



**HAL**  
open science

## Evaporation de gouttes: lois de récession du rayon

Roger Prud'Homme, Amah Séna d'Almeida

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme, Amah Séna d'Almeida. Evaporation de gouttes: lois de récession du rayon. 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-02358117

**HAL Id: hal-02358117**

**<https://hal.science/hal-02358117>**

Submitted on 11 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/48270477>

# Evaporation de gouttes: lois de récession du rayon

Article · January 2011

Source: OAI

---

CITATIONS

0

READS

79

1 author:



**Amah Séna d'Almeida**  
Université de Lomé

24 PUBLICATIONS 36 CITATIONS

SEE PROFILE

# Evaporation de gouttes : lois de récession du rayon

A. D'ALMEIDA<sup>a</sup>, R. PRUD'HOMME<sup>b</sup>

*a. Département de mathématique, Université de Lomé, BP 1515 LOME (TOGO)*  
*b. Institut Jean le Rond d'Alembert, Université Paris 6, 4, Place Jussieu, 75005 PARIS (FRANCE)*

## Résumé :

*Le problème de la vaporisation d'une goutte liquide ou de la relaxation d'une poche de fluide supercritique dans un environnement gazeux plus chaud du même fluide est étudié. Les équations de Navier-Stokes sont résolues dans le cas quasi-stationnaire pour une goutte sphérique. La solution exacte permet d'établir des lois de récession du rayon qui sont dans le cas général différentes de la loi classique en  $d^2$ . Des hypothèses sur les propriétés thermodynamiques de la phase gazeuse en régime subcritique permettent de retrouver cette loi et de déterminer une expression analytique du taux de vaporisation  $K$ . En régime supercritique on peut aussi établir une loi en  $d^2$  lorsque la conductivité thermique et la capacité calorifique à pression constante dépendent uniquement de la température.*

## Abstract :

*We investigate the problem of the vaporization of a liquid droplet or the relaxation of a cold package of supercritical fluid in a hotter environment of the same fluid. The Navier-Stokes equations are solved for a physical model which assumes spherical symmetry and laminar conditions in the quasi steady case. Recession laws which are different from the classical  $d^2$  law can be derived from the exact solution. Additional assumptions on the thermodynamical properties of the gas phase in subcritical conditions restore the classical law and permit the determination of an analytic expression for the vaporisation rate  $K$ . In supercritical conditions one can also find a  $d^2$  law when the thermal conductivity and the constant-pressure specific heat only depend upon the temperature.*

**Mots clefs :** Evaporation de goutte, fluide supercritique, récession quasi-stationnaire

## 1 Introduction

La combustion et la vaporisation de gouttes jouent un rôle clé dans les performances des moteurs à combustion interne comme les turbines à gaz ou les moteurs de fusées à ergols liquides dont la conception est encore beaucoup basée sur des connaissances empiriques et une théorie qui ne tient pas assez compte de la complexité des processus physiques mis en jeu ainsi que de l'environnement dans la chambre de combustion. L'étude de l'évaporation d'une goutte isolée dans un milieu infini avec des hypothèses simplificatrices diverses fournit des renseignements importants pour la compréhension de ces phénomènes. Elle est essentiellement basée sur l'hypothèse de la quasi-stationnarité de l'environnement gazeux entourant la goutte liquide ou la poche froide dans le cas supercritique. La validité de cette hypothèse qui semblait limitée aux cas des faibles pressions où la densité du liquide est au moins d'ordre trois fois supérieure à celle du gaz [1] persiste dans l'évaporation critique aux pressions très élevées où la densité du fluide critique est proche de celle du gaz [2], [5]. Au voisinage de leur point critique, les fluides sont hyperdilatables et peu conducteurs de chaleur. Dans un processus isobare les gradients de densité sont très importants. La diffusion thermique n'étant effective que dans une couche très mince, les énormes gradients de densité qui en résultent conduisent à des situations analogues à celle de l'évaporation subcritique [3], [2] [4] : l'inhomogénéité de densité initiale fait que la poche de fluide critique ou supercritique peut être assimilée à une gouttelette quand l'atmosphère extérieure est plus chaude qu'elle. Une interface physique bien définie sépare la phase gazeuse de la goutte liquide lorsque l'évaporation se déroule en conditions subcritiques alors que les concepts de chaleur latente et de tension superficielle n'ont plus de sens en conditions supercritiques. L'évaporation supercritique est donc un phénomène de relaxation dans une seule phase. Cependant de nombreuses données expérimentales et numériques suggèrent qu'à des pressions supercritiques modérées il existe toujours deux régions distinctes du fluide (reminiscences des phases liquide et gazeuse de l'évaporation subcritique) séparées par une mince zone de transition comparable à l'interface liquide-gaz mais possédant une épaisseur non nulle. Le fort gradient de densité qui suit la poche froide induit un flux de masse dépendant du temps dont le maximum qui est atteint dans la zone de transition peut définir une frontière fictive de la poche froide lorsque le processus devient quasi-stationnaire [5]. En revanche aux pressions supercritiques très élevées, les deux régions ne peuvent plus être distinguées [2]. Le réchauffement de la poche froide de fluide devient essentiellement un processus conductif à densité constante dans lequel la prise en compte des variations de densité n'introduit que de petites corrections. Les

inhomogénéités en température se résorbent alors sur l'échelle de temps de l'effet piston spécifique aux conditions isochores [7].

On n'étudiera ici ni le réchauffement instationnaire de la goutte ni la zone de transition entre la poche froide et l'environnement chaud en conditions supercritiques. Dans la section 2 on pose le problème mathématique résultant de la modélisation par une goutte à symétrie sphérique en atmosphère infinie initialement au repos à pression uniforme du phénomène de vaporisation de goutte. Après une analyse asymptotique on établit les équations quasi-stationnaires. Dans la section 3 on résout analytiquement ces équations et on établit dans le cas général subcritique une loi de récession en  $d^3$  du rayon de la goutte. On en déduit en faisant des hypothèses simplificatrices sur la capacité calorifique et la conductivité thermique dans le gaz des lois en  $d^2$  linéaires et non linéaires du temps. Ces résultats permettent d'aborder et de résoudre le cas supercritique en régime quasi-stationnaire dans la section 4.

## 2 Position du problème

Une goutte de liquide pur de température uniformément égale à la température de vapeur saturante à la pression subcritique considérée ou une poche de fluide supercritique à température uniforme est brusquement introduite dans une atmosphère infinie plus chaude du même fluide initialement au repos. Le modèle physique adopté suppose la symétrie sphérique de la goutte et de l'écoulement, l'absence de viscosité et de gravité ainsi qu'une pression uniforme dans le domaine d'écoulement. On note  $r'$  la distance au centre de la goutte,  $R'$  le rayon de la goutte. Une loi d'état donne la pression  $P'$  dans l'écoulement en fonction de la masse volumique  $\rho'$  et de la température  $T'$ ;  $v'$  est la vitesse de l'écoulement. On écrit les équations de conservation du modèle dans un repère lié à la frontière de la goutte et on introduit la variable  $x' = r' - R'$ . On retient deux temps caractéristiques dans la description de la vaporisation subcritique et de la vaporisation supercritique à pression supercritique modérée : le temps caractéristique de diffusion thermique  $t'_{dif}$  et le temps de vie de la goutte  $t'_{res}$ . Pour tenir compte du gradient de densité dans le milieu on utilise deux densités caractéristiques :  $\rho'_l$  dans

la goutte et  $\rho'_\infty$  dans le gaz environnant. On introduit les nombres sans dimension  $\gamma_\infty = \frac{t'_{dif}}{t'_{res}}$ ,  $\epsilon = \frac{\rho'_\infty}{\rho'_l}$ ,

$Pe = \frac{Cp'_\infty R'^2_{in} \rho'_\infty}{\lambda'_\infty t'_{dif}}$  et les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} t &= \frac{t'}{t'_{res}}, \quad r_0 = \frac{R'}{R'_{in}}, \quad x = \frac{x'}{R'_{in}}, \quad v = \frac{v' t'_{dif}}{R'_{in}}, \quad \dot{r}_0 = \frac{\dot{R}' t'_{res}}{R'_{in}}, \\ u &= v - \frac{\gamma_\infty}{\epsilon} \dot{r}_0, \quad T = \frac{T'}{T'_\infty}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'_\alpha}, \quad \alpha = l, +\infty \end{aligned} \quad (1)$$

les équations du problème s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\gamma_\infty}{\epsilon} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2\rho \dot{r}_0}{x+r_0} + \dot{r}_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{(x+r_0)^2} \frac{\partial [(x+r_0)^2 \rho u]}{\partial x} = 0, \\ \frac{\gamma_\infty}{\epsilon} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{r}_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\gamma_\infty}{\epsilon} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{r}_0 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Pe \rho C_p (x+r_0)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x+r_0)^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right], \\ P = f(\rho, T) \end{cases} \quad (2)$$

avec les conditions initiales

$$T(0, x) = \begin{cases} T_{in}(x), & x \leq 0 \\ T_\infty(x), & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_{in}(x), & x \leq 0 \\ \rho_\infty(x), & x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$u(0, x) = \begin{cases} u_{in}(x), & x \leq 0 \\ u_\infty(x), & x > 0, \end{cases} \quad (5)$$

les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} T(t, x) &= T_l(t), \quad x \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} T(t, x) &= T_\infty(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \rho_l(t), \quad x \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(t, x) &= \rho_\infty(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_l(t), \quad x \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) &= u_\infty(t) \end{aligned} \quad (8)$$

et les relations de saut :

$$\begin{aligned} \rho_l u_l &= \rho_g u_g \\ \lambda_l \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_l + Pe \rho_l u_l \mathcal{L}_0 &= \lambda_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_g, \quad \mathcal{L}_0 = \frac{h'_l - h'_g}{Cp'_\infty T'_\infty} \end{aligned} \quad (9)$$

$h'$  est l'enthalpie totale correspondant au mouvement relatif.

L'utilisation de deux temps et de deux densités caractéristiques dans l'analyse dimensionnelle fait apparaître les deux nombres sans dimension  $\gamma_\infty$  et  $\epsilon$  et le nombre de Peclet thermique  $Pe$  basé sur les quantités caractéristiques de la phase gazeuse. Les études asymptotiques menées sur le sujet [3], [4], [8], utilisent soit  $\gamma_\infty$  soit  $\epsilon$  comme petit paramètre et il se pose le problème de la pertinence du choix de l'un ou l'autre de ces nombres. La forme (2) des équations adimensionnelles montre que les phénomènes instationnaires sont gouvernés par le rapport  $\tau = \frac{\gamma_\infty}{\epsilon}$  ce qui le désigne naturellement comme petit paramètre dans nos développements.

En première approximation on obtient le système des équations quasi-stationnaires du modèle :

$$\begin{cases} \frac{1}{(x+r_0)^2} \frac{\partial [(x+r_0)^2 \rho_0 u_0]}{\partial x} = 0, \\ \rho_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \\ u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{1}{Pe \rho C p_0 (x+r_0)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x+r_0)^2 \lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right], \end{cases} \quad (10)$$

### 3 Solution exacte dans le cas subcritique

Les première et troisième équations du système (10) ont aussi été établies dans [3]. Leur intégration donne :

$$\begin{aligned} (x+r_0)^2 \rho_0 u_0 &= f(t) \\ \lambda_0(t, x) \frac{\partial T_0}{\partial x}(t, x) &= \frac{H(t)}{(x+r_0)^2} \exp \left[ Pe \int_0^x \frac{Cp_0 \rho_0 u_0}{\lambda_0}(t, a) da \right] \end{aligned} \quad (11)$$

En tenant compte du fait que la goutte est au repos on obtient  $v_g = 0$  ce qui permet d'écrire les relations de saut (9) sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho_g u_g &= -\tau \dot{r}_0 \\ \lambda_{0g} \left( \frac{\partial T_0}{\partial x} \right)_g &= Pe \rho_{0g} u_g \mathcal{L}_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Les relations (11) écrites à la frontière de la goutte en tenant compte de la relation (12) donnent :

$$\begin{aligned} f(t) &= -\tau r_0^2 \dot{r}_0 \\ -\tau r_0^2 \dot{r}_0 &= \frac{H(t)}{Pe \mathcal{L}_0} \end{aligned} \quad (13)$$

En intégrant la seconde relation (13) on obtient une loi de récession en  $d^3$  pour le diamètre de la goutte avec une fonction non linéaire du temps. Il est cependant nécessaire de déterminer complètement la fonction du temps  $H$  pour connaître la loi de dépendance exacte du diamètre de la goutte du temps. On discute le cas où la capacité calorifique et la conductivité thermique sont uniformes et le cas abondamment traité dans la littérature où elles dépendent du temps et de  $x$  par l'intermédiaire de la température.

#### 3.1 Capacité calorifique et conductivité thermique uniformes : la loi en $d^2$

On suppose maintenant que les quantités  $\lambda_0$  et  $Cp_0$  ne dépendent pas explicitement de la variable d'espace  $x$ . Alors l'intégration de la seconde équation (11) donne :

$$T_0(t, x) = \frac{H(t)}{Pe Cp_0(t) f(t)} \exp \left\{ \frac{Pe Cp_0(t) f(t) x}{\lambda_0(t) r_0 (x+r_0)} \right\} + \Theta(t) \quad (14)$$

En utilisant les conditions aux limites on a :

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{Pe Cp_0 f (T_0^0 - T_0^\infty)}{1 - \exp \left( \frac{Pe Cp_0 f}{\lambda_0 r_0} \right)}, \quad \Theta(t) = \frac{T_0^\infty - T_0^0 \exp \left( \frac{Pe Cp_0 f}{\lambda_0 r_0} \right)}{1 - \exp \left( \frac{Pe Cp_0 f}{\lambda_0 r_0} \right)} \\ T_0^0(t) &= T_0(t, 0), \quad T_0^\infty(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_0(t, x) \end{aligned} \quad (15)$$

On remplace dans la relation (13) et on obtient :

$$r_0^2 - 1 = -\frac{2}{\tau P_e} \int_0^t \frac{\lambda_0}{Cp_0} \ln \left[ 1 + \frac{Cp_0(T_0^\infty - T_0^0)}{\mathcal{L}_0}(a) \right] da \quad (16)$$

qui est une loi en  $d^2$  excepté le fait que la fonction du second membre n'est pas une fonction linéaire du temps. Lorsqu'on suppose que  $\mathcal{L}_0$ ,  $\lambda_0$  et  $Cp_0$  sont constants on obtient la loi en  $d^2$  classique :

$$r_0^2 = 1 - Kt, \quad K = \frac{2\epsilon\lambda_0}{P_e Cp_0 \gamma_\infty} \ln \left[ 1 + \frac{Cp_0(1 - T_0^0)}{\mathcal{L}_0} \right] \quad (17)$$

On peut remarquer que le taux d'évaporation a une expression analytique explicite qui est analogue à celle trouvée dans [6].

### 3.2 Capacité calorifique ou/et conductivité thermique dépendant de la température

1. Lorsqu'on suppose que seule la capacité calorifique  $Cp_0$  dépend de  $t$  et  $x$  par l'intermédiaire de la température, c'est-à-dire  $Cp_0 = Cp_0[T(t, x)]$ , les équations (11) demeurent valables pour décrire l'évolution de la goutte. En posant  $X(t, x) = P_e f(t) \int_0^x Cp_0[T(t, a)]g(t, a)da$  on transforme la seconde équation (11) en :

$$Cp_0[T(t, x)] \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{H(t)}{P_e f(t)} \frac{\partial X}{\partial x} \exp(X) \quad (18)$$

En tenant compte du fait que  $X(t, 0) = 0$  et en notant  $T_0 = T(t, 0)$  on obtient par intégration sur  $[0, x]$

$$\int_{T_0}^T Cp_0(a)da = \frac{H(t)}{P_e f(t)} \{ \exp[X(t, x)] - 1 \} \quad (19)$$

En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  dans la relation (19) on obtient :

$$\frac{H(t)}{f(t)} = \frac{P_e \int_{T_0}^{T_\infty} Cp_0(a)da}{\exp(X^\infty) - 1} \quad (20)$$

$$T_\infty(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} T(t, x), \quad X^\infty = P_e f(t) \int_0^{+\infty} Cp_0[T(t, a)]g(t, a)da$$

On substitue l'expression de  $H$  déduite de la relation (20) dans la première équation (13) et on obtient la relation :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{F_\infty}{\exp(X^\infty) - 1}, \quad F_\infty(t) = \int_{T_0}^{T_\infty} Cp_0(a)da \quad (21)$$

qui donne après calculs :

$$-r_0^2 \dot{r}_0 \tau = \frac{\ln \left[ 1 + \frac{F_\infty(t)}{\mathcal{L}_0(t)} \right]}{P_e \int_0^{+\infty} Cp_0[T(t, a)]g(t, a)da} \quad (22)$$

En intégrant par rapport au temps on retrouve encore une loi en  $d^3$  pour la récession du diamètre de la goutte avec une fonction non linéaire du temps. Si on suppose en plus que le rapport  $\frac{Cp_0}{\lambda_0}$  ne dépend pas

de  $x$ , on peut calculer la quantité :  $\int_0^{+\infty} Cp_0[T(t, a)]g(t, a)da = \frac{Cp_0(T)}{\lambda_0(T)r_0}$ . On peut alors retrouver une loi en  $d^2$  avec une fonction non linéaire du temps.

$$r_0^2 = 1 - \frac{2}{P_e \tau} \int_0^t \frac{\lambda_0}{Cp_0}(u) \ln \left[ 1 + \frac{F_\infty(u)}{\mathcal{L}_0(u)} \right] du \quad (23)$$

2. Lorsque la conductivité thermique dépend seulement de la température c'est-à-dire  $\lambda_0 = \lambda_0[T(t, x)]$ , la troisième équation (10) se développe sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a \frac{\partial T}{\partial x} + b \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad a = \frac{2}{x + r_0} - \frac{P_e Cp_0 f(t)}{\lambda_0(x + r_0)^2}, \quad b = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial T} \quad (24)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\exp[-\int_0^x a(t, v)dv]}{k(t) + J(t, x)}, J(t, x) = \int_0^x b(t, w)\exp\left[-\int_0^w a(t, v)dv\right]dw \quad (25)$$

Ce qui donne en utilisant la relation de saut sur la conservation de l'énergie :

$$k(t)r_0' = -\frac{\lambda_0^0}{\tau\mathcal{L}_0}, \lambda_0^0(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda_0 \quad (26)$$

Il faut donc déterminer l'expression de la fonction  $k$  pour établir la loi de récession du rayon de la goutte. En intégrant la relation (25) on aboutit à la relation suivante :

$$\frac{k(t)}{\lambda_0^0} = \frac{J(t, x)}{\lambda_0(T) - \lambda_0^0} \quad (27)$$

On en déduit en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  :

$$k(t) = \frac{\lambda_0^0 J(t)}{\lambda_0^\infty - \lambda_0^0}, \lambda_0^\infty(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_0[T(t, x)], J(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} J(t, x) \quad (28)$$

Une expression analytique de la fonction  $k$  qui de toute évidence dépend de  $r_0$  est difficile à obtenir dans le cas général à cause de la forme de  $J(t)$ . Dans le cas particulier où on suppose que  $b$  et  $\frac{Cp_0}{\lambda_0}$  ne dépendent pas explicitement de  $x$  on obtient :

$$J(t) = \frac{r_0^2}{\alpha\lambda_0^\infty} \left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial T}\right)_\infty \left[\exp\left(\frac{\alpha}{r_0}\right) - 1\right], \alpha = \frac{Pe f(t) Cp_0^\infty}{\lambda_0^\infty}, \left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial T}\right)_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial\lambda_0}{\partial T} \quad (29)$$

On a, en revenant aux variables dimensionnelles,  $\frac{\alpha}{r_0} = \frac{u_0' r_0'}{\kappa'}$ ,  $\kappa'$  étant la diffusivité thermique. En régime subcritique  $\kappa'$  est fini alors que  $u_0'$  et  $r_0'$  sont très petits ;  $\frac{\alpha}{r_0}$  est donc petit et on peut faire l'approximation  $\exp\left(\frac{\alpha}{r_0}\right) - 1 \simeq \frac{\alpha}{r_0}$ . En remplaçant dans (28) on a

$$k(t) = \frac{r_0\lambda_0^0}{\lambda_0^\infty(\lambda_0^\infty - \lambda_0^0)} \left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial T}\right)_\infty \quad (30)$$

et on en déduit en comparant avec (26) la loi en  $d^2$

$$r_0^2 = 1 - \frac{2\epsilon}{Pe\gamma_\infty} \int_0^t \frac{\lambda_0^\infty(\lambda_0^\infty - \lambda_0^0)}{\mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial T}\right)_\infty} ds \quad (31)$$

#### 4 Cas critique et supercritique

En régime critique et supercritique, la conductivité thermique s'écrit [3] :

$$\lambda_0' = \lambda_0^{gaz} + \lambda_0^C + \lambda_0^E \quad (32)$$

Les deux premiers termes dépendent seulement de la température alors que le dernier dépend uniquement de la masse volumique. Lorsque la pression est constante  $\rho$  dépend uniquement de la température. Les expériences et les résultats numériques [3],[4], [5] suggèrent l'existence de deux régions distinctes dans l'écoulement en régimes critique et supercritique modéré ainsi que l'existence d'une sphère de rayon dépendant des conditions initiales et aux limites à l'extérieur de laquelle les variables macroscopiques de l'écoulement ne dépendent plus du temps. Ce qui garantit la non nullité de  $\mathcal{L}_0$  et l'évolution quasi-stationnaire de l'écoulement jusqu'à la disparition de la poche froide après une phase transitoire instationnaire. Comme la conductivité thermique dépend uniquement de la température, on va utiliser les résultats du paragraphe 3.2.

1. Si  $\frac{Cp_0}{\lambda_0}$  ne dépend pas explicitement de  $x$  on a les résultats suivants :

- Près du point critique,  $\kappa'$  tend vers zéro d'où  $\frac{\alpha}{r_0}$  tend vers l'infini, la loi de récession qui n'est plus une loi qui donne  $d^2$  en fonction du temps s'écrit :

$$\int_1^{r_0} \frac{1}{\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\alpha}{s}\right) - 1 \right] s^2 ds = -\frac{1}{Pe\tau} \int_0^t \frac{\lambda_0^\infty (\lambda_0^\infty - \lambda_0^0)}{\mathcal{L}_0\left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial T}\right)_\infty} ds \quad (33)$$

L'hypothèse de la non dépendance explicite de  $\frac{Cp_0}{\lambda_0}$  de  $x$  ne suffit donc pas pour obtenir ce type de loi lorsque la phase gazeuse est au point critique. On obtient cependant une relation complètement analytique permettant la détermination de la loi de récession du rayon et du temps de relaxation de la poche froide.

- En régime supercritique modéré loin du point critique,  $\kappa'$  est non nul on peut alors faire l'approximation  $\exp\left(\frac{\alpha}{r_0}\right) - 1 \simeq \frac{\alpha}{r_0}$  et obtenir :

$$r_0^2 = r_\beta^2 - \frac{2\epsilon}{Pe\gamma_\infty} \int_0^t \frac{\lambda_0^\infty (\lambda_0^\infty - \lambda_0^0)}{\mathcal{L}_0\left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial T}\right)_\infty} ds, \quad r_\beta = 1, r_m \quad (34)$$

Ce résultat est analogue à ceux trouvés dans [3] pour le rayon  $r_0$  de la poche froide et dans [4] pour le rayon  $r_m$  défini par le maximum du flux de masse dans la zone de transition. Il confirme la validité de ces deux résultats : la forme de la relation (34) est indépendante des bornes d'intégration puisque les intégrands des deux membres dépendent des valeurs de  $\lambda_0$  et  $Cp_0$  prises dans la phase gazeuse à  $+\infty$

2. Dans le cas où  $\frac{Cp_0}{\lambda_0}$  dépend de  $x$ , on doit tenir compte des lois d'état et des lois d'échelle au voisinage du point critique pour évaluer  $J$ . L'étude numérique est en cours mais on peut remarquer sur la forme des équations que la dépendance en  $x$  rend difficile l'obtention de lois de récession en  $d^2$ .

## 5 Conclusion

On a résolu analytiquement les équations de Navier-Stokes pour une goutte ou une poche sphérique en évaporation en conditions quasi-stationnaires. La solution exacte montre qu'on a des lois de récession qui donnent  $d^2$  comme une fonction non linéaire du temps aussi bien en régime subcritique que supercritique si le rapport  $\frac{Cp_0}{\lambda_0}$  est indépendant de  $x$  dans la phase gazeuse. Si on tient compte en régime subcritique, à pression constante, du fait que la température de la goutte est constante les fonctions du temps deviennent linéaires et on a des lois en  $d^2$  classiques. Les fonctions du temps des lois établies dans le paragraphe 3.2 et la section 4 sont des intégrales des fonctions  $\lambda_0^\infty$ ,  $Cp_0^\infty$  limites de  $\lambda_0$  et  $Cp_0$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $\mathcal{L}_0$ . Lorsqu'on suppose que l'écoulement dans la phase gazeuse est stationnaire (et non quasi-stationnaire) toutes ces fonctions deviennent constantes et on a des lois en  $d^2$  avec des fonctions linéaires du temps.

## Références

- [1] Harstad K. Bellan. J., Isolated fluid oxygen drop behavior in fluid hydrogen at rocket chamber pressures. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41, 3537–3550, 1998.
- [2] Arias-Zugasti M., Garcia-Ybarra P., Castillo. J. L., Unsteady effects in droplet vaporisation lifetimes at subcritical and supercritical conditions. *Physical Review E*, 60(3), 2930–2941, 1999.
- [3] Arias-Zugasti M., Garcia-Ybarra P., Castillo. J. L., Droplet vaporisation at critical conditions : Long time convective-diffusive profiles along the critical isobar. *Physical Review E*, 60(3), 2930–2941, 1999.
- [4] Préau S. Ouazzani. J. Zappoli. B., Prud'homme R., Supercritical density relaxation as a new approach of droplet vaporization. *Phys. Fluids*, 16(11), 4075–4087, 2004.
- [5] Prud'homme R., D'Almeida A., Sphères fluides avec injection. Colloque du GDR MFA, CD Rom CNES 038490-64, 2008
- [6] Godsavage G. A. E., Studies of the combustion of drops in a fuel spray : the burning of single drops of fuel. 4<sup>th</sup> Symposium on Combustion, the combustion institute, 818–830, 1953
- [7] Bailly D., Zappoli. B., Hydrodynamic theory of density relaxation in near-critical conditions. *Physical Review E*, 62, 2353–4087, 2000.
- [8] Sanchez-Tarifa C., Crespo A., Fraga. E., Theoretical model for the combustion of droplets in super-critical conditions and gas pockets. *Astronautica Acta*, 17, 685–692, 1972.