



**HAL**  
open science

## Utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature

Issouf Abdou, Philibert Andriamanantena, Mamy Raoul Ravelomanana, Rivo Rakotozafy

► **To cite this version:**

Issouf Abdou, Philibert Andriamanantena, Mamy Raoul Ravelomanana, Rivo Rakotozafy. Utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature. 2019. hal-02344256v1

**HAL Id: hal-02344256**

**<https://hal.science/hal-02344256v1>**

Preprint submitted on 4 Nov 2019 (v1), last revised 30 Nov 2021 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

.....

Rubrique

## Utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature

ABDOU Issouf\* - Philibert ANDRIAMANANTENA\*\* - RAVELOMANANA Mamy Raoul\*\*\*  
- RAKOTOZAFY Rivo\*\*\*\*

\*Université des Comores

BP 2585, Moroni, rue de la Corniche Comores

abdouissouf8631@gmail.com

\*\*Université de Fianarantsoa

Institut Supérieur des Sciences et Technologie, Amboaloboka, 301 Fianarantsoa, Madagascar

andriphilibert@gmail.com

\*\*\*Université de Antananarivo

Présidence de l'Université d'Antananarivo, Ankatso, 101 Antananarivo, Madagascar

ironmamy@outlook.fr

\*\*\*\*Université de Fianarantsoa

BP 1264, Andrainjato, 301 Fianarantsoa, Madagascar

rrakotoz@yahoo.fr

.....

**RÉSUMÉ.** Cet article qui s'inscrit dans le cadre général des mathématiques appliquées à l'économie est un modèle de prise de décision dans l'ignorance totale. Un tel environnement est caractérisé par l'absence d'une loi de distribution des états de la nature permettant d'avoir des bonnes prévisions ou anticipations. Se basant principalement sur l'intégrale de Choquet, ce modèle permet d'agréger les différents états de la nature afin de prendre une meilleure décision. Cette intégrale de Choquet s'impose par rapport à la complexité de l'environnement et aussi par son caractère pertinent d'agrégation des critères interactifs ou conflictuels. Le présent modèle est une combinaison du modèle de Schmeidler [13] et de l'algorithme de Brice Mayag [7] pour la détermination de la capacité 2-additive de Choquet. Il s'inscrit dans le cadre des modèles subjectifs et apporte une réponse appropriée au paradoxe d'Ellsberg.

**ABSTRACT.** This article, which is part of the general framework of mathematics applied to economics, is a decision-making model in total ignorance. Such an environment is characterized by the absence of a law of distribution of the states of nature allowing having good forecasts or anticipations. Based primarily on the integral of Choquet, this model allows aggregating the different states of nature in order to make a better decision. This integral of Choquet imposes itself with respect to the complexity of the environment and also by its relevance of aggregation of the interactive or conflicting criteria. The present model is a combination of the Schmeidler model [13] and the Brice Mayag algorithm [7] for the determination of Choquet 2-additive capacity. It fits into the framework of subjective models and provides an appropriate response to the Ellsberg paradox.

**MOTS-CLÉS :** Uncertainty, Subjective Preferences, Utility, Choquet Integral, Fuzzy measure

**KEYWORDS :** Incertitude, Préférences Subjectives, Utilité, Intégrale de Choquet, Mesure floue

.....

---

## 1. Introduction

Dans un contexte d'absence des lois des probabilités a priori des événements paussibles, l'aversion pour le risque des gents économiques est très forte. Cet environnement, appelé ignorance totale, a fait l'objet des études antérieures et des modèles comme ceux de Wal [16], Savage [11] , Hurwicz et Laplace [10]. Leurs modèles ne tiennent pas compte des facteurs exogènes (contextes socio-économiques, facteurs climatiques,...).

Le modèle proposé pour ce travail, qui va tenir compte des dits facteurs exogènes, rentre dans le cadre des paradoxes de la théorie de décision selon lesquels les modèles comme ceux d'Espérance d'Utilité (EU) [8] et d'Espérance d'Utilité Subjective (SEU) [12] n'expliquent pas [2] certains comportements observés dans le risque [1] comme dans l'incertain [4]. Il est fondé sur l'intégrale de Choquet [3] nécessitant l'utilisation des mesures ou capacités et permet d'intégrer l'état de la nature dans l'utilité, contrairement aux autres modèles.

La notion de mesure floue a été introduite dans le modèle de Schmeidler mais rien ne dit quant à la façon de la mesurer.

En supposant que les états de nature sont des facteurs exogènes (incertitudes exogènes) et interactifs les uns des autres, la capacité 2-additive de Choquet permet d'identifier ces interactions et surtout permet de définir une loi subjective de distribution de l'ensemble des états du monde considérés.

Pour ce faire, notre travail se subdivise par les travaux connexes, la présentation du modèle et une illustration.

---

## 2. Travaux connexes

Le principe de la rationalité, par son caractère mathématique exige la formalisation d'un modèle. C'est ainsi que des économistes comme Wald [16], [17] et Savage [11] avec leurs modèles sont convaincus que la meilleure de décisions est celle prise dans le pire des cas. A cet effet Wald propose le critère Maximin et pour Savage, il faut minimiser le manque à gagner.

De sa part Hurwicz, le mieux est de concilier le meilleur et le pire de cas par compensation. Cette méthode est proche de celle de la moyenne de Laplace [10] qui introduit une équiprobabilité pour chaque état de la nature.

Von Neumann et Mogenstern [8] avec leur modèle de connaissance a priori des probabilités des états de nature, le modèle de l'utilité espéré qui en réalité a fait face à des probabilités subjectives, est contredit avec les paradoxes d'Allais [1] dans le risque et d'Ellsberg [4] dans l'incertain même si Savage [11] a pu les équipés d'une base axiomatique solide.

Quiggin [9] dans le risque, généralise ce modèle de l'utilité espéré en proposant le modèle d'utilité dépendant du rang et Schmeidler [13] dans l'incertain, propose le modèle d'utilité à la Choquet en proposant plus d'axiomatisation, qui s'adapte à des situations comme celle du paradoxe d'Ellsberg.

En s'inspirant de Schmeidler et en utilisant la capacité 2-additive de Choquet [7], notre modèle permet d'intégrer tous les facteurs exogènes tout en tenant compte des interactions possibles.

---

## 3. Présentation du modèle

Nous allons avant tout présenter les éléments fondamentaux du modèle de la théorie de la décision. Une fois que le décideur a clairement identifier ces éléments à l'intérieur du problème qu'il veut solutionner, il obtient une vue d'ensemble qui lui permet de canaliser ses énergies sur les points prioritaires. L'analyse du problème en sera d'autant plus simplifiée.

### 3.1. L'ensemble des états de la nature et les événements

Ces éléments du modèle de prise de décision sont identifiés par  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , qui est l'ensemble des états de la nature. Dans notre cas l'ensemble de ces états de nature sont supposés exhaustifs et non mutuellement exclusifs, c'est-à-dire si par exemple  $S = \{\text{Cyclone, Inondation, Pluie, Sécheresse, Vent, Crise politique, Crise financière, Epidémie, Guerre, Asymétrie d'information, Maladie}\}$ , l'ensemble des éventualités prises individuellement comme " Crise financière et Cyclone " est possible et ainsi de suite.

En prenant en compte l'ensemble des interactions possibles deux à deux (par le principe de 2-additif), nous trouvons  $S'$  un nouvel ensemble des états de la nature qui, subjectif au décideur, est définie par :  $S' = \{s'_0, s'_1, \dots, s'_m\}$  où  $m > n$ . En d'autres termes, les éventualités individuelles de  $S, S'$  contiennent les interactions possibles des éléments de  $S$ .  $s'_0$  symbolise la neutralité des états de la nature où aucun événement ne se produit. Soit  $A$  un ensemble d'événements de  $S'$  alors  $A$  est définie par  $A = \{s' \in S'\}$ .

Le dirigeant doit régulièrement prendre des décisions qui peuvent constituer un ensemble  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  dans un univers incertain. Dans sa réflexion, il sera aux prises avec plusieurs " inconnus " d'événement  $s'$  de  $S'$  sur lesquels il n'a pas d'influence. Les résultats de sa décision, par conséquent, pourront être ou ne pas être tels qu'il avait anticipé. L'anticipation ou la prévision de tout ce qui peut se produire est à exercer sans égard au niveau de la probabilité d'occurrence de ces états.

### 3.2. La distribution des états du monde

D'une manière générale, tout repose sur cette distribution pour la prise de décision. Cette loi de distribution est très complexes à déterminer et voir même impossible (le cas de l'ignorance total). Nous supposons dans ce travail le cas d'extrême limite (ignorance totale) et grâce à la capacité 2-additive de Choquet [7], une meilleure décision est envisageable. Pour ce faire, nous allons utiliser les préférences subjectives du décideur.

Soient  $P = \{(s'_1, s'_2) \in S' \times S' : \text{le décideur préfère strictement l'état } s'_1 \text{ à } s'_2\}$ , c'est-à-dire  $C_\mu(s'_1) > C_\mu(s'_2)$ ,  $C_\mu$  est la capacité 2-additive de Choquet.

$I = \{(s'_1, s'_2) \in S' \times S' : \text{le décideur est indifférent entre } s'_1 \text{ et } s'_2\}$ , c'est-à-dire  $C_\mu(s'_1) = C_\mu(s'_2)$ .

Le décideur se trouve alors face à un choix qui est affecté par une information binaire [7]  $\{P, I\}$  qui est complétée par la relation de monotonie  $M$  (il n'arrive pas à se prononcer sur son degré de satisfaction entre les états du monde). La relation de monotonie est définie par :

$$\forall x, y \in S, xMy \Leftrightarrow \begin{cases} y = s'_0 & \text{et non}(x(P \cup I)y) \\ \exists i, j \in N & \text{tel que } [x = s_{ij}, y = s_i] \text{ et non}(x(P \cup I)y) \end{cases} \quad (1)$$

Une fois les trois relations déterminées, nous construisons le graphe connexe du décideur qui sera réduit, après vérification de la propriété de monotonie de l'information préférentielle [7] (regroupement des chemins de même longueur), en graphes fortement connexe (voir figure 3 et 4).

En effectuant un tri-topologique sur le graphe réduit, nous trouvons les valeurs de  $\mu$  étant définie par :

$$\forall s' \in S', \mu(\phi(s')) = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0 \\ (2n)^l & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

avec  $l \in \{0, \dots, q\}$  où  $\{X_0, X_1, \dots, X_q\}$  une partition de  $X$  obtenue par un tri topologique sur le graphe réduit de circuit dans  $(P \cup I \cup M)$  [7]. Pour l'ensemble des états la capacité 2-additive  $\nu$  est définie par :

$$\nu(s') = \frac{\mu(s')}{\alpha} \quad (3)$$

où  $\alpha = \sum_{\{i,j\} \in N} \mu(s_{ij}) - (n-2) \sum_{i \in N} \mu(s_i)$  et  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  le cardinal pouvant prendre les états de la nature de  $S$  1 à  $n$ . Cette mesure floue joue le rôle de la loi des distributions des états de la nature qui est subjective au décideur.

### 3.3. L'ensemble des actions envisageables

Ce sont l'ensemble des actions pouvant survenir. Nous les représentons par  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ . L'ensemble des actions peut être fini ou infini. Les limites sont celles que se fixe le décideur. Un acte est une fonction  $f$  définie de  $S'$  vers  $C$  ( $C$  ensemble des conséquences).

### 3.4. La conséquence

La conséquence est un élément fondamental du modèle de décision. Elle consiste en une fonction définie sur  $S'$  et  $F$ . Elle provient de la combinaison d'un événement " $s$ " avec une action " $f$ ". " $C$ " est la valeur numérique mesurant la " portée réelle " de cette conséquence pour le décideur qui est utilisée dans le modèle de décision ". L'ensemble de conséquences est noté  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$

Formellement, la conséquence est définie par :

$$C : S' \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s', f) \longmapsto c(s', f)$$

En affaires, par convention, le décideur est amené, par le principe de rationalité, à déterminer en détail, tous les états possibles même pour ceux qui ont peu ou pas de chance de survenir. L'étude de l'ensemble des actions, en fonction de chacun des couples  $(S', F)$  et la détermination des résultats ou conséquences  $F$  permet, a priori, au décideur de statuer sur le degré de précision qu'il recherche dans ses réponses. Cette analyse préliminaire est alors d'autant plus fiable et sécurisante.

### 3.5. La fonction d'utilité

L'individu placé devant un ensemble d'actions va, dans un esprit rationnel, donner une valeur à chacun des résultats escomptés. Ainsi, nous appelons indice d'utilité cette valeur et l'ensemble de cette fonction s'appelle fonction d'utilité. Cette fonction est définie par :

$$U : S' \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s', f) \longmapsto u(s', f)$$

qui permet de faire correspondre à tout couple  $(s', f)$  un nombre réel  $u(s', f)$ , appelé indice d'utilité.

Le problème de décision peut se résumer par la matrice de décision suivante :

**Tableau 1.** Matrice de décision

$S'$	$s'_0$	$s'_1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$s'_m$
$S$	$s_0$	$\dots$	$s_j$	$\dots$	$s_n$	$s_{12}$	$\dots$	$s_{ij}$
$f_1$	$u(f_1, s_0)$	$\dots$	$u(f_1, s_j)$	$\dots$	$u(f_1, s_n)$	$u(f_1, s_{12})$	$\dots$	$u(f_1, s_{ij})$
$f_2$	$u(f_2, s_0)$	$\dots$	$u(f_2, s_j)$	$\dots$	$u(f_2, s_n)$	$u(f_2, s_{12})$	$\dots$	$u(f_2, s_{ij})$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$f_n$	$u(f_n, s_0)$	$\dots$	$u(f_n, s_j)$	$\dots$	$u(f_n, s_n)$	$u(f_n, s_{12})$	$\dots$	$u(f_n, s_{ij})$

Une fois déterminé ce tableau et la distribution de la capacité 2-additive alors le modèle de Schmeidler est applicable.

### 3.6. Le modèle

Considérant  $\nu$  une mesure floue qui dans notre cas, une capacité 2-additive [7] et  $X$  une application mesurable de  $S$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  où  $(S, \mathbb{E})$  une fonction d'ensemble de  $\mathbb{E}$  dans  $[0, 1]$  vérifiant  $\nu(0) = 0$ ,  $\nu(S) = 1$  et monotone. Le modèle  $\int_{Ch} X d\nu$  est définie par :

$$\int_{Ch} X d\nu = \int_{-\infty}^0 [\nu(X > t) - 1] dt + \int_0^{+\infty} \nu(X > t) dt \quad (4)$$

Pour  $X$  discrète c'est-à-dire  $X = (x_1, A_1; \dots; x_i, A_i; \dots; x_n, A_n)$  où  $x_i \in \mathbb{R}$   
 $x_1 \leq \dots, x_i \dots \leq x_n, A_i \in \mathbb{E}, A_i$  une partition de  $S'$ , le modèle est alors définie par [13] :

$$\int_{Ch} X d\nu = x_1 + (x_2 - x_1)\nu(X \geq x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})\nu(X \geq x_n) \quad (5)$$

Considérant  $C$  un ensemble de conséquences,  $f$  une application de  $S'$  dans  $C$ ,  $u$  une application croissante de  $C$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $X = u \circ f$ ;  $X$  une application de  $S'$  dans  $\mathbb{R}$ , nous pouvons donc définir pour  $u$  et  $\nu$  données :

$$\int_{Ch} u(f) d\nu = \int_{-\infty}^0 [\nu(u(f) > t) - 1] dt + \int_0^{+\infty} \nu(u(f) > t) dt \quad (6)$$

appelée espérance d'utilité à la Choquet(CEU) de l'acte  $f$ .

Pour  $X$  discrète,  $X = u(f, s')$ , nous avons :

$$U_{Ch}(u(f_i, s')) = u(f_i, s'_0) + \sum_{j=1}^m (u(f_i, s'_j) - u(f_i, s'_{j-1}))\nu(u \geq u(f_i, s'_j)) \quad (7)$$

où  $\nu$  est la capacité 2-additive de Choquet.

Cette évaluation de l'utilité espérée à la Choquet peut être facilement déterminée par l'algorithme suivant.

**Algorithme 1.** soient  $N, n$  et  $u(f_i, s'_j)$  données en entrée

- 1) Entrer les états de la nature  $S$  et l'état neutre ;
- 2) Entrer les interactions possibles et former  $S'$  ;
- 3) Entrer les actions possibles ;
- 4) Entrer les conséquences de chaque action par rapport à l'état de nature de  $S'$  ;
- 5) Entrer les préférences  $P$ , les indifférences  $I$  et les monotonies  $M$  ;
- 6) Construire un graphe orienté ;
- 7) Vérifier si le graphe n'admet un circuit strict (i.e il n'existe pas un chemin dans  $(P \cup I \cup M)$  où  $x_i P x_{i+1}$ ). Si oui passer à l'étape suivante ; Sinon on ajoute ou on enlève un arc pour ne pas avoir de circuit et puis passer à l'étape suivante
- 8) Vérifier la propriété de la monotonie préférentielle
- 9) Construire le graphe réduit ;
- 10) Faire un tri topologique sur  $G'$  : Soit  $\{X_0, X_0, \dots, X_q\}$  la partition de  $X$  obtenu avec le tri topologique sur  $G'$  ;

$$11) \text{ Calculer les valeurs de } \mu \text{ et } \nu \text{ comme suit : } \forall x \in e, \mu(\phi(s')) = \begin{cases} 0 & \text{si } l=0 \\ (2n)^l & \text{sinon} \end{cases}$$

$$12) \nu(s') = \frac{\mu(s')}{\alpha} \\ \text{où } \alpha = \sum_{\{i,j\} \in N} \mu(s_{ij}) - (n-2) \sum_{i \in N} \mu(s_i)$$

$$13) \text{ Définir les vecteurs } (u(f_i, s'_j), \nu_j) ;$$

$$14) \text{ Trier les vecteurs } (u_{ij}, \nu_j) \text{ par rapport à } u(f_i, s'_j) ;$$

$$15) \text{ Calculer l'utilité à la Choquet de l'acte } f \text{ ou décision comme suit :}$$

$$U_{Ch}(u(f_i, s')) = u(f_i, s'_0) + \sum_{j=1}^m (u(f_i, s'_j) - u(f_i, s'_{j-1}))\nu(u \geq u(f_i, s'_j))$$

$$16) \text{ La meilleure acte ou décision est le maximum des utilités de Choquet : } \text{Max}(U_{Ch}(u(f_i, s')))$$

## 4. Illustration

### 4.1. Cas 1

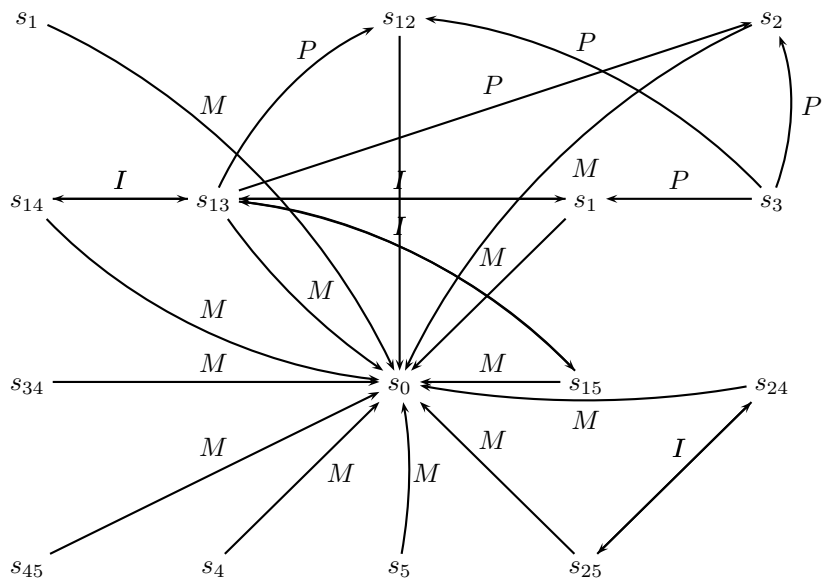
Prenons le cas d'un marchand ambulant, il a comme décisions possibles de remplir son chariot des glaces, des boissons, des journaux ou des jouets. Sa décision finale dépend du contexte climatique (le temps : Pluvieux, Humide, Vent, Chaud, ...), politique (élection, crise politique, ...) et social (journée fériée ou non, ...). Dans sa matrice de décision, nous repportons les profits (gains) attendus par le marchand. Notons par  $s_1$  le temps pluvieux,  $s_2$  le temps froid,  $s_3$  le temps chaud,  $s_4$  le contexte politique,  $s_5$  le contexte social et  $s_0$  symbolise la neutralité. La matrice de décision se présente comme suit :

**Tableau 2.** Exemple pour le marchand ambulant

$S'$	<i>Glaces</i>	<i>Boissons</i>	<i>Journaux</i>	<i>Jouets</i>
$s_0$	50	200	20	40
$s_1$	95	150	30	20
$s_2$	70	200	60	30
$s_3$	500	400	80	100
$s_4$	200	1000	800	30
$s_5$	300	550	100	800
$s_{12}$	70	30	10	20
$s_{13}$	100	150	20	10
$s_{14}$	80	100	650	10
$s_{15}$	100	200	400	1000
$s_{24}$	60	200	600	100
$s_{25}$	200	300	300	650
$s_{34}$	250	400	500	150
$s_{35}$	350	500	100	1200
$s_{45}$	800	600	800	700

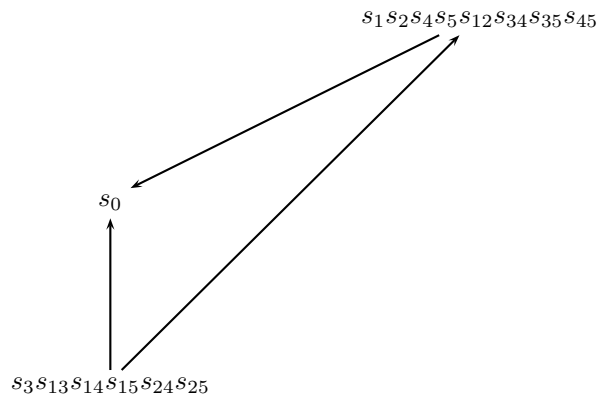
Le graphes de préférences, des indifférences et des monotonies pour l'agent décideur sont donnés par les figures 1 et 2 :

**Figure 1.** Graphe :G



En vérifiant la propriété de monotonie de l'information préférentielle [7] et en construisant l'ensemble de toutes les composantes fortement connexes du graphe  $G$ , nous obtenons le graphe  $G'$  suivant :

**Figure 2.** Graphe : $G'$



Et d'après ce graphe, nous avons calculé les valeurs de  $\mu$  et  $\nu$  (équations 2 et 3 présentées dans la section 3).



**Tableau 3.** Calcul de  $\mu$  et  $\nu$  et évaluation de l'utilité à la Choquet

$S'$	Glaces	Boissons	Journaux	Jouets	$\phi$	$\mu$	$\nu$
$s_0$	50	200	20	40	$\{\phi\}$	0	0
$s_1$	95	150	30	20	$\{1\}$	10	0.08333
$s_2$	70	200	60	30	$\{2\}$	10	0.08333
$s_3$	500	400	80	100	$\{3\}$	100	0.83333
$s_4$	200	1000	800	30	$\{4\}$	10	0.08333
$s_5$	300	550	100	800	$\{5\}$	10	0.08333
$s_{12}$	70	30	10	20	$\{1, 2\}$	10	0.08333
$s_{13}$	100	150	20	10	$\{1, 3\}$	100	0.83333
$s_{14}$	80	100	650	10	$\{1, 4\}$	100	0.83333
$s_{15}$	100	200	400	1000	$\{1, 5\}$	100	0.83333
$s_{24}$	60	200	600	100	$\{2, 4\}$	100	0.83333
$s_{25}$	200	300	300	650	$\{2, 5\}$	100	0.83333
$s_{34}$	250	400	500	150	$\{3, 4\}$	10	0.08333
$s_{35}$	350	500	100	1200	$\{3, 5\}$	10	0.08333
$s_{45}$	800	600	800	700	$\{4, 5\}$	10	0.08333
$U_{Ch}$	811,25	477,5	<b>1815</b>	1617,5			
$U_{Laplace}$	215	<b>332</b>	298	324			
$U_{Wald}$	<b>50</b>	30	10	10			
$U_{Hurwicz+}$	<b>72,5</b>	59,1	33,7	45,7			
$U_{Hurwicz-}$	575	709	563	<b>843</b>			
$U_{Savage}$	900	<b>800</b>	1100	970			

Par rapport à ce contexte, le marchand ambulant a intérêt à mettre beaucoup plus des journaux dans son chariot. En faisant une analyse comparative, nous trouvons que le modèle de Wald ( $Arg \underbrace{Max}_{f \in F} \underbrace{Min}_{s' \in S'} u(f(s'))$ ) basé seulement sur le caractère pessimiste du décideur opte pour beaucoup plus des boissons. Pour Hurwicz, la décision optimale donnée par l'expression  $Arg \underbrace{Max}_{f \in F} [\alpha \underbrace{Max}_{s' \in S} u(f(s')) + (1 - \alpha) \underbrace{Min}_{s' \in S'} u(f(s'))]$  est le chargement des glaces dans le pessimiste (Hurwicz-) et le chargement des boissons dans le cas optimiste (Hurwicz+).

De sa part Savage, avec son modèle regret maximal ( $Arg \underbrace{Min}_{f \in F} \underbrace{Max}_{s' \in S'} R(f(s'))$ ) avec  $R(f, s') = \underbrace{Max}_{g \in F} u(g(s')) - u(f(s'))$ ), la décision de moins de regret est des boissons.

## 4.2. Cas 2

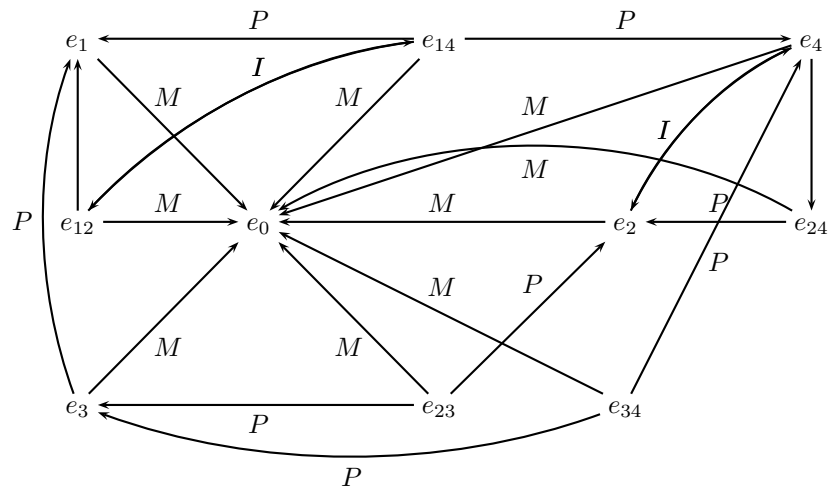
Passons maintenant au choix du meilleur projet entre la commercialisation du Riz ( $P_1$ ), la production de pomme de terre ( $P_2$ ) et la commercialisation de pomme de terre ( $P_3$ ) qui l'utilité va être représentée par le cash flow brut et ceci en tenant compte des états de la nature qui sont représentés par : Cyclone, Inondation, Sécheresse et Crise politique. Prenons comme "état de la nature" les phénomènes suivants : Cyclone( $s_1$ ), Insécurité ( $s_2$ ), Sécheresse( $s_3$ ) et Crise politique( $s_4$ ) et ces interactions possibles et susceptibles d'apparaître.

**Tableau 4.** Exemple de choix de projet à la Choquet

$S'$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$s_0$	36190	246310	249037
$s_1$	366522	309581	337080
$s_2$	100000	239190	270520
$s_3$	342522	304671	320581
$s_4$	370456	382925	393715
$s_{12}$	347377	279109	365444
$s_{14}$	383791	223247	223667
$s_{23}$	1260437	227863	351226
$s_{24}$	339029	285474	374863
$s_{34}$	366506	296213	387963

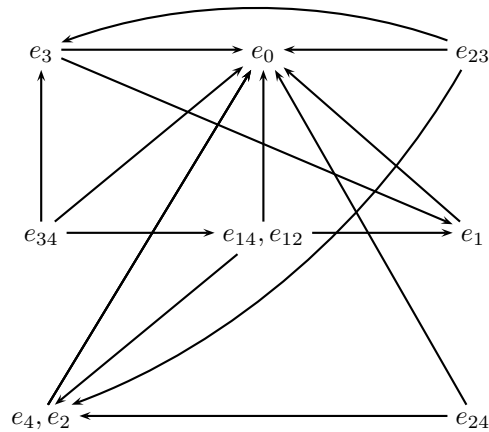
Dans notre exemple où  $N = 4$ , le graphe de préférences, des indifférences et des monotonies pour l'agent décideur sont donnés par le graphe suivant.

**Figure 3.** Graphe : $G$



En vérifiant la propriété de monotonie de l'information préférentielle [7] et en construisant l'ensemble de toutes les composantes fortement connexes du graphe  $G$ , nous obtenons le graphe  $G'$  suivant :

**Figure 4.** Graphe : $G'$



Et d'après ce graphe, nous avons calculé les valeurs de  $\mu$  et  $\nu$  (équations 2 et 3 présentées dans la section 3).

**Tableau 5.** Calcul de  $\mu$  et  $\nu$  et évaluation de l'utilité à la Choquet

$S'$	$\phi$	$\mu$	$\nu$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$s_0$	$\{\Phi\}$	0	0	36190	246310	249037
$s_1$	$\{1\}$	8	0.0555	366522	309581	337080
$s_2$	$\{2\}$	8	0.0555	100000	239190	270520
$s_3$	$\{3\}$	64	0.4444	342522	304671	320581
$s_4$	$\{4\}$	8	0.0555	370456	382925	393715
$s_{12}$	$\{1, 2\}$	64	0.4444	347377	279109	365444
$s_{14}$	$\{1, 4\}$	64	0.4444	383791	223247	223667
$s_{23}$	$\{2, 3\}$	64	0.4444	1260437	227863	351226
$s_{24}$	$\{2, 4\}$	64	0.4444	339029	285474	374863
$s_{34}$	$\{3, 4\}$	64	0.444	366506	296213	387963
$U_{Ch}$				<b>779845.444</b>	360953.383	545014.222
$U_{Laplace}$				323854.1	279458.3	<b>327136.9</b>
$U_{Wald}$				100000	223247	<b>223667</b>
$U_{Hurwicz_{0.3}}$				185137	271150.4	<b>274681.4</b>
$U_{Hurwicz_{0.7}}$				298653.7	<b>335021.6</b>	342700.6
$U_{Savage}$				170520	160544	<b>160124</b>

Notre modèle se démarque des autres et préfère le projet 1 alors que le modèle de Wald, de Laplace, de Savage et le pessimisme de Hurwicz choisissent le projet 3 et l'optimisme de Hurwicz le 2. A la différence de ces autres modèles, le notre permet d'intégrer les préférences, indifférences et monotonies subjectives du décideur dans une situation d'ignorance totale.

Il permet au décideur de limiter au maximum possible le risque du fait que l'évaluation de la décision est faite pour les états de nature qui lui sont seulement satisfaisants. Ce modèle est un outil qui fait l'objet de plusieurs applications notamment dans l'agrégation des comportements diversifiés [6], la mesure de corrélation et aussi la mesure des dépendances préférentielles [5].

L'utilisation d'une capacité 2-additive est justifiée dans l'algorithme de Mayag [7] selon laquelle, elle permet de réduire le nombre de paramètres  $2^n - 2$  à  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ .

Notre modèle est subjectif dans le sens où les agents sont appelés à identifier eux même les cas impossibles comme dans l'application avec  $e_{23}$ ,  $e_{234}$  et  $e_{123}$  et la mesure floue est totalement subjective.

---

## 5. Conclusion

Face à une incertitude généralisée, aux influences des facteurs exogènes, la prise de décision reste perplexe.

L'intégrale de Choquet par sa capacité à agréger les interactions entre les critères souvent conflictuels, nous a permis de formaliser, d'une manière assez réaliste, la décision dans un environnement d'ignorance totale tout en tenant compte des facteurs exogènes.

Notre modèle qui se distingue des autres modèles existants incorpore les contextes environnementaux. De plus, le modèle est totalement subjectif du fait qu'il est basé sur une distribution issue de l'information binaire du décideur et se distingue des autres par l'hypothèse fondamentale des états de nature non mutuellement exclusifs. Par cette hypothèse, l'ensemble  $S$  est remplacé par  $S'$  avec  $S \in S'$  incluses interactions possibles. Ainsi le tableau de décision se voit augmenté de la partie droite bien remarquable dans le tableau 1.

Ce modèle peut être confronté à une situation d'absence des valeurs numériques et l'intégrale de Sugeno qui représente le Choquet qualitatif, permettra de résoudre ce problème.

---

## 6. Bibliographie

- [1] M. ALLAIS, « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Econometrica*, vol. , n° 21 , 1953.
- [2] A. CHATEAUNEUF, M. COHEN, « Cardinal extensions of EU model based on the Choquet integral », , n° 2008.
- [3] CHOQUET G. « Theory of capacities. Annales de l'institut Fourier », , vol. , n° 5, 1954.
- [4] D. ELLSBERG, « Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms », *Quarterly Journal of Economics* , 643-669, vol. , n° 75, 1961.
- [5] J. L. MARICHAL, « Agrégation de critères interactifs au moyen de l'intégrale de Choquet discrète », *Departement de gestion, Université de Liège, I-11*, vol. , n° , 1999.
- [6] J. L. MARICHAL , « Fonction d'agrégation pour la décision », *Service de Mathématiques Appliquées, Université de Luxembourg, I-45*, vol. , n° , 2005.
- [7] B. MAYAG , M. GRABISCH , C. LABREUCHE « Un algorithme de détermination de la capacité pour l'intégrale de Choquet 2-additive », , vol. , n° , 2008
- [8] J. V NEUMANN, O. MORGENSTERN « Theory of Games and Economic Behavior », *Princeton University Press*, vol. , n° , 1944.
- [9] J. QUIGGIN , « Generalized Expected Utility Theory : The Rank-Dependent Model », *Springer, December*, vol. , n° , 1993.
- [10] H. RAIFFA, « Decision Analysis - Introductory lectures on choices under uncertainty. », *Addison Wesley, Reading, MA* vol. , n° , 1970.
- [11] L. J. SAVAGE « The theory of statistical decision », *The American Statistical Association*, pages 55-67, vol. , n° , 1951.
- [12] L. J. SAVAGE , « Foundations of Statistics », *J. Wiley, New York*, vol. , n° , 1954.

- [13] D. SCHMEIDLER, « Integral representation without additivity », *Proceeding of the American Mathematical Society*, pages 255-261, vol. , n° 97, 1986.
- [14] D. SCHMEIDLER, « Subjective Probability and Expected Utility without Additivity », *Econometrica* (May, 1989), pages. 571-587, vol. 57, n° 3, 1989.
- [15] M. SUGENO, « Ordinal preference models based on s-integrals and their verification », , vol. , n° , 2011
- [16] A. WALD, « Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk », *Annals of Mathematics*, vol. , n° , 1945.
- [17] A. WALD , « Statistical decision functions », *Chelsea Publ. Co., Bronx, N.Y., 2. ed edition*, vol. , n° , 1971.