \right) \cdot \nabla_{x_C} f(x_C, X_D) \\ &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1} [f(x_C, X_D + \gamma_r^D) - f(x_C, X_D)] \lambda_r(x_C, X_D) \end{aligned}$$

- $x_C$  obéit à une EDO dépendante de  $X_D$ ,
- $X_D$  a une dynamique de sauts.

► Idée de la preuve

# Plan

- 1 Introduction
- 2 PDMP avec chgt de régime
- 3 PDMP avec saut**
- 4 Moyennisation
- 5 Switching singulier

# Approximation avec sauts de $x_C$

## L'indication du biologiste

Certaines réactions de  $\mathcal{R}_{DC}$  induisent de grands sauts sur  $x_C$ .

- Réactions  $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{R}_{DC}$  :
  - modifiant fortement  $x_C$  :

$$x_C \mapsto x_C + \tilde{\gamma}_r^C \text{ si } r \in \mathcal{S}_2$$

avec  $\tilde{\gamma}_r^C$  de l'ordre de 1, pour tout  $N$ .

# Approximation avec sauts de $x_C$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{A}}_N f(x_C, x_D) &= \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C + \tilde{\gamma}_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D)
 \end{aligned}$$



# Approximation avec sauts de $x_C$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_N f(x_C, x_D) &= \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D) - f(x_C, x_D) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C + \tilde{\gamma}_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \tilde{\lambda}_r(x_C) \gamma_r^C \right) \cdot \nabla_{x_C} f(x_C, x_D) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C + \tilde{\gamma}_r^C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D) \\
 &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C, x_D + \gamma_r^D) - f(x_C, x_D) \right] \lambda_r(x_C, x_D)
 \end{aligned}$$

## Résultat de convergence : théorème 2

Sous certaines hypothèses, le processus  $(x_C^N, X_D^N)$  converge en loi vers le PDMP de générateur

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\infty f(x_C, X_D) &= \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \tilde{\lambda}_r(x_C) \gamma_r^C \right) \cdot \nabla_{x_C} f(x_C, X_D) \\ &+ \sum_{r \in \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C + \tilde{\gamma}_r^C, X_D + \gamma_r^D) - f(x_C, X_D) \right] \lambda_r(x_C, X_D) \\ &+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_2} \left[ f(x_C, X_D + \gamma_r^D) - f(x_C, X_D) \right] \lambda_r(x_C, X_D) \end{aligned}$$

- $x_C$  peut sauter, et entre 2 sauts, il obéit à une EDO
- $X_D$  a une dynamique de sauts.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 PDMP avec chgt de régime
- 3 PDMP avec saut
- 4 Moyennisation**
- 5 Switching singulier

# Variables discrètes lentes et rapides

## L'indication du biologiste

Certaines variables discrètes sont rapides.

- $X_D = (\text{lent, rapide}) = (X_D^1, X_D^2) \in \mathbb{N}^{M_{D,1}} \times \mathbb{N}^{M_{D,2}}$
- $\gamma_r^D = (\gamma_r^{D,1}, \gamma_r^{D,2}), r \in \mathcal{R}$
- Réactions  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{R}_{DC}$ :
  - rapides
  - uniquement sur  $x_C$  et la variable rapide  $X_D^2$

# Variables discrètes lentes et rapides

Générateur de la forme  $\tilde{A}_N = \mathcal{A}_N + N\mathcal{B}_N$

$$\tilde{A}_N f(x_C, X_D^1, X_D^2)$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, X_D^1, X_D^2) - f(x_C, X_D^1, X_D^2) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C)$$

$$+ \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, X_D^1, X_D^2 + \gamma_r^{D,2}) - f(x_C, X_D^1, X_D^2) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C, X_D^1, X_D^2)$$

$$+ \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, X_D^1 + \gamma_r^{D,1}, X_D^2 + \gamma_r^{D,2}) - f(x_C, X_D^1, X_D^2) \right] \lambda_r(x_C, X_D^1, X_D^2)$$

# Moyennisation par rapport à la variable rapide

## Méthode de moyennisation

**Etape 1** Moyenner en la variable discrète rapide  $X_D^2$

**Etape 2** Etudier le comportement limite des variables lentes :  $(x_C, X_D^1)$

## Hypothèse pour l'étape 1

- Ergodicité de la variable rapide  $X_D^2$ , de loi stationnaire  $\nu_{x_C, X_D^1}$

- Dynamique moyenne des variables lentes:

$$\bar{\lambda}_r(x_C, X_D^1) = \int \lambda_r(x_C, X_D^1, X_D^2) \nu_{x_C, X_D^1}(dX_D^2), \quad r \in \mathcal{R}_{DC}$$

# Moyennisation

## Etape 2 : Comportement limite des variables lentes ( $x_C, X_D^1$ )

- Méthode des fonctions tests perturbées (Fouque, 2007):

$$f_N(x_C, X_D^1, X_D^2) = f(x_C, X_D^1) + \frac{1}{N} f^1(x_C, X_D^1, X_D^2)$$

- Rappel :  $\tilde{A}_N = \mathcal{A}_N + N\mathcal{B}_N$

- On choisit  $f^1$  tel que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_N(f + \frac{1}{N}f^1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \gamma_r^C \tilde{\lambda}_r(x_C) + \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \gamma_r^C \bar{\lambda}_r(x_C, X_D^1) \right) \cdot \nabla_{x_C} f(x_C, X_D^1) \\ & + \sum_{r \in (\mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1)} \left[ f(x_C, X_D^1 + \gamma_r^{D,1}) - f(x_C, X_D^1) \right] \bar{\lambda}_r(x_C, X_D^1). \end{aligned}$$

## Résultat de convergence : Théorème 3

Sous certaines hypothèses,  $(x_C^N, X_D^{1,N})$  converge en loi vers le PDMP de générateur

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_\infty f(x_C, X_D^1) \\ &= \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_C} \gamma_r^C \tilde{\lambda}_r(x_C) + \sum_{r \in \mathcal{S}_1} \gamma_r^C \bar{\lambda}_r(x_C, X_D^1) \right) \cdot \nabla_{x_C} f(x_C, X_D^1) \\ &+ \sum_{r \in (\mathcal{R}_{DC} \setminus \mathcal{S}_1)} \left[ f(x_C, X_D^1 + \gamma_r^{D,1}) - f(x_C, X_D^1) \right] \bar{\lambda}_r(x_C, X_D^1). \end{aligned}$$

- $x_C$  obéit à une EDO
- $X_D^1$  a une dynamique de sauts.



# Plan

- 1 Introduction
- 2 PDMP avec chgt de régime
- 3 PDMP avec saut
- 4 Moyennisation
- 5 Switching singulier**

# Système à double échelle de temps

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_{N,\epsilon} f(x_C, 0) &= \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC}} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, 0) - f(x_C, 0) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C, 0) \\ &\quad + [f(x_C, 1) - f(x_C, 0)] \lambda_\theta(x_C, 0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_{N,\epsilon} f(x_C, 1) &= \frac{1}{\epsilon} \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC}} \left[ f(x_C + \frac{1}{N} \gamma_r^C, 1) - f(x_C, 1) \right] N \tilde{\lambda}_r(x_C, 1) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} [f(x_C, 0) - f(x_C, 1)] \tilde{\lambda}_\theta(x_C, 1). \end{aligned}$$

- Passage 0  $\rightarrow$  1 lent ; passage 1  $\rightarrow$  0 rapide
- En régime 0:  $x_C$  rapide
- En régime 1:  $x_C$  très rapide

# Résultat de convergence : Théorème 4

Sous certaines hypothèses,  $(x_C^{N,\varepsilon})$  converge en loi dans  $L^p([0, T]; \mathbb{R}^{|C|})$  pour  $p \geq 1$ , vers le PDMP de générateur

$$\tilde{A}_\infty \varphi(x_C) = \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_{DC}} \gamma_r^C \tilde{\lambda}_r(x_C, 0) \right) \cdot \nabla_{x_C} \varphi(x_C) + \lambda_\theta(x_C, 0) \int_0^\infty (\varphi(\phi_1(t, x_C)) - \varphi(x_C)) \tilde{\lambda}_\theta(\phi_1(t, x_C), 1) e^{-\int_0^t \tilde{\lambda}_\theta(\phi_1(s, x_C), 1) ds} dt$$

où  $\phi_1$  est le flot associé au champ de vecteurs  $\sum_{r \in \mathcal{R}_{DC}} \gamma_r^C \tilde{\lambda}_r(x_C, 1)$ .

► Idée de la preuve

# Idée de la preuve

**Step 1** Tension de  $(x_C^N, X_D^N)$ .

**Step 2** Identification des points d'adhérence de  $(x_C^N, X_D^N)$  : ils sont solution d'un problème de martingale.

**Step 3** Convergence de toute la suite via un théorème d'unicité de la solution du problème de martingale.

◀ Bouton de retour

# Idée de la preuve

- Step 1** Tension de  $(x_C^{N,\varepsilon})$  dans  $L^p([0, T])$  pour  $p \geq 1$ .
- Step 2** Identification des points d'adhérence de  $(x_C^{N,\varepsilon})$  : ils sont solution d'un problème de martingale.
- Step 3** Convergence de toute la suite via un théorème d'unicité de la solution du problème de martingale.

◀ Bouton de retour

# Références



[Davis, M. \(1993\).](#)

*Markov Models and Optimization.*



[Fouque, J., Garnier, J., Papanicolaou, G., and Solna, K. \(2007\).](#)

*Wave propagation and time reversal in randomly layered media.*



[Kurtz, T. \(1978\).](#)

Strong approximation theorems for density dependent markov chains.

*Stoch. Proc. Appl.*, 6:223–240.