

SPHÈRES FLUIDES AVEC INJECTION

par Roger Prud'homme¹ et Amah D'Almeida²

¹ Institut Jean le Rond d'Alembert – UPMC/CNRS – Paris – France
E-mail : prudhom@ccr.jussieu.fr

² Département de Mathématiques – Université de Lomé – Togo
E-mail : salmeida@tg.refer.org

SPHÈRES FLUIDES AVEC INJECTION
par Roger Prud'homme et Amah D'Almeida

PLAN DE L'EXPOSÉ

- 1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux**
- 2. Expansion isobare d'une poche de fluide de température initiale sous critique sous pression légèrement supercritique dans une atmosphère de température initiale uniforme nettement supercritique.**
- 3. Injection d'un fluide supercritique dans une sphère poreuse.**

Contexte de ces études : moteurs cryogéniques, fusée Ariane.

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

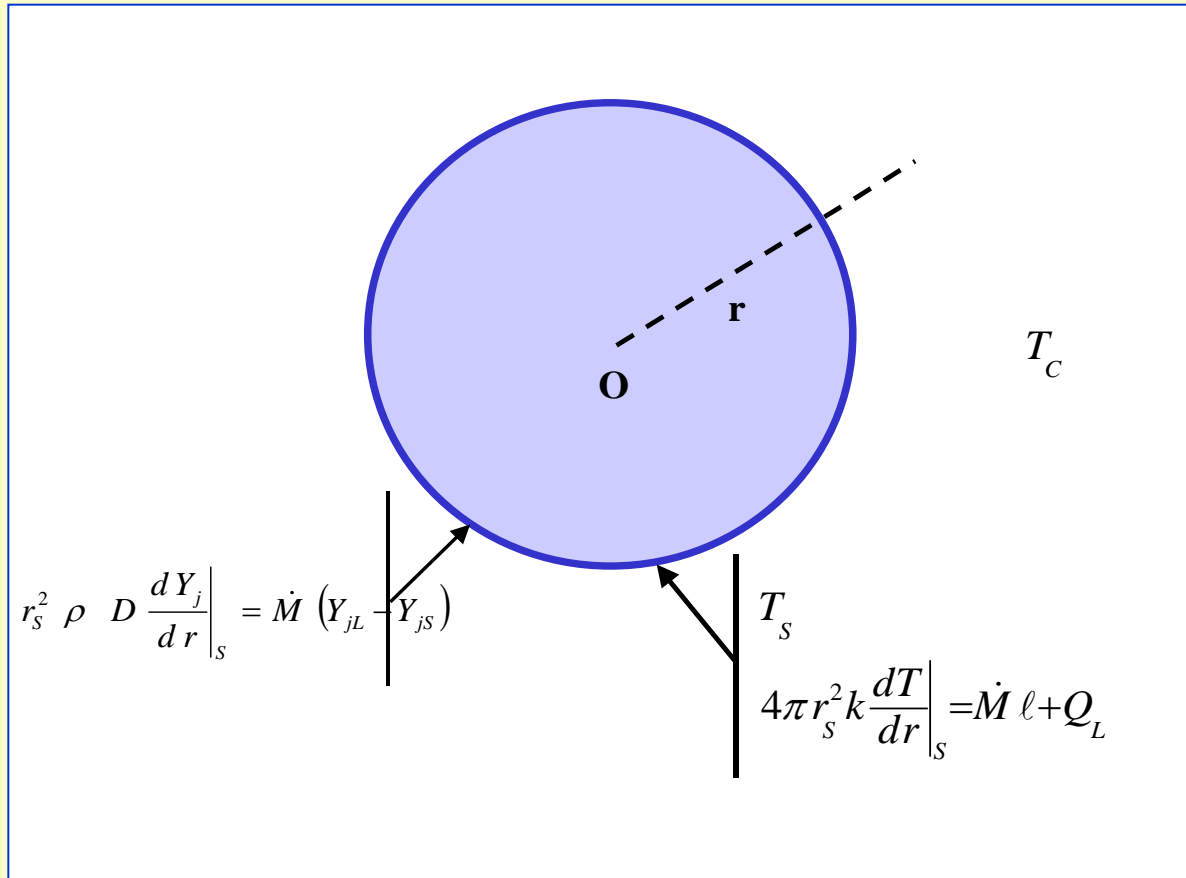
La configuration étudiée est celle de Heidmann. On étudie l'influence du débit d'injection sur l'écoulement et la stabilité sous perturbations HF ¹. L'étude est menée en rapport avec l'ONERA dans le cadre d'un contrat CNES. Un article est soumis à JPP ².

Après un rappel des principales étapes de l'étude, certains problèmes en cours sont présentés.

¹ R. Prud'homme: "Heterogeneous and reactive fluids: flows and transfers" – Series "FMIA". Springer – To be published, 2008.

² R. Prud'homme, M. Habiballah, L. Matuszewski, Y. Mauriot, A. Nicole: "Theoretical analysis of Transient heating and dynamic response to acoustic oscillation of a vaporizing droplet", to be submitted, JPP (2008).

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



En régime stabilisé, la température de la goutte est uniforme et l'on a :

$$Q_L = 0$$

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

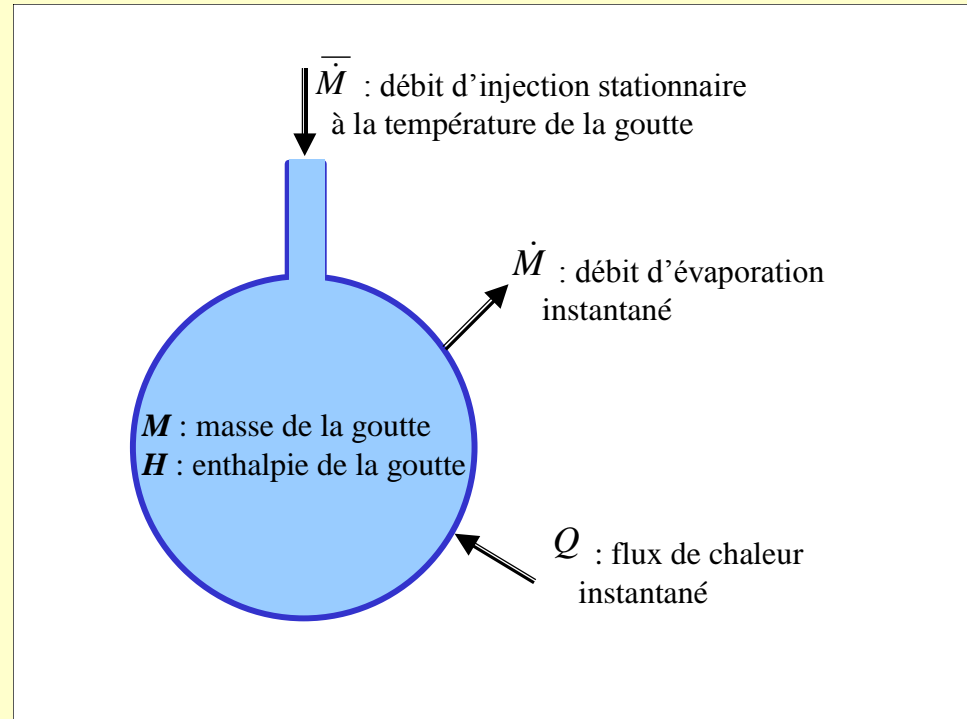
Objectifs:

-étudier la réponse de la goutte à une petite perturbation acoustique de pression (stabilité linéaire)

-choix de la goutte moyenne de Heidmann

Dans le régime stabilisé de référence, la température de la goutte est uniforme

et l'on a : $\bar{Q}_L = 0$, $\dot{M} = \bar{\dot{M}}$



La goutte moyenne de Heidmann : une goutte de rayon r_s en évaporation alimentée continuellement par une injection stationnaire de débit $\bar{\dot{M}}$. Le transfert de chaleur Q vers la goutte cause le débit d'évaporation instantané. La chaleur et la masse totale transférées déterminent la masse M et l'enthalpie H instantanées de la goutte.

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

L'évolution est supposée quasi stationnaire en phase gazeuse.

$$\frac{dM}{dt} = -\dot{M} + \bar{M} \quad M = \frac{4}{3} \pi r_S^3 \rho_L \quad \dot{M} = 4\pi \frac{k}{c_p} r_S \ln(1+B_T) = 4\pi \rho D r_s \ln(1+B_M)$$

$$B_M = \frac{Y_{FS} - Y_{FC}}{1 - Y_{FS}} \quad B_T = \frac{c_p (T_C - T_S)}{\ell + Q_L / \dot{M}} \quad \Rightarrow \quad Q_L = \dot{M} \ell \left[\frac{c_p (T_C - T_S)}{B_T \ell} - 1 \right]$$

$$Y_F = \frac{M_F X_F}{M_F X_F + M_A X_A} \quad p_C X_{FS} = p_L(T_S) = e^{\left(a - \frac{b}{T_S - c} \right)}$$

$$\ell = \frac{R T_S^2 / p}{M_A X_{AS} + M_F X_{FS}} \frac{dp_L}{dT_S} = \frac{(M_A - M_F) Y_{FS} + M_F}{M_A M_F} \frac{b R T_S^2}{(T_S + c)^2}$$

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

Petites perturbations acoustiques

f : paramètre de l'écoulement, Δf sa perturbation absolue, $f = \bar{f} + \Delta f$, \bar{f} : valeur moyenne de f , $f' = \Delta f / \bar{f}$: perturbation relative, $f' = \hat{f} e^{i\omega t}$

La perturbation de vitesse est supposée nulle et on cherche la relation entre la perturbation de pression de chambre imposée p' et la perturbation de débit résultante \dot{M}' .

Stabilité si le facteur de réponse N est < 0

$$N = \frac{\iint_{V,t} q'(V,t) p'(V,t) dt dV}{\iint_{V,t} (p'(V,t))^2 dt dV} \quad p'_c = \hat{p}_c (\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

$$\dot{M}' = \hat{M} (\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad Z = Z_r + i Z_i$$

$$N = \text{Re}(\hat{M} / \hat{p}) = \alpha \frac{Z_r \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt - Z_i \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t dt}{\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt} = \alpha Z_r$$

$$\theta = \arg(\hat{M} / \hat{p})$$

Équations aux petites perturbations

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux.

Phase gazeuse (rappel)

$$\frac{d\dot{M}'}{dt} + \frac{\dot{M}'}{3\bar{\tau}_v} = \alpha \left(\bar{b} \frac{dT'_s}{dt} - \frac{dp'_c}{dt} \right)$$

$$\alpha = \frac{B_M}{(1+B_M)\ln(1+B_M)} \frac{Y_{AC}Y_{FS}}{Y_{AS}(Y_{FS}-Y_{FC})} \frac{M_A}{M_F X_{FS} + M_A X_{AS}},$$

$$\bar{\tau}_v = \frac{\bar{M}}{\dot{M}} = \frac{\rho_L c_p \bar{r}_s^2}{3 k \ln(1+B_T)}, \quad \bar{b} = \frac{T_s}{(T_s - c)^2} b, \quad u = 3\omega\bar{\tau}_v$$

$$f' = \hat{f} e^{i\omega t} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{M}' = \alpha \frac{i\omega}{1+i\omega\bar{\tau}_v} \left(\bar{b} \hat{T}_s - \hat{p}_c \right)$$

$$\Delta Q_L = \bar{M} \bar{\ell} (\bar{a} p_c' - \mu T_s')$$

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux. Équations aux petites perturbations

$$\lambda = \frac{c_L \bar{T}_s}{\bar{\ell}}, \mu = \frac{\bar{T}_s}{\bar{T}_C - \bar{T}_s} - \frac{2c}{\bar{T}_s - c} + \bar{b} \varphi, \bar{b} = \frac{\bar{T}_s}{(\bar{T}_s - c)^2} b, \bar{a} = \frac{\bar{T}_C}{\bar{T}_C - \bar{T}_s} \frac{\gamma - 1}{\gamma} + \varphi$$

$$\varphi = \frac{\bar{B}_M (1 + \bar{B}_M)^{\frac{1}{Le} - 1}}{Le (1 + \bar{B}_M)^{\frac{1}{Le} - 1}} \frac{\bar{Y}_{AC} \bar{Y}_{FS}}{\bar{Y}_{AS} (\bar{Y}_{FS} - \bar{Y}_{FC})} \frac{M_A}{M_F \bar{X}_{FS} + M_A \bar{X}_{AS}}$$

$$f' = \hat{f} e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Delta \hat{Q}_L = \bar{M} \bar{\ell} (\bar{a} \hat{p}_C - \mu \hat{T}_S)$$

Phase liquide : Dépend du modèle thermique
choisi pour la goutte

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation
dans un mélange gazeux. Équations aux
petites perturbations

Le modèle à température uniforme

$$M c_L \frac{dT_S}{dt} = Q_L, \quad \Delta Q_L = \bar{M} c_L \bar{T}_S \frac{dT'_S}{dt} \quad f' = \hat{f} e^{i\omega t} \Rightarrow \Delta \hat{Q}_L = \bar{M} c_L \bar{T}_S i\omega \hat{T}_S$$

On combine avec les équations
de la phase gazeuse trouvées
précédemment (rappel) :

$$\hat{M} = \alpha \frac{i u}{1 + i u} (\bar{b} \hat{T}_S - \hat{p}_C), \quad \Delta \hat{Q}_L = \bar{M} \bar{\ell} (\bar{a} \hat{p}_C - \mu \hat{T}_S)$$

On obtient la fonction de transfert Z_0 suivante :

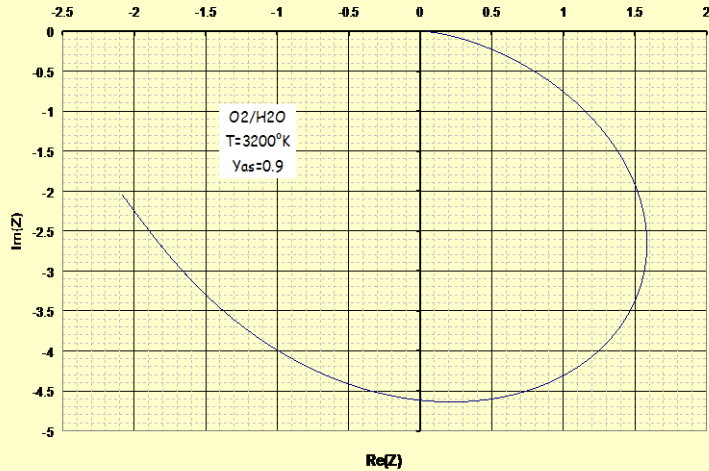
$$Z_0 = \frac{\hat{M}}{\alpha \hat{p}_C} = \frac{i u}{1 + i u} \frac{A - i u}{B + i u}$$

avec :

$$A = 3(\bar{a}\bar{b} - \mu)/\lambda, \quad B = 3\mu/\lambda, \quad u = 3\omega\bar{\tau}_v$$

$$\lambda = \frac{c_L \bar{T}_S}{\bar{\ell}}$$

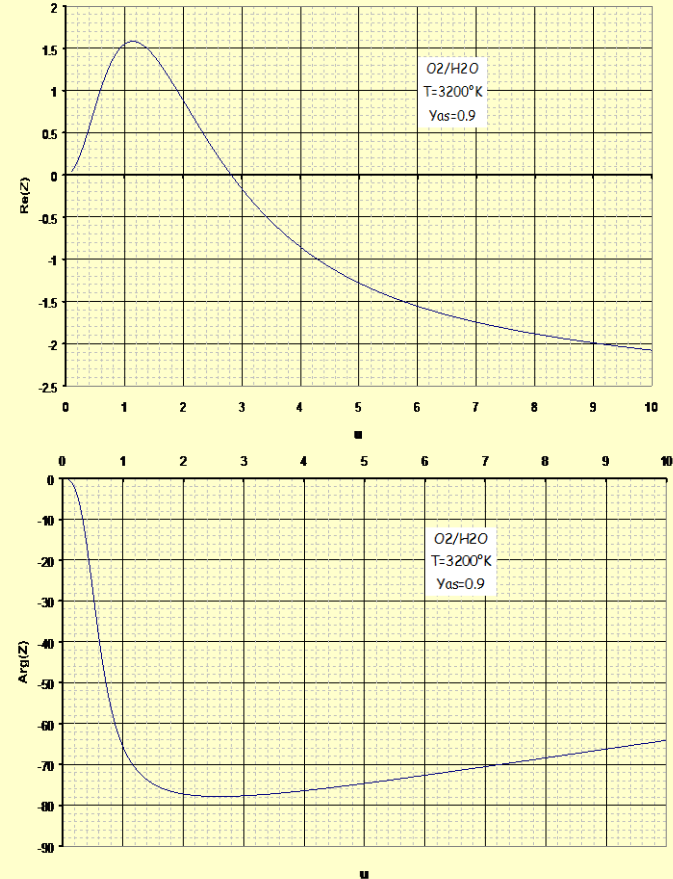
Fonction de transfert Z , facteur de réponse N et déphasage θ dans le cas de gouttes d'oxygène dans la vapeur d'eau résultant de la combustion avec l'hydrogène.



Fréquence de coupure réduite : $u_c = 3\omega_c \bar{\tau}_v$

Il y a instabilité pour $0 < u < u_c$

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



Le modèle à champ de température continu

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

$$\rho_L c_L \frac{\partial T_l}{\partial t} - \frac{k_L}{r} \frac{\partial^2 (r T_l)}{\partial r^2} = 0, \quad 4\pi r_S^2 k_L \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r_S} = Q_L, \quad T_l(r_S, t) = T_S, \quad \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \kappa_L = \frac{k_L}{\rho_L c_L}$$

(en négligeant la vitesse
d'injection v_r)

$$\hat{T}_l = \bar{T}_S \frac{\bar{r}_S}{r} \frac{e^{s_0 r} - e^{-s_0 r}}{e^{s_0 \bar{r}_S} - e^{-s_0 \bar{r}_S}}$$

$$\hat{T}_l(\bar{r}_S, t) = \hat{T}_S$$

$$s = \pm s_0, \quad s_0 = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2 \kappa_L}}$$

$$\Delta \hat{Q}_L = -4 \pi \bar{r}_S k_L \bar{T}_S E \hat{T}_S$$

$$E = 1 - s_0 r_S \operatorname{cth} \left((1+i) \sqrt{\frac{3 u}{2 \theta}} \right),$$

En combinant les trois équations :

$$\hat{M} = \alpha \frac{i u}{1 + i u} (\bar{b} \hat{T}_s - \hat{p}_c),$$

$$\Delta \hat{Q}_L = \bar{M} \bar{\ell} (\bar{a} \hat{p}_c - \mu \hat{T}_s),$$

$$\Delta \hat{Q}_L = -4 \pi \bar{r}_s k_L \bar{T}_s E \hat{T}_s$$

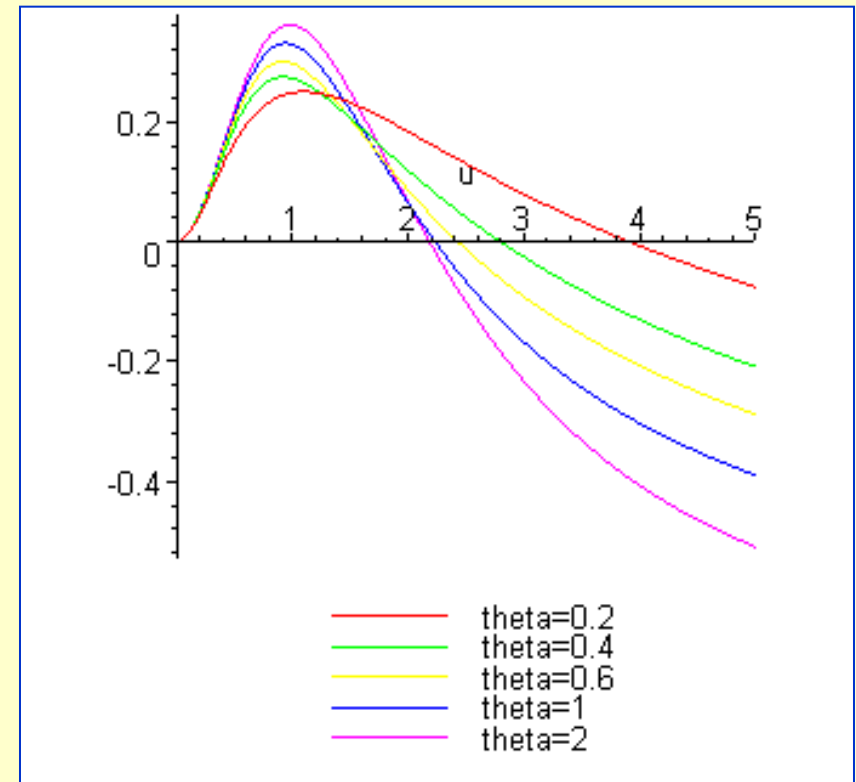
on trouve la fonction de transfert Z :

$$Z = \frac{1}{\alpha} \frac{\hat{M}}{\hat{p}_c} = \frac{i u}{1 + i u} \frac{A + \theta E(u)}{B - \theta E(u)}$$

$$\theta = \frac{9 k_L \bar{\tau}_v}{\rho_L c_L \bar{r}_s^2} = \frac{\bar{\tau}_v}{\bar{\tau}_T} \quad \text{Rappel :}$$

$$A = 3(\bar{a}\bar{b} - \mu)/\lambda, \quad B = 3\mu/\lambda, \quad u = 3\omega\bar{\tau}_v$$

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



Influence du coefficient d'échange thermique réduit θ sur le facteur de réponse réduit $N/\alpha = \text{Re}(Z)$ du modèle continu, $A=1, B=2$

Approximations :

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

- mise au point des modèles simplifiés d'échange thermique dans la goutte :

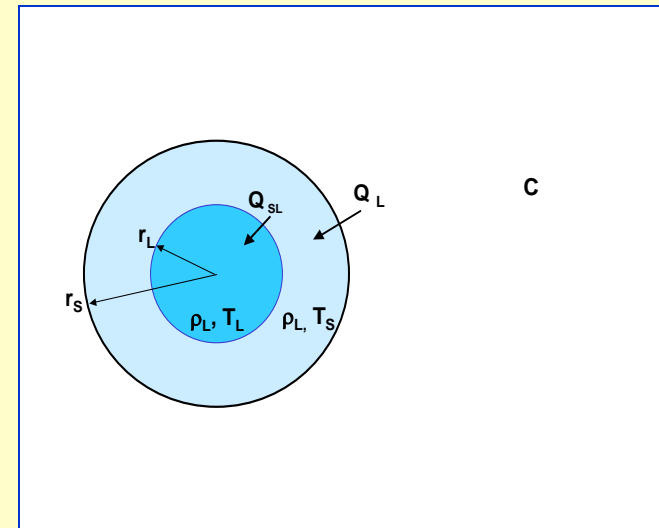
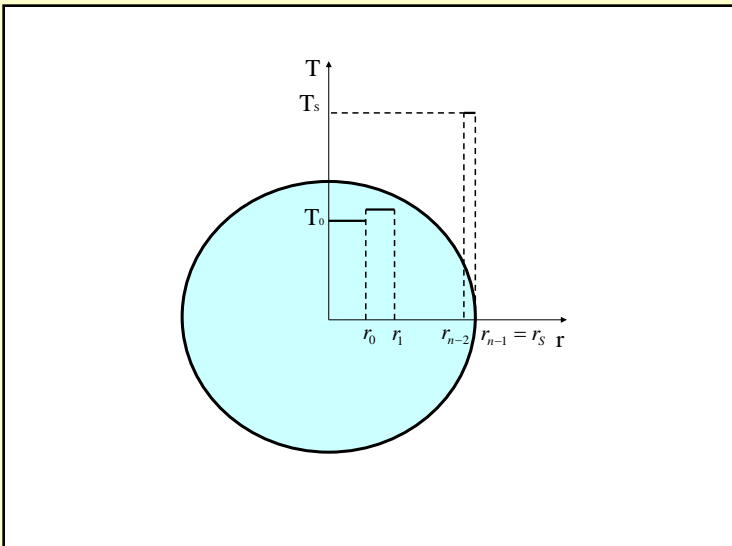
**modèle
multi-couche**

$$r_{j,n} = \left(\frac{j+1}{n} \right)^{\frac{1}{3}} r_s, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

**modèle discret
bi-couche**

$$\varepsilon = (r_L/r_s)^3$$

$$Q_{SL} = 4\pi k_L \frac{r_s r_L}{r_s - r_L} (T_s - T_L)$$



Modèle discret bi-couche

$$Z_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hat{M}}{\hat{p}_C} = \frac{i u (\Lambda + i u)(A - i u) - \varepsilon u^2}{1 + i u (\Lambda + i u)(B + i u) + \varepsilon u^2}$$

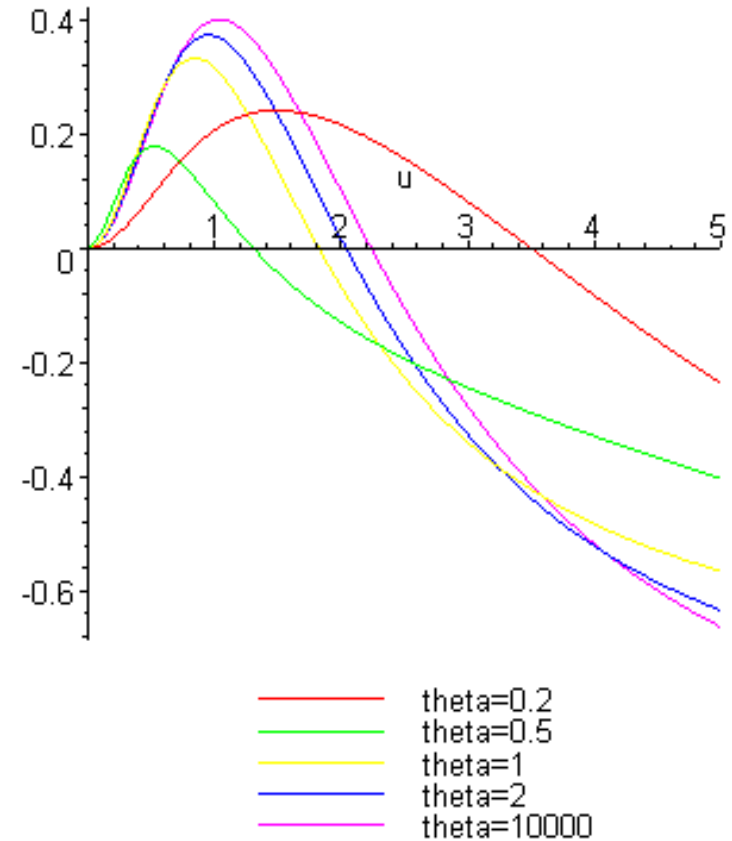
$$u = 3\omega\bar{\tau}_v, \quad \varepsilon = (r_L/r_S)^3, \quad \Lambda = 3\beta_L\bar{\tau}_v$$

$$\Lambda \varepsilon^{2/3} (1 - \varepsilon^{1/3}) = \theta = \bar{\tau}_v / \tilde{\tau}_T$$

ε le détermine par comparaison avec le modèle continu (méthodes d'optimisation)

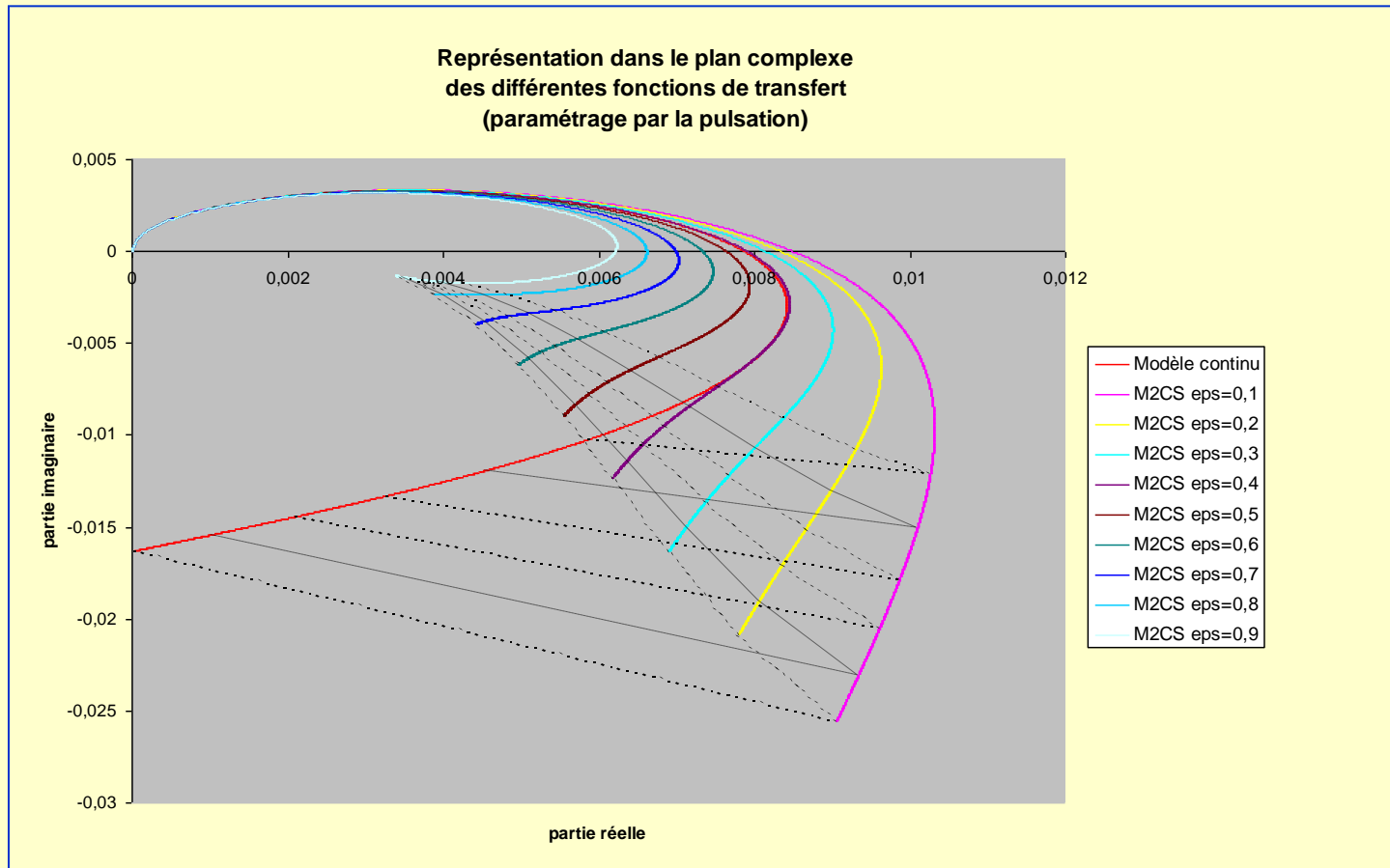
Influence du coefficient d'échange réduit θ (varié arbitrairement) Sur le facteur de réponse réduit $N/\alpha = \text{Re}(Z)$ du modèle à 2 couches, $A=1, B=2$.

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



Exemple d'optimisation du modèle 2-couches (comparaison avec le modèle continu) par une méthode des moindres carrés dans le plan complexe.

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



Quelques problèmes

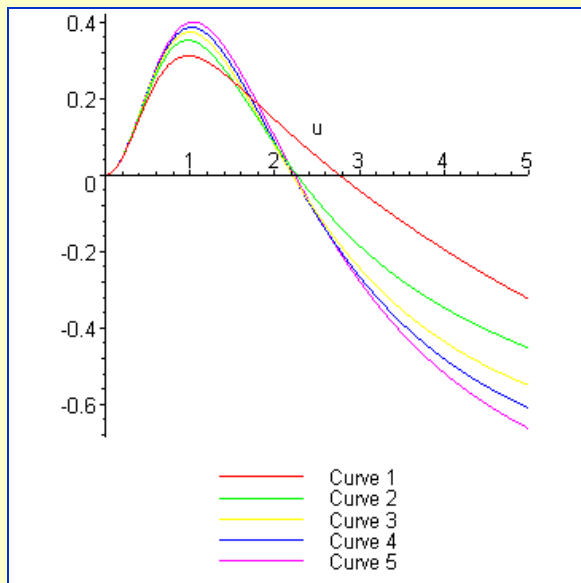
1. Les équations de base :

Dans le cas d'une goutte de diamètre variable, les équations sont du type:

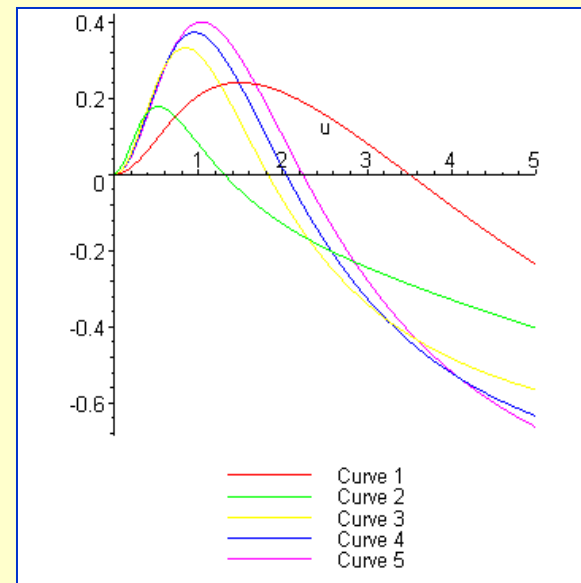
$$\frac{d(M e)}{dt} = Q$$

au lieu de: $M c_L \frac{dT}{dt} = Q$. Quelles conséquences ?

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



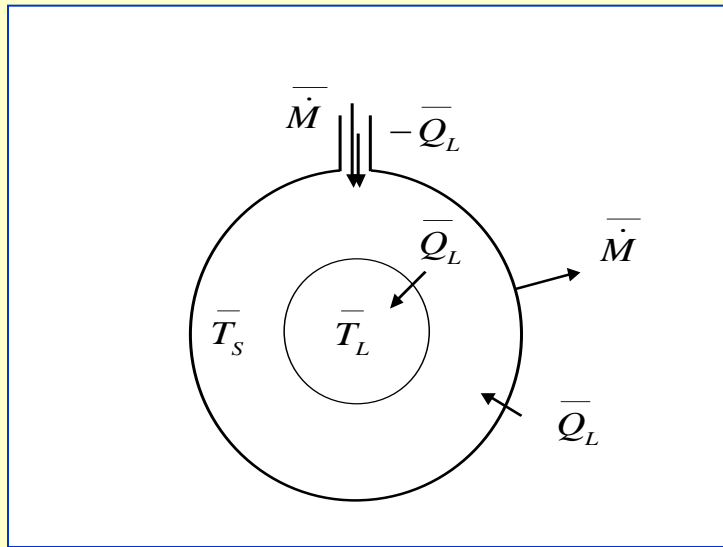
$N(u)$ pour différentes valeurs de Θ 0.2 ; 0.5 ; 1.0 ; 2 ; 10^4 . Pour $A=1$, $B=2$. (2-couches classique). $\varepsilon = 0.5$.



$N(u)$ pour différentes valeurs de Θ 0.2 ; 0.5 ; 1.0 ; 2 ; 10^4 . Pour $A=1$, $B=2$. (2-couches à diamètre variable). $\varepsilon = 0.5$.

Quelques problèmes (suite)

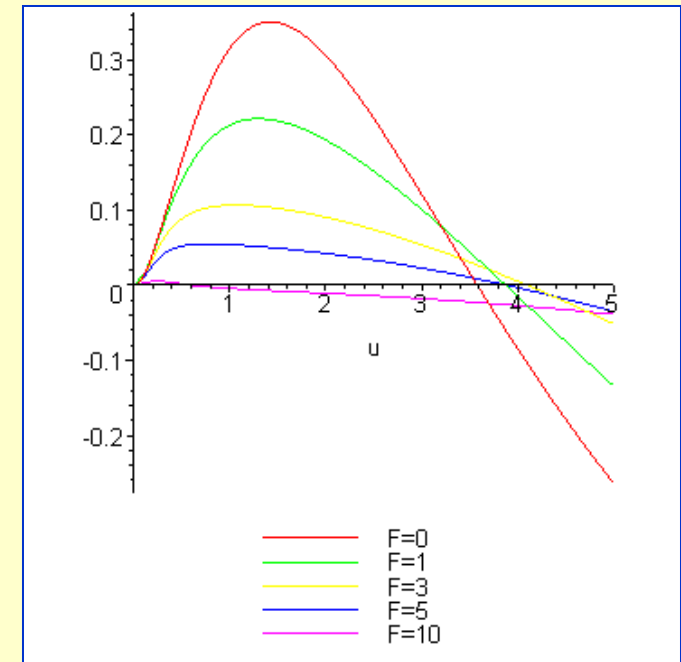
2. Les valeurs de référence : Les valeurs \bar{M} , \bar{T}_S , .. sont celles d'un régime stabilisé, donc de température uniforme. Que se passe-t'il avec le modèle 2-couches dans une situation réelle avec 2 températures de référence ?



$$Z_2 = \frac{iu[(\Lambda + iu)(A - \varpi \phi_L - iu) - \varepsilon u^2]}{(1 + iu)[(B + \varpi \phi_L + iu)(\Lambda + iu) + \varepsilon u^2] + \phi_L iu(\Lambda + iu)}$$

$$\varpi = 2c(\bar{T}_S - c) / \alpha \bar{b}, \quad \phi_L = 3\alpha \bar{b} \bar{Q}_L / \lambda,$$

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux



Facteur de réponse pour plusieurs valeurs de $F = \phi_L$ ($\varepsilon = 0.5$, $\Lambda = 0.4$, $A = 1$, $B = 2$, $\varpi = 0.1$)

Quelques problèmes (suite)

1. Goutte de fluide sub-critique en évaporation dans un mélange gazeux

3. Le débit injecté :

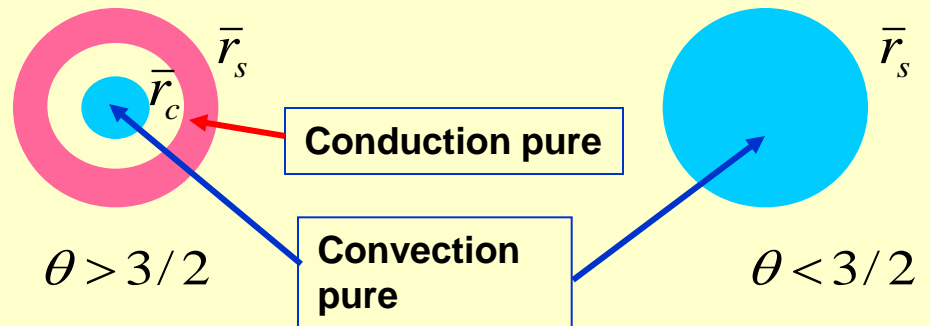
Comment agit le débit injecté dans la configuration de Heidmann ?

$$\rho_L c_L \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) - \frac{k_L}{r} \frac{\partial^2 (r T_l)}{\partial r^2} = 0$$

Cas d'une source ponctuelle :

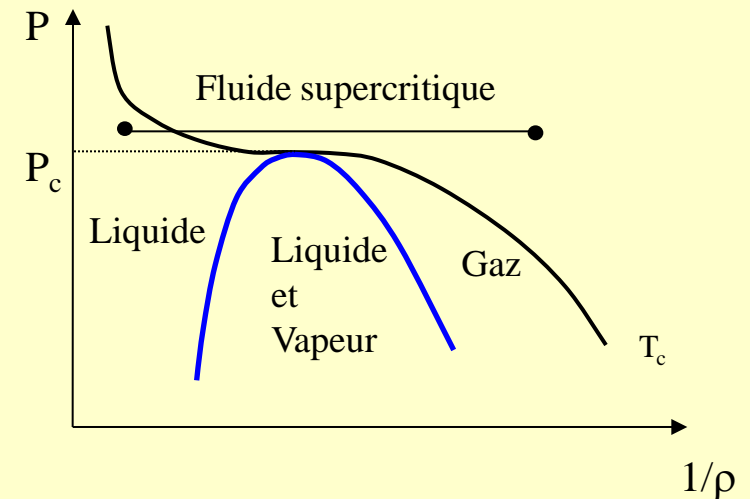
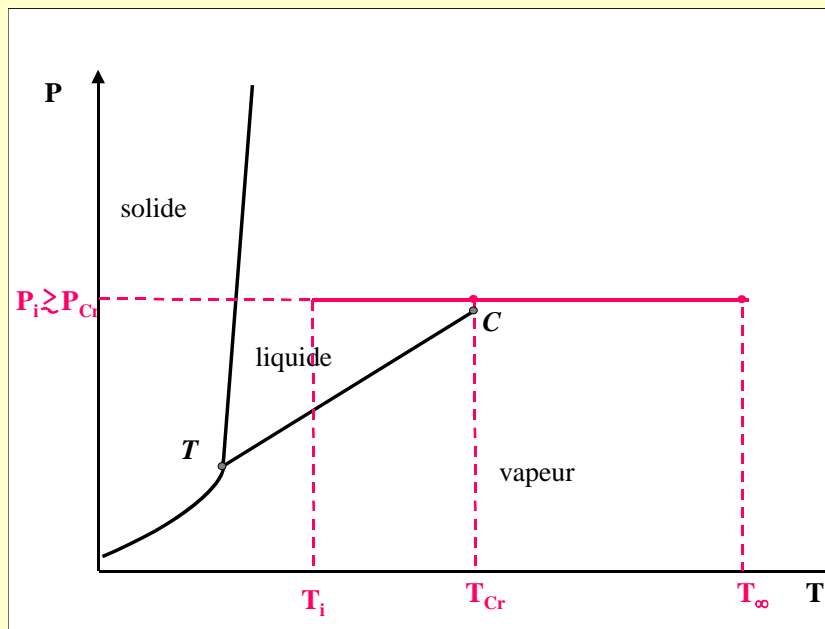
$$\frac{\partial T_l}{\partial t} - \frac{2\kappa_L}{r} \left(1 - \frac{3}{2\theta} \frac{\bar{r}_s}{r} \right) \frac{\partial T_l}{\partial r} - \kappa_L \frac{\partial^2 T_l}{\partial r^2} = 0$$

\Rightarrow rayon critique : $\bar{r}_c = 3\bar{r}_s / 2\theta$



2. Expansion d'une poche de fluide de température initiale sous critique sous pression légèrement supercritique dans une atmosphère de température initiale uniforme nettement supercritique.

Col. avec Amah D'Almeida, Université de Lomé (Togo) et Jalil Ouazzani (Bordeaux)



2. Expansion d'une poche de fluide de température initiale sous critique sous pression légèrement supercritique dans une atmosphère de température initiale uniforme nettement supercritique.

Dans certains foyers de combustion, des gouttes liquides (de combustible ou de comburant) sont injectées dans une atmosphère très chaude et à pression supérieure à la pression critique du liquide considéré. Ces gouttes apparaissent comme des poches fluides en mouvement et en expansion, sans interface de changement de phase.

Le cas où la goutte initialement sphérique se trouve dans les conditions critiques et s'épand de façon isobare, en restant sphérique, dans le même fluide au repos de température à l'infini très supérieure à la température critique, a été étudié³.

On se propose d'étendre ici l'étude au cas où la température initiale de la goutte est inférieure à la température critique et où la pression ambiante est supérieure à la pression critique. Cette situation est assez représentative de moteurs cryogéniques (fusée Ariane par exemple) et de moteurs Diesel.

³ S. Préau, R. Prud'homme, J. Ouazzani, B. Zappoli - « Supercritical density relaxation as a new approach of droplet vaporization ». Phys. of fluids Vol 16, N° 11 (Nov. 2004), pages 4075-4087.

2. Expansion d'une poche de fluide de température initiale sous critique sous pression légèrement supercritique dans une atmosphère de température initiale uniforme nettement supercritique.

Dans la réalité, l'existence d'un écoulement turbulent extérieur et l'absence de tension superficielle conduisent à une rupture de la symétrie sphérique et à l'épluchage de la poche. Néanmoins on supposera ici que la poche reste sphérique, pour simplifier mais aussi pour établir des lois d'évolution qui pourront être introduites dans des modèles plus complexes incluant la turbulence.

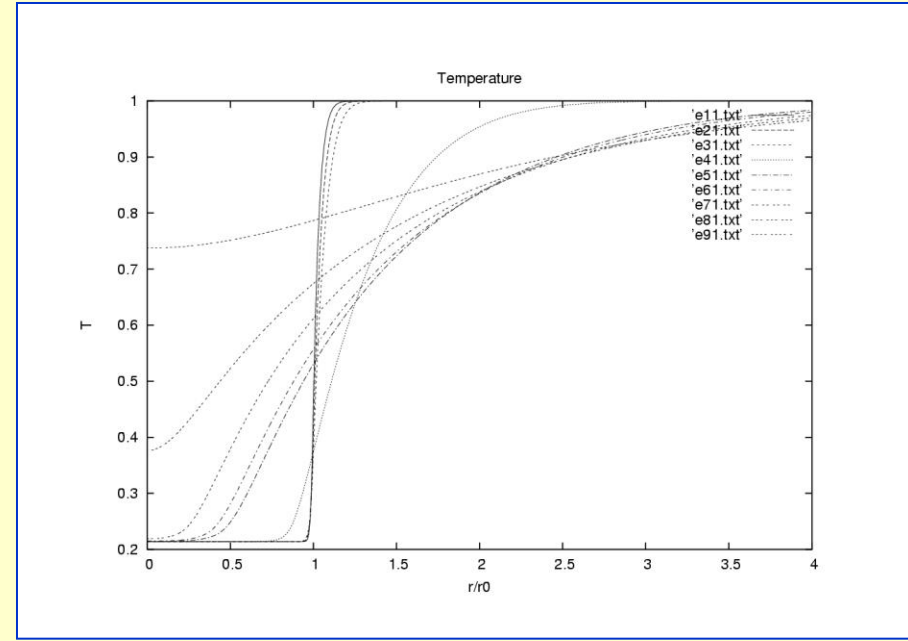
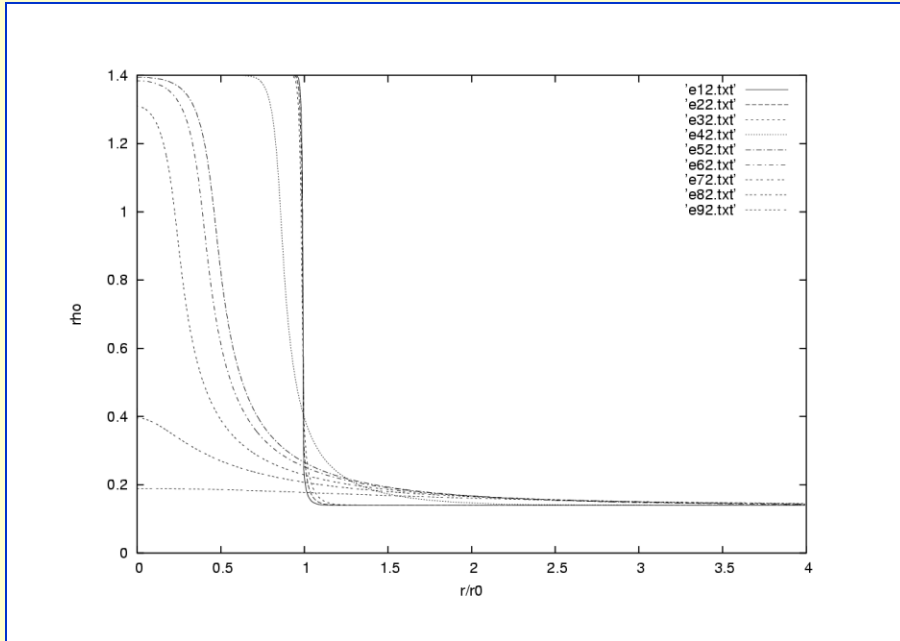
Problèmes posés actuellement :

Avant l'étude analytique, il est nécessaire de procéder à l'étude numérique.

Le code utilisé ne permet pas d'envisager une température initiale sous critique. Il est en cours de modification par Jalil Ouazzani.

Il restera alors à bien définir les limites de la poche et à assurer la transition critique.

2. Expansion d'une poche de fluide de température initiale sous critique sous pression légèrement supercritique dans une atmosphère de température initiale uniforme nettement supercritique.



Évolutions de la masse volumique et de la température à différents instants en fonction de la distance au centre de la goutte (cas d'une poche de fluide légèrement supercritique subitement plongée dans une atmosphère plus chaude du même fluide supercritique) ⁴.

⁴A. D'Almeida. Rapport de mission. Novembre 2007.

3. Injection d'un fluide supercritique dans une sphère poreuse

Thèse de Kwassi Anani à l'Université de Lomé (codirection Assiamoua-Prud'homme en collaboration avec D'Almeida)

Cette étude en est à son début.

On commence par injecter un gaz ou un liquide et par l'étude dans la configuration de Heidmann.