HAL
open science

Techniques d'affectation flexible des ressources : caractérisation et modélisation

Kouassi Hilaire Edi, Tioman Aka, Boko Aka, Philippe Duquenne, Jean-Marc Le Lann

To cite this version:

Kouassi Hilaire Edi, Tioman Aka, Boko Aka, Philippe Duquenne, Jean-Marc Le Lann. Techniques d'affectation flexible des ressources : caractérisation et modélisation. revue ivoirienne des sciences et technologies, 2010, 16, pp.95-115. hal-02354696

HAL Id: hal-02354696

https://hal.science/hal-02354696v1

Submitted on 7 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: http://oatao.univ-toulouse.fr/23874

Official URL

To cite this version :

Edi, Kouassi Hilaire and Aka, Tioman and Aka, Boko and Duquenne, Philippe and Le Lann, Jean-Marc *Techniques d'affectation flexible des ressources : caractérisation et modélisation.* (2010) Revue Ivoirienne des Sciences et Technologies (16). 95-115. ISSN 1813-3290

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Rev. Ivoir. Sci. Technol., 16 (2010) 95 – 115
ISSN 1813-3290

TECHNIQUES D'AFFECTATION FLEXIBLE DES RESSOURCES : CARACTÉRISATION ET MODÉLISATION

Kouassi Hilaire EDI[1*], Tioman AKA[2], Boko AKA[1], Philippe DUQUENNE[3] et Jean-Marc LE LANN[3]

[1]*Laboratoire de Mathématique et Informatique, Université d'Abobo-Adjamé, 02 BP 801 Abidjan 02,* Côte d'Ivoire
[2]*Laboratoire de Physique de la Matières Condensée et de Technologie, Université de Cocody-Abidjan, 21 BP 872 Abidjan 21,* Côte d'Ivoire
[3]*LGC - UMR-CNRS 5503, PSI - Génie Industriel, INPT-ENSIACET, 118 route de Narbonne, 31077 Toulouse cedex 4, France*

(Reçu le 23 Avril 2010, accepté le 05 Septembre 2010)

* Correspondance et tirés à part, e-mail : *edi.hilaire@yahoo.fr*

RÉSUMÉ

A l'interface entre les sciences de l'ingénieur, les sciences économiques et les sciences humaines et sociales, le génie industriel a pour but d'apporter des réponses dans les secteurs très divers de l'entreprise. Un de ces problèmes est l'ajustement permanent entre la charge de travail représentée par les travaux à réaliser et la disponibilité des ressources de l'entreprise. L'objectif de ce travail est de contribuer à la recherche d'une méthodologie d'affectation flexible des ressources humaines dans la planification des activités industrielles. Cet article est composé de deux parties qui sont complémentaires. Nous y proposons une démarche pour la modélisation de l'affectation flexible des ressources humaines en matière de planification d'activités. Cette modélisation prend en compte deux aspects de la flexibilité, liés l'un à la modulation du temps de travail, et l'autre à la diversité des tâches qui peuvent être accomplies par une ressource donnée (polyvalence). D'une part, la polyvalence des acteurs qui permettra de guider les divers choix d'affectation afin d'apprécier, les répercussions de ces choix sur les durées des tâches, et d'autre part la modulation du temps de travail qui permet aux acteurs d'avoir un plan de travail variable selon les charges de l'entreprise.

Mots-clés : *Polyvalence, affectation flexible, planification, ordonnancement, modulation d'horaires.*

ABSTRACT

Methods of flexible allocation of resources : characterization and modelling

In interface between the sciences of engineer, economics and human and social sciences, industrial genius is aimed at bringing answers in the very various areas of the firm. One of these problems is permanent adjustment between the workload represented by jobs to be accomplished and the availability of the means of the firm. The objective of this job is to contribute à the research of a methodology of flexible allocation of human resources in the planning of industrial activities. This article is composed of two parties which are supplementary. In this one, we offer a step for the modelling of the flexible allocation of human resources in planning of activities. This modelling takes into account two aspects of suppleness, This modelling takes into account two aspects of suppleness, linked the one in the modulation of working time, and other one in the diversity of the tasks which can be fulfilled by a given means (versatility). On one hand, the versatility of the actors which will allow to guide the various choices of allocation to appreciate, the repercussions of these choices on the length of tasks, and on the other hand the modulation of the working time which allows to the actors to have a variable working schedule according to expenses of firm.

Keywords : *Versatility, flexible allocation, planning, scheduling, modulation of Timetables.*

NOMENCLATURE

Les données et les variables utilisées

. *Indices*

i ou n : pour désigner une tâche.
a : pour désigner un acteur.
j : pour désigner le numéro du jour.
s : pour désigner le numéro de la semaine.
k : pour désigner une compétence.
p : pour désigner une période de douze semaines consécutives.
min : pour désigner la plus petite valeur d'un ensemble.
max : pour désigner la plus grande valeur d'un ensemble.

. *Données*

A : ensemble des acteurs, désigne également son cardinal, nombre entier.

K : ensemble des compétences, désigne également le nombre total de compétences, nombre entier.

I : désigne le nombre total de tâches de l'activité, nombre entier.

w : désigne la charge exprimée en heures, nombre réel.

nk : nombre de compétences détenues par un acteur, nombre entier.

NJS : nombre de jours ouvrables par semaine, nombre entier ; nous supposons que ce nombre de jours est identique pour tous les acteurs. Par défaut, nous prendrons $NJS = 5 \text{ jours}$.

D : durée standard d'exécution des tâches, exprimée en jours, nombre entier.

L : durée fixe contractuelle de l'activité, exprimée en jours, nombre entier.

β : partie flexible de la durée fixe contractuelle de l'activité, exprimée en jours, nombre entier (dépassement ou retard autorisé sans risque de pénalité).

α : écart temporel ajouté au lien entre tâches, exprimé en jours, nombre entier.

Δ : ensemble des tâches antécédentes d'une tâche ; désigne aussi son cardinal, nombre entier

DSA : durée de travail annuelle d'un acteur, exprimée en heures, nombre entier.

HSA : heures supplémentaires annuelles maximales, nombre entier.

DMaxJ : durée maximale du travail journalier, en heures, nombre entier.

DMaxS : durée maximale du travail hebdomadaire, en heures, nombre entier.

DMax12S : durée maximale du travail pour une période flottante de douze semaines consécutives, en heures, nombre entier.

DMaxMod : durée du travail hebdomadaire selon les accords de modulation d'entreprise, en heures, nombre entier.

C_{s0} : durée standard du temps de travail hebdomadaire, en heures, nombre entier. En France : $C_{s0} = 35 \text{ heures}$.

θ : efficacité des acteurs, nombre réel compris entre 0 et 1, adimensionnel.

τ : taux de pénalité par jour de débordement, nombre réel adimensionnel.

U : coût horaire standard des acteurs, en unités monétaires, nombre réel

u : taux de bonification des heures supplémentaires, facteur multiplicatif appliqué au coût horaire standard, nombre réel adimensionnel.

UF : coût fixe associé à la flexibilité résiduelle, en unités monétaires, nombre réel.

US : coût fixe de stockage journalier de l'activité, en unités monétaires, nombre réel.

. Variables de décision

$\sigma_{a,k,i}$: Affectation de l'acteur a de compétence k sur la tâche i, variable binaire ; $\sigma_{a,k,i} = 1$ si l'acteur a est affecté pour sa compétence k sur la tâche i, sinon $\sigma_{a,k,i} = 0$.

$d_{i,k}$: durée réelle d'exécution de la tâche i pour la compétence k, en jours, nombre entier.

. Autres variables

ω : travail, en heures, nombre réel.

HS : heures supplémentaires, en heures, nombre réel.

dd : date de début, nombre entier.

d : durée globale d'une tâche ($d_i = \max(d_{i,k})_{k=1 \text{ à } K}$), nombre entier

LV : durée total réelle d'exécution de l'activité, en jours, nombre entier.

O : taux d'occupation d'un acteur, nombre réel adimensionnel.

EE : effectif équivalent, nombre réel adimensionnel.

ER : effectif réel, nombre entier.

ρ : ensemble des tâches en cours d'exécution, désigne également son cardinal, nombre entier.

τopt : taux d'optimisation de l'affectation.

τFlexR : taux moyen de flexibilité résiduelle des acteurs.

I. INTRODUCTION

Dans les groupes industriels, la réalisation d'une activité est organisée en impliquant des ressources qui conduisent à la création de biens ou de services; ces ressources mobilisées appartiennent généralement à l'un des quatre grands types : les acteurs, qui interviennent dans le processus de réalisation, les équipements (machines, outillages, installations, …), les matières qui subissent les transformations et les informations techniques ou procédurales (gammes, consignes, nomenclature, …). Pour la recherche

d'une solution adéquate, les ingénieurs sont amenés à formaliser les différents problèmes dont la résolution dégage un aspect combinatoire important. Un de ces problèmes est l'ajustement permanent entre la charge de travail représentée par les travaux à réaliser et la disponibilité des ressources de l'entreprise. Parmi toutes ces ressources, la ressource humaine est l'une des plus délicates à maîtriser et à gérer à cause des multiples aspects réglementaires et aléatoires ; par exemple, la charge de travail limité dans le temps, la maladie, les congés, etc. ; se pose donc un problème de disponibilité [1]. Pourtant, la réalisation d'un bien est assurée par une succession de tâches, consommant des ressources humaines [2] qui sont par nature renouvelables et cumulatives [3] et transformant les caractéristiques morphologiques ou spatiales de matières [4].

De ce fait, pour mener à bien une activité, les entreprises s'organisent autour d'un concept commun qui est la planification. Cependant, ce travail de planification se heurte au double problème : d'une part, de respecter des contraintes d'ordonnancement entre les tâches et d'autre part, de vérifier la disponibilité des acteurs. Si les premières sont généralement imposées par la logique de réalisation de l'activité, le traitement des acteurs est souvent abordé en supposant de leur part une capacité de travail régulière, et surtout prédéterminée [5-11]. Cette hypothèse ne permet pas de prendre en compte la grande souplesse d'affectation qu'offrent certaines ressources de par leurs multiples compétences qu'ils pourraient avoir. De plus, les tâches sont souvent abordées avec des durées et des dates de début prédéterminées [5,6] ce qui réduit considérablement les marges de manœuvre de réalisation de l'activité.

Dans ce contexte, nous nous sommes interrogés sur la possibilité de la modularité des durées de réalisation des tâches à partir des possibilités d'affections des acteurs en fonction de leur polyvalence en tenant compte de la modulation du temps de travail [7,8]. Ce travail s'inscrit dans une logique de recherche d'une méthodologie d'affectation flexible des acteurs pour donner une réactivité aux entreprises lors de la planification de leur activité en leur permettant d'ajuster leur disponibilité aux charges des activités ; il se consacre à la caractérisation et à la modélisation du problème. Dans le deuxième article qui suit le présent dans le même journal, nous exposons les méthodes de résolution que nous avons proposées.

II - METHODOLOGIE

II-1. Typologie du problème

Nous considérons une activité constituée de I tâches, les liens de précédence entre les tâches étant connus ; cette activité est réalisée au sein d'une

entreprise dans laquelle on recense K compétences. Pour chaque tâche i de l'activité, on connaît la charge $w_{i,k}$ qui représente la charge (exprimée en heures) nécessaire dans la compétence k pour l'exécution de la tâche (on notera que toute tâche peut mobiliser plusieurs compétences). La durée de réalisation de la tâche i sur la compétence k, $d_{i,k}$ n'est pas connue a priori, mais c'est une variable définie dans un intervalle de tolérance : $d_{i,k} \in \left[D_i^{min}, D_i^{max}\right]$ où D_i^{min} et D_i^{max} représentent respectivement les durées minimale et maximale que peut prendre la tâche. Cette entreprise dispose d'acteurs polyvalents et chaque acteur a est caractérisé par une efficacité $\theta_{a,k}$ inférieure ou égale à 1 sur chacune des compétences qui peut régir son affectation. Le choix d'affectation d'un acteur a sur une tâche i en fonction de sa compétence k, $\sigma_{a,k,i}$ est aussi une variable de décision du problème. Pour chaque compétence k, on connaît l'effectif A_k (nombre d'acteurs possédant la compétence k) ; ce nombre d'acteurs peut fournir une quantité d'heures de travail équivalente disponibles Q_k calculée en fonction de la durée règlementaire du temps de travail et de l'efficacité de chaque acteur. A chaque acteur on associe un coût horaire U_a. Si dd_i est la date de début de la tâche i, le problème consiste à minimiser un coût d'affectation, en respectant d'une part les contraintes de précédence entre tâches, et en veillant d'autre part à ce qu'à toute date j donnée, la somme des charges des tâches en cours d'exécution ne dépasse pas la quantité d'heure de travail équivalente disponibles.

II-2. Caractérisation des leviers de flexibilité

II-2-1. La polyvalence

Dans nos travaux, pour caractériser la notion de polyvalence dans les entreprises, nous avons associé une grandeur appelée « efficacité » à chacune des compétences que pouvait détenir un acteur [8].

L'efficacité d'un acteur a sur une compétence k sera notée $\theta_{a,k}$ et est une grandeur adimensionnelle qui intervient dans la détermination du travail à fournir par l'acteur. Dans notre modèle, $\theta_{a,k} \in [\theta_{min}, 1]$ ***(Tableau 1)***.

Tableau 1 : *Exemple d'efficacité par compétence des acteurs*

N° Acteur a	efficacité par compétence $\theta_{a,k}$			
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0,5
3	0,6	0	1	0
4	0	0,8	0	1
5	0,7	0	1	0

Dans ce ***Tableau 1***, l'acteur 1 à une compétence unique d'efficacité 1 (compétence k2), par contre l'acteur 2 possède deux compétences (k1 d'efficacité 1 et k4 d'efficacité à 0,5). D'autres travaux donnent la valeur supérieure ou égale à 1 à chacune des compétences de chaque acteur [5]. Pour nous, la valeur 1 représente l'efficacité nominale de l'acteur (dans sa compétence principale, par exemple), et les valeurs non nulles inférieures ou égales à 1 traduisant son efficacité dans différentes compétences supplémentaires qu'il aurait acquises. θ_{min} représentent la borne inférieure en dessous de laquelle une affectation n'est pas jugée souhaitable, pour des raisons économiques ou liées à la qualité. Dans ce cas, le planificateur peut reporter certaines surcharges sur des acteurs disponibles, même si leur efficacité n'est pas optimale sur les compétences concernées ; cela évite le recours aux heures supplémentaires ou le recrutement d'acteurs extérieurs [9].

Un acteur polyvalent dispose alors d'un répertoire de compétences lui permettant d'être affecté à différentes tâches faisant appel à différentes compétences [7]. Ce facteur de flexibilité doit pouvoir permettre à l'entreprise de bénéficier d'un travail variable par compétence à partir d'un effectif réel constant. Dans la pratique industrielle, un acteur polyvalent ne met pas le même temps dans l'exécution d'une tâche lorsque celle-ci fait appel à telle ou telle compétence de l'acteur. De ce fait, pour toutes les compétences, l'acteur ne dispose pas des mêmes niveaux de d'efficacité.
Pragmatiquement, une tâche qui ne nécessite pour sa réalisation qu'une seule ressource de compétence k, et définie par une charge de $w_{i,k}$ (en heures), requiert implicitement la même quantité de travail $w_{i,k}$ lorsqu'elle est confiée à un acteur d'une efficacité nominale ($\theta_{a,k}=1$) dans cette compétence ; dans le cas où l'acteur concerné a une efficacité inférieure à

l'efficacité nominale, le travail $\omega_{a,k}$ nécessaire à la réalisation de cette tâche sera de :

$$\omega_{a,k} = \frac{w_{i,k}}{\theta_{a,k}} \qquad (1)$$

D'où un rallongement de la charge globale de l'entreprise qu'il faut minimiser.

II-2-2. La modulation d'horaire

La modulation consiste à négocier un accord collectif de lissage annuel du temps de travail afin d'éviter, en haute période, un recours massif à des heures supplémentaires coûteuses et en basse saison à un chômage technique également coûteux. Aussi, la modulation du temps de travail offrent une flexibilité importante, elles permettent de faire varier la plage horaire quotidienne et hebdomadaire tant au niveau des acteurs, qu'au niveau collectif (heures d'ouverture et de fermeture des ateliers). Elles permettent aux entreprises de faire face aux fluctuations de charges sans surcoût en augmentant la durée du travail en cas de forte activité et en la réduisant lorsque l'activité diminue.
Autrement dit, un acteur possède une disponibilité horaire qui évolue au cours du temps. Cet acteur devient alors une ressource consommable, c'est-à-dire que sa consommation globale (ou cumul) au cours du temps est limitée avec un capital d'heures maximum à faire sur une période donnée. Les maxima et minima hebdomadaires des travaux pour chaque acteur se déroulent autour d'un horaire moyen C_{sO} hebdomadaire. En France $C_{s0} = 35$ heures.

III – MODÉLISATION

III-1. Représentation de l'unité de planification

La planification d'une activité nécessite le choix de l'unité de temps. Cette unité peut être : l'heure, le jour, la semaine, le mois, etc. Comme dans le cas des problèmes d'ordonnancement, qui prennent en compte des contraintes d'affectation des ressources, le choix le plus fréquemment effectué, conduit à une représentation discrète et uniforme du temps, reposant sur une division de l'horizon considéré en période de durées égales. Dans notre démarche de modélisation, nous avons choisi de travailler avec l'unité « *jour* » et d'exprimer la charge des tâches et le travail des acteurs en « *heures* ». Afin de modéliser les contraintes hebdomadaires, nous supposons qu'une semaine

équivaut à cinq jours consécutifs, ce qui donne deux jours de repos consécutifs aux acteurs. Nous supposerons aussi que les jours travaillés et chômés sont les mêmes pour tous les acteurs.

III-2. Modélisation des contraintes du problème

Les contraintes du problème sont représentées par un ensemble d'équations de type égalité ou inégalité.
Nous distinguons quatre familles de contraintes :
- *les contraintes temporelles et de précédence*, permettent de limiter dans le temps la réalisation de l'activité et de donner l'ordre d'exécution des tâches ;
- *les contraintes de disponibilité et de compétence*, permettent de limiter l'occupation d'un acteur et définissent la valeur minimale de l'efficacité à respecter avant toute affectation ;
- *les contraintes de modulation d'horaire*, limitent les dépassements du temps de travail conformément à la législation en vigueur. Pour modéliser les contraintes liées au temps de travail, nous avons adopté un horaire hebdomadaire standard C_{s0}. En France $C_{s0} = 35\ heures$;
- *les contraintes d'affectations*, permettent de limiter les affectations des acteurs sur les tâches en respectant les effectifs globaux de chaque compétence.

III-2-1. Les contraintes temporelles et de précédence

Ces contraintes permettront de limiter les durées d'exécution des tâches et par déduction celle de l'activité. Ainsi, la date de début d'une tâche est déduite à partir de ces contraintes, en tenant compte des durées de ses tâches antécédentes. Nous avons distingué trois contraintes fondamentales : les contraintes sur la durée réelle d'exécution des tâches, la contrainte sur la durée d'exécution globale de l'activité et les contraintes de précédence entre les tâches.

III-2-1-1. Contrainte sur la durée réelle d'exécution des tâches

Une des caractéristiques d'une tâche réside dans le nombre de compétences qu'elle mobilise. Ainsi, à chaque compétence k de la tâche sera associée une durée réelle d'exécution $d_{i,k}$. De ce fait, définir la durée réelle d_i d'exécution d'une tâche revient à identifier la durée d'exécution $d_{i,k}$ de la tâche sur chacune de ses compétences. Cette durée sera comprise entre les durées minimale et maximale de la tâche considérée.

$$D_i^{min} \leq d_{i,k} \leq D_i^{max} \quad , \quad \forall i \, \forall k \qquad (2)$$

$$d_i = \max\left(d_{i,k}\right)_{k=1 \text{ à } K} \quad \Rightarrow \quad D_i^{min} \le d_i \le D_i^{max} \qquad (3)$$

Notons que $d_{i,k}$ est une variable de notre problème. Elle sera déterminée par voie algorithmique.

III-2-1-2. Contrainte sur la durée réelle d'exécution de l'activité

Nous supposerons que la réalisation d'une activité a pour origine un contrat entre l'entreprise et un client. De ce fait, il est fixé une date de fin à laquelle le résultat de l'activité est livré au client. Dans le cadre de notre problème, nous supposons que la durée fixe contractuelle L de l'activité est déterminée à partir d'un ordonnancement initial basé sur les durées standards des tâches. A cette durée L, nous ajoutons une partie flexible β positive ou nulle permettant à l'entreprise d'avoir une marge ou non sur la date de fin de l'activité. On considérera que si le résultat est fourni au client avec un retard supérieur à □, l'entreprise se voit imposer des pénalités ; de la même manière, on évitera de terminer le travail plus tôt que □ pour éviter des coûts de stockage sur le produit fini. Ainsi, pour éviter tout frais de pénalité ou de stockage, il faut que la durée réelle LV de l'activité soit comprise dans l'intervalle suivant :

$$L - \beta \le LV \le L + \beta \qquad (4)$$

Le choix de β sera fonction de l'urgence de l'activité et des négociations entre l'entreprise et le client. Dans le cas de notre problème, nous avons choisi $\beta = 5$ jours (à titre indicatif).

III-2-1-3. Les contraintes de précédence entre tâches

Ces contraintes permettront de respecter la logique de réalisation de l'activité et d'identifier les dates de début des tâches à partir de leurs antécédents, en admettant que les tâches sans antécédent débutent à la date $dd_i = 0$. Nous prenons en compte quatre types de liens qui peuvent exister entre les tâches : les liens Fin-Début, Début-Début, Fin-Fin et Début-Fin. Ces liens peuvent être assortis d'un délai (positif ou négatif). Ces contraintes doivent obligatoirement être respectées à chaque étape de la résolution du problème.

Pour une modélisation simple, nous considérons deux tâches i et n, et i est une tâche antécédente de n. Avec les contraintes de précédence, on calcul la date de début de la tâche n, on aura :

- Fin-Début : la fin de i autorise le début de n :

$$dd_n \ge dd_i + d_i + \alpha_{i,n} \qquad (5)$$

- Fin-Fin : la fin de i autorise la fin de n :

$$dd_n \geq dd_i + d_i - d_n + \alpha_{i,n} \quad (6)$$

- Début-Début : le début de i autorise le début de n :

$$dd_n \geq dd_i + \alpha_{i,n} \quad (7)$$

- Début-Fin, le début de i autorise la fin de n :

$$dd_n \geq dd_i + d_n + \alpha_{i,n} \quad (8)$$

Dans ces équations, outre les liens, nous pouvons avoir un délai d'ordonnancement positif ou nul symbolisé par $\alpha_{i,n}$ représente l'écart temporel entre les tâches i et n.

Dans un calcul d'ordonnancement, une tâche peut avoir plus d'un antécédent, si Δ_i représente l'ensemble des tâches antécédentes de la tâche i, on calcule la date de début de cette tâche autant de fois qu'elle a d'antécédents. Dans ce cas, la date de début de la tâche i sera le maximum des dates de début calculées :

$$dd_i = \max(dd_i)_{dd_i \text{ calculée pour chaque tâche précédente} \in \Delta_i} \quad (9)$$

III-2-1-4. Les contraintes de modulation d'horaires

C'est un groupe de contraintes qui provient des données règlementaires sur le temps de travail ; Cinq types intéressent notre problème : les contraintes sur les disponibilités maximales d'un acteur par jour, par semaine et sur une période flottante de douze semaines consécutives, ainsi que les contraintes sur les charges des tâches, et les contraintes sur les heures supplémentaires.

III-2-1-5. Contraintes sur la disponibilité maximale journalière

Pour un jour j donné, un même acteur peut être affecté, avec plusieurs de ses compétences si son efficacité est jugée suffisante, sur plusieurs tâches différentes, à conditions que la somme de ses travaux journaliers respecte la durée maximale journalière réglementaire $DMaxJ$.

Par exemple en France $DMaxJ = 10 \text{ heures}$:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} \omega_{a,k,i,j} * \sigma_{a,k,i} \leq DMaxJ, \quad \forall a \ \forall j \quad (10)$$

$$\omega_{a,k,i,j} \geq 0 \quad (11)$$

$\sigma_{a,k,i}$ est la variable binaire d'affectation des acteurs sur les tâches en fonction de leur compétence.

III-2-1-6. Contraintes sur la disponibilité maximale hebdomadaire

La somme des travaux réalisé par un acteur a sur la semaine s, $\omega_{a,s}$ doit respecter la durée de travail hebdomadaire réglementaire $DMAxS$. Par exemple en France cette disponibilité maximale est de : $DMaxS = 48$ heures.

$$\omega_{a,s} = \left(\sum_{j=(NJS*s)+1}^{NJS*(s+1)} \left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \sigma_{a,k,i} * \omega_{a,k,i,j} \right) \right)_{s=0,1,\cdots,Ent\left(\frac{LV-1}{NJS}\right)}, \forall a \ \forall s \quad (12)$$

$$\omega_{a,s} \leq DMaxS, \forall a, \forall s \quad (13)$$

$$\omega_{a,s} \geq 0, \forall a \ \forall s \quad (14)$$

III-2-2. Contraintes sur la charge par compétence d'une tâche

Un acteur a affecté sur une charge $w_{i,k}$ d'une tâche fournit un travail $\omega_{a,i,k}$ qui est fonction de son efficacité afin de couvrir la charge considérée. Ce travail fourni par l'acteur sera égal à la charge si l'acteur a une efficacité nominale ($\theta_{a,k} = 1$) sur la compétence. Par contre ce travail sera supérieur à la charge si son efficacité est inférieure à la valeur nominale.

$$\omega_{a,i,k} = \frac{w_{i,k}}{\theta_{a,k}} \quad \textit{(cf. équation 1)}$$

Ce dépassement en nombre d'heures de travail sera le coût à payer pour l'utilisation de la polyvalence (compétences supplémentaires acquis par un acteur dont l'efficacité est inférieure à la valeur nominale). Dans tous les cas, l'objectif est de couvrir la totalité de la charge, et ceci avec un ou plusieurs acteurs sur un ou plusieurs jours selon la planification de la tâche.

$$\sum_{a \in ER_{i,k}} \left(\sum_{j=1}^{d_{i,k}} \omega_{a,k,i,j} * \sigma_{a,k,i} * \theta_{a,k} \right) = w_{i,k}, \quad \forall i \ \forall k \quad (15)$$

$ER_{i,k}$ représente l'effectif réel (nombre entier) des acteurs affectés pour exécuter la charge $w_{i,k}$.

III-2-3. Contraintes sur les heures supplémentaires

Pour un acteur, on appellera heures supplémentaires les heures $HS_{a,s}$ effectuées par un acteur a au-delà de la limite hebdomadaire de l'accord de modulation $DMaxMod$. En effet, l'utilisation de la modulation

nécessite la mise en place d'une limite hebdomadaire au-delà de laquelle on commence à appliquer les heures supplémentaire. Ainsi, pour une semaine de travail, les heures supplémentaires qu'effectuera un acteur seront inférieures ou égales à la différence de la durée maximale hebdomadaire du temps de travail $DMaxS$ et de la limite de modulation fixée $DMaxMod$.

$$HS_{a,s} \leq DMaxS - DMaxMod, \forall a \ \forall s \tag{16}$$

$$HS_{a,s} \geq 0, \forall a \ \forall s \tag{17}$$

Cette contrainte s'appliquera si le travail hebdomadaire effectué par un acteur dépasse $DMaxMod$:

$$\begin{cases} HS_{a,s} = \omega_{a,s} - DMaxMod & \text{si} \quad \omega_{a,s} \geq DMaxMod \\ HS_{a,s} = 0 & \text{Si non} \end{cases} \tag{18}$$

La loi sur la modulation du temps de travail limite également le nombre d'heures supplémentaires annuelles qu'un acteur peut effectuer ; si ce nombre est HSA, On a :

$$\sum_{s=1}^{Ent[(LV-1)/NJS]+1} HS_{a,s} \leq HSA - HSR_a \quad \forall a, \tag{19}$$

Où HSR_a représente le nombre d'heures supplémentaires déjà effectué par l'acteur a dans la même année.

III-2-4. Contraintes sur la capacité maximale pour une période flottante de douze semaines consécutives

La réglementation sur la modulation du temps de travail indique que, pour tout acteur, le travail moyen hebdomadaire sur douze semaines consécutives, ne doit pas dépasser un certain seuil $DMax12S$, par exemple en France $DMax12S$ est de 44 heures. Pour mettre en pratique cette contrainte, il faut que le nombre de semaines d'exécution de l'activité soit supérieur à douze semaines consécutives.

$$\frac{\left(\sum_{s=p}^{p+11} \omega_{a,s}\right)_{p=0 \text{ à } (p+11) \leq Ent\left(LV-1/NJS\right)}}{12} \leq DMax12S, \forall a \tag{20}$$

III-2-5. Les contraintes d'affectation

Face à un problème d'affectation, il y a des choix à faire quand au nombre d'affectations d'un acteur sur une même période. Dans le cas de notre problème, où nous considérons la polyvalence des acteurs, et le fait qu'une

tâche peut mobiliser plus d'une compétence, nous avons besoin de définir des contraintes pour encadrer le processus d'affectation. Ainsi, nous avons : la contrainte sur le nombre d'affectations possibles d'un acteur sur une tâche, la contrainte sur l'effectif équivalent qu'on peut affecter sur une tâche et la contrainte sur l'effectif réel affecté.

III-2-5-1. Contrainte sur le nombre d'affectations d'un acteur sur une tâche

Un acteur polyvalent détient une efficacité suffisante sur plus d'une compétence qui peut régir son affectation. Dans le cas où une tâche mobilise au moins deux compétences d'un acteur, il peut être affecté à chacune des charges $(w_{i,k})_{k=1,\cdots,K}$ et ce, quelle que soit la tâche. Si nk_a représente le nombre de compétences que détient un acteur a, on aura :

$$\sum_{k\in nk_a} \sigma_{a,k,i} \geq 0\,, \quad \forall a\, \forall i \tag{21}$$

Rappelons que toutes les charges $(w_{i,k})_{k=1,\cdots,K}$ d'une tâche ont toutes la même date de début.

III-2-5-2. Contrainte sur l'effectif équivalent affecté

L'effectif équivalent représente la « *productivité* » réelle des acteurs affectés à une charge $w_{i,k}$. Les acteurs étant polyvalent, ils ne participent pas tous de manière équivalente à la réalisation d'une tâche, même s'ils effectuent le même nombre d'heures sur cette tâche. Les acteurs dont l'efficacité sur la compétence est inférieure à la valeur nominale apporteront moins de productivité que ceux dont l'efficacité est nominale. Ainsi, pour connaître l'effectif équivalent $EE_{i,k}$ des acteurs affectés à la tâche i de compétence k, nous faisons une sommation de leurs efficacités respectives.

$$EE_{i,k} = \left(\sum_{a\in ER_{i,k}} \theta_{a,k}\right)_{\theta_{a,k}\geq\theta_{min}} \quad \forall i\, \forall k \tag{22}$$

Cependant, pour une tâche i et une compétence k, si la charge $w_{i,k}$ correspondante est non nulle, il faut absolument que l'effectif équivalent correspondant soit supérieur ou égal à l'efficacité minimale θ_{min}, on a :

$$EE_{i,k} \geq \theta_{min}\,, \quad \forall i\, \forall k \tag{23}$$

III-2-5-3. Contraintes sur l'effectif réel affecté

Lors de l'exécution d'une activité, plusieurs tâches peuvent être enclenchées le même jour. De ce fait, ces tâches peuvent mobiliser la même compétence

k. Il faut que le modèle veille à ce que pour un jour j donné, le nombre d'acteurs de même compétence affecté aux tâches en cours d'exécution ne dépasse pas le nombre total d'acteurs possédant cette compétence. Si A_k est ce nombre d'acteur et si $\rho_{j,k}$ représente l'ensemble des tâches en cours d'exécution le jour j et mobilisant la compétence k, on aura :

$$\sum_{i \in \rho_{j,k}} ER_{i,k,j} \leq A_k \ , \quad \forall j \, \forall k \tag{24}$$

III-2-6. Les contraintes de disponibilité et de compétence

Ce groupe de contraintes permettra une utilisation rationnelle des acteurs et la vérification de l'efficacité de chaque acteur avant son affectation pour s'assurer qu'elle respecte l'efficacité minimale autorisée. Nous avons : la contrainte sur l'efficacité d'un acteur et la contrainte de disponibilité.

III-2-6-1. Contrainte sur l'efficacité d'un acteur

L'efficacité permet d'apprécier le comportement global d'un acteur dans une compétence. Ainsi, pour l'affectation d'un acteur, une entreprise se doit de fixer une valeur minimale θ_{min} en dessous de laquelle toute affectation est impossible. Le choix de cette borne inférieure dépend des enjeux de l'activité pour l'entreprise. Une borne inferieure qui tend vers la valeur nominale permet d'augmenter la valeur ajouté des acteurs retenus mais sacrifie l'idée même de la polyvalence.

$$\theta_{min} \leq \theta_{a,k} \leq 1 , \quad \forall a \, \forall k \tag{25}$$

(L'équation précédente n'est pas vraie « ∀ a, ∀ k » : seulement si l'acteur a est affecté pour la compétence k) Dans le cas de notre modèle, nous avons pris arbitrairement $\theta_{min} = 0{,}5$ et la valeur nominale $\theta_{a,k} = 1$. Notons que certains auteurs [5] admettent des efficacités supérieures à 1.

III-2-6-2. Contrainte de disponibilité des acteurs

La mise en œuvre de la modulation d'horaire permet de faire varier le travail hebdomadaire des acteurs à l'intérieur d'un intervalle convenu dans les accords. Pour cela, un acteur peut être utilisé au-delà de la durée standard au cours d'une semaine, et mis au repos ou moins sollicité dans une autre. Ainsi, l'occupation des acteurs se fait selon la charge présente de l'entreprise reposant sur l'ordre d'exécution des tâches.

De ce fait, on appellera taux d'occupation $O_{a,s}$ d'un acteur a sur la semaine s, le rapport du travail hebdomadaire effectué $\omega_{a,s}$ sur le travail standard hebdomadaire C_{s0},

$$O_{a,s} = \frac{\omega_{a,s}}{C_{s0}}, \quad \forall a \, \forall s \tag{26}$$

Notons que ce taux peut être supérieur à 1. Dans tous les cas, l'occupation ne dépassera pas un seuil calculé en fonction de la durée maximale de travail réglementaire autorisé $DMaxS$.

$$0 \le O_{a,s} \le \frac{DMaxS}{C_{s0}} \tag{27}$$

$O_{a,s}$ permettra d'apprécier la flexibilité résiduelle des acteurs à la fin de l'activité. On appellera flexibilité résiduelle, la disponibilité future qui a été préservée lors de l'affectation de l'activité courante. Pragmatiquement, si une activité dure une semaine et que l'occupation de l'acteur a est $O_{a,s}$ la flexibilité résiduelle est de : $(1 - O_{a,s})$. Si cette valeur est positive, on conclura qu'il y a préservation de la capacité de travail de l'acteur sur la ou les semaine(s) suivante(s) ; on gagne donc en flexibilité, ce dont on tiendra compte lors des affectations futures – et dans l'évaluation d'une telle solution via la fonction – objectif.

III-3. La fonction objectif

La prise en compte de la polyvalence nous amène à identifier un critère d'évaluation des solutions obtenues, qui serait un critère économique : les différentes solutions d'affectations ("toutes choses étant égales par ailleurs") entraîneront des sommes d'heures de travail variables, en fonction de l'efficacité des différents acteurs retenus sur chacune des tâches. La recherche pour une affectation de l'efficacité $\theta_{a,k}$ maximale contribue donc non seulement à la minimisation de la durée réelle d'exécution de la tâche $d_{i,k}$, mais aussi à un minimum économique. On voit que ce critère permet également d'évaluer le coût du recours à la polyvalence. Assez logiquement, notre fonction objectif se traduit donc par l'évaluation d'un coût de réalisation d'une activité, coût qu'il conviendra de minimiser. Le coût global à minimiser est alors la somme de quatre composantes différentes : le coût du travail effectué dans les heures « normales » (F1), le coût du travail en heures supplémentaires (F2), le coût des écarts par rapport à une date de fin

souhaitée (F3 : pénalités de retard ou coût de stockage), et enfin un coût lié à une utilisation excessive de la flexibilité (F4). Parmi ces coûts, $F1$, $F2$ et $F3$ sont des fonctions qui déterminent un coût réel en unités monétaires. En revanche, la fonction $F4$ mesure la flexibilité résiduelle en fin d'activité. $F4$ est ramenée à l'appréciation d'un coût pour nous permettre de résoudre un problème d'affectation monocritère. Ainsi, nous exprimons :

F1 : Coût du travail normal :

Cette fonction permet de calculer le coût salarial du travail réalisé dans les heures normales, sans tenir compte des heures supplémentaires. Si nous appelons U_a le taux horaire de l'acteur a, on a :

$$F1 = \sum_{a=1}^{A} \sum_{s=1}^{Ent[(LV-1)/NJS]+1} \left(\omega_{a,s} - HS_{a,s}\right) U_a \tag{28}$$

F2 : Coût des heures supplémentaires

Les heures supplémentaires sont majorées d'un facteur (1+u) par rapport aux heures normales avec u le taux de majoration :

$$F2 = \sum_{a=1}^{A} \left(\left(\sum_{s=1}^{Ent[(LV-1)/NJS]+1} HS_{a,s} \right) * (1+u) \right) U_a \tag{29}$$

F3 : Coût d'immobilisation du résultat ou de pénalités de retard

La durée contractuelle d'une activité est un intervalle défini autour d'une durée fixe L appelé «zone flexible de durée contractuelle». Cette zone est définie par : $L - \beta \leq LV \leq L + \beta$. (30)

Pour tenir compte du calcul de la fonction $F3$, il faut que la durée réelle LV de l'activité soit en dehors de cette zone.

Lorsque la fin réelle de l'activité est antérieure à la zone flexible de durée contractuelle, le résultat de l'activité doit être stocké, en attendant sa livraison : pour cela nous tenons compte du coût de l'immobilisation financière que peut engendrer ce stockage, si nous appelons US le coût de stockage journalier de l'activité, on a :

$$LV < (L - \beta) \quad \Rightarrow \quad F3 = US(L - \beta - LV) \tag{31}$$

Cette considération du coût de stockage, si elle ne s'impose pas, peut être omise en choisissant un coût nul pour US. Le choix d'une valeur négative pour US peut également traduire l'existence de gratifications versées par le client en cas de livraison anticipée par rapport aux engagements contractuels.

En revanche, si la date de fin réelle de l'activité dépasse la zone flexible de durée contractuelle, on identifie le temps de dépassement. La pénalité est calculée avec un taux de pénalité journalier que nous supposons constant τ_j. Cette pénalité sera calculée en fonction du coût salarial des acteurs affectés.

$$LV > L + \beta \quad \Rightarrow \quad F3 = \sum_{j=1}^{LV-(L+\beta)} (F1 + F2) * \tau_j \qquad (32)$$

Si la durée réelle de l'activité est à l'intérieure de la zone flexible de durée contractuelle, il n'y aura ni coût de stockage, ni pénalités.

$$L - \beta \leq LV \leq L + \beta \quad \Rightarrow \quad F3 = 0 \qquad (33)$$

F4 : Coût associé à la flexibilité résiduelle des acteurs

Contrairement aux précédentes, cette fonction représente un coût fictif relatif à une utilisation non optimale des acteurs ; elle permettra de préserver un minimum de flexibilité pour une réactivité future maximale de l'entreprise. Cette fonction a ainsi pour objectif de pénaliser une solution qui serait performante pour l'exécution d'une activité qui durerait quelques semaines, mais consommerait toute la marge de flexibilité dont jouit l'entreprise sur une année entière. Plus la valeur de cette fonction sera élevée, plus il aura préservation de flexibilité pour l'entreprise via la capacité future de travail des acteurs. Le but de cette sous-fonction est de peser dans la fonction objectif pour privilégier des solutions qui offrent une flexibilité future intéressante. Si nous appelons UF_a le coût associé pour la flexibilité d'un acteur a et $O_{a,s}$ son occupation à la semaine s, on a :

$$F4 = \sum_{a=1}^{A} UF_a \left(1 - \frac{\sum_{s=1}^{Ent[(LV-1)/NJS]+1} O_{a,s}}{Ent[(LV-1)/NJS]+1} \right) \qquad (34)$$

UF_a est le coût unitaire de flexibilité de l'acteur, il peut être défini en fonction de l'importance de la compétence détenu par l'acteur a. On peut donner une valeur plus grande pour certains acteurs que pour d'autres, afin de préserver leur flexibilité future selon l'importance et la rareté des compétences détenues. Dans le cas des exemples que nous allons présenter dans ce mémoire, nous supposerons que toutes les compétences ont la même importance donc un UF_a équivalent pour tous les acteurs.

En somme, la fonction objectif à minimiser se calcule de la manière suivante :

$$F = (F1 + F2 + F3 - F4) \quad (35)$$

Ainsi, toute solution qui respecte l'ensemble des contraintes et qui préserve un minimum de flexibilité sera privilégiée.

III-4. Indicateurs de performance

Pour évaluer la performance de la méthodologie de résolution, nous avons défini deux indicateurs :
- le taux d'optimisation de l'affectation pour connaître l'impact de la polyvalence,
- le taux moyen de flexibilité par acteur pour apprécier la préservation de sa disponibilité.

III-4-1. Taux d'optimisation de l'affectation

Pour mesurer l'impact de la polyvalence sur le résultat de l'affectation, nous définissons un indicateur d'évaluation « taux d'optimisation de l'affectation » **:** τopt **.** Ce taux sera la productivité globale des acteurs sur la réalisation de l'activité. Il correspond au rapport entre l'effectif équivalent affecté et l'effectif réel :

$$\tau opt = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{k} EE_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} ER_{i,k}} \quad (36)$$

τopt sera comprise entre $0 \le \tau opt \le 1$. Si nous supposons que tous les acteurs obéissent au même taux horaire U alors nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

Plus τopt se rapprochera de 1, plus le travail global de l'entreprise pour réaliser l'activité tendra vers la somme des charges des tâches qui la composent : on se rapprochera d'une solution optimale que ce soit au point de vue du travail que du coût de réalisation.

III-4-2. Taux moyen de flexibilité résiduelle $\tau FlexR_a$

Ce taux mesure la disponibilité moyenne préservée par acteur dans l'horizon de planification.

$$\tau FlexR_a = 1 - \frac{\sum_{s=1}^{Ent[(LV-1)/NJS]+1} O_{a,s}}{Ent[(LV-1)/NJS]+1} \quad (37)$$

En effet, lorsqu'un acteur n'a pas été affecté sur aucune charge de l'activité, sa flexibilité résiduelle est de 1 (préservation 100% de sa disponibilité). Par contre s'il est occupé, on détermine son taux d'occupation moyenne comme calculé dans *l'équation 25*. Ainsi, le taux moyen de flexibilité résiduelle $\tau FlexR_a$ n'est rien d'autre que le complémentaire du taux d'occupation moyen.

IV - CONCLUSION

La polyvalence des acteurs est un moyen évident de flexibilité qui permet aux entreprises d'absorber des surcharges de travail qui ne peuvent pas en principe l'être dans un environnement sans polyvalence. Elle permet donc une gestion efficace des compétences des acteurs et engendre plus de réactivité. Par contre, l'utilisation de la polyvalence engendre un travail global plus important mais cela évite l'utilisation des ressources extérieures et l'usage abusif des heures supplémentaires. Cette première partie de l'article nous a permis de caractériser les différents leviers de flexibilité que nous prenons en compte et de traduire par des équations mathématiques, les différentes contraintes du problème. Dans la deuxième partie, nous donnerons notre méthodologie de résolution.

RÉFÉRENCES

[1]- E. Vidal, *''Stratégie de planification pour la flexibilité opérationnelle d'un atelier à cheminement unique''*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, (2000).

[2]- M. BENNOUR, *''Contribution à la modélisation et à l'affectation des ressources humaines dans les processus''*, Thèse de doctorat de l'Université de Montpellier II, France, Décembre (2004).

[3]- P. ESQUIRO., P. LOPEZ, *''L'ordonnancement''*, Ed. les éditions Economica, collection gestion, (1999).

[4]- V. GIARD, *''Gestion de la production et des flux''*, Ed. les éditions Economica, Collection Gestion, (2003).

[5]- M. YOSHIMURA, Y. FUJIMI, K. IZUI, S. NISHIWAKI, *"Decision-making support system for human resource allocation in product development projects"*, International Journal of Production Research, Vol. 44, March (2005) pp. 831 - 848.

[6]- O. BELLENGUEZ, *''Méthodes de résolution pour un problème de gestion de projet multi-compétence''*, Thèse de doctorat, université de Tours, Novembre (2006)

[7]- P. DUQUENNE, K. H. EDI, J. M. LELANNE, "*Characterization and modelling of flexible resources allocation on industrial activities"*, 7th world congress of chemical engineering, Glasgow, Scotland, 10 – 14 Juillet (2005).

[8]- K. H. EDI, P. DUQUENNE, J. M. LELANN, *''Prise en compte de l'efficacité dans la compétence des acteurs : caractéristique essentielle de la polyvalence''*, 6ème congrès international de génie industriel, 7 – 10 Juin (2005), France.

[9]- H. KANE, *''Etude de l'ajustement de la capacité à la charge pour une gestion quantitative des ressources humaines en production''*, Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, (2001).

[10]- R. INMAN, *"Scheduling preventive overtime: a new approach for the automotive industry"*, IIE Transactions, Vol. 28 (1996) 555-556.

[11]- R. HUNG, "*Scheduling a workforce under annualized hours*", Int. J. of Production Research, Vol. 37, N° 11 (1999) 2419-2427