



HAL
open science

Éléments de géométrie pour la mécanique des milieux continus

Boris Kolev, R. Desmorat

► **To cite this version:**

Boris Kolev, R. Desmorat. Éléments de géométrie pour la mécanique des milieux continus. 2019. ⟨hal-02343934v2⟩

HAL Id: hal-02343934

<https://hal.science/hal-02343934v2>

Preprint submitted on 3 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE POUR LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

B. KOLEV AND R. DESMORAT

RÉSUMÉ. Ce texte est le résultat d'un dialogue entre un mathématicien et un mécanicien. Il est destiné à faire le point sur le sujet des grandes déformations, d'un point de vue géométrique, en y maintenant un discours mathématique rigoureux tout en restant accessible et proche des préoccupations des mécaniciens.

TABLE DES MATIÈRES

1. L'espace des configurations en MMC	2
2. Déformations et contraintes	4
3. La variété des métriques riemanniennes	6
3.1. Dérivées covariantes	7
3.2. Géodésiques et transport parallèle	9
3.3. La variété $\text{Met}(\mathcal{B})$ comme produit de variétés riemanniennes	10
4. Covariance générale – Indifférence matérielle – Objectivité	10
5. Dérivées matérielles	13
6. Les dérivées objectives de la littérature	16
6.1. La dérivée d'Oldroyd	16
6.2. La dérivée de Truesdell	16
6.3. La dérivée de Zaremba–Jaumann	17
6.4. La dérivée de Fiala	18
6.5. La dérivée de Green-Naghdi	19
6.6. Les dérivées objectives de Xiao-Bruhns-Meyers	20
7. Les équations d'équilibre	22
7.1. Conservation de la masse	22
7.2. Relation fondamentale de la dynamique	23
8. Lois de comportement élastiques	23
8.1. Gaz parfaits	24
8.2. Fluides barotropes	24
8.3. Hyper-élasticité générale isotrope	25
8.4. Loi hyper-élastique de Kirchhoff-Saint Venant	27
9. Prise en compte des conditions aux limites en hyper-élasticité	28
9.1. Charge morte	29
9.2. Pression imposée	30
9.3. Bilan	36
Annexe A. Quelques formules utiles dans \mathbb{R}^3	37
Annexe B. Dualité, transposée, adjoint	38
Annexe C. Pull-back et push-forward	39
Annexe D. Dérivée de Lie	41
Annexe E. Dérivées covariantes	42
Annexe F. Formes différentielles extérieures	45

Date: Version 2 : 18 juillet 2020.

Key words and phrases. mécanique des grandes déformations; espaces des métriques; géométrisation de la mécanique; lois de comportement.

Annexe G. Formes volumes, éléments d'aire	47
Annexe H. Analyse vectorielle	49
Annexe I. Intégration d'une forme différentielle	50
Références	53

1. L'ESPACE DES CONFIGURATIONS EN MMC

En mécanique des milieux continus (MMC), l'espace ambiant \mathcal{E} est représenté par un espace affine euclidien de dimension 3. En désignant par \mathbf{q} la métrique euclidienne sur \mathcal{E} , il vaut mieux considérer cet espace comme une variété riemannienne $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ et oublier, dans un premier temps, cette structure affine de l'espace. De façon imagée, on peut considérer $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ ¹ comme le « cahier de laboratoire tridimensionnel » (ou système de référence) d'un observateur dans lequel il consigne ses observations, après avoir choisi une unité de longueur (la métrique). Le milieu matériel est paramétré par une variété à bord (compacte et orientable) de dimension 3, notée \mathcal{B} et dénommée habituellement par l'anglicisme *body*. Cette variété \mathcal{B} est munie d'une *forme volume* μ , la *mesure de masse* [49].

Remarque 1.1. La coutume veut que l'on désigne habituellement les grandeurs *matérielles* (i.e. définies sur le body \mathcal{B}) par des lettres majuscules alors que les grandeurs *spatiales* (i.e. définies sur l'espace \mathcal{E}) sont représentées par des lettres minuscules.

Une *configuration* d'un milieu matériel est représentée par un *plongement* (les particules ne peuvent occuper le même point de l'espace) de classe C^∞

$$p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$$

et dénommé *placement* en mécanique. La sous-variété $\Omega = p(\mathcal{B})$ correspond à une *configuration du système*. L'application linéaire tangente $Tp : T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{E}$ est traditionnellement désignée par les mécaniciens comme le *gradient de la transformation* et notée \mathbf{F} .

Remarque 1.2. Certains auteurs tiennent beaucoup à utiliser une *configuration de référence*

$$\Omega_0 = p_0(\mathcal{B}),$$

afin de pouvoir considérer le *body* comme une sous-variété de l'espace \mathcal{E} . De fait, ils travaillent alors avec l'application

$$\varphi := p \circ p_0^{-1}, \quad \Omega_0 \rightarrow \Omega,$$

alors dénommée la *transformation* [14, 21, 49, 50].

L'espace des configurations en MMC est donc l'ensemble, noté $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, des *plongements lisses* de \mathcal{B} dans \mathcal{E} (plongement se dit *embedding* et parfois *imbedding* en anglais). Cet ensemble peut être muni d'une structure de *variété différentielle de dimension infinie* [24] (une *variété de Fréchet*). L'espace tangent à $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ en un point $p \in \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ se décrit de la façon suivante. Soit $p(t)$ une courbe dans $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ telle que $p(0) = p$ et $(\partial_t p)(0) = p_t(0) = \mathbf{V}$, alors l'espace tangent en $p \in \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ est l'ensemble

$$T_p \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \{ \mathbf{V} \in C^\infty(\mathcal{B}, T\mathcal{E}); \pi \circ \mathbf{V} = p \},$$

où \mathbf{V} est décrit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{B} & \xrightarrow{Tp} & T\mathcal{E} \\ \pi \downarrow & \nearrow \mathbf{V} & \downarrow \pi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{p} & \mathcal{E} \end{array}$$

1. Pour être plus exact, la variété \mathcal{E} n'est pas « l'espace » mais la *fibre type*, de dimension 3, d'une variété fibrée de dimension 4 munie d'une structure galiléenne [27, 28, 11].

On reconnaît \mathbf{V} comme une *vitesse Lagrangienne*. $T\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ est l'ensemble des *vitesse Lagrangiennes virtuelles*. Lorsque l'on précise un chemin de plongements $p(t)$, alors la vitesse lagrangienne associée à l'instant t , $\mathbf{V}(t) = \partial_t p(t) = p_t(t)$ appartient à l'espace tangent $T_{p(t)}\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$. Attention, *il ne s'agit pas d'un champ de vecteurs*, ni sur \mathcal{B} , ni sur $\Omega_p = p(\mathcal{B})$! On peut toutefois fabriquer des champs de vecteurs à partir d'une courbe $p(t, \mathbf{X})$ et de sa vitesse Lagrangienne $p_t(t, \mathbf{X})$:

- Sur \mathcal{B} , en posant $\mathbf{U}(t, \mathbf{X}) := (Tp^{-1} \cdot \mathbf{V})(t, \mathbf{X})$;
- Sur $\Omega_p = p(\mathcal{B})$, en posant $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) := (\mathbf{V} \circ p^{-1})(t, \mathbf{x})$.

Ces champs de vecteurs, respectivement dénommés *vitesse eulerienne à gauche* et *vitesse eulerienne à droite* jouent des rôles fondamentaux en mécanique.

Remarque 1.3. La vitesse eulerienne à gauche (ou *vitesse matérielle*) intervient dans les équations d'Euler de la dynamique du solide rigide [15], alors que la vitesse eulerienne à droite (ou *vitesse spatiale*) intervient en mécanique des fluides (mais aussi en mécanique du solide déformable). Une vision unifiée de ces équations a été proposée par Arnold dans un article dédié au bicentenaire des équations d'Euler du solide rigide [2].

Depuis le *programme d'Erlangen (1872)* de Felix Klein [26], une *géométrie, c'est un groupe* ! ou plus exactement l'action d'un groupe sur un ensemble [46]. Il est donc important de détailler les groupes qui ressortent naturellement dans ce modèle :

- Le groupe des difféomorphismes de \mathcal{B} , noté $\text{Diff}(\mathcal{B})$;
- Le groupe des difféomorphismes de \mathcal{B} qui préservent la mesure de masse μ , noté $\text{Diff}_\mu(\mathcal{B})$;
- Le groupe des difféomorphismes de \mathcal{E} , noté $\text{Diff}(\mathcal{E})$;
- Le groupe des isométries de la variété riemannienne $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$, noté $\text{Isom}(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ (qui est le groupe des *déplacements* de l'espace affine euclidien) ;

Une des difficultés en mécanique des grandes déformations vient du fait que certains auteurs travaillent avec des *variables matérielles* et d'autres avec des *variables spatiales*, multipliant par conséquent les définitions des concepts fondamentaux comme le *taux de déformation* ou les *contraintes*. Sur le fond, cela n'est pas vraiment gênant, à condition de savoir jongler astucieusement et rigoureusement entre ces jeux de variables. Cela est possible et même facile à condition de maîtriser les concepts mathématiques de *pull-back* et *push-forward* rappelés dans l'[Appendice C](#).

A chaque plongement p correspond une forme volume $p_*\mu$ sur la configuration $\Omega_p = p(\mathcal{B})$. Par ailleurs, la métrique riemannienne \mathbf{q} induit sur Ω_p une forme volume, notée $\text{vol}_\mathbf{q}$. Par conséquent, $p_*\mu$ est proportionnelle à $\text{vol}_\mathbf{q}$

$$(1.1) \quad p_*\mu = \rho \text{vol}_\mathbf{q},$$

ce qui permet de définir la *densité de masse* ρ comme une fonction scalaire sur le domaine spatial Ω_p .

De même, à chaque plongement $p \in \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ correspond une métrique riemannienne

$$\gamma = p^*\mathbf{q} \in \text{Met}(\mathcal{B}),$$

où $\text{Met}(\mathcal{B})$ désigne l'ensemble des métriques riemanniennes définies sur \mathcal{B} . On pourra noter que la courbure riemannienne de γ est nulle quand \mathcal{B} est une variété à bord de dimension 3 (ceci n'est évidemment plus vrai en théorie des coques où \mathcal{B} est une variété de dimension 2). La question suivante se pose alors naturellement. Soit

$$\Phi : \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Met}(\mathcal{B}), \quad p \mapsto p^*\mathbf{q},$$

cette application est-elle injective ? La réponse est non et le défaut d'injectivité s'explique facilement. Soit p un plongement et $\gamma = \Phi(p)$ alors étant donné n'importe quelle isométrie $g \in \text{Isom}(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ et n'importe quelle isométrie $h \in \text{Isom}(\mathcal{B}, \gamma)$, on a

$$(g \circ p \circ h)^*\mathbf{q} = h^*p^*(g^*\mathbf{q}) = h^*p^*\mathbf{q} = h^*\gamma = \gamma$$

et donc

$$\Phi(g \circ p \circ h) = \Phi(p).$$

Inversement, considérons deux plongements p et \bar{p} tels que $\Phi(p) = \Phi(\bar{p}) = \gamma$. Alors

$$\varphi := \bar{p} \circ p^{-1} : \Omega_p \rightarrow \Omega_{\bar{p}}$$

est une isométrie. C'est donc la restriction à Ω_p d'un déplacement $g \in \text{Isom}(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ tel que $\Omega_{\bar{p}} = g(\Omega_p)$. On a donc

$$\bar{p} = g \circ p \circ h,$$

où $h := (\bar{p})^{-1} \circ g \circ p \in \text{Isom}(\mathcal{B}, \gamma)$. On pourra noter, toutefois qu'en général, le groupe des isométries $\text{Isom}(\mathcal{B}, \gamma)$ est réduit à l'identité, ce qui n'est pas le cas du groupe $\text{Isom}(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ qui est un groupe de Lie de dimension 6.

Remarque 1.4. Le volume riemannien vol_γ sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ et la mesure de masse μ sont reliés par une fonction positive définie sur \mathcal{B} . Des relations

$$p_*\mu = \rho \text{vol}_{\mathbf{q}}, \quad \text{vol}_\gamma = p^* \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

on déduit que

$$\mu = (p^*\rho) \text{vol}_\gamma.$$

Ceci nous amène à introduire la densité de masse intrinsèque (ou densité de masse sur le body) comme

$$(1.2) \quad \rho_\gamma := p^*\rho = \frac{\mu}{\text{vol}_\gamma},$$

pour la métrique γ ou encore comme

$$(1.3) \quad \rho_{\gamma_0} := p^*\rho = \frac{\mu}{\text{vol}_{\gamma_0}},$$

pour la métrique γ_0 .

2. DÉFORMATIONS ET CONTRAINTES

Un mouvement en MMC correspond à une courbe $p(t)$ dans $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ (un *chemin de plongements*). A ce mouvement est associé une vitesse lagrangienne

$$\partial_t p(t, \mathbf{X}) = \mathbf{V}(t, \mathbf{X})$$

et une vitesse eulerienne (à droite)

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t, p^{-1}(t, \mathbf{x})).$$

Traditionnellement, on définit le *taux de déformation* (sur Ω_p) par la quantité

$$\widehat{\mathbf{d}} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$$

où $\nabla \mathbf{u}$ est la dérivée covariante de la vitesse eulerienne \mathbf{u} et $(\nabla \mathbf{u})^t$ désigne la transposée (par rapport à la métrique \mathbf{q} , voir Appendice B) de l'opérateur linéaire $\mathbf{w} \mapsto \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u}$. Les champs de tenseurs $\widehat{\mathbf{d}}$, $\nabla \mathbf{u}$ et $(\nabla \mathbf{u})^t$ sont mixtes de type $(1, 1)$. Dans un système de coordonnées locales, leurs composantes respectives s'écrivent \widehat{d}_{ij}^k , $(\nabla \mathbf{u})^i_j$ et $((\nabla \mathbf{u})^t)^i_j$. Grâce à la métrique \mathbf{q} sur Ω_p , on peut transformer le champ de tenseurs mixte $\widehat{\mathbf{d}}$ en un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, $\mathbf{d} := \mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}}$, c'est à dire

$$(2.1) \quad d_{ij} = q_{ik} \widehat{d}^k_j.$$

Lemme 2.1. *Le tenseur taux de déformation \mathbf{d} satisfait l'équation*

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q},$$

où $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$ est la dérivée de Lie par rapport à la vitesse eulerienne \mathbf{u} et \mathbf{q} est la métrique sur \mathcal{E} .

Démonstration. C'est une application directe du théorème E.5 pour $\mathbf{k} = \mathbf{q}$, sachant que par définition $\nabla \mathbf{q} = 0$. En utilisant de plus la relation (B.1), on obtient donc

$$\mathcal{L}_u \mathbf{q} = \mathbf{q} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^* \mathbf{q} = \mathbf{q} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{q} (\nabla \mathbf{u})^t = 2\mathbf{q} \widehat{\mathbf{d}} = 2\mathbf{d},$$

$(\nabla \mathbf{u})^*$, $(\nabla \mathbf{u})^t$ étant respectivement l'adjoint et le transposé de l'opérateur $(\nabla \mathbf{u})$ par rapport à la métrique \mathbf{q} (voir Appendice B). \square

A chaque plongement p correspond une métrique riemannienne $\gamma := p^* \mathbf{q}$ sur le body \mathcal{B} . Par ailleurs, on peut également définir $\mathbf{D} := p^* \mathbf{d}$, qui est un champ de tenseurs covariants symétriques sur \mathcal{B} .

Remarque 2.2. p étant une isométrie entre les variétés riemanniennes (\mathcal{B}, γ) et $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$, on a également

$$\mathbf{D} = \gamma(\nabla^\gamma \mathbf{U})^s,$$

où \mathbf{U} désigne la vitesse eulerienne à gauche et $2\mathbf{D} = \gamma \nabla^\gamma \mathbf{U} + (\nabla^\gamma \mathbf{U})^* \gamma = \gamma \nabla^\gamma \mathbf{U} + \gamma (\nabla^\gamma \mathbf{U})^t$.

Théorème 2.3 (Rougée, 1980, 1991). *Le long d'un chemin de déformation $p(t)$, la métrique riemannienne sur \mathcal{B} , $\gamma(t) = p(t)^* \mathbf{q}$, satisfait l'équation d'évolution*

$$\gamma_t = 2\mathbf{D}.$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème D.7 avec $\mathbf{k} = \gamma$ et du lemme 2.1. On obtient

$$\gamma_t = p^*(\partial_t \mathbf{q} + \mathcal{L}_u \mathbf{q}) = p^*(2\mathbf{d}) = 2\mathbf{D}. \quad \square$$

Le mécanicien considère très souvent une configuration de référence $p_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ avec $\Omega_0 = p_0(\mathcal{B})$ et donc la vitesse lagrangienne sur celle-ci

$$\mathbf{V}_0 := \varphi_t = \mathbf{u} \circ \varphi = \mathbf{V} \circ p_0^{-1}.$$

Il introduit également les définitions suivantes de tenseurs métriques.

Définition 2.4. Soit $\varphi = p \circ p_0^{-1}$. Le *tenseur de Cauchy-Green droit*, défini par

$$\mathbf{C} := \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{F}_\varphi^* \mathbf{q} \mathbf{F}_\varphi = \mathbf{q} \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{F}_\varphi,$$

est un champ de tenseurs covariants symétriques sur la configuration de référence $\Omega_0 = p_0(\mathcal{B})$. Le *tenseur de Cauchy-Green gauche*, défini par

$$\mathbf{b} := \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}_\varphi^* = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{q}^{-1},$$

est un champ de tenseurs contravariants symétriques sur la configuration déformée $\Omega_p = p(\mathcal{B})$.

Remarque 2.5. On a :

$$p_0^* \mathbf{C} = p_0^* \varphi^* \mathbf{q} = p^* \mathbf{q} = \gamma,$$

et

$$p^* \mathbf{b} = p^* \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = p_0^* \mathbf{q}^{-1} = \gamma_0^{-1}.$$

La notion de contraintes est duale de celle des déformations. Le concept le plus commun est celui de *tenseur des contraintes de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$, défini sur la configuration $\Omega_p = p(\mathcal{B})$ et qui est un champ de tenseurs d'ordre 2 contravariants et symétriques (on utilisera également sa forme mixte : $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}$). A ce concept dual des déformations est associé une forme linéaire

$$\mathcal{P}(\mathbf{d}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}) \rho \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

où $\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\sigma} / \rho$ est le *tenseur des contraintes de Kirchhoff*.

Remarque 2.6. Cette forme linéaire correspond en mécanique à l'opposée de la *puissance virtuelle des efforts intérieurs*.

Ceci nous amène à introduire un *tenseur des contraintes sur le Body* [38], ou *tenseur de Rougée*, contravariant et symétrique, $\boldsymbol{\theta} := p^* \boldsymbol{\tau}$, qui apparaît naturellement à partir de la formule du changement de variables

$$\mathcal{P}(\mathbf{d}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}) \rho \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \mathbf{D}) \mu.$$

Un second tenseur des contraintes, également contravariant et symétrique,

$$(2.2) \quad \boldsymbol{\mathfrak{S}} := p^* \boldsymbol{\sigma} = \rho_{\gamma} \boldsymbol{\theta}$$

peut être défini sur le Body [35], de sorte que

$$(2.3) \quad \mathcal{P} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\mathfrak{S}} : \mathbf{D}) \text{vol}_{\gamma}.$$

Le tenseur $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ sera dénommé *tenseur des contraintes intrinsèque* ou *tenseur de Noll*.

On définit également habituellement les deux *tenseurs de contraintes de Piola-Kirchhoff*.

Définition 2.7. Soit $\varphi = p \circ p_0^{-1}$ et $\mathbf{F}_{\varphi} = T\varphi$. Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, noté $\mathbf{P} = (P^{iJ})$, contravariant et non symétrique, et le second tenseur de Piola-Kirchhoff, noté $\mathbf{S} = (S^{IJ})$, contravariant et symétrique, sont définis sur Ω_0 par :

$$\mathbf{P} := \rho_0 \mathbf{F}_{\varphi} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} := \varphi^* \boldsymbol{\tau}.$$

On utilisera également la forme mixte du premier $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{q}$.

Remarque 2.8. \mathbf{S} est un champ de tenseurs sur la configuration de référence Ω_0 , \mathbf{P} n'est pas un champ de tenseurs sur Ω_0 (tout comme les vitesses lagrangiennes \mathbf{V} et \mathbf{V}_0 ne sont pas des champs de vecteurs, cf section 1). Il fait en fait intervenir deux configurations et non pas une seule : la source Ω_0 et le but $T\Omega_p \otimes T^*\Omega_0$. Pour cette raison, \mathbf{P} est parfois dénommé dans la littérature [33] un « *two-points tensor* ».

Notons finalement, qu'afin de rester cohérent avec la notion de pull-back (et comme dans [38, 40, 41]), les tenseurs de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}/\rho$, de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S} = \varphi^* \boldsymbol{\tau}$ et de Rougée $\boldsymbol{\theta} = p^* \boldsymbol{\tau}$ ont été définis à partir de $\boldsymbol{\sigma}/\rho$ et non pas à partir de $(J_{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \boldsymbol{\sigma}$ où

$$(2.4) \quad J_{\varphi} := \frac{\rho_0}{\rho \circ \varphi},$$

comme dans les textes classiques [14, 49, 21, 50, 33, 32, 6, 22, 42, 47].

3. LA VARIÉTÉ DES MÉTRIQUES RIEMANNIENNES

L'ensemble $\text{Met}(\mathcal{B})$, des métriques riemanniennes définies sur \mathcal{B} acquiert donc une certaine importance en MMC. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Rougée [40, 41] pour une formulation géométrique de l'hyper-élasticité comme un champ de vecteurs sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, autrement dit comme une section $F : \text{Met}(\mathcal{B}) \rightarrow T\text{Met}(\mathcal{B})$ du fibré tangent $T\text{Met}(\mathcal{B})$. La formulation des lois d'hypo-élasticité (5.1) est quant à elle interprétée géométriquement en Sections 5–6.

Il se trouve que $\text{Met}(\mathcal{B})$ est lui-même une variété de Fréchet, en fait un *ouvert convexe* de l'espace vectoriel de dimension infinie (un espace de Fréchet et non un espace de Banach)

$$\Gamma(S^2 T^* \mathcal{B}),$$

des sections C^{∞} du fibré des tenseurs covariants d'ordre 2 symétriques. L'espace tangent $T_{\gamma} \text{Met}(\mathcal{B})$ s'identifie donc canoniquement avec l'espace vectoriel $\Gamma(S^2 T^* \mathcal{B})$ et le fibré tangent $T\text{Met}(\mathcal{B})$ est trivial

$$T\text{Met}(\mathcal{B}) = \text{Met}(\mathcal{B}) \times \Gamma(S^2 T^* \mathcal{B}).$$

On peut munir la variété des métriques $\text{Met}(\mathcal{B})$ d'une structure Riemannienne naturelle, en posant

$$(3.1) \quad G_{\gamma}^{\mu}(\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2) := \int_{\mathcal{B}} \text{tr}(\gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^1 \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^2) \mu, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2 \in T_{\gamma} \text{Met}(\mathcal{B}),$$

où $\text{tr}(\gamma^{-1}\varepsilon^1\gamma^{-1}\varepsilon^2) = \gamma^{ij}\varepsilon_{ik}^1\gamma^{kl}\varepsilon_{jl}^2$, dans un système de coordonnées locales. Celle-ci a été introduite par Rougée [40, 41] et semble bien adaptée pour la formulation géométrique de plusieurs concepts en mécanique du solide. Nous la dénommerons pour cette raison la *métrique de Rougée*.

Remarque 3.1. Dans (3.1), un point $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ étant fixé, l'intégrant correspond à un produit scalaire sur l'espace (de dimension finie) des matrices symétriques et cette métrique peut s'interpréter comme la « moyenne » de ces produits scalaires. Il s'agit d'un cas particulier de métriques dites affines [1] et dont la structure est assez riche.

En relativité générale, où aucune forme volume n'est définie a priori, on utilise plutôt une variante de cette métrique, la *métrique d'Ebin* [13, 17, 8] définie par

$$(3.2) \quad G_\gamma(\varepsilon^1, \varepsilon^2) := \int_{\mathcal{B}} \text{tr}(\gamma^{-1}\varepsilon^1\gamma^{-1}\varepsilon^2) \text{vol}_\gamma, \quad \varepsilon^1, \varepsilon^2 \in T_\gamma \text{Met}(\mathcal{B}).$$

où vol_γ désigne le volume riemannien associé à la métrique γ . Une propriété importante de la métrique d'Ebin est qu'elle est invariante par le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(\mathcal{B})$. Plus précisément :

$$G_{\varphi^*\gamma}(\varphi^*\varepsilon^1, \varphi^*\varepsilon^2) = G_\gamma(\varepsilon^1, \varepsilon^2), \quad \forall \varphi \in \text{Diff}(\mathcal{B}).$$

Contrairement à la métrique d'Ebin G , la métrique de Rougée G^μ , elle, n'est pas invariante par le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(\mathcal{B})$ mais seulement par son sous-groupe

$$\text{Diff}_\mu(\mathcal{B}) := \{\varphi \in \text{Diff}(\mathcal{B}); \varphi^*\mu = \mu\},$$

des difféomorphismes qui préservent la forme volume μ (la mesure de masse).

Ces structures riemanniennes sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ sont relativement bien comprises et ont été intensément étudiées ces dernières années [12, 13, 17, 19, 8]. On notera toutefois des différences fondamentales importantes entre la géométrie riemannienne sur une variété de dimension finie ou sur une variété de Fréchet.

Une métrique riemannienne G définie sur une variété M (de dimension finie ou infinie) induit une application

$$G : TM \rightarrow T^*M$$

qui est injective (une métrique est, en chaque point, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée). Si M est de dimension finie cette application est nécessairement bijective mais ceci n'est plus nécessairement vrai en dimension infinie. On distinguera alors une métrique riemannienne *forte* (si G est bijective) d'une métrique riemannienne *faible* (si G est seulement injective).

3.1. Dérivées covariantes. Sur un espace vectoriel de Fréchet, seule la notion de dérivée directionnelle a un sens. Sur $\Gamma(S^2T^*\mathcal{B})$, celle-ci s'écrit

$$(3.3) \quad \partial_t \varepsilon := \partial_t \varepsilon(t, \mathbf{X}),$$

étant entendu que ε est un champ de vecteurs dépendant du temps et que la dérivée partielle par rapport au temps t s'effectue dans chaque espace vectoriel (de dimension finie) $T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B}$.

Plus généralement, une dérivée covariante sur $T\text{Met}(\mathcal{B})$ est un opérateur linéaire D qui associe à chaque champ de vecteurs $\varepsilon(t)$ défini le long d'une courbe $\gamma(t) \in \text{Met}(\mathcal{B})$ (i.e. $\pi \circ \varepsilon(t) = \gamma(t)$), un champ de vecteurs $D_t \varepsilon$ défini le long de $\gamma(t)$ et qui satisfait la règle de Leibniz

$$D_t(f\varepsilon) = f_t\varepsilon + fD_t(\varepsilon),$$

pour toute fonction numérique $f : t \mapsto f(t)$. Dans le cas où on a besoin d'insister sur la dépendance de cette dérivée covariante par rapport au chemin de métriques $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(t)$, on utilisera de préférence la notation

$$\frac{D_{\tilde{\gamma}} \varepsilon}{Dt}.$$

En particulier, ∂_t définit une dérivée covariante sur l'espace vectoriel $\Gamma(S^2T^*\mathcal{B})$ qui induit, par restriction sur l'ouvert $\text{Met}(\mathcal{B})$, une dérivée covariante que l'on peut considérer comme canonique. Tout autre dérivée covariante sur $T\text{Met}(\mathcal{B})$ pourra donc s'écrire

$$D_t \varepsilon = \partial_t \varepsilon + \Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon).$$

La connexion riemannienne associée à une métrique G sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ est caractérisée, d'une part, par le fait d'être *compatible avec la métrique G* , c'est à dire

$$\frac{d}{dt}G_{\gamma(t)}(\varepsilon^1(t), \varepsilon^2(t)) = G_{\gamma(t)}(D_t\varepsilon^1(t), \varepsilon^2(t)) + G_{\gamma(t)}(\varepsilon^1(t), D_t\varepsilon^2(t)),$$

pour toute famille à un paramètre $\gamma(t) \in \text{Met}(\mathcal{B})$ et tous champs de vecteurs $\varepsilon^1(t), \varepsilon^2(t)$ définis le long de $\gamma(t)$ et, d'autre part, par le fait qu'elle soit *symétrique*, c'est à dire

$$D_s\partial_t\gamma(t, s) = D_t\partial_s\gamma(t, s).$$

pour toute famille à deux paramètres $\gamma(t, s) \in \text{Met}(\mathcal{B})$. Il faut noter, toutefois, que pour une métrique riemannienne faible, comme c'est le cas de la structure riemannienne sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, seule l'unicité d'une dérivée covariante symétrique qui préserve la métrique (connexion de Levi-Civita) est assurée mais pas son existence, *a priori*.

Théorème 3.2. *La métrique de Rougée G^μ définie par (3.1) sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ admet l'unique dérivée covariante symétrique suivante compatible avec elle*

$$(3.4) \quad D_t\varepsilon := \partial_t\varepsilon - \frac{1}{2}(\gamma_t\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\gamma_t).$$

Remarque 3.3. Sa courbure, définie par

$$R(\partial_s, \partial_t)\varepsilon = \frac{D}{D_s} \frac{D}{D_t} \varepsilon - \frac{D}{D_t} \frac{D}{D_s} \varepsilon$$

est non nulle et s'écrit

$$R(\partial_s, \partial_t)\varepsilon = \frac{1}{4}\gamma [[\gamma^{-1}\gamma_t, \gamma^{-1}\gamma_s], \gamma^{-1}\varepsilon]$$

où la notation $[\cdot, \cdot]$ signifie le commutateur de deux tenseurs mixtes d'ordre 2.

On pourra observer le fait notable suivant : bien que la métrique de Rougée dépendent explicitement de la forme volume μ , la dérivée covariante associée n'en dépend pas. Cette dérivée covariante est de plus invariante par l'action de tout le groupe des difféomorphismes sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ (alors que la métrique n'est invariante que par le groupe des difféomorphismes qui préservent la forme volume μ). Autrement dit, étant donné un difféomorphisme $\psi \in \text{Diff}(\mathcal{B})$, une courbe $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(t)$ sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ et une courbe $\varepsilon(t)$ sur $T\text{Met}(\mathcal{B})$ définie le long de γ , alors

$$\frac{D_{\psi^*\tilde{\gamma}}(\psi^*\varepsilon)}{D_t} = \psi^* \left(\frac{D_{\tilde{\gamma}}\varepsilon}{D_t} \right)$$

et donc

$$\Gamma_{\psi^*\gamma}(\psi^*\gamma_t, \psi^*\varepsilon) = \psi^*(\Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon)).$$

Remarque 3.4. La dérivée covariante associée à la métrique d'Ebin (3.2) sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ a été calculée dans [19]. Elle est légèrement plus compliquée et s'écrit :

$$(3.5) \quad D_t\varepsilon := \partial_t\varepsilon - \frac{1}{2} \left(\gamma_t\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\gamma_t + \frac{1}{2} \text{tr}(\gamma^{-1}\gamma_t\gamma^{-1}\varepsilon)\gamma - \frac{1}{2} \text{tr}(\gamma^{-1}\gamma_t)\varepsilon - \frac{1}{2} \text{tr}(\gamma^{-1}\varepsilon)\gamma_t \right).$$

Elle est également invariante par $\text{Diff}(\mathcal{B})$.

Le dual $T_\gamma^*\text{Met}(\mathcal{B})$ est un espace de *tenseurs-distributions*, c'est à dire de formes linéaires continues sur l'espace des champs de déformations virtuelles $T_\gamma\text{Met}(\mathcal{B})$. Toute dérivée covariante sur $T\text{Met}(\mathcal{B})$ induit formellement une dérivée covariante sur le fibré cotangent $T^*\text{Met}(\mathcal{B})$, grâce à la règle de Leibniz, définie par

$$(3.6) \quad (D_tP)(\varepsilon) = \partial_t(P(\varepsilon)) - P(D_t\varepsilon),$$

pour tout champ de covecteur P et tout champ de vecteurs ε définis le long d'une courbe $\gamma(t) \in \text{Met}(\mathcal{B})$.

Soit maintenant $\boldsymbol{\theta}$ un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2 sur \mathcal{B} . Alors, sa « puissance »

$$(3.7) \quad P(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mu, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(S^2 T^* \mathcal{B})$$

définit une forme linéaire continue sur $T_\gamma \text{Met}(\mathcal{B}) \simeq \Gamma(S^2 T^* \mathcal{B})$ et s'interprète donc comme un élément de $T_\gamma^* \text{Met}(\mathcal{B})$. On a de plus

$$D_t P(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{B}} (\partial_t \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\theta} : \Gamma_\gamma(\boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\varepsilon})) \mu.$$

Lorsque cette dernière expression possède une densité, on dit que la dérivée covariante D préserve les *distributions à densité* et on s'autorisera alors l'abus de notation suivant :

$$D_t P(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{B}} (D_t \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mu.$$

3.2. Géodésiques et transport parallèle. En géométrie riemannienne, les géodésiques sont définies comme les extrémales de la *fonctionnelle énergie*

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\gamma}_t \rangle dt.$$

Pour la métrique de Rougée, elle sont donc solutions de l'équation d'Euler-Lagrange associée qui s'écrit :

$$D_t \boldsymbol{\gamma}_t = \boldsymbol{\gamma}_{tt} - \boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t = 0,$$

où les dérivées partielles doivent être comprises comme des dérivées dans l'espace vectoriel de dimension fini $S^2 T_{\mathbf{X}}^* B$, \mathbf{X} étant fixé. Cette équation est équivalente à

$$\partial_t (\boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t) = 0.$$

L'équation des géodésiques est une équation différentielle du deuxième ordre sur $\text{Met}(\mathcal{B})$. Étant donné des valeurs initiales $(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$, on introduit le tenseur mixte $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 := \boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0$ et on obtient

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}_0 \exp(t \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0).$$

On en déduit l'expression de l'*exponentielle Riemannienne* associée à la métrique de Rougée G^μ . Celle-ci est définie comme le temps 1 du flot géodésique $\Phi(t, \boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon})$, où $(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon})$ sont les données initiales (position–vitesse) à l'instant $t = 0$ de la géodésique $\boldsymbol{\gamma}(t) = \Phi(t, \boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon})$. On a donc :

$$\text{Exp}_{\boldsymbol{\gamma}_0}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\gamma}_0 \exp(\boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Cette application exponentielle est de plus un difféomorphisme local [19, Theorem 3.4].

Un champ de vecteurs sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, défini le long d'une courbe $\boldsymbol{\gamma}(t)$ est dit *parallèle* pour la métrique de Rougée si

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t) = 0.$$

Cette équation se réécrit

$$\partial_t (\boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_t - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_t \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

avec $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} := \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_t := \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t$. Soit $\widehat{\mathbf{h}}(t)$ le tenseur mixte, solution de l'équation linéaire $\widehat{\mathbf{h}}_t = (\widehat{\mathbf{h}} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_t) / 2$. Alors, l'équation

$$\partial_t \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_t - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_t \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

s'intègre en

$$\partial_t (\widehat{\mathbf{h}} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \widehat{\mathbf{h}}^{-1}) = 0,$$

ce qui nous donne

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \widehat{\mathbf{h}}^{-1}(t) (\widehat{\mathbf{h}}_0 \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \widehat{\mathbf{h}}_0^{-1}) \widehat{\mathbf{h}}(t).$$

Remarque 3.5. Tout champ de vecteurs parallèle $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ pour la métrique de Rougée est *isospectral*, dans le sens où $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ et $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ ont les mêmes valeurs propres.

3.3. La variété $\text{Met}(\mathcal{B})$ comme produit de variétés riemanniennes. $\text{Met}(\mathcal{B})$ étant un ouvert de $\Gamma(S^2T^*\mathcal{B})$, on peut également voir $\gamma \in \text{Met}(\mathcal{B})$ comme un élément de $T_\gamma\text{Met}(\mathcal{B})$ et donc considérer l'application

$$\gamma \mapsto \gamma, \quad \text{Met}(\mathcal{B}) \rightarrow T\text{Met}(\mathcal{B})$$

comme une section du fibré tangent, c'est à dire un champ de vecteurs. On peut donc écrire

$$(3.8) \quad T_\gamma\text{Met}(\mathcal{B}) = C^\infty(\mathcal{B})\gamma \oplus (C^\infty(\mathcal{B})\gamma)^\perp,$$

où l'orthogonalité peut se référer, soit à la métrique d'Ebin (3.2), soit à la métrique de Rougée (3.1). Dans les deux cas, l'espace $(C^\infty(\mathcal{B})\gamma)^\perp$ s'écrit

$$(C^\infty(\mathcal{B})\gamma)^\perp = \{\varepsilon \in \Gamma(S^2T^*\mathcal{B}); \text{tr}(\gamma^{-1}\varepsilon) = 0\},$$

et on a le résultat suivant.

Lemme 3.6. *Soit $p \in \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, \mathbf{k} un champ de tenseurs covariant d'ordre 2 sur $\Omega_p = p(\mathcal{B})$ et*

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^H + \mathbf{k}^D,$$

sa décomposition en partie sphérique (on dit encore hydrostatique) et déviateur (par rapport à la métrique \mathbf{q} sur \mathcal{E}). Alors, le pullback de cette décomposition

$$p^*\mathbf{k} = p^*\mathbf{k}^H + p^*\mathbf{k}^D$$

correspond à la décomposition orthogonale (3.8).

A la décomposition du fibré tangent (3.8) correspond une structure de variété riemannienne produit de $(\text{Met}(\mathcal{B}), G)$ [9]. En effet, soit $\text{Vol}(\mathcal{B})$ l'ensemble des formes volumes positives sur \mathcal{B} . Il s'agit d'un cône ouvert dans l'espace vectoriel $\Omega^3(\mathcal{B})$, des formes différentielles de degré 3 sur \mathcal{B} (c.f. [Appendice F](#)). Étant donnée une forme volume μ sur \mathcal{B} , on définit alors la sous-variété

$$\text{Met}_\mu(\mathcal{B}) := \{\gamma \in \text{Met}(\mathcal{B}); \text{vol}_\gamma = \mu\}$$

de $\text{Met}(\mathcal{B})$ et l'application

$$\Psi_\mu : \text{Vol}(\mathcal{B}) \times \text{Met}_\mu(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Met}(\mathcal{B}), \quad (\nu, \gamma) \mapsto (\nu/\mu)^{2/3}\gamma.$$

Alors, cette application est une *isométrie riemannienne* si on munit $\text{Met}(\mathcal{B})$ de la métrique de Rougée G^μ , ainsi que la sous-variété $\text{Met}_\mu(\mathcal{B})$ et si l'on introduit sur $\text{Vol}(\mathcal{B})$ la métrique riemannienne suivante

$$G_\nu(\omega_1, \omega_2) := \frac{4}{3} \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\omega_1}{\nu}\right) \left(\frac{\omega_2}{\nu}\right) \mu.$$

La variété riemannienne $(\text{Met}(\mathcal{B}), G^\mu)$ est donc un produit de variétés riemanniennes.

4. COVARIANCE GÉNÉRALE – INDIFFÉRENCE MATÉRIELLE – OBJECTIVITÉ

La mécanique classique est un système de croyance : chacun d'entre nous croit vivre, à chaque instant, dans un *espace affine euclidien orienté de dimension 3* et disposer d'un *temps absolu*. Ces hypothèses semblent confirmées par l'expérience dans une bonne approximation, du moins à l'échelle quotidienne. En paraphrasant Jean-Marie Souriau [45], nos horloges sont théoriquement *synchrones* et nous nous attendons à ce que, quelque soit le destin de chacun d'entre nous, elles indiquent la même heure à chacune de nos rencontres et par extension que le temps soit le même partout. De même, les longueurs semblent avoir un sens absolu. L'univers newtonien M est donc modélisé par un espace euclidien tridimensionnel \mathcal{E} et une *flèche du temps absolu* \mathcal{T} . Le choix d'un repère de temps et d'un repère d'espace orthonormé permet ainsi de localiser tout *événement* de l'univers par un quadruplet de nombre réels (t, x, y, z) qui sont les coordonnées de cet événement dans ce *référentiel* et que l'on écrira de manière plus condensée sous la forme (t, \mathbf{x}) . Par conséquent, il est traditionnellement fait le postulat qu'un changement d'observateur conduit à une transformation

$$(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = (t + t_0, g(t)\mathbf{x}), \quad g(t)\mathbf{x} = a(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad a(t) \in \text{O}(3), \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^3,$$

où $g(t)$ est un déplacement de l'espace affine euclidien \mathcal{E} dépendant du temps.

La notion d'*objectivité* ou d'*indifférence matérielle*, en langage moderne, bien que souvent confuse et sujet à controverse dans la littérature mécanique, semble remonter aux travaux d'Olroyd [36] et au célèbre ouvrage de Truesdell et Noll [49], qui ont cherché à formuler des principes de covariance que devaient respecter les lois de comportement. Nous n'entrerons pas dans le débat sur le bien-fondé de ces hypothèses ici mais nous chercherons à clarifier la définition mathématique du concept d'objectivité.

Définition 4.1. Soit $\mathcal{F} : \tilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\tilde{p}}$ une application qui à tout chemin de plongements $\tilde{p} := (p(t))$ associe un champ de tenseurs (ou une fonction scalaire) $\mathbf{t}_{\tilde{p}}$, dépendant du temps t et défini, à chaque instant t , sur $\Omega_{p(t)} := p(t)(\mathcal{B})$. Soit $\tilde{g} := (g(t))$, un chemin de déplacements de l'espace \mathcal{E} et notons $\tilde{g} \star \tilde{p}$, le chemin de plongements défini à l'instant t par $g(t) \circ p(t)$. On dira que :

(1) \mathcal{F} est *objective* si

$$\mathbf{t}_{\tilde{g} \star \tilde{p}}(t) = g(t)_* \mathbf{t}_{\tilde{p}}(t),$$

pour tout chemin de plongements \tilde{p} et tout chemin de déplacements \tilde{g} ;

(2) \mathcal{F} est *covariante générale* si

$$\mathbf{t}_{\tilde{\varphi} \star \tilde{p}}(t) = \varphi(t)_* \mathbf{t}_{\tilde{p}}(t),$$

pour tout chemin de plongements \tilde{p} et tout chemin de difféomorphismes $\tilde{\varphi} := (\varphi(t))$ de l'espace ;

où $g(t)_*$ et $\varphi(t)_*$ signifient les *push-forward* par $g(t)$ et par $\varphi(t)$.

Remarque 4.2. En langage mathématique plus rigoureux, l'application \mathcal{F} correspond à une section (le long d'une courbe \tilde{p}) du fibré vectoriel

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_{p \in \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})} \mathcal{E}_p$$

où

$$\mathcal{E}_p := \{\mathbf{t} \in C^\infty(\Omega_p, \mathbb{T}); \pi \circ \mathbf{t} = \text{id}\}$$

est l'espace vectoriel des champs de tenseurs d'un type donné \mathbb{T} sur \mathcal{E} mais définis *a priori* uniquement sur Ω_p . L'objectivité (ou la covariance générale) se traduisent par des propriétés d'équivariance de ces sections.

Remarque 4.3. Il est évident que toute application \mathcal{F} covariante générale est également objective mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 4.4. Soit \mathbf{T} un champ de tenseurs défini sur \mathcal{B} et soit $\mathcal{F}(\tilde{p}) = \mathbf{t}_{\tilde{p}}$, avec $\mathbf{t}_{\tilde{p}}(t) = p(t)_* \mathbf{T}$. Alors \mathcal{F} est covariante générale et donc objective.

Exemple 4.5. Étant donné un champ de tenseurs \mathbf{t} défini sur \mathcal{E} , soit $\mathcal{F}(\tilde{p}) = \mathbf{t}_{\tilde{p}}$, où $\mathbf{t}_{\tilde{p}}(t)$ est la restriction de \mathbf{t} à $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathcal{B})$. Alors \mathcal{F} est objective si et seulement si $g_* \mathbf{t} = \mathbf{t}$ quelque soit le déplacement g . En particulier, si \mathbf{t} est une fonction scalaire, alors elle est constante. Si \mathbf{t} est un champ de vecteurs, alors $\mathbf{t} = 0$. Si \mathbf{t} est un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 symétriques, alors $\mathbf{t} = \lambda \mathbf{q}$ est sphérique. Si \mathbf{t} est un champ de tenseurs covariants alternés d'ordre 3, alors $\mathbf{t} = \lambda \text{vol}_{\mathbf{q}}$ est proportionnel à la forme volume canonique euclidienne.

Remarque 4.6. Deux exemples physiques complémentaires de vecteurs et de tenseurs d'ordre 2 non objectifs viennent illustrer l'exemple précédent.

- Les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} , aucunement liés à la configuration Ω et définis sur tout l'espace \mathcal{E} , ne sont pas des grandeurs objectives.
- Dans un milieu homogène isotrope défini par une permittivité électrique ϵ_0 et une perméabilité magnétique μ_0 , le tenseur électromagnétique de Maxwell, d'ordre 2, ici covariant,

$$\epsilon_0 \left(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{q} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 \mathbf{q} \right)$$

n'est pas objectif. En particulier, ni $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ ni $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ ne sont objectifs.

Exemple 4.7. Soit $\mathcal{F} : \tilde{p} \mapsto \mathbf{u}_{\tilde{p}}$, l'application qui à tout chemin de plongements \tilde{p} associe sa vitesse eulerienne (à droite)

$$\mathbf{u}_{\tilde{p}}(t) := (\partial_t p) \circ p(t)^{-1},$$

qui est un champ de vecteurs sur $\Omega_{p(t)}$. Alors, on a :

$$\mathbf{u}_{\tilde{g}\star\tilde{p}}(t) = g(t)_* \mathbf{u}_{\tilde{p}}(t) + \mathbf{w}(t),$$

où $\mathbf{w}(t) := (\partial_t g) \circ g(t)^{-1}$ est la *vitesse d'entraînement*. La vitesse eulerienne n'est donc pas objective.

Exemple 4.8. Lorsque l'on passe de $p(t)$ à $\bar{p}(t) = g(t) \circ p(t)$, où $g(t)\mathbf{x} = a(t)\mathbf{x} + b(t)$, le gradient de la vitesse eulerienne se transforme de la façon suivante

$$\nabla \mathbf{u}_{\bar{p}} = a(\nabla \mathbf{u}_p) a^t + \boldsymbol{\omega},$$

où $\boldsymbol{\omega} := \dot{a} a^{-1}$ est antisymétrique. L'application $\tilde{p} \mapsto \nabla \mathbf{u}_{\tilde{p}}$ n'est donc pas objective mais le taux de déformation

$$\widehat{\mathbf{d}}_{\tilde{p}} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_{\tilde{p}} + \nabla \mathbf{u}_{\tilde{p}}^t)$$

l'est. Il n'est toutefois pas covariant général.

La notion d'objectivité (et de covariance générale) s'étend, sans difficulté, des champs de tenseurs aux *tenseurs-distributions*, c'est à dire aux formes linéaires sur les champs de tenseurs et en particulier aux *puissances virtuelles*. Plus précisément, soit $\mathcal{P}_{\tilde{p}}$ un chemin de tenseurs-distributions sur l'espace des champs de tenseurs covariants symétriques d'ordre 2 et soit \tilde{g} un chemin de déplacements. On dira que $\mathcal{P}_{\tilde{p}}$ est objectif si

$$\mathcal{P}_{\tilde{g}\star\tilde{p}}(t) = \tilde{g}(t)_* \mathcal{P}_{\tilde{p}}(t),$$

où

$$(\tilde{g}_* \mathcal{P}_{\tilde{p}})(\mathbf{k}) := \mathcal{P}_{\tilde{p}}(\tilde{g}^* \mathbf{k}),$$

pour tout champ de tenseurs covariants symétriques d'ordre 2 défini sur Ω_p . Cette définition étendue nous permet de formuler le résultat suivant dénommé théorème de Noll [49].

Théorème 4.9. *La puissance virtuelle d'une distribution à densité*

$$\mathcal{P}_{\tilde{p}}(\mathbf{k}) := \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}} : \mathbf{k} \, \text{vol}_{\mathbf{q}}$$

est objective si et seulement si le champ de tenseurs $\boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}}$ l'est.

Démonstration. La puissance virtuelle $\mathcal{P}_{\tilde{p}}$ est objective si et seulement si

$$\mathcal{P}_{\tilde{g}\star\tilde{p}}(t) = g(t)_* \mathcal{P}_{\tilde{p}}(t),$$

ce qui se réécrit, en utilisant la relation $g_* \mathcal{P}_{\tilde{p}}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_{\tilde{p}}(g^* \mathbf{k})$ définissant l'action de g ,

$$\int_{\Omega_{\tilde{p}(t)}} \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{g}(t)\star\tilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \, \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_{p(t)}} \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}}(t) : (g(t)^* \bar{\mathbf{k}}) \, \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

pour tout champ $\bar{\mathbf{k}}$ défini sur $\Omega_{\tilde{p}}$ et où on a posé $\tilde{p}(t) = g(t) \circ p(t)$. Mais

$$\boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}}(t) : (g(t)^* \bar{\mathbf{k}}) \, \text{vol}_{\mathbf{q}} = g(t)^* (g(t)_* \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \, \text{vol}_{\mathbf{q}})$$

car $g(t)^* \text{vol}_{\mathbf{q}} = \text{vol}_{\mathbf{q}}$. L'objectivité de $\mathcal{P}_{\tilde{p}}$ se traduit donc, après utilisation de la formule de changement de variable, par

$$\int_{\Omega_{\tilde{p}(t)}} \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{g}\star\tilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \, \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_{\tilde{p}(t)}} g(t)_* \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \, \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Ceci étant vrai pour tout champ $\bar{\mathbf{k}}$, on a bien l'équivalence entre $\mathcal{P}_{\tilde{g}\star\tilde{p}}(t) = g(t)_* \mathcal{P}_{\tilde{p}}(t)$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\tilde{g}\star\tilde{p}}(t) = g(t)_* \boldsymbol{\sigma}_{\tilde{p}}(t)$, ce qui achève la preuve. \square

5. DÉRIVÉES MATÉRIELLES

La notion d'objectivité a été étendue, en mécanique des milieux continus, aux dérivées temporelles. Celles-ci interviennent de manière récurrente en mécanique des matériaux et sont l'objet d'une littérature abondante, bien que cette notion semble rarement définie avec rigueur. Rappelons également que ces dérivées, notées $d_{\tilde{p}}/dt$ dans ces notes et le plus souvent appliquées à des grandeurs objectives, sont souvent utilisées pour formuler des lois d'hypo-élasticité sur la configuration déformée [25, 48]. Par exemple pour les matériaux solides on écrit parfois :

$$(5.1) \quad \frac{d_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} = \mathbf{E} : \mathbf{d} \quad \left(\frac{d_{\tilde{p}}\tau^{ij}}{dt} = E^{ijkl}d_{kl} \right)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes de Kirchhoff (éventuellement, le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$), \mathbf{d} le taux de déformation, et \mathbf{E} le tenseur d'(hypo-)élasticité, d'ordre 4, *a priori* fonction de l'état de déformation [5, 44]. En mécanique des fluides, une relative élasticité du milieu fluide est introduite en écrivant par exemple [36] :

$$(5.2) \quad \boldsymbol{\sigma} + \lambda \frac{d_{\tilde{p}}\boldsymbol{\sigma}}{dt} = 2\eta \mathbf{q}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{q}^{-1},$$

où η est la viscosité dynamique, et λ le temps de relaxation.

Définition 5.1. Une *dérivée matérielle* est un opérateur linéaire $d_{\tilde{p}}/dt$ opérant sur les champs de tenseurs $\mathbf{t}_{\tilde{p}}$ définis le long d'un chemin de plongements $\tilde{p} : t \mapsto p(t)$ et satisfaisant de plus la règle de Leibniz

$$\frac{d_{\tilde{p}}}{dt}(f\mathbf{t}) = (\partial_t f)\mathbf{t} + f \frac{d_{\tilde{p}}}{dt}(\mathbf{t}),$$

pour toute fonction $f : t \mapsto f(t)$.

Remarque 5.2. En langage mathématique plus rigoureux, une dérivée matérielle correspond à une dérivée covariante sur le fibré vectoriel (de dimension infinie) \mathcal{E} défini dans la remarque 4.2.

L'exemple le plus connu de dérivée matérielle est sans doute la *dérivée particulière*, définie de la manière suivante. Soit $\tilde{p} : t \mapsto p(t)$ un chemin de plongements et \mathbf{t} un champ de tenseurs défini sur $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathcal{B})$. Fixons une particule indexée par $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$. Alors son « histoire » est décrite par une courbe $\tilde{\mathbf{x}} : t \mapsto p(t, \mathbf{X})$ sur \mathcal{E} et $\mathbf{t}(t) := \mathbf{t}(t, p(t, \mathbf{X}))$ est un champ de tenseurs sur $\Omega_{p(t)}$ défini le long de $\tilde{\mathbf{x}}$. Si la dérivée partielle de $\mathbf{t}(t, \mathbf{x})$ par rapport à t a un sens car il s'agit d'une dérivée dans l'espace vectoriel fixe $T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}$, la dérivée partielle par rapport à \mathbf{x} nécessite la définition d'une *dérivée covariante* sur \mathcal{E} , que nous choisirons comme étant la dérivée riemannienne associée à \mathbf{q} . On peut donc calculer la dérivée covariante de $\mathbf{t}(t)$ le long de $\tilde{\mathbf{x}}$. Celle-ci s'écrit, \mathbf{u} étant la vitesse eulerienne à droite,

$$(5.3) \quad \dot{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{t}.$$

C'est la *dérivée particulière* de \mathbf{t} , qui peut s'interpréter également par la formule

$$\partial_t(\mathbf{t} \circ p) \circ p^{-1},$$

qui définit une dérivée covariante sur le fibré \mathcal{E} défini dans la remarque 4.2.

Remarque 5.3. L'*accélération lagrangienne* d'une particule indexée par $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ est définie par

$$(5.4) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(t, \mathbf{X}) = (\dot{\mathbf{u}} \circ p)(t, \mathbf{X}),$$

son *accélération eulerienne à droite* comme

$$(5.5) \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \circ p^{-1} = \dot{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u},$$

et son *accélération eulerienne à gauche* comme

$$(5.6) \quad Tp^{-1} \circ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = Tp^{-1} \circ \dot{\mathbf{u}} \circ p = p^* \dot{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{U}}^{\mathcal{U}} \mathbf{U},$$

$\mathbf{U} = Tp^{-1} \circ \mathbf{V}$, étant la vitesse eulerienne à gauche.

L'extension de la notion d'objectivité pour les dérivées matérielles s'obtient naturellement en requérant que celles-ci transforment des quantités objectives en quantités objectives, autrement dit, en demandant que

$$\frac{d_{\tilde{g}^*\tilde{p}}}{dt} \mathbf{t}_{\tilde{g}^*\tilde{p}} = \frac{d_{\tilde{g}^*\tilde{p}}}{dt} (\tilde{g}_* \mathbf{t}_{\tilde{p}}) = \tilde{g}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{t}_{\tilde{p}}}{dt} \right),$$

pour tout champ de tenseurs $\mathbf{t}_{\tilde{p}}$ objectif, où on a posé $(\tilde{g}_* \mathbf{t}_{\tilde{p}})(t) = g(t)_* \mathbf{t}_{\tilde{p}}(t)$. Ceci nous amène à formuler les définitions suivantes.

Définition 5.4. (1) Une dérivée matérielle $d_{\tilde{p}}/dt$ est objective si

$$\frac{d_{\tilde{g}^*\tilde{p}}}{dt} (\tilde{g}_* \mathbf{t}) = \tilde{g}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{t}}{dt} \right),$$

pour tout chemin de plongements \tilde{p} , tout chemin de déplacements \tilde{g} et tout champ de tenseurs \mathbf{t} défini le long de \tilde{p} ;

(2) Une dérivée matérielle $d_{\tilde{p}}/dt$ est covariante générale si

$$\frac{d_{\tilde{\varphi}^*\tilde{p}}}{dt} (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}) = \tilde{\varphi}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{t}}{dt} \right),$$

pour tout chemin de plongements \tilde{p} , tout chemin de difféomorphismes $\tilde{\varphi} := (\varphi(t))$ de l'espace et tout champ de tenseurs \mathbf{t} défini le long de \tilde{p} .

Exemple 5.5 (La dérivée particulière). La dérivée particulière définie par (5.3) n'est pas objective. En effet :

$$\frac{d_{\tilde{g}^*\tilde{p}}}{dt} (\tilde{g}_* \mathbf{t}) = \tilde{g}_* (\partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{t} + \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mathbf{t} + \nabla_{\tilde{g}^* \mathbf{w}} \mathbf{t}),$$

$\mathbf{w} := \partial_t g \circ g^{-1}$ étant la vitesse d'entraînement, alors que

$$\tilde{g}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{t}}{dt} \right) = \tilde{g}_* (\partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{t}).$$

Exemple 5.6 (La dérivée de Lie). Une autre façon d'obtenir une dérivée matérielle est de poser

$$(5.7) \quad \overset{\nabla}{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{t}.$$

Cette dernière, contrairement à la dérivée particulière est non seulement objective mais également covariante générale. En effet :

$$\frac{d_{\tilde{\varphi}^*\tilde{p}}}{dt} (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}) = \partial_t (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}) + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{u}}} (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}).$$

où $\bar{\mathbf{u}}$, la vitesse eulerienne du chemin de plongements $\bar{p}(t) := \varphi(t) \circ p(t)$, s'écrit

$$\bar{\mathbf{u}} := \partial_t \bar{p} \circ \bar{p}^{-1} = \mathbf{w} + \varphi_* \mathbf{u}$$

et $\mathbf{w} := \partial_t \varphi \circ \varphi^{-1}$ est la vitesse d'entraînement. Par ailleurs (voir [Appendice D](#)), on a

$$\partial_t (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}) = \tilde{\varphi}_* (\partial_t \mathbf{t} - \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mathbf{t}), \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_* (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{t}) = \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}_* \mathbf{v}} (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}).$$

On a donc

$$\partial_t (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}) + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{u}}} (\tilde{\varphi}_* \mathbf{t}) = \tilde{\varphi}_* (\partial_t \mathbf{t} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{t}) = \tilde{\varphi}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{t}}{dt} \right).$$

La dérivée matérielle $\overset{\nabla}{\mathbf{t}}$ définie par (5.7) peut se réécrire à l'aide du lemme [D.7](#) sous la forme

$$(5.8) \quad \frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{t}}{dt} := \tilde{p}_* (\partial_t (\tilde{p}^* \mathbf{t})),$$

ce qui nous amène à la reformulation suivante. Dans le cas d'un d'un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, la formule (5.8) s'interprète comme le push-forward de la dérivée covariante canonique (3.3) sur $\text{Met}(\mathcal{B})$. Comme il n'y a par ailleurs aucune raison de limiter cette interprétation à la seule dérivée covariante canonique sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, ceci nous offre la possibilité de produire de cette façon, une infinité de dérivées matérielles pour les champs de tenseurs covariants d'ordre 2 et nous amène à la définition suivante.

Définition 5.7. Soit D une dérivée covariante sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, $\tilde{p} = (p(t))$ un chemin de plongements et $\tilde{\gamma}$ le chemin de métriques $\gamma(t) = p(t)^*\mathbf{q}$. On définit alors une dérivée matérielle sur les champs de tenseurs covariants d'ordre 2, en posant

$$(5.9) \quad \frac{d_{\tilde{p}}\mathbf{k}}{dt} := \tilde{p}_* \left(\frac{D\tilde{\gamma}}{Dt}(\tilde{p}^*\mathbf{k}) \right),$$

pour tout champ de tenseurs objectif \mathbf{k} défini le long de \tilde{p} .

On a par ailleurs, le résultat notable suivant.

Théorème 5.8. *Quelque soit la dérivée covariante D sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, la dérivée matérielle (5.9) est objective.*

Remarque 5.9. On notera toutefois que ces dérivées matérielles objectives n'ont aucune raison d'être, en générale, covariantes par rapport à un mouvement non rigide de l'espace.

Démonstration. Toute dérivation covariante sur $\text{Met}(\mathcal{B})$ s'écrit

$$D_t\varepsilon = \partial_t\varepsilon + \Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon),$$

où Γ est un opérateur bilinéaire qui dépend de γ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d_{\tilde{g}\star\tilde{p}}}{dt}(\tilde{g}\star\mathbf{k}) &= (\tilde{g}\star\tilde{p})_*(\partial_t(\tilde{g}\star\tilde{p})^*\mathbf{k}) + (\tilde{g}\star\tilde{p})_*\Gamma_{\tilde{g}\star\tilde{\gamma}}((\tilde{g}\star\tilde{\gamma})_t, (\tilde{g}\star\tilde{p})^*\mathbf{k}) \\ &= \tilde{p}_*\partial_t(\tilde{p}^*\mathbf{k}) + (\tilde{g}\star\tilde{p})_*\Gamma_{\tilde{g}\star\tilde{\gamma}}((\tilde{g}\star\tilde{\gamma})_t, (\tilde{g}\star\tilde{p})^*\mathbf{k}), \end{aligned}$$

en vertu de la remarque 5.6. Mais $(\tilde{g}\star\tilde{p})^*\mathbf{q} = \tilde{p}^*\mathbf{q} = \tilde{\gamma}$ quelque soit le chemin \tilde{g} de déplacements euclidiens dans \mathcal{E} . Par suite

$$(\tilde{g}\star\tilde{p})_*\Gamma_{\tilde{g}\star\tilde{\gamma}}((\tilde{g}\star\tilde{\gamma})_t, (\tilde{g}\star\tilde{p})^*\mathbf{k}) = \tilde{g}_*(\tilde{p}_*\Gamma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}_t, \tilde{p}^*(\tilde{g}^*\mathbf{k}))).$$

On en déduit donc

$$\frac{d_{\tilde{g}\star\tilde{p}}}{dt}(\tilde{g}\star\mathbf{k}) = \tilde{g}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}}\mathbf{k}}{dt} \right),$$

ce qui achève la preuve. \square

Le théorème 5.8 s'étend aux champs de tenseurs-distributions et en particulier aux champs de tenseurs d'ordre 2 contravariants, lorsque la connexion induite sur $T^*\text{Met}(\mathcal{B})$ préserve les distributions à densité.

Théorème 5.10. *Toute dérivée covariante D sur $T^*\text{Met}(\mathcal{B})$, qui préserve les distributions à densité, définit une dérivée matérielle objective*

$$\frac{d_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} := \tilde{p}_* \left(\frac{D\tilde{p}}{Dt}(\tilde{p}^*\boldsymbol{\tau}) \right).$$

sur les champs de tenseurs contravariants $\boldsymbol{\tau}$ d'ordre 2.

Remarque 5.11. On pourra observer que la définition même de $D_t\boldsymbol{\theta}$ conduit à la relation

$$D_t\boldsymbol{\theta} : \varepsilon = \partial_t\boldsymbol{\theta} : \varepsilon - \boldsymbol{\theta} : \Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon), \quad \forall \boldsymbol{\theta}, \varepsilon.$$

Cette dernière relation nous permet alors d'établir la règle de Leibniz suivante pour la dérivée matérielle

$$(5.10) \quad \frac{d_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} : \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau} : \frac{d_{\tilde{p}}\mathbf{k}}{dt} = p_*(\partial_t p^*(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{k})).$$

Démonstration du théorème 5.10. Soit $\bar{p}(t) = g(t) \circ p(t)$ où $g(t)$ est un chemin de déplacements euclidiens dans \mathcal{E} . On a donc en vertu de (5.10) :

$$\begin{aligned} \frac{d_{\tilde{g}^* \tilde{p}}}{dt}(g_* \boldsymbol{\tau}) : g_* \mathbf{k} &= (\bar{p}_* \circ \partial_t \circ \bar{p}^*)(g_* \boldsymbol{\tau} : g_* \mathbf{k}) - g_* \boldsymbol{\tau} : \frac{d_{\tilde{g}^* \tilde{p}}}{dt}(g_* \mathbf{k}) \\ &= g_* [(p_* \circ \partial_t \circ p^*)(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{k})] - g_* \boldsymbol{\tau} : g_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{k}}{dt} \right) \\ &= g_* \left[(p_* \circ \partial_t \circ p^*)(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{k}) - \boldsymbol{\tau} : \left(\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{k}}{dt} \right) \right] \\ &= g_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} : \mathbf{k} \right) = g_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} \right) : g_* \mathbf{k}, \end{aligned}$$

pour tous $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{k} , et donc

$$\frac{d_{\tilde{g}^* \tilde{p}}}{dt}(g_* \boldsymbol{\tau}) = \tilde{g}_* \left(\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} \right),$$

ce qui achève la preuve. \square

Remarque 5.12. La définition d'une distribution à densité dans $T_\gamma^* \text{Met}(\mathcal{B})$ aurait également pu se faire en utilisant le volume riemannien vol_γ plutôt que la mesure de masse μ , ce qui revient à considérer

$$(5.11) \quad \mathcal{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\mathfrak{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}) \text{vol}_\gamma, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(S^2 T^* \mathcal{B}),$$

en lieu et place de

$$\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mu,$$

où $\mu = \rho_\gamma \text{vol}_\gamma$, $\rho_\gamma = p^*(\rho)$, $\boldsymbol{\mathfrak{G}} := p^* \boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\theta} := p^* \boldsymbol{\tau}$. Dans ce cas, la donnée d'une dérivée covariante sur $T^* \text{Met}(\mathcal{B})$, qui préserve les distributions à densité, induit une autre *dérivée matérielle objective* sur les tenseurs contravariants symétriques $\boldsymbol{\sigma}$ d'ordre 2 en écrivant [48] :

$$\rho \frac{d_{\tilde{p}}}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right).$$

6. LES DÉRIVÉES OBJECTIVES DE LA LITTÉRATURE

Nous montrons dans cette section que toutes les dérivées matérielles objectives que l'on trouve dans la littérature sont induites par des dérivées covariantes définies sur l'espace des métriques $\text{Met}(\mathcal{B})$.

6.1. La dérivée d'Oldroyd. Celle-ci, introduite dans [36], parfois également dénommée dérivée de Lie, correspond à la dérivée covariante sur $T^* \text{Met}(\mathcal{B})$ induite par la dérivée covariante canonique $D_t = \partial_t$ sur $T \text{Met}(\mathcal{B})$. Elle s'écrit :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \partial_t \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{L}_u \boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla u) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\nabla u)^*.$$

6.2. La dérivée de Truesdell. Celle-ci, introduite dans [48], correspond à la variante de la dérive d'Oldroyd introduite dans la remarque 5.12. Elle s'écrit :

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \tilde{p}_* \left(\partial_t \tilde{p}^* \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) \right) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla u) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\nabla u)^* + (\text{div } u) \boldsymbol{\sigma},$$

car, du fait de la conservation de la masse $\rho_t + \text{div}(\rho u) = 0$, on a

$$\rho \tilde{p}_* \left(\partial_t \tilde{p}^* \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = \text{div } u.$$

6.3. La dérivée de Zaremba–Jaumann. Celle-ci, introduite dans [52, 25], s'écrit (voir également [29, 30, 31]) :

$$(6.1) \quad \overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{w}}^*,$$

où

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^a = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} - (\nabla \boldsymbol{u})^t).$$

C'est Paul Rougée [38, 39, 41] qui a réalisé, pour la première fois, que cette dérivée objective correspondait à la dérivée covariante associée à la métrique G^μ (3.1).

Théorème 6.1 (Rougée, 1991). *La dérivée de Zaremba–Jaumann correspond à la dérivée covariante*

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\gamma_t \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \gamma^{-1} \gamma_t).$$

Celle-ci préserve les distributions à densité et on a :

$$(6.2) \quad \frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{k}}{dt} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\boldsymbol{w}} + \widehat{\boldsymbol{w}}^* \mathbf{k},$$

pour tout champ de 2-tenseurs covariants \mathbf{k} et

$$(6.3) \quad \frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{w}}^*,$$

pour tout champ de 2-tenseurs contravariants $\boldsymbol{\tau}$.

Démonstration. Commençons par observer que la dérivée covariante

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\gamma_t \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \gamma^{-1} \gamma_t).$$

préserve les distributions à densité. En effet :

$$\boldsymbol{\theta} : \Gamma_\gamma^\mu(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} : (\gamma_t \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \gamma^{-1} \gamma_t) = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \gamma_t \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \gamma_t \boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon},$$

ce qui permet de définir

$$D_t \boldsymbol{\theta} := \partial_t \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \gamma_t \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \gamma_t \boldsymbol{\theta}).$$

On d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{k}}{dt} &= p_* (D_t(p^* \mathbf{k})) \\ &= p_* \partial_t(p^* \mathbf{k}) - \frac{1}{2} p_* (\gamma_t \gamma^{-1}(p^* \mathbf{k}) + (p^* \mathbf{k}) \gamma^{-1} \gamma_t) \\ &= \partial_t \mathbf{k} + \mathcal{L}_u \mathbf{k} - (\mathbf{d} \mathbf{q}^{-1} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{q}^{-1} \mathbf{d}) \\ &= \partial_t \mathbf{k} + \mathcal{L}_u \mathbf{k} - ((\nabla \boldsymbol{u})^s)^* \mathbf{k} - \mathbf{k} (\nabla \boldsymbol{u})^s \\ &= \partial_t \mathbf{k} + \nabla_u \mathbf{k} + (\nabla \boldsymbol{u})^* \mathbf{k} + \mathbf{k} (\nabla \boldsymbol{u}) - ((\nabla \boldsymbol{u})^s)^* \mathbf{k} - \mathbf{k} (\nabla \boldsymbol{u})^s \\ &= \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} (\nabla \boldsymbol{u})^a + ((\nabla \boldsymbol{u})^a)^* \mathbf{k} \\ &= \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\boldsymbol{w}} + \widehat{\boldsymbol{w}}^* \mathbf{k}, \end{aligned}$$

car $p_* \gamma_t = 2\mathbf{d} = 2\mathbf{q}(\nabla \boldsymbol{u})^s$ (théorème 2.3), $\mathbf{d} \mathbf{q}^{-1} = ((\nabla \boldsymbol{u})^s)^*$ et $\mathcal{L}_u \mathbf{k} = \nabla_u \mathbf{k} + (\nabla \boldsymbol{u})^* \mathbf{k} + \mathbf{k} (\nabla \boldsymbol{u})$, en vertu du théorème E.5. De la même façon, on établit que

$$\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = p_* (D_t(p^* \boldsymbol{\tau})) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{w}}^*.$$

□

6.4. La dérivée de Fiala. De manière similaire à la façon dont Rougée [38, 39] a retrouvé la dérivée de Zaremba-Jaumann à partir de la dérivée covariante associée à la métrique (3.1), Fiala a proposé dans [16] une nouvelle dérivée objective sur les tenseurs covariants d'ordre 2, à partir de la dérivée covariante (3.5) associée à la métrique d'Ebin (3.2).

Théorème 6.2. *La dérivée covariante (3.5) associée à la métrique d'Ebin (3.2) induit sur $T^*\text{Met}(\mathcal{B})$ une dérivée covariante qui préserve les distributions à densité. La dérivée objective correspondante sur les champs de tenseurs covariants \mathbf{k} d'ordre 2 s'écrit :*

$$(6.4) \quad \frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{k}}{dt} := \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\mathbf{w}}^* \mathbf{k} + \frac{1}{2} \left((\text{tr} \widehat{\mathbf{d}}) \mathbf{k} + \text{tr}(\mathbf{q}^{-1} \mathbf{k}) \mathbf{d} - \text{tr}(\widehat{\mathbf{d}} \mathbf{q}^{-1} \mathbf{k}) \mathbf{q} \right),$$

et celle sur les champs de tenseurs contravariants $\boldsymbol{\tau}$ d'ordre 2 est donnée par :

$$(6.5) \quad \frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \widehat{\mathbf{w}}^* + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\boldsymbol{\tau} \mathbf{q}) \widehat{\mathbf{d}} \mathbf{q}^{-1} - \text{tr}(\widehat{\mathbf{d}}) \boldsymbol{\tau} - \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \mathbf{d}) \mathbf{q}^{-1} \right).$$

où

$$\widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \mathbf{u})^a = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^t), \quad \widehat{\mathbf{w}}^* = -\mathbf{q} \widehat{\mathbf{w}} \mathbf{q}^{-1}.$$

Démonstration. La preuve est très similaire à celle donnée pour la dérivée de Zaremba-Jaumann et sera juste esquissée. Concernant le fait que cette dérivée covariante préserve les distributions à densité, on pourra vérifier que $\boldsymbol{\theta} : \Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon) = D_t \boldsymbol{\theta} : \varepsilon$, où

$$D_t \boldsymbol{\theta} := \partial_t \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\theta} \gamma_t \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \gamma_t \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\theta} \gamma) \gamma^{-1} \gamma_t \gamma^{-1} - \frac{1}{2} \text{tr}(\gamma^{-1} \gamma_t) \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\theta} \gamma_t) \gamma^{-1} \right).$$

Le calcul des dérivées objective s'obtient alors facilement en observant que

$$p^* \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}, \quad p^* \gamma = \mathbf{q}, \quad p^* \gamma_t = 2\mathbf{q}(\nabla \mathbf{u})^s = \mathbf{q} \widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}.$$

□

Remarque 6.3. En suivant Truesdell [48] (voir également la remarque 5.12), on définit une autre dérivée objective issue de (3.5) en posant

$$(6.6) \quad \frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\sigma}}{dt} := \rho \frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \widehat{\mathbf{w}}^* + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\mathbf{q} \boldsymbol{\sigma}) \widehat{\mathbf{d}} \mathbf{q}^{-1} + \text{tr}(\widehat{\mathbf{d}}) \boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{d}) \mathbf{q}^{-1} \right),$$

où l'on a utilisé l'équation de conservation de la masse $\dot{\rho} = -\rho \text{tr} \widehat{\mathbf{d}}$ et le fait que

$$\tilde{p}_* \partial_t (\tilde{p}^* \rho) = \dot{\rho}.$$

Terminons par une remarque liée aux chargements hydrostatiques (pour lesquels $\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{q}^{-1}$ où P est la pression).

Remarque 6.4. La dérivée de Fiala du tenseur métrique \mathbf{q} s'écrit :

$$\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{q}}{dt} = \frac{3}{2} \mathbf{d} = \frac{3}{4} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q},$$

celle de son inverse \mathbf{q}^{-1} :

$$\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{q}^{-1}}{dt} = \frac{3}{2} \widehat{\mathbf{d}} \mathbf{q}^{-1} - (\text{tr} \widehat{\mathbf{d}}) \mathbf{q}^{-1},$$

et

$$\rho \frac{d_{\tilde{p}}}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}^{-1}}{\rho} \right) = \frac{3}{2} \widehat{\mathbf{d}} \mathbf{q}^{-1}$$

alors que pour les dérivées de Zaremba-Jaumann (6.2) et de Green-Naghdi (6.7), celles-ci sont nulles.

6.5. La dérivée de Green-Naghdi. Celle-ci, introduite dans [20], est définie à partir d'une configuration de référence $p_0 : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_0$. Elle s'écrit :

$$(6.7) \quad \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* - \widehat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\tau},$$

où

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{R}_t(t, \varphi^{-1}(\mathbf{x})) \mathbf{R}^{-1}(t, \mathbf{x})$$

est un tenseur mixte antisymétrique de type (1, 1), que l'on écrit plus simplement $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}_t \mathbf{R}^{-1}$ et

$$\mathbf{R} : T_{\mathbf{x}_0} \Omega_0 \rightarrow T_{\mathbf{x}} \Omega$$

est l'isométrie euclidienne dans la décomposition polaire

$$\mathbf{F}_\varphi = \mathbf{R} \mathbf{U},$$

de l'application linéaire tangente $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi$ (où $\varphi = p \circ p_0^{-1}$). Cette décomposition est caractérisée par les relations suivantes

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{U}^t = \mathbf{U},$$

de sorte que

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{C}, \quad \text{où} \quad \mathbf{C} = \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{F}_\varphi^* \mathbf{q} \mathbf{F}_\varphi.$$

Le tenseur mixte \mathbf{U} est donc défini comme l'unique racine carrée positive du tenseur de Cauchy-Green droit mixte $\mathbf{q}^{-1} \mathbf{C}$ et $\mathbf{R} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{U}^{-1}$.

Cette dérivée objective provient également d'une dérivée covariante sur $\text{Met}(\mathcal{B})$. Pour le formuler, on introduira les notations suivantes :

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = p_0^* \mathbf{q}, \quad \mathbf{U}_0 = p_0^* \mathbf{U},$$

ainsi que l'application linéaire

$$\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0} : \text{End}_s(T\mathcal{B}) \rightarrow \text{End}_s(T\mathcal{B}), \quad M \mapsto \mathbf{U}_0 M + M \mathbf{U}_0,$$

définie sur l'espace $\text{End}_s(T\mathcal{B})$ des endomorphismes symétriques de $T\mathcal{B}$ (relativement à la métrique $\boldsymbol{\gamma}_0$). Celle-ci peut s'écrire également sous la forme

$$\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0} = \mathbf{Id} \otimes \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_0 \otimes \mathbf{Id} \quad \left((\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0})^i{}_{jk}{}^l = \delta_k^i U_{0j}^l + U_{0k}^i \delta_j^l \right).$$

Lorsque \mathbf{U}_0 est définie positive, on peut vérifier que $\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}$ est inversible.

Théorème 6.5. *La dérivée de Green-Naghdi correspond à la dérivée covariante*

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1} (\boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t)) - (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1} (\boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t))^* \boldsymbol{\varepsilon}$$

sur $\text{Met}(\mathcal{B})$. Celle-ci préserve les distributions à densité et on a

$$D_t \boldsymbol{\theta} := \partial_t \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1} (\boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t)) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1} (\boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t))^*$$

sur $T^* \text{Met}(\mathcal{B})$. De plus les dérivées matérielles objectives correspondantes s'écrivent

$$\frac{d_{\tilde{p}} \mathbf{k}}{dt} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{k}$$

pour un champ \mathbf{k} de tenseurs covariants d'ordre 2 et

$$\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* - \widehat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\tau},$$

pour un champ $\boldsymbol{\tau}$ de tenseurs contravariants d'ordre 2.

Démonstration. On cherche une dérivée covariante D_t sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, sous la forme

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma_\gamma(\boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\varepsilon}),$$

telle que

$$p_*(D_t(p^* \mathbf{k})) = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{k}.$$

Grâce au lemme D.7, on a donc

$$\mathbf{k}_t + \mathcal{L}_u \mathbf{k} + p_*(\Gamma_\gamma(\boldsymbol{\gamma}_t, p^* \mathbf{k})) = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{k},$$

puis

$$p_*(\Gamma_\gamma(\gamma_t, p^*\mathbf{k})) = \mathbf{k}(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u}) + (\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u})^* \mathbf{k},$$

en utilisant le théorème E.5, et donc

$$\Gamma_\gamma(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} p^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u}) + p^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u})^* \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Or

$$\nabla \mathbf{u} = (\mathbf{F}_\varphi)_t \mathbf{F}_\varphi^{-1} = (\mathbf{R}_t \mathbf{U} + \mathbf{R} \mathbf{U}_t)(\mathbf{R} \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{R}_t \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{F}_\varphi(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}_t) \mathbf{F}_\varphi^{-1} = \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \varphi_*(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}_t),$$

d'où l'on tire

$$(6.8) \quad \widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u} = -\varphi_*(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}_t).$$

Posons $\mathbf{U}_0 := p_0^* \mathbf{U}$. Alors $\mathbf{U}_{0t} = p_0^* \mathbf{U}_t$ et donc

$$p^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u}) = p_0^* \varphi^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \mathbf{u}) = -p_0^*(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}_t) = -\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{U}_{0t}.$$

On a donc

$$\Gamma_\gamma(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{U}_{0t}) - (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{U}_{0t})^* \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Maintenant,

$$\boldsymbol{\gamma} = p^* \mathbf{q} = p_0^* \mathbf{C} = p_0^*(\mathbf{q} \mathbf{U}^2) = \gamma_0 \mathbf{U}_0^2,$$

d'où l'on tire

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{U}_{0t} + \mathbf{U}_{0t} \mathbf{U}_0 = \gamma_0^{-1} \gamma_t.$$

Autrement dit

$$\mathbf{U}_{0t} = \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t),$$

\mathbf{U}_0 étant l'unique racine carrée positive de $\gamma_0^{-1} \gamma$. On a donc finalement

$$\Gamma_\gamma(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t)) - (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t))^* \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Il nous reste à vérifier que cette dérivée covariante préserve les distributions à densité. Or, si l'on pose $A := \mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t)$, on obtient

$$\boldsymbol{\theta} : \Gamma_\gamma(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\text{tr}(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\varepsilon} A + \boldsymbol{\theta} A^* \boldsymbol{\varepsilon}) = -(A \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} A^*) : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

L'expression $D_t \boldsymbol{\theta}$ est donc bien définie et s'écrit :

$$D_t \boldsymbol{\theta} = \partial_t \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t)) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} (\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t))^*.$$

□

Remarque 6.6. Dans la cas limite $\mathbf{U}_0 \rightarrow \mathbf{Id}$ des déformations négligeables, on obtient

$$\mathbf{U}_{0t} = \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}^{-1}(\gamma_0^{-1} \gamma_t) \approx \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \gamma_t,$$

et l'on retrouve alors que la dérivée de Green-Naghdi est proche de celle de Zaremba-Jaumann. Sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, cela se traduit par

$$D_t \boldsymbol{\theta} \Big|_{\mathbf{U}_0 \rightarrow \mathbf{Id}} \approx \partial_t \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\gamma_0^{-1} \gamma_t \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \gamma_t \gamma_0^{-1}).$$

6.6. Les dérivées objectives de Xiao-Bruhns-Meyers. Une famille de dérivées objectives a été proposée dans [51], sous la forme

$$(6.9) \quad \frac{d_p \boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^*, \quad \widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}),$$

avec

$$\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}) := \nu_1(\widehat{\mathbf{b}}) (\widehat{\mathbf{b}} \widehat{\mathbf{d}})^a + \nu_2(\widehat{\mathbf{b}}) (\widehat{\mathbf{b}}^2 \widehat{\mathbf{d}})^a + \nu_3(\widehat{\mathbf{b}}) (\widehat{\mathbf{b}} \widehat{\mathbf{d}} \widehat{\mathbf{b}}^2)^a,$$

où $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = (\nabla \mathbf{u})^a$, $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{q} = (\varphi_* \mathbf{q}^{-1}) \mathbf{q}$ est le tenseur de Cauchy-Green gauche mixte 2.4, $\widehat{\mathbf{d}} = (\nabla \mathbf{u})^s$ est le tenseur mixte des taux de déformation et les scalaires $\nu_k(\widehat{\mathbf{b}})$ sont des invariants isotropes de $\widehat{\mathbf{b}}$.

Remarque 6.7. Cette famille contient la dérivée de Jaumann, qui correspond à

$$\widehat{\Upsilon}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}) = 0$$

ainsi que celle de Green-Naghdi, lorsque

$$\widehat{\Upsilon}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}) = \widehat{\mathbf{d}} - \widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{L}_{\widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}}}(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}),$$

car $\nabla \mathbf{u} = \widehat{\mathbf{d}} + \widehat{\mathbf{w}}$, $\varphi_* \mathbf{C}_t = \mathbf{d}$, $\varphi_* \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{b}$, $\varphi_* \mathbf{U}^2 = \mathbf{b}\mathbf{q} = \widehat{\mathbf{b}}$ (et où l'on a utilisé (6.8)). Elle ne contient par contre pas les dérivées objectives (6.5) et (6.6) (de type Ebin–Fiala).

Les dérivées objectives (6.9) sur les tenseurs d'ordre 2 contravariants $\boldsymbol{\tau}$ sont associées, par la règle de Leibniz, aux dérivées objectives

$$\frac{d_{\widehat{p}} \mathbf{k}}{dt} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\Omega} + \widehat{\Omega}^* \mathbf{k},$$

définies sur les champs de tenseurs d'ordre 2 covariants \mathbf{k} . On peut alors énoncer le résultat suivant.

Théorème 6.8. *La famille de dérivées objectives de Xiao-Bruhns-Meyers*

$$\frac{d_{\widehat{p}} \mathbf{k}}{dt} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\Omega} + \widehat{\Omega}^* \mathbf{k}, \quad \widehat{\Omega} = \widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\Upsilon}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}), \quad \widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \mathbf{u})^a,$$

correspond à la famille de dérivées covariantes sur $\text{TMet}(\mathcal{B})$

$$\frac{D_{\widehat{p}} \boldsymbol{\varepsilon}}{Dt} := \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\gamma_t \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \gamma^{-1} \gamma_t) + \boldsymbol{\varepsilon} \Upsilon(\gamma_0^{-1} \gamma, \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t) + \left(\Upsilon(\gamma_0^{-1} \gamma, \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t) \right)^* \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Celles-ci préservent les distributions à densité et on a

$$\frac{D_{\widehat{p}} \boldsymbol{\theta}}{Dt} := \partial_t \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \gamma_t \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \gamma_t \boldsymbol{\theta}) - \Upsilon(\gamma_0^{-1} \gamma, \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t) \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta} \left(\Upsilon(\gamma_0^{-1} \gamma, \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t) \right)^*.$$

Démonstration. On note que ces dérivées s'écrivent

$$\frac{d_{\widehat{p}} \mathbf{k}}{dt} = \overset{\Delta}{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \widehat{\Upsilon}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}) + \widehat{\Upsilon}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}})^* \mathbf{k},$$

$\overset{\Delta}{\mathbf{k}}$ désignant la dérivée de Jaumann de \mathbf{k} . On utilise ensuite le fait (voir remarque 2.5) que

$$p^* \mathbf{d} = \frac{1}{2} \gamma_t, \quad \text{et} \quad p^* \mathbf{b} = \gamma_0^{-1},$$

d'où l'on tire :

$$p^* (\widehat{\mathbf{d}}) = p^*(\mathbf{q}^{-1} \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t, \quad p^* (\widehat{\mathbf{b}}) = p^*(\mathbf{b}\mathbf{q}) = \gamma_0^{-1} \gamma,$$

puis

$$\begin{aligned} p^* (\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}})^a &= \frac{1}{2} p^* (\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}} - \widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}), \\ p^* (\widehat{\mathbf{b}}^2 \widehat{\mathbf{d}})^a &= \frac{1}{2} p^* (\widehat{\mathbf{b}}^2 \widehat{\mathbf{d}} - \widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2), \\ p^* (\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2)^a &= \frac{1}{2} p^* (\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2 - \widehat{\mathbf{b}}^2 \widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\nu_k(\widehat{\mathbf{b}})$ est une fonction f_k de $\text{tr} \widehat{\mathbf{b}}$, $\text{tr}(\widehat{\mathbf{b}}^2)$, $\text{tr}(\widehat{\mathbf{b}}^3)$ et donc

$$p^* \nu_k(\widehat{\mathbf{b}}) = f_k(\text{tr}(p^* \widehat{\mathbf{b}}), \text{tr}(p^* \widehat{\mathbf{b}}^2), \text{tr}(p^* \widehat{\mathbf{b}}^3))$$

On en déduit donc (voir théorème 6.1) que :

$$p^* \left(\frac{d_{\widehat{p}} p^*(\boldsymbol{\varepsilon})}{dt} \right) = \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma_\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma_t)$$

avec

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma_t) = -\frac{1}{2} (\gamma_t \gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \gamma^{-1} \gamma_t) + \boldsymbol{\varepsilon} \Upsilon(\gamma_0^{-1} \gamma, \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t) + \left(\Upsilon(\gamma_0^{-1} \gamma, \frac{1}{2} \gamma^{-1} \gamma_t) \right)^* \boldsymbol{\varepsilon},$$

où l'on a substitué dans $\widehat{\Upsilon}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}})$, $\widehat{\mathbf{b}}$ par $\gamma_0^{-1}\gamma$ et $\widehat{\mathbf{d}}$ par $\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t$. Enfin, on vérifie que la remarque 5.11 s'applique. \square

7. LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Dans cette section, on formulera les équations d'équilibre telles qu'elles sont données dans la littérature classique mais directement sur le body.

7.1. Conservation de la masse.

Théorème 7.1 (Conservation de la masse). *Étant donnée une configuration de référence p_0 et une autre configuration p , on a :*

$$(7.1) \quad \rho_0 = (\varphi^* \rho) J_\varphi = (\rho \circ \varphi) J_\varphi,$$

où J_φ est le Jacobien de la transformation $\varphi := p \circ p_0^{-1}$.

Remarque 7.2. Le Jacobien J_φ est défini implicitement par l'équation

$$\varphi^* \text{vol}_{\mathbf{q}} = J_\varphi \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

c'est à dire, $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi$ avec $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi = Tp \circ Tp_0^{-1}$. Le mécanicien écrit la relation (7.1) de manière plus courte

$$\rho_0 = \rho J_\varphi = \rho \det \mathbf{F}_\varphi$$

car il considère implicitement $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ et $\rho = \rho(\mathbf{x}) = \rho(\varphi(\mathbf{x}_0))$.

Démonstration. On part de la définition de la densité de masse (1.1)

$$(p_0)_* \mu = \rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}}, \quad p_* \mu = \rho \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

et on utilise la définition de $\varphi = p \circ p_0^{-1}$, qui nous donne

$$\varphi^* = (p_0^{-1})^* p^* = (p_0)_* p^*.$$

On obtient d'abord

$$\mu = (p_0)^*(\rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}}) = p^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}),$$

et on en déduit

$$\rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}} = (p_0)_* \mu = (p_0)_* p^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) = \varphi^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) = (\varphi^* \rho) \varphi^* \text{vol}_{\mathbf{q}} = (\rho \circ \varphi) J_\varphi \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

d'où (7.1). \square

Corollaire 7.3 (Version dynamique de la conservation de la masse). *Considérons un chemin de plongements $p(t)$. Alors*

$$(7.2) \quad \rho_t + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho_t + \nabla_{\mathbf{u}} \rho + \rho \mathbf{div} \mathbf{u} = 0.$$

Démonstration. On part de la relation (7.1). En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d}{dt} ((\rho \circ \varphi) J_\varphi) = [(\rho_t \circ \varphi) + (\nabla_{\mathbf{u}} \rho) \circ \varphi] J_\varphi + (\rho \circ \varphi) \partial_t J_\varphi,$$

car $\partial_t \varphi = \mathbf{u} \circ \varphi$. Par ailleurs, soit $\mathbf{F}_\varphi := T\varphi = \partial \varphi / \partial \mathbf{x}_0$, on a

$$(7.3) \quad \partial_t \mathbf{F}_\varphi = \partial_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} (\partial_t \varphi) = (\nabla_{\mathbf{u}} \circ \varphi) \mathbf{F}_\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\partial_t J_\varphi = \text{tr}(\mathbf{F}_\varphi^{-1} \partial_t \mathbf{F}_\varphi) J_\varphi = (\mathbf{div} \mathbf{u}) \circ \varphi.$$

On a donc finalement

$$\rho_t + \nabla_{\mathbf{u}} \rho + \rho \mathbf{div} \mathbf{u} = 0.$$

que le mécanicien écrit $\dot{\rho} + \rho \mathbf{div} \mathbf{u} = 0$ avec $\dot{\rho} := \rho_t + \nabla_{\mathbf{u}} \rho$ la dérivée particulaire de ρ . \square

Remarque 7.4. Un milieu continu est dit incompressible si $\mathbf{div} \mathbf{u} = 0$. Dans ce cas, φ est une transformation qui préserve la forme volume $\text{vol}_{\mathbf{q}}$.

Corollaire 7.5 (Version dynamique de la conservation de la masse formulée sur le body). *Soit $\rho_\gamma = p^*\rho$ la densité sur \mathcal{B} , $\mathbf{U} = p^*\mathbf{u}$ la vitesse eulerienne à gauche, alors*

$$(\rho_\gamma)_t + \rho_\gamma \operatorname{div}^\gamma \mathbf{U} = 0.$$

Démonstration. On a, en vertu du théorème E.5 et du lemme D.7

$$p^*(\rho_t + \nabla_{\mathbf{u}}\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}) = p^*(\rho_t + \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}) = (\rho_\gamma)_t + \rho_\gamma \operatorname{div}^\gamma \mathbf{U}.$$

□

7.2. Relation fondamentale de la dynamique. Les *efforts extérieurs* volumiques, exercés sur le système, sont représentés par une densité vectorielle $\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t)$ définie sur $\Omega_{p(t)}$. La *relation fondamentale de la dynamique* s'écrit :

$$(7.4) \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \rho(\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}),$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le *tenseur des contraintes de Cauchy* qui représente les *efforts intérieurs* du milieu et qui est un tenseur d'ordre 2, contravariant et symétrique.

Remarque 7.6. Les relations (7.2) et (7.4) forment donc un système de 4 équations scalaires pour les 10 inconnues $\rho, u_1, u_2, u_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$. Le système est donc sous-déterminé. Il doit être complété par les diverses *lois de comportement* que proposent la mécanique des fluides, la théorie de l'élasticité, etc.

En remarquant que $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 0$ (c.f. théorème E.5) et donc, par le lemme D.7, que

$$p^*\dot{\mathbf{u}} = p^*(\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}) = \partial_t \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{U}}^\gamma \mathbf{U},$$

le pull-back de la relation fondamentale de la dynamique (7.4) sur le body \mathcal{B} s'écrit :

$$(7.5) \quad \operatorname{div}^\gamma \boldsymbol{\mathfrak{S}} + \mathcal{F}_v = \rho_\gamma (\partial_t \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{U}}^\gamma \mathbf{U}), \quad \dot{\mathbf{U}} := \partial_t \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{U}}^\gamma \mathbf{U},$$

où $\boldsymbol{\mathfrak{S}} = p^*\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes intrinsèque (2.2), $\mathbf{U} = p^*\mathbf{u} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u} \circ p) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{V}$ est la vitesse eulerienne à gauche (voir section 1), $\dot{\mathbf{U}}$ est l'accélération eulerienne à gauche, $\rho_\gamma = p^*\rho$ est la densité intrinsèque (sur \mathcal{B}), et $\mathcal{F}_v = p^*\mathbf{f}_v = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{f}_v \circ p)$ est la force volumique intrinsèque (sur \mathcal{B}). Enfin,

$$\operatorname{div}^\gamma \boldsymbol{\mathfrak{S}} := \operatorname{tr}(\nabla^\gamma \boldsymbol{\mathfrak{S}}),$$

est la divergence du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ sur le body \mathcal{B} pour la métrique γ .

Remarque 7.7. $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ est symétrique et est un champ de tenseurs, contrairement au premier tenseur de Kirchhoff $\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{F}_\varphi \mathbf{S}$ (c.f. définition 2.7 et remarque 2.8) habituellement utilisé pour écrire les équations d'équilibre

$$(7.6) \quad \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_v \circ \varphi = \rho_0 \partial_t \mathbf{V},$$

sur la configuration de référence Ω_0 (alors confondue avec \mathcal{B} , de sorte que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 := \varphi_t$).

Pour la définition rigoureuse des divergences $\operatorname{div}^\gamma \boldsymbol{\mathfrak{S}}$ et $\operatorname{div} \mathbf{P}$, voir [Appendice H](#).

8. LOIS DE COMPORTEMENT ÉLASTIQUES

Pour les fluides comme pour les solides, l'état de contrainte est déterminé par « l'état métrique ». Paul Rougée propose dans [40, 41] de définir une loi de comportement élastique (au sens de Cauchy) comme un champ de vecteurs sur $\operatorname{Met}(\mathcal{B})$, autrement dit comme une section

$$F : \operatorname{Met}(\mathcal{B}) \rightarrow T\operatorname{Met}(\mathcal{B})$$

du fibré tangent $T\operatorname{Met}(\mathcal{B})$. La donnée d'une métrique riemannienne sur $\operatorname{Met}(\mathcal{B})$, par exemple (3.1), permet alors d'écrire

$$(8.1) \quad \boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1} F(\gamma) \gamma^{-1},$$

et par *push-forward* d'obtenir

$$(8.2) \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{q}^{-1} p_*(F(\gamma)) \mathbf{q}^{-1}.$$

Définition 8.1. La loi (8.1) est dite *hyper-élastique* (ou élastique au sens de Green) si F est le gradient (pour une métrique riemannienne sur $\text{Met}(\mathcal{B})$) d'une fonctionnelle H définie sur $\text{Met}(\mathcal{B})$. Dans le cas contraire elle est dite *hypo-élastique*.

Remarque 8.2. Une loi hyper-élastique est une loi élastique, et pour ne pas compliquer la classification nous supposons qu'une loi élastique est hypo-élastique. Les réciproques ne sont en général pas vraies [5, 44].

8.1. Gaz parfaits. La loi de comportement d'un gaz parfait s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{q}^{-1},$$

où $P = \rho r T$ est la loi des gaz parfaits, r est une constante et T est la température absolue. On peut retrouver cette loi dans ce cadre géométrique [40, 41].

Théorème 8.3 (Rougée, 1997, 2006). *Considérons la fonctionnelle (invariante par difféomorphismes)*

$$H(\gamma) := \int_{\mathcal{B}} k \text{vol}_{\gamma},$$

où $k = -2rT$. Alors, le gradient de H pour la métrique d'Ebin (3.2) correspond à la loi de comportement d'un gaz parfait où r est la constante du gaz.

Démonstration. On a

$$d_{\gamma} H \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{k}{2} \int_{\mathcal{B}} \text{tr}(\gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) \text{vol}_{\gamma} = \frac{k}{2} G_{\gamma}(\gamma, \boldsymbol{\varepsilon}),$$

G étant la métrique d'Ebin (3.2). Par conséquent,

$$F(\gamma) = \mathbf{grad}^G H = \frac{k}{2} \gamma,$$

qui nous donne

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{k}{2} \gamma^{-1}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{k}{2} \mathbf{q}^{-1} = -\rho r T \mathbf{q}^{-1}.$$

□

8.2. Fluides barotropes. Un fluide barotrope est un fluide non visqueux pour lequel la pression P ne dépend que de la densité ρ , c'est à dire que

$$\boldsymbol{\sigma} = -P(\rho) \mathbf{q}^{-1}.$$

On peut également retrouver cette loi dans ce cadre géométrique [41].

Théorème 8.4 (Rougée, 2006). *Un fluide barotrope correspond à une loi de comportement*

$$F(\gamma) = f(\ln(\rho_{\gamma}^{-1})) \gamma, \quad \rho_{\gamma} := p^* \rho = \left(\frac{\text{vol}_{\gamma}}{\mu} \right)^{-1},$$

où f est une fonction numérique. Celle-ci est hyper-élastique par rapport à la métrique de Rougée (3.1) et dérive de la fonctionnelle

$$(8.3) \quad H(\gamma) = \int_{\mathcal{B}} h(\ln(\rho_{\gamma}^{-1})) \mu,$$

où h est une primitive de f .

Démonstration. De la définition de ρ_{γ} (1.2), soit $\mu = \rho_{\gamma} \text{vol}_{\gamma}$, on tire

$$\frac{\delta \rho_{\gamma}}{\rho_{\gamma}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}),$$

d'où

$$\delta H = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} h'(\ln(\rho_{\gamma}^{-1})) \text{tr}(\gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) \mu = G_{\gamma}^{\mu} \left(\frac{1}{2} h'(\ln(\rho_{\gamma}^{-1})) \gamma, \boldsymbol{\varepsilon} \right),$$

G^μ étant la métrique de Rougée (3.1). Par conséquent,

$$F(\gamma) = \mathbf{grad}^{G^\mu} H = \frac{1}{2} h'(\ln(\rho_\gamma^{-1})) \gamma,$$

qui nous donne, par (8.1),

$$\theta = \frac{1}{2} h'(\ln(\rho_\gamma^{-1})) \gamma^{-1},$$

puis

$$\sigma = \rho p_* \theta = -P(\rho) \mathbf{q}^{-1}, \quad \text{avec} \quad P(\rho) = -\frac{1}{2} \rho h'(\ln(\rho^{-1})),$$

car $\rho = p_* \rho_\gamma = \rho_\gamma \circ p$. □

Remarque 8.5. Contrairement au cas des gaz parfaits, la fonctionnelle de Hilbert obtenue n'est pas invariante par difféomorphisme mais seulement par les difféomorphismes qui préservent le volume.

8.3. Hyper-élasticité générale isotrope. Il est nécessaire d'introduire une configuration de référence pour formaliser géométriquement l'hyper-élasticité. Deux tenseurs de type déformation ont alors un rôle fondamental (*c.f.* définition 2.4) : le tenseur de Cauchy-Green droit (covariant \mathbf{C} ou mixte $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{C}$) défini sur $\Omega_0 = p_0(\mathcal{B})$ comme le *pull-back* de la métrique \mathbf{q} sur Ω ,

$$\mathbf{C} = \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{q} \widehat{\mathbf{C}}, \quad \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{F}_\varphi, \quad \mathbf{F}_\varphi = T\varphi,$$

et le tenseur de Cauchy-Green gauche (contravariant \mathbf{b} ou mixte $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{q}$) défini sur $\Omega = p(\mathcal{B}) = \varphi(\Omega_0)$ comme le *push-forward* de l'inverse de la métrique \mathbf{q}^{-1} sur Ω_0 ,

$$\mathbf{b} := \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = \widehat{\mathbf{b}} \mathbf{q}^{-1}, \quad \widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^t \circ \varphi^{-1}.$$

Rappelons que leurs *pull-back* sur le body \mathcal{B} sont (Remarque 2.5) :

$$p_0^* \mathbf{C} = \gamma, \quad p_0^* \mathbf{b} = \gamma_0^{-1}, \quad p_0^* \widehat{\mathbf{C}} = p_0^* \widehat{\mathbf{b}} = \gamma_0^{-1} \gamma.$$

La puissance \mathcal{P} (2.3) se réécrit alors

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega_p} \frac{1}{2} \rho(\tau : \mathcal{L}_u \mathbf{q}) \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_{p_0}} \frac{1}{2} \rho_0(\mathbf{S} : \partial_t \mathbf{C}) \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_{p_0}} \rho_0(\widehat{\mathbf{P}} : \partial_t \mathbf{F}_\varphi) \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\theta : \partial_t \gamma) \mu,$$

où $\tau = \sigma/\rho$ est le tenseur de Kirchhoff, $\mathbf{S} = \varphi^* \tau = p_{0*} \theta$ le second tenseur de Piola-Kirchhoff, $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{q}$ le premier tenseur de Piola-Kirchhoff (2.7), mixte et non symétrique, et θ est le tenseur de Rougée.

Pour le mécanicien, les lois de comportements hyper-élastiques, isotropes ou non, sont des lois locales entre grandeurs duales (\mathbf{S}, \mathbf{C}) , $(\widehat{\mathbf{P}}, \mathbf{F}_\varphi)$, (τ, \mathbf{q}) ..., et dérivent généralement d'une énergie libre spécifique (souvent définie sur la configuration de référence). Comme l'a souligné Rougée il est possible de formuler l'hyper-élasticité directement sur le body, en utilisant les grandeurs duales (θ, γ) .

Théorème 8.6. *Soit $\gamma_0 = p_0^* \mathbf{q}$ la métrique sur \mathcal{B} associée à une configuration de référence Ω_0 . L'hyper-élasticité locale isotrope se formule à partir du potentiel hyper-élastique*

$$(8.4) \quad H_{\gamma_0}(\gamma) = \int_{\mathcal{B}} h(I_1, I_2, I_3) \mu$$

défini sur $\text{Met}(\mathcal{B})$, où $I_k = \text{tr}((\gamma_0^{-1} \gamma)^k)$. Elle s'écrit

$$(8.5) \quad \theta = \frac{\partial h}{\partial \gamma} = k \left(\frac{\partial h}{\partial I_k}(\gamma) \right) (\gamma_0^{-1} \gamma)^{k-1} \gamma_0^{-1}.$$

Démonstration. On a

$$\delta H_{\gamma_0} = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial h}{\partial I_k} \delta I_k \mu$$

avec

$$\delta I_k = k \text{tr} \left[(\gamma_0^{-1} \gamma)^{k-1} \gamma_0^{-1} \varepsilon \right] = k \text{tr} \left[\gamma^{-1} (\gamma (\gamma_0^{-1} \gamma)^k) \gamma^{-1} \varepsilon \right].$$

On en déduit

$$F_{\gamma_0}(\gamma) = \mathbf{grad}^{G^\mu} H_{\gamma_0} = k \left(\frac{\partial h}{\partial I_k}(\gamma) \right) \gamma (\gamma_0^{-1} \gamma)^k,$$

puis

$$\boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1} F_{\gamma_0}(\gamma) \gamma^{-1} = k \left(\frac{\partial h}{\partial I_k}(\gamma) \right) (\gamma_0^{-1} \gamma)^{k-1} \gamma_0^{-1} = \frac{\partial h}{\partial \gamma}.$$

□

Les invariants isotropes de $\gamma_0^{-1} \gamma$ peuvent se réécrire à l'aide, soit de $\mathbf{b} = p_* \gamma_0^{-1}$, soit de $\mathbf{C} = (p_0)_* \gamma$. En effet, comme le push-forward commute avec toutes les contractions tensorielles, on a

$$p_* I_k = I_k \circ p^{-1} = \text{tr}((\mathbf{bq})^k), \quad (p_0)_* I_k = I_k \circ p_0^{-1} = \text{tr}((\mathbf{q}^{-1} \mathbf{C})^k),$$

et par suite

$$\frac{\partial p_* I_k}{\partial \mathbf{b}} = k \mathbf{q} (\mathbf{bq})^{k-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (p_0)_* I_k}{\partial \mathbf{C}} = k (\mathbf{q}^{-1} \mathbf{C})^{k-1} \mathbf{q}^{-1}.$$

On retrouve d'une part la loi d'hyper-élasticité usuelle

$$(8.6) \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}},$$

exprimée sur la configuration de référence par *push-forward* de (8.5) sur Ω_0 car

$$\mathbf{S} = (p_0)_* \boldsymbol{\theta} = k \left(\frac{\partial h}{\partial I_k}(\gamma) \circ p_0 \right) (\mathbf{q}^{-1} \mathbf{C})^{k-1} \mathbf{q}^{-1} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}},$$

où l'on a posé $\psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} h(I_1 \circ p_0^{-1}, I_2 \circ p_0^{-1}, I_3 \circ p_0^{-1})$, et, d'autre part, les loi d'hyper-élasticité isotrope usuelles

$$(8.7) \quad \boldsymbol{\tau} = 2 \mathbf{q}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}.$$

exprimées sur la configuration déformée par *push-forward* de (8.5) sur Ω_p car

$$\boldsymbol{\tau} = p_* \boldsymbol{\theta} = k \left(\frac{\partial h}{\partial I_k}(\gamma) \circ p \right) (\mathbf{bq})^{k-1} \mathbf{b},$$

où l'on a posé $\psi(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} h(I_1 \circ p^{-1}, I_2 \circ p^{-1}, I_3 \circ p^{-1})$. L'égalité $\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}$ est la *relation de Doyle-Ericksen* [10] encore valide dans le cas anisotrope. On a utilisé dans le calcul précédent la propriété

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \text{tr}((\mathbf{bq})^k) = \mathbf{q}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \text{tr}((\mathbf{bq})^k) \right) \mathbf{b} = \mathbf{b} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \text{tr}((\mathbf{q}\mathbf{b})^k) \right) \mathbf{q}^{-1}.$$

Remarque 8.7. Une formulation équivalente à (8.6) et à (8.7), définie sur Ω_0 , est fournie en introduisant le premier tenseur de Piola-Kirchhoff (2.7),

$$(8.8) \quad \mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{F}_\varphi \mathbf{S} = \rho_0 \mathbf{q}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_\varphi} \quad \left(P^{iJ} = \rho_0 (\mathbf{F}_\varphi)^i_K S^{KJ} = \rho_0 q^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{F}_\varphi)^k_J} \right).$$

Remarque 8.8. Dans les énergies libres utilisées par les mécaniciens, l'invariant I_3 (exprimé sur Ω_0) est très souvent remplacé par l'invariant $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi = \sqrt{\det(\mathbf{q}^{-1} \mathbf{C})}$. Or, par la conservation de la masse la mesure de masse μ est

$$\mu = p_0^* (\rho_0 J_\varphi \text{vol}_\mathbf{q}) = p_0^* (\rho_0 J_\varphi) \text{vol}_\gamma,$$

de sorte que l'argument

$$\rho_\gamma^{-1} = \frac{\text{vol}_\gamma}{\mu} = \frac{J_\varphi}{\rho_0} \circ p_0^{-1}$$

de la fonctionnelle $H(\gamma)$ (8.3) n'est autre que, à la densité ρ_0 près (une constante du matériau), l'inverse de l'invariant classique $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi$. Le cas des fluides barotropes (comme celui des gaz parfaits) est donc un cas particulier de (8.4).

8.4. Loi hyper-élastique de Kirchhoff-Saint Venant. Si l'on choisit la densité du potentiel hyper-élastique (8.4) sur \mathcal{B} sous la forme

$$h = \frac{\ell}{4}(I_1 - 3)^2 + \frac{m}{2}(I_2 - 2I_1 + 3), \quad \begin{cases} I_1 = \text{tr}(\gamma_0^{-1}\gamma), \\ I_2 = \text{tr}(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0^{-1}\gamma) \end{cases}$$

avec ℓ et m deux constantes matérielles, on obtient le potentiel hyper-élastique de Kirchhoff-Saint Venant $2\psi = h \circ p_0^{-1}$ (sur la configuration de référence Ω_0),

$$2\psi = \frac{\ell}{4}(I_1 - 3)^2 + \frac{m}{2}(I_2 - 2I_1 + 3), \quad \begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{C}), \\ I_2 = \text{tr}(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q}^{-1}\mathbf{C}) \end{cases}$$

Elle conduit à la contrainte intrinsèque

$$(8.9) \quad \mathfrak{S} = \rho_\gamma \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial h}{\partial \gamma} = \frac{\ell}{2}(\text{tr}(\gamma_0^{-1}\gamma) - 3)\gamma_0^{-1} + m(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0^{-1} - \gamma_0^{-1})$$

Cette loi est bien la forme intrinsèque (exprimé sur le body \mathcal{B}) de la loi d'hyper-élasticité de Kirchhoff-Saint Venant,

$$\rho_0 \mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \lambda_0(\text{tr} \mathbf{E})\mathbf{q}^{-1} + 2\mu_0 \mathbf{q}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{q}^{-1}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{q}),$$

avec ici \mathbf{E} le tenseur des déformations de Green-Lagrange², $\lambda_0 = \rho_0 \ell$, $\mu_0 = \rho_0 m$ les coefficients de Lamé et ψ l'énergie libre spécifique.

Réécriture hypo-élastique. Prendre la dérivée covariante canonique (avec connexion nulle) de loi d'hyper-élasticité (8.9) conduit à

$$\boldsymbol{\theta}_t = \frac{\ell}{2} \text{tr}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\gamma_0^{-1} + m \gamma_0^{-1}\gamma_t\gamma_0^{-1} = \left(\frac{\ell}{2} \gamma_0^{-1} \otimes \gamma_0^{-1} + m \gamma_0^{-1} \underline{\otimes} \gamma_0^{-1} \right) : \gamma_t$$

où l'on a défini $(A \underline{\otimes} B)^{ijkl} = \frac{1}{2}(A^{ik} B^{jl} + A^{il} B^{jk})$. La loi hyper-élastique (8.9) se réécrit sous une forme hypo-élastique (5.1) (l'inverse est rarement vrai [5, 44]),

$$\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = \left(\frac{1}{2} \ell \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + m \mathbf{b} \underline{\otimes} \mathbf{b} \right) : \mathbf{d}$$

mais ici avec $\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt}$ la dérivée objective d'Oldroyd-Lie du tenseur de Kirchhoff,

$$\frac{d_{\tilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\tau}$$

et avec un tenseur d'élasticité non constant (fonction de l'état de déformation via $\mathbf{b} = \varphi_* \mathbf{q}^{-1}$) dans la configuration déformée Ω_p .

Remarque 8.9. Une famille de potentiels polyconvexes (au sens de Ball [3]) généralisant le modèle de Kirchhoff-Saint Venant a été proposé par Ciarlet et Geymonat [7] (c.f. [47]). Parmi celles-ci :

$$\rho_0 \psi = \frac{\kappa_0}{2} (J_\varphi^2 - 1 - \ln J_\varphi) + \frac{\mu_0}{2} (\text{tr}(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{C}) - 3 - 2 \ln J_\varphi)$$

où $\kappa_0 = (3\lambda_0 + 2\mu_0)/3$ est le module de compressibilité du matériau, et qui se traduit sur \mathcal{B} en

$$h = 2\psi \circ p_0 = \frac{k}{2} \left(\left(\frac{\rho_0 \circ p_0}{\rho_\gamma} \right)^2 - 1 \right) + \frac{m}{2} (\text{tr}(\gamma_0^{-1}\gamma) - 3) - \frac{k + 2m}{2} \ln \left(\frac{\rho_0 \circ p_0}{\rho_\gamma} \right)$$

où l'on a posé $k = \kappa_0/\rho_0$ et utilisé la remarque 8.8.

2. à ne pas confondre avec le tenseur d'ordre 4 d'(hypo-)élasticité \mathbf{E} de (5.1).

9. PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES EN HYPER-ÉLASTICITÉ

Les équations d'équilibre et les lois de comportement ne suffisent pas à traiter complètement un problème de mécanique des milieux continus. En effet, un système mécanique représenté, à un instant donné par un domaine de l'espace Ω_p , n'est généralement pas isolé et subit des liaisons ou des contraintes avec des éléments extérieurs à *travers son bord* $\partial\Omega_p$. La prise en compte de ces données extérieures sur le bord est l'objet de la *formulation des conditions limites*. Celles-ci complètent les équations d'équilibre, les lois de comportement et les équations d'état pour traiter un problème d'élasticité en statique (il faudra toutefois ajouter également des conditions initiales en dynamique).

La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit

$$\mathcal{P}_{int}(\boldsymbol{\epsilon}) = - \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}) \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Si l'on fait de plus l'hypothèse que le champ de déformations virtuelles dérive d'un déplacement virtuel \mathbf{u} , c'est à dire que

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q},$$

alors on peut écrire (voir [Appendice H](#))

$$\mathcal{P}_{int}(\boldsymbol{\epsilon}) = - \int_{\partial\Omega_p} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) ds + \int_{\Omega_p} (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

\mathbf{n} étant la normale unitaire sortante au bord $\partial\Omega_p$ et ds , l'élément d'aire. Les équations d'équilibre permettent de réécrire le second terme de droite à l'aide des efforts extérieurs mais la formulation de conditions limites est nécessaire pour lever l'indétermination sur le *terme de bord*, c'est à dire le premier terme de droite. Dans la suite de cette section, on détaillera quelques types de conditions limites qui interviennent en hyper-élasticité. On les formulera sur la configuration dans l'espace mais également sur le body.

Remarque 9.1. Il peut être intéressant de réécrire les termes de bord et de volume ci-dessus en fonction des diverses notions de contraintes que nous avons introduites dans la [section 2](#) et utilisées lors de la formulation de l'hyper-élasticité ([section 8.3](#)). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_p} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) ds &= \int_{\partial\mathcal{B}} \langle \widehat{\boldsymbol{\mathfrak{S}}} \mathbf{N}, \mathbf{U} \rangle_{\gamma} dS = \int_{\partial\Omega_0} (\widehat{\mathbf{P}} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{V}_0) ds_0 = \int_{\partial\mathcal{B}} (\widehat{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{V}) dS_0, \\ \int_{\Omega_p} (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}} &= \int_{\mathcal{B}} \langle \mathbf{div}^{\gamma} \boldsymbol{\mathfrak{S}}, \mathbf{U} \rangle_{\gamma} \text{vol}_{\gamma} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{div} \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_0) \text{vol}_{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

où

- (1) $\widehat{\boldsymbol{\mathfrak{S}}} = p^* \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathfrak{S}} \boldsymbol{\gamma}$ est le tenseur des contraintes intrinsèque dans sa forme mixte, $\widehat{\boldsymbol{\pi}} = \mathcal{J} \mathbf{F} \boldsymbol{\mathfrak{S}} \boldsymbol{\gamma}_0$ où $\mathcal{J} = \rho_{\gamma_0} / \rho_{\gamma}$ est également un tenseur des contraintes mixte, $\mathbf{U} = p^* \mathbf{u} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{V}$ est la vitesse eulerienne à gauche (définie sur le body), et \mathbf{N} et dS , \mathbf{N}_0 et dS_0 sont relatifs respectivement à la métrique $\boldsymbol{\gamma}$ et à la métrique $\boldsymbol{\gamma}_0$ sur \mathcal{B} ;
- (2) $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{q}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff dans sa forme mixte, $\mathbf{V}_0 := \varphi_t = \mathbf{V} \circ p_0^{-1} = \mathbf{u} \circ \varphi$ est la vitesse lagrangienne sur la configuration de référence Ω_0 , et \mathbf{n}_0 et ds_0 sont relatifs à la métrique \mathbf{q} sur Ω_0 .

Pour la définition rigoureuse des divergences $\mathbf{div}^{\gamma} \boldsymbol{\mathfrak{S}}$ et $\mathbf{div} \mathbf{P}$, voir [Appendice H](#). Pour le lien entre les termes de bord sur $\partial\mathcal{B}$, on a utilisé la relation de Nanson ([remarque G.8](#)) qui conduit à $\boldsymbol{\gamma} \mathbf{N} dS = \mathcal{J} \boldsymbol{\gamma}_0 \mathbf{N}_0 dS_0$ lorsqu'exprimée sur le body.

On définira le déplacement soit comme

$$\xi(\varphi) = \varphi - \text{id}$$

lorsque défini sur Ω_{p0} (mais à valeur dans Ω_p), soit comme

$$\xi(p) = p - p_0$$

lorsque défini sur \mathcal{B} (toujours à valeur dans Ω_p). Tout comme la vitesse lagrangienne, le déplacement ξ n'est pas un champ de vecteur (ni sur \mathcal{B} , ni sur Ω_{p0} ni sur Ω_p) mais une section d'un *fibré pull-back* (voir définition E.6).

Un même système mécanique peut être l'objet de conditions limites de natures différentes sur son bord. Pour formuler un tel problème mixte, il est utile de partitionner le bord du domaine en plusieurs surfaces. Par exemple, pour décrire un problème mixte de type Dirichlet/Neumann, on écrira

$$\partial\Omega_p = \partial\Omega_p^\varphi \cup \partial\Omega_p^t \cup_k \Sigma^k$$

où $\partial\Omega_p^\varphi$ est la partie de $\partial\Omega_p$ sur laquelle est imposée un déplacement $\xi = \bar{\xi}$ (condition de type Dirichlet $\xi|_{\partial\Omega_p^\varphi} = \bar{\xi}$, soit $\varphi|_{\partial\Omega_p^\varphi} = \bar{\varphi}$) et $\partial\Omega_p^t \cup_k \Sigma^k$ est la partie de $\partial\Omega_p$ sur laquelle est imposée un effort surfacique (condition de type Neumann) dans ce qui suit de deux types : soit de type charge morte (surface $\partial\Omega_p^t$), soit de type pression imposée (surfaces Σ^k). Dans le cas de charges dites mortes, de direction et d'intensité indépendantes de la déformation du milieu, la condition de Neumann associée correspond à la donnée d'un vecteur force surfacique imposée défini sur la partie du bord $\partial\Omega_{p0}^t = \varphi(\Omega_p^t)$ de la configuration de référence.

Nous traitons ci-dessous deux exemples explicites en hyper-élasticité où les conditions limites sont elles-mêmes définies à partir d'un Lagrangien,

- celui d'une charge morte définie par une force surfacique imposée $\bar{\mathbf{t}}_0$,
- celui type pression $P = P^k$ imposée sur des parties Σ^k du bord.

Dans les deux cas, on impose la condition de Dirichlet $\xi = \bar{\xi}$ de déplacement imposé sur la surface $\partial\Omega_p^\varphi \neq \emptyset$. Dans le second, une condition, dite d'intégrabilité, devra de plus être satisfaite.

9.1. Charge morte. Pour le premier exemple étudié, on considère le lagrangien bien connu [3]

$$(9.1) \quad L_0(\varphi) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \psi(\mathbf{F}_\varphi) \text{vol}_{\mathbf{q}} - \int_{\partial\Omega_0^t} (\xi(\varphi) \cdot \bar{\mathbf{t}}_0) ds_0, \quad \xi(\varphi) = \varphi - \text{id},$$

dans lequel la force surfacique imposée $\bar{\mathbf{t}}_0$ est donnée sur la partie $\partial\Omega_0^t$. Le calcul de variation s'effectue en considérant $\varphi = \varphi(s)$ avec $\varphi(0) = \varphi$ et $\dot{\varphi}(0) = \delta\varphi$ (vitesse lagrangienne virtuelle) satisfaisant $\delta\varphi = 0$ sur $\partial\Omega_p^\varphi$. On obtient

$$\delta L_0 = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L_0(\varphi(s)) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_\varphi} \right)_i^J (\delta \mathbf{F}_\varphi)^i_J \text{vol}_{\mathbf{q}} - \int_{\partial\Omega_0^t} (\delta \varphi \cdot \bar{\mathbf{t}}_0) ds_0$$

où

$$\delta \mathbf{F}_\varphi = \partial_s \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} (\partial_s \varphi) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \delta \varphi.$$

De la loi d'hyper-élasticité (8.8) on tire

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_\varphi} \right) = \mathbf{qP} = \mathbf{q} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{q}^{-1},$$

soit

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_\varphi} \right)_i^J (\delta \mathbf{F}_\varphi)^i_J = \rho_0 \left[\mathbf{q}^{-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_\varphi} \right) \mathbf{q} \right] : \delta \mathbf{F}_\varphi = \hat{\mathbf{P}} : \delta \mathbf{F}_\varphi,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_\varphi} \right)_i^J (\delta \mathbf{F}_\varphi)^i_J \text{vol}_{\mathbf{q}} &= \int_{\Omega_0} \left(\hat{\mathbf{P}} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \delta \varphi \right) \text{vol}_{\mathbf{q}} \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\text{div} (\delta \varphi \cdot \mathbf{P}) - \delta \varphi \cdot \text{div} \mathbf{P} \right) \text{vol}_{\mathbf{q}} \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \delta \varphi \cdot \hat{\mathbf{P}} \mathbf{n}_0 ds_0 - \int_{\Omega_0} \delta \varphi \cdot \text{div} \mathbf{P} \text{vol}_{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\delta L_0 = \int_{\partial\Omega_0^t} \delta \varphi \cdot (\hat{\mathbf{P}} \mathbf{n}_0 - \bar{\mathbf{t}}_0) ds_0 - \int_{\Omega_0} (\delta \varphi \cdot \text{div} \mathbf{P}) \text{vol}_{\mathbf{q}} = 0,$$

pour toute vitesse virtuelle $\delta\varphi$. En prenant $\delta\varphi$ nulle sur le bord, on retrouve les équations d'équilibre (7.6) (ici sans force volumique ni dynamique),

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = 0, \quad (P^{iJ}, J = 0).$$

On obtient ensuite les conditions aux limites usuelles de type charge morte,

$$(9.2) \quad \widehat{\mathbf{P}}\mathbf{n}_0 \Big|_{\partial\Omega_0^t} = \bar{\mathbf{t}}_0, \quad \left(\widehat{P}_J^i n_0^J \Big|_{\partial\Omega_0^t} = \bar{t}_0^i \right).$$

En hyper-élasticité isotrope, l'énergie libre spécifique ψ est fonction des invariants $I_k = \operatorname{tr} \widehat{\mathbf{C}}^k$ et le lagrangien (9.1) se réécrit sur le body \mathcal{B} (c.f. Section 8.3 pour la partie volumique),

$$L_0 = \int_{\mathcal{B}} \psi(I_k \circ p_0) \mu - \int_{\partial\mathcal{B}^t} ((p - p_0) \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) dS_0$$

avec $I_k \circ p_0 = \operatorname{tr}((\gamma_0^{-1}\gamma)^k)$, $\mu = p_0^*(\rho_0 \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}) = \rho_{\gamma_0} \operatorname{vol}_{\gamma_0}$ la mesure de masse sur le body et

$$dS_0 = p_0^*(ds_0) = i_{\mathbf{N}_0} \operatorname{vol}_{\gamma_0}, \quad \mathbf{N}_0 = p_0^* \mathbf{n}_0 = \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{n}_0 \circ p_0.$$

Remarque 9.2. On peut également effectuer le calcul de variation directement sur le body. En effet :

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= \int_{\mathcal{B}} \rho_{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} : \delta \gamma \operatorname{vol}_{\gamma} - \int_{\partial\mathcal{B}^t} (\delta p \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) dS_0, \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{S} : \gamma(\nabla^{\gamma} \mathbf{U})^s \operatorname{vol}_{\gamma} - \int_{\partial\mathcal{B}^t} (\delta p \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) dS_0, \\ &= \int_{\partial\mathcal{B}} \langle \widehat{\mathfrak{S}}\mathbf{N}, \mathbf{U} \rangle_{\gamma} dS - \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{div}^{\gamma} \mathfrak{S}, \mathbf{U} \rangle_{\gamma} \operatorname{vol}_{\gamma} - \int_{\partial\mathcal{B}^t} (\delta p \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) dS_0, \\ &= \int_{\partial\mathcal{B}^t} (\widehat{\pi}\mathbf{N}_0 - \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) \cdot \delta p dS_0 - \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{div}^{\gamma} \mathfrak{S}, \mathbf{U} \rangle_{\gamma} \operatorname{vol}_{\gamma}, \end{aligned}$$

où

$$\delta \gamma = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} p(s)^* \mathbf{q} = p^* \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q} = 2\gamma(\nabla^{\gamma} \mathbf{U})^s,$$

$\mathbf{U} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{F}^{-1} \delta p$, $\mathfrak{S} = 2\rho_{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = \mathfrak{S}^t$ et où l'on a utilisé la remarque 9.1. En choisissant des vitesses virtuelles nulles sur le bord, on retrouve les équations d'équilibre (7.5) mais ici sans force volumique ni dynamique ($\operatorname{div}^{\gamma} \mathfrak{S} = 0$). On obtient ensuite les conditions aux limites de type charge morte, exprimées cette fois sur \mathcal{B} :

$$(9.3) \quad \widehat{\pi}\mathbf{N}_0 \Big|_{\partial\mathcal{B}^t} = \mathcal{J} \mathbf{F} \mathfrak{S} \gamma_0 \mathbf{N}_0 \Big|_{\partial\mathcal{B}^t} = \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0, \quad \mathcal{J} = \frac{\rho_{\gamma_0}}{\rho_{\gamma}}.$$

9.2. Pression imposée. La question de l'existence d'un Lagrangien pour les problèmes d'hyper-élasticité avec conditions aux limites de type pression imposée

$$(9.4) \quad \widehat{\sigma}\mathbf{n} \Big|_{\Sigma} = -P\mathbf{n}, \quad \left(\widehat{\sigma}_j^i \mathbf{n}^j \Big|_{\Sigma} = -Pn^i \right),$$

sur une ou plusieurs composantes Σ du bord a été abordée dans [37, 43, 4, 3]. Dans l'exemple que nous traitons ici, nous supposons P uniforme, i.e. $P = P_k$ sur chaque composante Σ^k où la pression est imposée. La contribution à la puissance virtuelle de ces pressions imposées s'écrit donc

$$(9.5) \quad \sum_k P_k \int_{\Sigma^k} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds.$$

où \mathbf{u} est la vitesse virtuelle eulerienne. Nous commencerons par réécrire cette contribution sur la configuration de référence. En appliquant le théorème G.7 au champ \mathbf{u} , on obtient d'abord

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\Sigma_0} \varphi^*((\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds) = \int_{\Sigma_0} J_{\varphi} \mathbf{F}_{\varphi}^{-1} \delta\varphi \cdot \mathbf{n}_0 ds_0,$$

où $\Sigma_0 = \varphi^{-1}(\Sigma)$ et $\delta\varphi = \mathbf{u} \circ \varphi = \delta\varphi$ est une vitesse lagrangienne virtuelle sur Ω_0 .

On va maintenant utiliser la puissance du calcul différentiel (utilisé ici en dimension infinie) pour expliciter une formulation variationnelle de ce problème. Pour commencer, notons que l'espace des configurations sur lequel on travaille, en l'occurrence $\text{Emb}(\Omega_0, \mathcal{E})$, n'est pas un espace vectoriel mais un ouvert de l'espace vectoriel $C^\infty(\Omega_0, \mathcal{E})$. On établit pour commencer le résultat suivant.

Lemme 9.3. *La forme différentielle*

$$W_\varphi(\delta\varphi) = \int_{\Sigma_0} J_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1} \delta\varphi \cdot \mathbf{n}_0 \, ds_0 = \int_\Sigma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, ds$$

définie sur $\text{Emb}(\Omega_0, \mathcal{E})$ n'est pas fermée. Plus précisément, sa différentielle extérieure s'écrit

$$(9.6) \quad dW(\delta_1\varphi, \delta_2\varphi) = \oint_{\partial\Sigma_0} (\delta_2\varphi \times \delta_1\varphi) \cdot \mathbf{F}_\varphi d\mathbf{l}_0,$$

avec $d\mathbf{l}_0 = \boldsymbol{\tau}_0 dl_0$, $\boldsymbol{\tau}_0$ étant le vecteur tangent unitaire à la courbe $\partial\Sigma_0$ et dl_0 son élément de longueur.

Démonstration. Soit $\varphi(s)$ une seconde variation de φ , c'est à dire $\varphi(0) = \varphi$ et $\dot{\varphi}(0) = \delta_2\varphi$. On a

$$\begin{aligned} \delta_2(W(\delta_1\varphi)) &:= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} W_{\varphi(s)}(\delta_1\varphi) \\ &= \int_{\Sigma_0} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} J_{\varphi(s)} \right) \mathbf{F}_\varphi^{-1} \delta_1\varphi \cdot \mathbf{n}_0 \, ds_0 + \int_{\Sigma_0} J_\varphi \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbf{F}_{\varphi(s)}^{-1} \right) \delta_1\varphi \cdot \mathbf{n}_0 \, ds_0 \end{aligned}$$

Or

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} J_{\varphi(s)} = J_\varphi \text{tr}(\delta_2 \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1}) = J_\varphi \text{tr}(\nabla \mathbf{u}_2) \circ \varphi = J_\varphi \mathbf{div} \mathbf{u}_2 \circ \varphi,$$

car $\delta_2 \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1} = \nabla \mathbf{u}_2 \circ \varphi$ avec $\mathbf{u}_2 = \delta_2\varphi \circ \varphi^{-1}$ et

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbf{F}_{\varphi(s)}^{-1} = -\mathbf{F}_\varphi^{-1} \delta_2 \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1} = -\mathbf{F}_\varphi^{-1} (\nabla \mathbf{u}_2 \circ \varphi),$$

d'où

$$\left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbf{F}_{\varphi(s)}^{-1} \right) \delta_1\varphi = -\mathbf{F}_\varphi^{-1} (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 \circ \varphi),$$

avec $\mathbf{u}_1 = \delta_1\varphi \circ \varphi^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} \delta_2(W(\delta_1\varphi)) &= \int_{\Sigma_0} (\mathbf{div} \mathbf{u}_2 \circ \varphi) \mathbf{F}_\varphi^{-1} (\mathbf{u}_1 \circ \varphi) \cdot \mathbf{n}_0 \, J_\varphi ds_0 - \int_{\Sigma_0} (\mathbf{F}_\varphi^{-1} (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 \circ \varphi) \cdot \mathbf{n}_0) \, J_\varphi ds_0 \\ &= \int_{\Sigma_0} [(\mathbf{div} \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 \circ \varphi] \cdot \mathbf{F}_\varphi^{-t} \mathbf{n}_0 \, J_\varphi ds_0 - \int_{\Sigma_0} (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 \circ \varphi) \cdot \mathbf{F}_\varphi^{-t} \mathbf{n}_0 \, J_\varphi ds_0 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la formule de Nanson (voir théorème G.7), on obtient finalement

$$\delta_2(W(\delta_1\varphi)) = \int_\Sigma [(\mathbf{div} \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 - \nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

On en déduit donc,

$$\begin{aligned} dW(\delta_1\varphi, \delta_2\varphi) &= \delta_1(W(\delta_2\varphi)) - \delta_2(W(\delta_1\varphi)) \\ &= \int_\Sigma [(\mathbf{div} \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_2 - (\mathbf{div} \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 + \nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 - \nabla_{\mathbf{u}_2} \mathbf{u}_1] \cdot \mathbf{n} \, ds. \end{aligned}$$

On va alors utiliser le fait que $\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 - \nabla_{\mathbf{u}_2} \mathbf{u}_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ et le lemme H.8 pour obtenir finalement

$$dW(\delta_1\varphi, \delta_2\varphi) = - \int_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\partial\Sigma} (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\partial\Sigma_0} (\delta_2\varphi \times \delta_1\varphi) \cdot \mathbf{F}_\varphi d\mathbf{l}_0,$$

d'après la formule de Stokes–Ampère (I.2) et le fait que $d\mathbf{l} \circ \varphi = \mathbf{F}_\varphi d\mathbf{l}_0$. \square

Toutefois, en imposant des conditions supplémentaires sur les variations $\delta\varphi$ (des contraintes *non-holonomes*, donc), on arrive quand même à réaliser la condition aux limites de type pression imposée sur Σ comme la variation d'un Lagrangien $L_1(p)$ défini sur $T\text{Emb}(\Omega_0, \mathcal{E})$ [37, 4], ce que nous proposons de détailler maintenant dans le cas d'une pression unitaire. La formulation explicitée étant intrinsèque, il est tout à fait possible de la définir également sur le body \mathcal{B} , ce que nous allons faire. Pour l'interpréter sur la configuration de référence $\Omega_0 = p_0(\mathcal{B})$, il suffit donc de poser $p_0 = \text{id}$, $\mathbf{F}_0 = Tp_0 = \mathbf{Id}$, $\varphi = p$ et $\mathbf{F}_\varphi = Tp = \mathbf{F}$. Enfin, pour comprendre comment on obtient le potentiel proposé à l'aide du lemme de Poincaré F.16, on se restreindra, dans un premier temps, à travailler sur le voisinage d'une configuration de référence p_0 , défini par

$$\mathcal{U}_{p_0} := \left\{ p \in C^\infty(\mathcal{B}, \mathcal{E}); \sup_{\mathcal{B}} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_0\| < 1 \right\},$$

qui est un *ouvert convexe* de $C^\infty(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, inclus dans $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

Si la forme différentielle W était fermée, le lemme de Poincaré F.16, nous fournirait explicitement le potentiel suivant

$$(9.7) \quad L_1(p) = \int_{-\infty}^0 [(\phi^t)^* i_\xi W]_p dt$$

où $\phi^t(p) = e^t p + (1 - e^t)p_0$ est le flot du champ radial $\xi(p) = p - p_0$ (qui se trouve être le champ de déplacement) et

$$(9.8) \quad W_p(\delta p) := \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\Sigma} i_{\mathbf{u}} \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} i_{p^* \mathbf{u}} p^* \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta p, \mathbf{F}_p \cdot, \mathbf{F}_p \cdot).$$

Cette intégrale se calcule en observant que

$$[(\phi^t)^* i_\xi W]_p = [W(\xi)](\phi^t(p)) = W_{\phi^t(p)}(e^t \xi(p)),$$

avec

$$W_{\phi^t(p)}(e^t \xi(p)) = \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(e^t \xi(p), (e^t \mathbf{F} + (1 - e^t) \mathbf{F}_0) \cdot, (e^t \mathbf{F} + (1 - e^t) \mathbf{F}_0) \cdot),$$

car $\mathbf{F}_{\phi^t(p)} = T(e^t p + (1 - e^t)p_0) = e^t \mathbf{F} + (1 - e^t) \mathbf{F}_0$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 [(\phi^t)^* i_\xi W]_p dt &= \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(p - p_0, \mathbf{F} \cdot, \mathbf{F} \cdot) \int_{-\infty}^0 e^{3t} dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(p - p_0, \mathbf{F} \cdot, \mathbf{F}_0 \cdot) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi(p), \mathbf{F}_0 \cdot, \mathbf{F} \cdot)) \int_{-\infty}^0 e^t (1 - e^t) dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(p - p_0, \mathbf{F} \cdot, \mathbf{F} \cdot) \int_{-\infty}^0 e^t (1 - e^t)^2 dt, \end{aligned}$$

soit

$$L_1(p) = \frac{1}{3} \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F} \cdot, \mathbf{F} \cdot) + \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F} \cdot, \mathbf{F}_0 \cdot) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_0 \cdot, \mathbf{F} \cdot)) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_0 \cdot, \mathbf{F}_0 \cdot).$$

Malheureusement, W n'est pas fermée d'après le lemme 9.3. On a toutefois d'après la formule (F.2)

$$dL_1 = W - \int_{-\infty}^0 (\phi^t)^* i_\xi dW dt,$$

où

$$dW_p(\delta p_1, \delta p_2) = \int_{\partial \Sigma_{\mathcal{B}}} (\delta p_2 \times \delta p_1) \cdot \mathbf{F}_p d\mathcal{L},$$

et $\mathbf{F} d\mathcal{L} = d\ell \circ p$. Calculons donc cette obstruction à l'existence d'un potentiel. On a d'abord

$$(\phi^t)^* i_\xi dW = i_{(\phi^t)^* \xi} (\phi^t)^* dW = i_\xi (\phi^t)^* dW$$

car $(\phi^t)^*\xi = \xi$, puis

$$\begin{aligned} [i_\xi(\phi^t)^*dW]_p(\delta p) &= [(\phi^t)^*dW]_p(\xi(p), \delta p) \\ &= dW_{\phi^t(p)}(T\phi^t.\xi(p), T\phi^t.\delta p) \\ &= dW_{\phi^t(p)}(T\phi^t.\xi(p), T\phi^t.\delta p) \\ &= dW_{\phi^t(p)}(e^t\xi(p), e^t\delta p). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (\phi^t)^*i_{\xi(p)}dW_p dt(\delta p) &= \int_{-\infty}^0 \int_{\partial\Sigma_0} (e^t\delta p \times e^t\xi(p)) \cdot \mathbf{F}_{\phi^t(p)} d\mathcal{L} dt \\ &= \int_{\partial\Sigma_0} (\delta p \times \xi(p)) \cdot \left(\int_{-\infty}^0 (e^{3t}\mathbf{F} + (e^{2t} - e^{3t})\mathbf{F}_0) dt \right) d\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{6} \int_{\partial\Sigma_{\mathcal{B}}} (\delta\xi \times \xi(p)) \cdot (2\mathbf{F} + \mathbf{F}_0) d\mathcal{L}, \end{aligned}$$

car $\mathbf{F}_{\phi^t(p)} = T(e^t p + (1 - e^t)p_0) = e^t\mathbf{F} + (1 - e^t)\mathbf{F}_0$.

Remarque 9.4. Le calcul précédent formule sur le body, tout en les précisant, les conditions d'intégrabilité de Sewell–Beatty [43, 4]. En effet, nous venons de montrer que les conditions optimales d'intégrabilité se traduisent en fait par l'unique condition

$$\oint_{\partial\Sigma_{\mathcal{B}}} (\xi \times \delta\xi) \cdot (2\mathbf{F} + \mathbf{F}_0) d\mathcal{L} = 0,$$

alors que Beatty obtenait deux conditions, exprimées sur la configuration de référence (*i.e.* dans le cas particulier où $\Sigma_{\mathcal{B}} = \Sigma_0$, $d\mathcal{L} = dl_0$, $\mathbf{F}_0 = \mathbf{Id}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\varphi$),

$$(9.9) \quad \oint_{\partial\Sigma_0} (\xi \times \delta\xi) \cdot dl_0 = \oint_{\partial\Sigma_0} (\xi \times \delta\xi) \cdot \mathbf{F}_\varphi dl_0 = 0.$$

On résumera l'ensemble de ces considérations par la formulation du théorème qui suit. Bien qu'il ne soit pas nécessaire de fournir une nouvelle preuve de celui-ci, nous fournissons plus loin une nouvelle vérification de ce résultat par le calcul des variations et qui ne nécessite plus de se restreindre à un ouvert convexe.

Théorème 9.5. *Considérons la fonctionnelle*

$$(9.10) \quad L_1(p) = \frac{1}{3} \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}\cdot, \mathbf{F}\cdot) + \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}\cdot, \mathbf{F}_0\cdot) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_0\cdot, \mathbf{F}\cdot)) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_0\cdot, \mathbf{F}_0\cdot),$$

définie sur $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, où $\xi := p - p_0$ est le champ de déplacements et $\Sigma_{\mathcal{B}} = p_0^{-1}(\Sigma_0) = p^{-1}(\Sigma)$. Alors

$$\delta L_1 = \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds + \frac{1}{6} \oint_{\partial\Sigma_{\mathcal{B}}} (\xi \times \delta\xi) \cdot (2\mathbf{F} + \mathbf{F}_0) d\mathcal{L},$$

$d\mathcal{L}$ étant l'élément de longueur vectoriel relatif à la métrique $\gamma_0 = p_0^*\mathbf{q}$ sur \mathcal{B} .

Démonstration. La preuve que nous proposons ici est basée sur l'observation suivante. Un plongement $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ ou une variation de ce plongement $\delta p : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{E}$ peuvent être considérés comme des *fonctions à valeurs vectorielles*, une fois choisi un repère affine de \mathcal{E} (orthonormé ou pas). Ainsi, V désignant un champ de vecteur sur \mathcal{B} , on pourra définir la dérivée de Lie de p ou δp dans la direction V comme celui d'une fonction et on écrira

$$Tp.V = \mathcal{L}_V p, \quad T\delta p.V = \mathcal{L}_V \delta p.$$

Ceci restant valable bien sûr si on considère les restrictions de p et δp à $\partial\mathcal{B}$ et si V est un champ de vecteur sur $\partial\mathcal{B}$. Ces précisions étant faites, on introduit les 2-formes suivantes sur $\partial\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\omega_1(V, W) &:= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}.V, \mathbf{F}.W) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W p), \\ \omega_2(V, W) &:= \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}.V, \mathbf{F}_0.W) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_0.V, \mathbf{F}.W)) \\ &= \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W p_0) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V p_0, \mathcal{L}_W p)), \\ \omega_3(V, W) &:= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_0.V, \mathbf{F}_0.W) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V p_0, \mathcal{L}_W p_0),\end{aligned}$$

V et W étant des champs de vecteurs sur $\partial\mathcal{B}$. On a donc (en utilisant le fait que $\delta p = \delta\xi$)

$$\delta\omega_1(V, W) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W p) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V \delta\xi, \mathcal{L}_W p) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W \delta\xi),$$

$$\begin{aligned}\delta\omega_2(V, W) &= \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W p_0) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V \delta\xi, \mathcal{L}_W p_0) \\ &\quad + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p_0, \mathcal{L}_W p) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V p_0, \mathcal{L}_W \delta\xi)),\end{aligned}$$

et

$$\delta\omega_3(V, W) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p_0, \mathcal{L}_W p_0).$$

Par conséquent

$$\delta L_1 = \frac{1}{6} \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \delta\omega,$$

où

$$\begin{aligned}\delta\omega(V, W) &:= 2(\delta\omega_1(V, W) + \delta\omega_2(V, W) + \delta\omega_3(V, W)) \\ &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W(2p + p_0)) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p_0, \mathcal{L}_W(2p_0 + p)) \\ &\quad + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V \delta\xi, \mathcal{L}_W(2p + p_0)) - \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_W \delta\xi, \mathcal{L}_V(2p + p_0)).\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant procéder à une intégration par partie pour se débarrasser des termes qui contiennent des dérivées de Lie de $\delta\xi$ et finir le calcul. On introduit pour cela la 1-forme α sur $\partial\mathcal{B}$ définie par

$$\alpha(V) := \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \delta\xi, \mathcal{L}_V(2p + p_0)).$$

On a alors (exemple [F.12](#))

$$d\alpha(V, W) = \mathcal{L}_V \alpha(W) - \mathcal{L}_W \alpha(V) - \alpha([V, W]),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V \alpha(W) &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\mathcal{L}_V \xi, \delta\xi, \mathcal{L}_W(2p + p_0)) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V \delta\xi, \mathcal{L}_W(2p + p_0)) \\ &\quad + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \delta\xi, \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W(2p + p_0)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W \alpha(V) &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\mathcal{L}_W \xi, \delta\xi, \mathcal{L}_V(2p + p_0)) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_W \delta\xi, \mathcal{L}_V(2p + p_0)) \\ &\quad + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \delta\xi, \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V(2p + p_0))\end{aligned}$$

et

$$\alpha([V, W]) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \delta\xi, \mathcal{L}_{[V, W]}(2p + p_0)).$$

Compte tenu du fait (voir corollaire [D.5](#)) que

$$\mathcal{L}_V \mathcal{L}_W(2p + p_0) - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V(2p + p_0) = \mathcal{L}_{[V, W]}(2p + p_0)$$

on a donc finalement

$$\begin{aligned}d\alpha(V, W) &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\mathcal{L}_V \xi, \delta\xi, \mathcal{L}_W(2p + p_0)) - \text{vol}_{\mathbf{q}}(\mathcal{L}_W \xi, \delta\xi, \mathcal{L}_V(2p + p_0)) \\ &\quad + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_V \delta\xi, \mathcal{L}_W(2p + p_0)) - \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathcal{L}_W \delta\xi, \mathcal{L}_V(2p + p_0)).\end{aligned}$$

Par suite, après simplification, on obtient

$$\delta\omega(V, W) = d\alpha(V, W) + 6\text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta\xi, \mathcal{L}_V p, \mathcal{L}_W p).$$

On en déduit que

$$\delta L_1 = \frac{1}{6} \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \delta \omega = \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \text{vol}_{\mathbf{q}}(\delta \xi, \mathbf{F} \cdot, \mathbf{F} \cdot) + \frac{1}{6} \int_{\partial \Sigma_{\mathcal{B}}} \alpha,$$

où la restriction de α à $\partial \Sigma_{\mathcal{B}}$ s'écrit

$$\alpha = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \delta \xi, (\mathbf{F}_0 + 2\mathbf{F}) \cdot) = (\xi \times \delta \xi) \cdot (\mathbf{F}_0 + 2\mathbf{F}) d\mathcal{L},$$

$d\mathcal{L}$ étant l'élément de longueur vectoriel relatif à la métrique $\gamma_0 = p_0^* \mathbf{q}$ sur \mathcal{B} . Par conséquent, en utilisant (9.8), on obtient finalement

$$\delta L_1 = \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds + \frac{1}{6} \oint_{\partial \Sigma_{\mathcal{B}}} (\xi \times \delta \xi) \cdot (2\mathbf{F} + \mathbf{F}_0) d\mathcal{L}.$$

□

Remarque 9.6. Dans le cas particulier où on assimile le body \mathcal{B} à une configuration de référence Ω_0 , et où on choisit une base orthonormée (e_i) de l'espace \mathcal{E} , on a alors $\mathbf{F}_0 = \mathbf{Id}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\varphi$ et $\xi = \varphi - \text{id}$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_\varphi \cdot, \mathbf{F}_\varphi \cdot) = (\det \mathbf{F}_\varphi) i_{\mathbf{F}_\varphi^{-1} \xi} \text{vol}_{\mathbf{q}} = J_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1} \xi \cdot \mathbf{n}_0 ds_0, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \mathbf{F}_\varphi \cdot, \cdot) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \cdot, \mathbf{F}_\varphi \cdot)) = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{F}_\varphi) \xi - \mathbf{F}_\varphi \xi) \cdot \mathbf{n}_0 ds_0, \\ \omega_3 &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, \cdot, \cdot) = i_\xi \text{vol}_{\mathbf{q}} = \xi \cdot \mathbf{n}_0 ds_0. \end{aligned}$$

En effet, la deuxième égalité résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \omega_2(V, W) &= \frac{1}{2} (\text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, V^i \partial_i \varphi, W^j e_j) + \text{vol}_{\mathbf{q}}(\xi, V^i e_i, W^j \partial_j \varphi)), \\ &= \frac{1}{2} (\det(\xi, \partial_i \varphi, e_j) + \det(\xi, e_i, \partial_j \varphi)) V^i W^j, \\ &= \frac{1}{2} \det(\xi, \partial_i \varphi, e_j) (V^i W^j - V^j W^i), \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{pqr} \xi^p \partial_i \varphi^q \delta_j^r (V^i W^j - V^j W^i), \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{pqj} \xi^p \partial_i \varphi^q (V^i W^j - V^j W^i). \end{aligned}$$

Or ω_2 est proportionnelle à la forme volume $ds_0 = i_{\mathbf{n}_0} \text{vol}_{\mathbf{q}}$ (c.f. [Appendice F](#) et [Appendice G](#)) qui s'écrit

$$ds_0(V, W) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\mathbf{n}_0, V, W) = \varepsilon_{rij} n_0^r V^i W^j = \frac{1}{2} \varepsilon_{rij} n_0^r (V^i W^j - V^j W^i).$$

On a donc

$$\omega_2(V, W) = \lambda ds_0(V, W),$$

soit

$$\varepsilon_{pqj} \xi^p \partial_i \varphi^q = \lambda \varepsilon_{rij} n_0^r, \quad \forall i, j,$$

de sorte que, en utilisant (A.5), on obtient

$$\varepsilon^{kij} \varepsilon_{pqj} \xi^p \partial_i \varphi^q = \lambda \varepsilon^{kij} \varepsilon_{rij} n_0^r = 2\lambda \delta_r^k n_0^r = 2\lambda n_0^k,$$

d'où, grâce à la formule (A.4),

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \varepsilon^{kij} \varepsilon_{pqj} \xi^p \partial_i \varphi^q n_{0k} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_p^k \delta_q^i - \delta_q^k \delta_p^i) \xi^p \partial_i \varphi^q n_{0k} \\ &= \frac{1}{2} (\xi^k \partial_q \varphi^q - \xi^i \partial_i \varphi^k) n_{0k} \\ &= \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{F}_\varphi) \xi - \mathbf{F}_\varphi \xi) \cdot \mathbf{n}_0. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$(9.11) \quad L_1(\varphi) = \frac{1}{3} \int_{\Sigma_0} \left(J_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1} \xi + \frac{1}{2} \left((\text{tr } \mathbf{F}_\varphi) \xi - \mathbf{F}_\varphi \xi \right) + \xi \right) \cdot \mathbf{n}_0 \, ds_0,$$

qui est l'expression obtenue par Beatty [4] sous les conditions d'intégrabilité non optimales (9.9).

9.3. Bilan. Pour conclure, nous reprenons les résultats des sections 8.3, 9.1 et 9.2, que nous synthétisons ici. Le théorème 9.7 formule sur le body l'hyper-élasticité en grandes transformation, sous la forme d'un Lagrangien à minimiser lorsque des conditions d'intégrabilité sont satisfaites. La formulation sur la configuration de référence est obtenue comme le cas particulier $\mathcal{B} = \Omega_0$, $p_0 = \text{id}$, $p = \varphi$, $\mathbf{F}_0 = \mathbf{Id}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\varphi$, $\mu = \rho_0 \text{vol}_q$, $dS_0 = ds_0$, et en se référant à la remarque 9.6 pour les termes de pression.

Théorème 9.7. *On considère le problème suivant d'hyper-élasticité isotrope avec pour conditions limites :*

- des déplacement imposés $\varphi - \text{id} = \bar{\xi}$ sur la surface $\partial\Omega_0^\varphi = p_0(\partial\mathcal{B}^\varphi)$,
- des pressions uniformes P_k imposées sur les surfaces $\Sigma^k = \varphi(\Sigma_0^k) = p(\Sigma_{\mathcal{B}}^k) \subset \partial\Omega_p$,
- des charges mortes $\bar{\mathbf{t}}_0$ imposées sur la surface $\partial\Omega_0^{\mathbf{t}} = p_0(\partial\Omega_{\mathcal{B}}^{\mathbf{t}})$,

satisfaisant $\delta p|_{\partial\mathcal{B}^\varphi} = 0$ ainsi que les conditions non-holonomes sur les déplacements

$$(9.12) \quad \oint_{\partial\Sigma_0^k} (\xi \times \delta\xi) \cdot (2\mathbf{F} + \mathbf{F}_0) d\mathcal{L} = 0.$$

Alors les solutions de ce problème correspondent aux extrémales du Lagrangien

$$\begin{aligned} L(p) &= \int_{\mathcal{B}} \psi(I_k \circ p_0) \mu - \int_{\partial\mathcal{B}^{\mathbf{t}}} ((p - p_0) \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) \, dS_0 \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_k P_k \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}^k} \text{vol}_q(\xi, \mathbf{F}\cdot, \mathbf{F}\cdot) + \frac{1}{2} (\text{vol}_q(\xi, \mathbf{F}\cdot, \mathbf{F}_0\cdot) + \text{vol}_q(\xi, \mathbf{F}_0\cdot, \mathbf{F}\cdot)) + \text{vol}_q(\xi, \mathbf{F}_0\cdot, \mathbf{F}_0\cdot), \end{aligned}$$

sur la variété des plongements $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, où $p - p_0 = \xi$ est le champ de déplacement.

Remarque 9.8. Les conditions (9.12) sont satisfaites lorsque les contours fermés $\partial\Sigma_0^k$ sont des frontières de zones à déplacement imposés (de conditions de type Dirichlet $\delta\xi = 0$, cf [3]). Plus généralement, et comme remarqué par Beatty [4], afin qu'elles soient vérifiées il suffit que le vecteur vitesse lagrangienne $\mathbf{V} = \delta p$ (resp. $\delta\varphi = \mathbf{V}_0$) reste colinéaire au déplacement $\xi(p) = p - p_0$ (resp. $\xi(\varphi) = \varphi - \text{id}$) le long de chaque contour $\partial\Sigma_{\mathcal{B}}^k$ (resp. $\partial\Sigma_0^k$). Enfin elles sont trivialement satisfaites lorsque $p_0(\partial\Sigma_{\mathcal{B}}^k) = \partial\Sigma_0^k = \emptyset$ (comme dans le cas d'une pression P imposée sur toute la surface externe à une structure ou encore sur toute la surface d'une cavité non débouchante).

On a $L = L_0 + L_1$ avec L_0 défini par (9.1) et L_1 par (9.10) (théorème 9.5). Le calcul de variation première donne $\delta L = \delta L_0 + \delta L_1 = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{F}^{-1} \delta p$ étant le vecteur vitesse (eulérienne à gauche) virtuelle. On obtient, par la remarque 9.2 et le théorème 9.5,

$$\delta L = \int_{\partial\mathcal{B}^{\mathbf{t}}} (\hat{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{N}_0 - \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) \cdot \delta p \, dS_0 + \sum_k \int_{\Sigma_{\mathcal{B}}^k} \langle \mathbf{U}, \hat{\boldsymbol{\mathfrak{S}}} \mathbf{N} + P_k \mathbf{N} \rangle_\gamma \, dS - \int_{\mathcal{B}} \langle \text{div}^\gamma \boldsymbol{\mathfrak{S}}, \mathbf{U} \rangle_\gamma \, \text{vol}_\gamma = 0.$$

On retrouve les équations d'équilibre $\text{div}^\gamma \boldsymbol{\mathfrak{S}} = 0$, les conditions aux limites de type charge morte $\hat{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{N}_0|_{\partial\mathcal{B}^{\mathbf{t}}} = \mathcal{J} \mathbf{F} \boldsymbol{\mathfrak{S}} \gamma_0 \mathbf{N}_0|_{\partial\mathcal{B}^{\mathbf{t}}} = \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0$, ainsi que celles de type pression imposée

$$(9.13) \quad \hat{\boldsymbol{\mathfrak{S}}} \mathbf{N} \Big|_{\Sigma_{\mathcal{B}}^k} = -P_k \mathbf{N},$$

toutes exprimées sur le body.

Remarque 9.9. Par push-forward de (9.3) sur $\partial\Omega_0^{\mathbf{t}}$, en utilisant $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_0$, $\mathcal{J} \mathbf{F} \boldsymbol{\mathfrak{S}} = \rho_{\gamma_0} \mathbf{F} \boldsymbol{\theta}$, on obtient

$$\rho_0 \mathbf{S} \mathbf{q} \mathbf{n}_0 = (p_0)_* ((\rho_0 \circ p_0) \boldsymbol{\theta} \gamma_0 \mathbf{N}_0) = (p_0)_* (\mathbf{F}^{-1} \bar{\mathbf{t}}_0 \circ p_0) = \mathbf{F}_0 \mathbf{F}^{-1} \bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{F}_\varphi^{-1} \bar{\mathbf{t}}_0$$

et l'on retrouve la condition de charge morte $\widehat{\mathbf{P}}\mathbf{n}_0|_{\partial\Omega_0^t} = \bar{\mathbf{t}}_0$ (9.2) formulée sur la configuration de référence. Par push-forward de (9.13) sur la surface Σ^k de la configuration déformée, on obtient

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n} = p_*(\boldsymbol{\mathfrak{S}}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{N}) = -p_*(P_k\mathbf{N}) = -P_k\mathbf{n}$$

qui est bien la condition de pression imposé (9.4) sur Σ^k .

ANNEXE A. QUELQUES FORMULES UTILES DANS \mathbb{R}^3

On considère L'espace euclidien orienté \mathbb{R}^3 où la métrique \mathbf{q} est représentée dans la base canonique par les symboles de Kronecker (δ_{ij}) et le déterminant dans la base canonique, par les symboles de Levi-Civita (ε_{ijk}). Ceci est encore vrai dans n'importe quelle base orthonormée directe (\mathbf{e}_i). On a en particulier dans toute base orthonormée directe

$$(A.1) \quad \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varepsilon_{ijk}u^i v^j w^k, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Le *produit vectoriel* est défini implicitement par la relation

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

On rappelle que si $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire, on a

$$\det(L\mathbf{u}, L\mathbf{v}, L\mathbf{w}) = (\det L) \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $A = (A_{ij})$ une matrice carré et $A_{i,j}$, la sous-matrice carrée d'ordre 2 déduite de A en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. On définit alors le *cofacteur* d'indice i, j de A , noté $(\text{com } A)_{i,j}$ en posant

$$(\text{com } A)_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}).$$

On peut montrer de plus que si A est inversible, alors

$$(A.2) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com } A)^t,$$

et l'on a la propriété

$$(\text{com } A)^t = \text{com}(A^t).$$

Ceci permet d'établir la relation

$$\text{com}(P^{-1}AP)^t = P(\text{com } A)^t P^{-1},$$

et montre que la transposé de la comatrice d'une application linéaire inversible L est définie intrinsèquement (alors que $\text{com } L$ n'est définie que relativement à une base orthonormée). On en déduit, toutefois, la formule bien pratique suivante, valable dans toute base orthonormée :

$$(A.3) \quad L\mathbf{u} \times L\mathbf{v} = (\text{com } L)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Considérons maintenant six vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et \mathbf{v}_3 . Il est facile de montrer que

$$\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \det(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j).$$

On en déduit que si (\mathbf{e}_i) est une base orthonormée directe, on a la relation suivantes entre les symboles de Kronecker et ceux de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Par contraction des indices i et l , on en déduit ensuite

$$(A.4) \quad \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k,$$

puis

$$(A.5) \quad \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_n^k,$$

et enfin

$$(A.6) \quad \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6.$$

Lemme A.1. *Dans toute base orthonormée directe (\mathbf{e}_i) , on a*

$$[(\text{com } A)^t]_r^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{pqr} A_i^p A_j^q.$$

En particulier, pour tout vecteur \mathbf{u} , on a

$$(\text{com } A)^t \mathbf{u} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \det(A\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j, \mathbf{u}) \mathbf{e}_k.$$

Démonstration. On part de la relation

$$\det(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, (\text{com } A)^t \mathbf{w}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$$

En prenant une base orthonormée directe (\mathbf{e}_i) et en posant $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$ et $\mathbf{w} = \mathbf{e}_r$, on tire alors

$$\varepsilon_{pqr} A_i^p A_j^q = \varepsilon_{ijl} [(\text{com } A)^t]_r^l, \quad \forall i, j, r.$$

On contracte ensuite cette dernière relation avec ε^{ijk} et on obtient, grâce à (A.5) :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{pqr} A_i^p A_j^q &= \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijl} [(\text{com } A)^t]_r^l \\ &= 2\delta_l^k [(\text{com } A)^t]_r^l = 2[(\text{com } A)^t]_r^k. \end{aligned}$$

La deuxième assertion provient du fait que

$$\det(A\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j, \mathbf{u}) = \varepsilon_{pqr} A_i^p A_j^q u^r.$$

□

ANNEXE B. DUALITÉ, TRANSPOSÉE, ADJOINT

Étant donné un espace vectoriel E (de dimension fini) défini sur un corps K , on définit le dual de E , noté E^* comme l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans K . On pourra remarquer que E et E^* ont même dimension. Le crochet de dualité entre E^* et E est défini comme suit :

$$(\alpha, \mathbf{v}) := \alpha(\mathbf{v}), \quad \alpha \in E^*, \mathbf{v} \in E.$$

C'est une application bilinéaire définie sur $E^* \times E$. Si on se donne une base (\mathbf{e}_i) de E , on définit une base (\mathbf{e}^i) de E^* , appelée base duale de (\mathbf{e}_i) en posant

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta_j^i.$$

Remarque B.1. Une remarque fondamentale de l'algèbre linéaire est qu'il n'existe pas d'isomorphisme *canonique* (i.e. indépendant du choix d'une base) entre un espace vectoriel E et son dual E^* .

Une application bilinéaire $\mathbf{b} : E \times E \rightarrow K$ est dite *non-dégénérée* si

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in E \implies \mathbf{u} = 0.$$

On a le résultat suivant qui montre que tout isomorphisme entre E et son dual E^* correspond à la donnée d'une application bilinéaire non-dégénérée sur E .

Théorème B.2. *Tout isomorphisme $\kappa : E \rightarrow E^*$ est équivalent à la donnée d'une application bilinéaire \mathbf{b} non dégénérée sur E . Inversement, toute application bilinéaire non dégénérée \mathbf{b} sur E définit un isomorphisme entre E et E^* .*

Démonstration. Soit $\kappa : E \rightarrow E^*$ un isomorphisme et posons

$$\mathbf{b}_\kappa(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\kappa(\mathbf{u}), \mathbf{v}).$$

Alors, \mathbf{b}_κ est une application bilinéaire définie sur E , qui est de plus non dégénérée si κ est un isomorphisme. Inversement, si \mathbf{b} est une application bilinéaire non dégénérée sur E , alors on peut vérifier que l'application linéaire

$$\kappa_b : \mathbf{u} \mapsto b(\mathbf{u}, \cdot), \quad E \rightarrow E^*$$

est un isomorphisme. □

Exemple B.3. Soit (e_i) une base de E et

$$\kappa : \mathbf{u} = \sum_i u^i e_i \mapsto \sum_i u^i e^i, \quad E \rightarrow E^*.$$

Posons $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\kappa(\mathbf{u}), \mathbf{v})$. Alors, dans la base (e_i) , on a

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_i u^i v^i$$

qui correspond à un produit scalaire sur E .

Étant donnée une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ entre deux espaces vectoriels E et F , on définit l'application linéaire $L^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, appelée *adjoint*³ (ou *application linéaire duale*) de L entre les duaux respectifs F^* et E^* de F et E par la formule

$$L^* a := a \circ L, \quad a \in F^*.$$

Remarque B.4. On pourra observer les relations suivantes

$$(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2)^* = \mathcal{L}_2^* \mathcal{L}_1^*, \quad (L^{-1})^* = (L^*)^{-1}.$$

Lorsque les espaces vectoriels E et F sont respectivement équipés de produits scalaires, qu'on notera \mathbf{q}_E et \mathbf{q}_F respectivement, alors on définit l'application *transposée* de $L \in \mathcal{L}(E, F)$ par rapport à ces produits scalaires et notée L^t à partir du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xleftarrow{L^*} & F^* \\ \mathbf{q}_E \uparrow & & \uparrow \mathbf{q}_F \\ E & \xrightarrow{L} & F \\ & \searrow L^t & \end{array}$$

Autrement dit

$$(B.1) \quad \mathbf{q}_E L^t = L^* \mathbf{q}_F,$$

ou encore $L^t = \mathbf{q}_E^{-1} L^* \mathbf{q}_F$.

ANNEXE C. PULL-BACK ET PUSH-FORWARD

Le concept fondamental en géométrie différentielle qui permet de passer des variables matérielles aux variables spatiales (et inversement) sont les opérations *pull-back* et *push-forward*. Pour les fonctions numériques, ces opérations sont définies par

$$p^* f = f \circ p \quad (\text{pull-back}), \quad p_* F = F \circ p^{-1} \quad (\text{push-forward}),$$

où $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $F \in C^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R})$. Pour les *champs de vecteurs*, on se concentrera sur le diagramme suivant

$$U \left(\begin{array}{ccc} T\mathcal{B} & \xrightarrow{Tp} & T\mathcal{E} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{p} & \mathcal{E} \end{array} \right) u$$

3. Notation utilisée par Noll [35].

afin d'obtenir les définitions naturelles

$$p^* \mathbf{u} = Tp^{-1} \circ \mathbf{u} \circ p \quad (\text{pull-back}), \quad p_* \mathbf{U} = Tp \circ \mathbf{U} \circ p^{-1} \quad (\text{push-forward}).$$

Ainsi, si $\mathbf{u} \in \text{Vect}(\Omega)$, alors $p^* \mathbf{u} \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ et réciproquement, si $\mathbf{U} \in \text{Vect}(\mathcal{B})$, alors $p_* \mathbf{U} \in \text{Vect}(\Omega)$. Pour les *champs de covecteurs*, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T^* \mathcal{B} & \xleftarrow{Tp^*} & T^* \mathcal{E} \\ A \left(\begin{array}{c} \downarrow \pi \\ \mathcal{B} \end{array} \right. & & \left. \begin{array}{c} \downarrow \pi \\ \mathcal{E} \end{array} \right) a \\ & \xrightarrow{p} & \end{array}$$

où Tp^* est l'**adjoint** de l'application linéaire Tp , nous aide à obtenir les définitions suivantes

$$p^* a = Tp^* \circ a \circ p \quad (\text{pull-back}), \quad p_* A = (Tp^*)^{-1} \circ A \circ p^{-1} \quad (\text{push-forward}).$$

Une fois comprises ces règles du jeu, les opérations pull-back et push-forward s'étendent sans problème, aux champs de tenseurs contravariants d'ordre plus élevé, aux champs de tenseurs covariants d'ordre plus élevé, et enfin aux champs de tenseurs mixtes.

Remarque C.1. Il est intéressant de noter que les opérations de pull-back et push-forward sont inverses l'une de l'autre, *i.e.* que $p^* = (p_*)^{-1} = (p^{-1})_*$.

Dans des systèmes de coordonnées locales, (X^I) sur \mathcal{B} et (x^i) dans \mathcal{E} , où on a posé $p(X) = x$, l'application linéaire tangente

$$Tp : T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{E}$$

est représentée par la matrice carrée \mathbf{F} définie par

$$F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} = \partial_J x^i,$$

et son application linéaire tangente duale

$$Tp^* : T^*_x \mathcal{E} \rightarrow T^*_{X^I} \mathcal{B},$$

par

$$(\mathbf{F}^*)_I^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^I} = \partial_I x^j,$$

avec $\mathbf{F}^t = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{q}$ et $\mathbf{F}^{-*} := (\mathbf{F}^*)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^*$.

Exemple C.2. Pour des *champs de vecteurs contravariants* $\mathbf{W} = (W^I)$, $\mathbf{w} = (w^i)$, on a

$$(p_* \mathbf{W})^i = \mathbf{F}^i_K (W^K \circ p^{-1}), \quad (p^* \mathbf{w})^I = (\mathbf{F}^{-1})^I_k (w^k \circ p),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_* \mathbf{W} = \mathbf{F}(\mathbf{W} \circ p^{-1}), \quad p^* \mathbf{w} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w} \circ p).$$

Exemple C.3. Pour des *champs de vecteurs covariants* $\mathbf{A} = (A_I)$, $\mathbf{a} = (a_i)$, on a

$$(p_* \mathbf{A})_i = (\mathbf{F}^{-*})_i^K (A_K \circ p^{-1}), \quad (p^* \mathbf{a})_I = (\mathbf{F}^*)_I^k (a_k \circ p),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_* \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{F}^{-1} \circ p^{-1}), \quad p^* \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{F} \circ p).$$

Exemple C.4. Pour des *champs de tenseurs d'ordre 2 covariants* $\mathbf{K} = (K_{IJ})$, $\mathbf{k} = (k_{ij})$, on a

$$(p_* \mathbf{K})_{ij} = (\mathbf{F}^{-*})_i^K (\mathbf{F}^{-*})_j^L (K_{KL} \circ p^{-1}), \quad (p^* \mathbf{k})_{IJ} = (\mathbf{F}^*)_I^k (\mathbf{F}^*)_J^l (k_{kl} \circ p),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_* \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-*} \mathbf{K} (\mathbf{F}^{-1} \circ p^{-1}), \quad p^* \mathbf{k} = \mathbf{F}^* \mathbf{k} (\mathbf{F} \circ p).$$

Exemple C.5. Pour des *champs de tenseurs d'ordre 2 contravariants* $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}^{IJ})$ et $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^{ij})$, on a

$$(p_*\boldsymbol{\theta})^{ij} = \mathbf{F}^i_K \mathbf{F}^j_L (\boldsymbol{\theta}^{KL} \circ p^{-1}), \quad (p^*\boldsymbol{\tau})^{IJ} = (\mathbf{F}^{-1})^I_k (\mathbf{F}^{-1})^J_l (\boldsymbol{\tau}^{kl} \circ p^{-1}),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta}(\mathbf{F}^* \circ p^{-1}), \quad p^*\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{F}^{-*} \circ p).$$

Exemple C.6. Pour des *champs de tenseurs d'ordre 2 mixtes* $\mathbf{M} = (M^I_J)$ et $\mathbf{m} = (m^i_j)$, on a

$$(p_*\mathbf{M})^i_j = \mathbf{F}^i_K (\mathbf{F}^{-*})^L_j (M^K_L \circ p^{-1}), \quad (p^*\mathbf{m})^I_J = (\mathbf{F}^{-1})^I_k (\mathbf{F}^*)^l_J (m^k_l \circ p^{-1}),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{M}(\mathbf{F}^{-1} \circ p^{-1}), \quad p^*\mathbf{m} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{m}(\mathbf{F} \circ p).$$

Plus généralement, pour des champs de tenseurs mixtes quelconques, on a :

$$(C.1) \quad (p_*\mathbf{T})^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \mathbf{F}^{i_1}_{K_1} \dots \mathbf{F}^{i_p}_{K_p} (\mathbf{F}^{-*})^{L_1}_{j_1} \dots (\mathbf{F}^{-*})^{L_q}_{j_q} (\mathbf{T}^{K_1 \dots K_p}_{L_1 \dots L_q} \circ p^{-1});$$

$$(C.2) \quad (p^*\mathbf{t})^{I_1 \dots I_p}_{J_1 \dots J_q} = (\mathbf{F}^{-1})^{I_1}_{k_1} \dots (\mathbf{F}^{-1})^{I_p}_{k_p} (\mathbf{F}^*)^{l_1}_{J_1} \dots (\mathbf{F}^*)^{l_q}_{J_q} (\mathbf{t}^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \circ p);$$

Remarque C.7. Les opérations de *push-forward* et de *pull-back* commutent avec la contraction entre tenseurs covariants et contravariants. On obtient donc en particulier

$$(p_*\mathbf{A}) \cdot (p_*\mathbf{U}) = p_*(\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}), \quad (p_*\boldsymbol{\theta}) : (p_*\mathbf{K}) = p_*(\boldsymbol{\theta} : \mathbf{K}), \quad \text{tr}(p_*\mathbf{M}) = p_*(\text{tr } \mathbf{M}).$$

ANNEXE D. DÉRIVÉE DE LIE

Le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ d'une variété différentielle M agit linéairement sur tout espace $\mathbb{T}(M)$, de champs de tenseurs sur M . Plus précisément, il existe un morphisme de groupe

$$\rho : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{T}(M)), \quad \varphi \mapsto \rho(\varphi) = \varphi_*.$$

Pour des raisons historiques, c'est en général l'action (à droite) $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ qui est plutôt considérée. La dérivée de Lie d'un champ de tenseurs $\mathbf{t} \in \mathbb{T}(M)$ correspond à l'action infinitésimale de cette action.

Définition D.1 (Dérivée de Lie). Soit \mathbf{u} un champ de vecteurs sur M et $\varphi(t)$ son flot. Soit \mathbf{t} un champ de tenseurs sur M . On définit la *dérivée de Lie*, $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{t}$, de \mathbf{t} par rapport à \mathbf{u} par l'expression

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{t} := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \varphi(t)^*\mathbf{t}.$$

Remarque D.2. Lorsque \mathbf{t} est un champ de vecteurs \mathbf{v} , on a $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, où l'expression $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ désigne le *crochet de Lie* des champs \mathbf{u} et \mathbf{v} .

Le fait que la dérivée de Lie corresponde à l'action infinitésimale d'une représentation (à droite) ρ du groupe des difféomorphismes, c'est à dire que

$$\rho(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \rho(\varphi_2)\rho(\varphi_1),$$

nous permet de déduire le lemme suivant.

Lemme D.3. Soit $\mathbf{u} \in \text{Vect}(M)$, un champ de vecteurs sur M , $\varphi(t)$ son flot et $\mathbf{t} \in \mathbb{T}(M)$, un champ de tenseurs sur M . On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t)^*\mathbf{t} = \varphi(t)^* \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{t}.$$

On a également les résultats suivants.

Lemme D.4. Soit $\mathbf{u} \in \text{Vect}(M)$, un champ de vecteurs sur M , φ un difféomorphisme et $\mathbf{t} \in \mathbb{T}(M)$, un champ de tenseurs sur M . Alors :

$$\varphi^* \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{t} = \mathcal{L}_{\varphi_*\mathbf{u}}\varphi^*\mathbf{t}.$$

Corollaire D.5. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Vect}(M)$, des champs de vecteurs sur M et $\mathbf{t} \in \mathbb{T}(M)$, un champ de tenseurs sur M . Alors

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{t} = \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{t} - \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{t}.$$

Remarque D.6. Considérons maintenant un chemin (lisse) quelconque $\varphi(t)$ dans le groupe des difféomorphismes et introduisons sa vitesse eulerienne

$$\mathbf{u}(t) := \varphi_t \circ \varphi^{-1},$$

qui définit un *champ de vecteurs dépendant du temps*. Alors, la notion de dérivée de Lie s'étend sans difficulté dans ce cadre et le lemme D.3 demeure valable.

Le résultat suivant étend le lemme D.3 dans le cas où le chemin de difféomorphismes $\varphi(t)$ est remplacé par un chemin de plongements $p(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$.

Lemme D.7. Soit $p(t)$ un chemin de plongements, $\mathbf{u} = (\partial_t p) \circ p^{-1}$ sa vitesse eulerienne (à droite) et \mathbf{t} un champ de tenseurs défini le long de $p(t)$ (i.e. sur $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathcal{B})$ et dépendant éventuellement du temps). Alors

$$\partial_t(p^* \mathbf{t}) = p^* (\partial_t \mathbf{t} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{t}).$$

Démonstration. Le lemme est vrai pour une fonction, car

$$\partial_t(p^* f) = \partial_t(f \circ p) = (\partial_t f + \nabla_{\mathbf{u}} f) \circ p = (\partial_t f + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} f) \circ p.$$

On va maintenant le montrer pour un champ de vecteurs \mathbf{w} . Dans une carte locale, on a

$$(p^* \mathbf{w})(t, X) = \mathbf{F}^{-1}(t, X) \cdot \mathbf{w}(t, p(t, X)),$$

d'après C.2, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \partial_t(p^* \mathbf{w}) &= \partial_t(\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{w} \circ p) + \mathbf{F}^{-1} \cdot \partial_t(\mathbf{w} \circ p) \\ &= -(\mathbf{F}^{-1}(\partial_t \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{w} \circ p) + \mathbf{F}^{-1} \cdot (\partial_t \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}) \circ p. \end{aligned}$$

Or $(\partial_t \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} = (\nabla_{\mathbf{u}}) \circ p$ et donc

$$\begin{aligned} \partial_t(p^* \mathbf{w}) &= \mathbf{F}^{-1} \cdot (-\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}) \circ p \\ &= \mathbf{F}^{-1} \cdot (\partial_t \mathbf{w} + [\mathbf{u}, \mathbf{w}]) \circ p \\ &= p^* (\partial_t \mathbf{w} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{w}). \end{aligned}$$

On montre ensuite le lemme pour un champ de covecteurs α . Soit \mathbf{W} un champ de vecteurs indépendant du temps sur \mathcal{B} et $\mathbf{w} = p_* \mathbf{W}$. On a

$$\begin{aligned} \partial_t(p^* \alpha)(\mathbf{W}) &= \partial_t((p^* \alpha)(\mathbf{W})) = \partial_t((p^* \alpha)(p^* \mathbf{w})) \\ &= \partial_t(p^*(\alpha(\mathbf{w}))) = \partial_t((\alpha(\mathbf{w})) \circ p) \\ &= p^*(\partial_t(\alpha(\mathbf{w})) + \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\alpha(\mathbf{w}))) \\ &= p^*((\partial_t \alpha)(\mathbf{w}) + \alpha(\partial_t \mathbf{w}) + (\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \alpha)(\mathbf{w}) + \alpha(\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{w})) \\ &= p^*(\partial_t \alpha + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \alpha)(\mathbf{W}) + (p^* \alpha)(\partial_t(\mathbf{W})) \\ &= p^*(\partial_t \alpha + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \alpha)(\mathbf{W}). \end{aligned}$$

On montre enfin, et de la même manière, que le résultat est encore vrai pour n'importe quel champ de tenseurs \mathbf{t} , ce qui achève la preuve. \square

ANNEXE E. DÉRIVÉES COVARIANTES

Définition E.1 (Dérivée covariante). Une *dérivée covariante* sur un fibré vectoriel \mathbb{E} de base M est un opérateur linéaire

$$\nabla : \Gamma(\mathbb{E}) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{E}), \quad \mathbf{s} \mapsto \nabla \mathbf{s},$$

entre l'espace $\Gamma(\mathbb{E})$ des sections de \mathbb{E} et celui des sections de $T^*M \otimes \mathbb{E}$ qui vérifie de plus l'*identité de Leibniz*

$$\nabla(fs) = df \otimes \mathbf{s} + f \nabla \mathbf{s},$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et toute section $\mathbf{s} \in \Gamma(\mathbb{E})$.

Définition E.2 (Courbure). Étant donnée une *dérivée covariante* sur un fibré vectoriel \mathbb{E} de base M , on définit un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 antisymétrique (une 2-forme) sur M à valeur dans $\text{End}(\mathbb{E})$ en posant :

$$R(X, Y)\mathbf{s} := \nabla_X \nabla_Y \mathbf{s} - \nabla_Y \nabla_X \mathbf{s} - \nabla_{[X, Y]}\mathbf{s}.$$

C'est le *tenseur de courbure* de ∇ .

Dans le cas particulier où $\mathbb{E} = TM$ est le fibré tangent d'une variété M , on peut définir la *torsion* de cette dérivée covariante, par la formule

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \text{Vect}(M),$$

qui est un champ de tenseurs mixte de type $(1, 2)$. Le tenseur de courbure de ∇ est, quant à lui, un champ de tenseurs mixte de type $(1, 3)$ qui s'écrit

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \text{Vect}(M).$$

Définition E.3. Une dérivée covariante sur le fibré tangent TM d'une variété M est *symétrique* si sa torsion est nulle, c'est à dire si

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}], \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Vect}(M),$$

où $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} .

Remarque E.4. On peut montrer l'existence sur toute variété différentielle M d'une dérivée covariante. Toutefois, il existe une infinité de telles dérivées et aucune d'entre elle ne joue un rôle particulier. En revanche, si une variété M est munie d'une métrique riemannienne g , alors il existe une unique dérivée covariante symétrique ∇ telle que $\nabla g = 0$ (voir par exemple [18, Theorem 2.51]), c'est la *dérivée covariante riemannienne*.

Toute dérivée covariante sur TM induit par la règle de Leibniz une dérivée covariante sur tous les fibrés tensoriels de M . Le lien entre la dérivée de Lie et une dérivée covariante symétrique est alors rappelé dans le théorème suivant, dans le cas d'une variété riemannienne (M, g) .

Théorème E.5. Soit M une variété différentielle munie d'une dérivée covariante ∇ symétrique. On a alors les relations suivantes :

(1) *Dérivée de Lie d'une fonction f :*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}} f = \nabla_{\mathbf{u}} f = df \cdot \mathbf{u};$$

(2) *Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs $\mathbf{w} = (w^i)$:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u};$$

(3) *Dérivée de Lie d'un champ de covecteurs (1-forme) $\alpha = (\alpha_i)$:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \alpha = \nabla_{\mathbf{u}} \alpha + (\nabla \mathbf{u})^* \alpha;$$

(4) *Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs covariants d'ordre deux, $\mathbf{k} = (k_{ij})$:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{k} + (\nabla \mathbf{u})^* \mathbf{k} + \mathbf{k}(\nabla \mathbf{u});$$

(5) *Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs contravariants d'ordre deux, $\sigma = (\sigma^{ij})$:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \sigma = \nabla_{\mathbf{u}} \sigma - (\nabla \mathbf{u}) \sigma - \sigma(\nabla \mathbf{u})^*;$$

Afin de définir de manière intrinsèque l'équation des géodésiques d'une variété riemannienne mais également la dérivée covariante de la vitesse lagrangienne, il est nécessaire d'étendre la notion de dérivée covariante pour les champs de vecteurs (et plus généralement les champs de tenseurs) qui ne sont définis que le long d'une application $f : K \rightarrow M$, entre deux variétés K et M . La formulation rigoureuse d'une telle définition nécessite d'abord d'introduire la notion de *pull-back d'un fibré vectoriel* [23].

Définition E.6. Soit $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ un fibré vectoriel et soit $f : K \rightarrow M$, une application lisse. Alors l'ensemble

$$f^*\mathbb{E} := \bigsqcup_{k \in K} E_{f(k)} \subset \mathbb{E}$$

est un fibré vectoriel au dessus de K , dénommé pull-back par f du fibré vectoriel \mathbb{E} . Une section de ce fibré est donc une application $s : K \rightarrow \mathbb{E}$, telle que $\pi(s(k)) = f(k)$.

Exemple E.7. Un *champ de vecteurs défini le long d'une courbe* $c : I \rightarrow M$ est une courbe $X : I \rightarrow TM$, telle que $X(t) \in T_{c(t)}M$, pour tout $t \in I$.

Définition E.8. Soit $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M$ un fibré vectoriel, muni d'une dérivée covariante ∇ et soit $f : K \rightarrow M$, une application lisse. Alors, il existe une unique dérivée covariante, noté $f^*\nabla$, sur $f^*\mathbb{E}$ et appelée le *pull-back de ∇* telle que

$$(f^*\nabla)_X(f \circ s) = f^*(\nabla_{Tf.X}s)$$

pour toute section s de \mathbb{E} et tout champ de vecteur X sur K .

Exemple E.9. Considérons le cas où $K = \mathcal{B}$, $M = \mathcal{E}$, $\mathbb{E} = T\mathcal{E}$ est le fibré tangent de \mathcal{E} et

$$f = p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E},$$

est un plongement de \mathcal{B} dans \mathcal{E} . Considérons un système de coordonnées locales (X^I) sur \mathcal{B} et un système de coordonnées locales (x^i) sur \mathcal{E} , dans laquelle les symboles de Christoffel s'écrivent Γ_{ij}^k . Soit V une section de $p^*T\mathcal{E}$, c'est à dire une application

$$V : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{E}, \quad \text{telle que} \quad \pi(V(X)) = p(X),$$

alors, on a

$$[(p^*\nabla)_{\partial_{X^I}}V]^k = \partial_{X^I}V^k + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial p^i}{\partial X^I} V^j.$$

Exemple E.10. Soit (M, γ) une variété riemannienne et ∇ la dérivée covariante associée. Soit $c : I \rightarrow M$ une courbe. Alors, le pull-back de ∇ par c , souvent notée D_t est définie sur l'espace vectoriel des champs de vecteurs définis le long de c . Elle est caractérisée par les propriétés suivantes :

(1) pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$D_t(fX)(t) = f'(t)X(t) + f(t)D_t(X)(t);$$

(2) Si $X(t) = \tilde{X}(c(t))$ où \tilde{X} est un champ de vecteurs sur M , alors

$$(D_tX)(t) = (\nabla_{c'(t)}\tilde{X})(c(t)).$$

Dans un système de coordonnées locale (x^i) de M , on a :

$$(D_tX)^k = \dot{X}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i X^j.$$

Remarque E.11. Dans le cas d'une dérivée covariante définie sur les champs de vecteurs définis le long d'une nappe paramétrée $c(s, t)$, la courbure est définie par

$$R(\partial_s, \partial_t)X = \frac{D}{Ds} \frac{D}{Dt} X - \frac{D}{Dt} \frac{D}{Ds} X.$$

ANNEXE F. FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Une *forme alternée* sur E est un tenseur covariant ω sur E d'ordre k qui satisfait

$$\omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma)\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k),$$

pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, k\}$, $\epsilon(\sigma)$ désignant la signature de σ et $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, des vecteurs de E . En composantes, cela signifie que $\omega_{i_1 \dots i_k}$ change de signe, dès qu'on permute deux indices. L'espace des k -formes alternées sur E est noté $\bigwedge^k E^*$. On pourra remarquer que $\bigwedge^k E^* = \{0\}$ si $k \geq n$ et que

$$\dim \bigwedge^k E^* = \binom{n}{k}.$$

Définition F.1 (Formes différentielles extérieures). Une *forme différentielle extérieure de degré k* sur une variété M est une section lisse du fibré $\bigwedge^k T^*M$, autrement dit un champ de k -formes alternées sur M . On dénotera cet espace de sections $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ par $\Omega^k(M)$.

En coordonnées locales, une forme différentielle α de degré k sur une variété M de dimension n s'écrit :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

où (dx^i) est la base duale de la base (∂_{x^i}) de $T_x M$ et

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) dx^{\sigma(i_1)} \otimes dx^{\sigma(i_2)} \dots \otimes dx^{\sigma(i_k)}.$$

Remarque F.2. Une forme différentielle de degré 0 est simplement une fonction sur M .

Définition F.3 (Produit extérieur). Le *produit extérieur*

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{p+q}(M), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

correspond au produit tensoriel alterné⁴, définit par

$$(\alpha \wedge \beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(\sigma) \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \beta(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}),$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ et $\xi_1, \dots, \xi_{p+q} \in T_x M$, définition que l'on peut encore écrire

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha \otimes \beta)^a,$$

$(\cdot)^a$ signifiant l'anti-symétrisation.

Exemple F.4. Si $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ alors

$$(\alpha \wedge \beta)_x(\xi_1, \xi_2) = \alpha_x(\xi_1)\beta_x(\xi_2) - \alpha_x(\xi_2)\beta_x(\xi_1),$$

où $\xi_1, \xi_2 \in T_x M$.

Lemme F.5. Soient $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$ alors :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Lemme F.6. Soient ϕ un difféomorphisme et X un champ de vecteurs. Alors on a

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta.$$

Le *produit intérieur* d'un champ de vecteur X et d'une forme différentielle α est obtenu par contraction.

4. Le facteur de normalisation $\frac{1}{p!q!}$ n'est pas universel et dépend des auteurs.

Définition F.7 (Produit intérieur). Étant donné un champ de vecteur X sur une variété M , on définit l'opérateur linéaire

$$i_X : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

défini par :

$$(i_X \alpha)_x(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) := \alpha_x(X_x, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}),$$

pour tout $\xi_1, \dots, \xi_{p-1} \in T_x M$. Si $p = 0$ (i.e. si α est une fonction), alors $i_X \alpha = 0$.

Lemme F.8. Soient $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$ alors :

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X \beta$$

Lemme F.9. Soient ϕ un difféomorphisme et X, Y des champs de vecteurs. Alors on a :

$$\phi^*(i_X \alpha) = i_{\phi^* X} \phi^* \alpha, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_Y(i_X \alpha) = i_{\mathcal{L}_Y X} \alpha + i_X(\mathcal{L}_Y \alpha).$$

Définition F.10 (Différentielle extérieure). La *différentielle extérieure*

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

étend la différentielle d'une fonction aux formes différentielles extérieures. Elle est définie récursivement par la *formule de Cartan*

$$(F.1) \quad \mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

où $X \in \text{Vect}(M)$ est un champ de vecteurs.

Exemple F.11. Si $p = 0$, alors $f \in \Omega^0(M)$ est une fonction lisse sur M . Dans ce cas, on a $i_X f = 0$ et on obtient :

$$df(X) = (i_X \circ d)f = \mathcal{L}_X f$$

qui correspond bien à la définition de la différentielle de la fonction f . En coordonnées locales

$$(df)_i = \partial_i f.$$

Exemple F.12. Si $p = 1$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $X, Y \in \text{Vect}(M)$, alors $i_X \alpha = \alpha(X)$ est une fonction. La formule de Leibnitz nous donne :

$$\mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(Y) + \alpha(\mathcal{L}_X Y),$$

et on obtient :

$$d\alpha(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

En coordonnées locales, si $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$, on a

$$(d\alpha)_{ij} = \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i.$$

Exemple F.13. Si $p = 2$, $\alpha \in \Omega^2(M)$ et $X, Y, Z \in \text{Vect}(M)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y, Z) &= \mathcal{L}_X(\alpha(Y, Z)) + \mathcal{L}_Y(\alpha(Z, X)) + \mathcal{L}_Z(\alpha(X, Y)) \\ &\quad + \alpha(X, [Y, Z]) + \alpha(Y, [Z, X]) + \alpha(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

En coordonnées locales, si $\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$ on a

$$(d\alpha)_{ijk} = \partial_i \alpha_{jk} - \partial_j \alpha_{ik} + \partial_k \alpha_{ij}.$$

Proposition F.14. La différentielle extérieure possède les propriétés suivantes :

- (1) $d \circ d = 0$;
- (2) $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$;
- (3) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, pour tout $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$;
- (4) $f^* \circ d = d \circ f^*$, pour tout $f \in C^\infty(M, N)$.

Définition F.15. Une forme différentielle $\alpha \in \Omega^k(M)$ est dite *fermée* si $d\alpha = 0$. Elle est dite *exacte* si elle s'écrit $d\beta$ avec $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$.

Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée. Une condition nécessaire pour être exacte est donc d'être fermée, c'est ce qu'on appelle une *condition de compatibilité*. Le résultat suivant, dû à H. Poincaré entraîne que *toute forme fermée est localement exacte*.

Lemme F.16 (Lemme de Poincaré). *Soit $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq k \leq n$). Si $d\alpha = 0$, alors il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\alpha = d\beta$.*

Remarque F.17. Une primitive β d'une forme différentielle fermée α définie sur \mathbb{R}^n , assurée par le lemme de Poincaré, est de plus définie de manière explicite. En effet, soit $\phi^t(\mathbf{x}) = e^t \mathbf{x}$ le flot du champ de vecteur radial $X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. En posant

$$K\alpha = \int_{-\infty}^0 (\phi^t)^* i_X \alpha dt,$$

on obtient, en utilisant la formule de Cartan (F.1)

$$dK\alpha = \int_{-\infty}^0 (\phi^t)^* \mathcal{L}_X \alpha dt = \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} ((\phi^t)^* \alpha) dt = \alpha$$

et donc $\beta := K\alpha$ est une primitive de α . Dans le cas où la forme α n'est pas fermée on a

$$(F.2) \quad dK\alpha = \alpha - \int_{-\infty}^0 (\phi^t)^* i_X d\alpha dt$$

ANNEXE G. FORMES VOLUMES, ÉLÉMENTS D'AIRE

La notion de forme volume généralise aux variétés la notion de déterminant de n vecteurs dans un espace vectoriel E de dimension n . De façon euristique, une forme volume est un « champ de déterminants ».

Définition G.1. Une *forme volume* sur une variété M de dimension n est une forme différentielle de degré n qui ne s'annule en aucun point.

Remarque G.2. Une variété M qui possède une forme volume est nécessairement orientable, c'est à dire qu'il existe un atlas sur M dont les changements de cartes sont à Jacobien positif [18, Section 1.G]. Si M est connexe, il y a deux *orientations* possibles définies de la façon suivante. Soient ω et ω' deux formes volumes sur M , il existe alors une fonction $f \in C^\infty(M)$ qui ne s'annule pas telle que $\omega' = f\omega$. Il y a donc deux possibilités (puisque M est connexe) soit f est strictement positive, soit f est strictement négative. On dit que ω et ω' définissent la même orientation si $f > 0$. C'est une relation d'équivalence. Le choix d'une *orientation* sur M revient à choisir une de ces deux classes d'équivalence.

Théorème G.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne orientable. Il existe alors une unique forme volume ω sur M (qu'on note vol_g et qu'on désigne comme le volume riemannien) telle que*

$$\omega_m(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

pour toute base orthonormée directe de $T_m M$ et pour tout point $m \in M$. Dans un système de coordonnées locales (x^i) de M , cette forme volume s'écrit

$$(G.1) \quad \text{vol}_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Remarque G.4. La notion de volume riemannien permet de définir le *produit vectoriel* de manière intrinsèque sur n'importe quelle variété riemannienne orientable (M, g) de dimension 3. En effet, en dimension 3, l'*opérateur de Hodge*

$$* : T_m M \rightarrow \Lambda^2(T_m^* M), \quad \xi \mapsto i_\xi \text{vol}_g$$

est un isomorphisme. On définit alors le produit vectoriel sur $T_m M$ en posant

$$i_{a \times b} \text{vol}_g := a^\flat \wedge b^\flat, \quad a, b \in T_m M.$$

Théorème G.5 (Variation du volume riemannien). *Soit (M, g) une variété riemannienne et considérons une variation δg de la métrique g , représentée par un chemin de métriques riemanniennes $g(s)$ telle que $g(0) = g$ et $\dot{g}(0) = \delta g$. Alors*

$$\delta \text{vol}_g = \frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} \delta g) \text{vol}_g.$$

Démonstration. On va démontrer le théorème en utilisant des coordonnées locales (x^i) . On a donc d'après (G.1)

$$\text{vol}_{g(s)} = \sqrt{\det g_{ij}(s)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

En dérivant cette expression par rapport à s en 0, on trouve

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{vol}_{g(s)} &= \left(\frac{d\sqrt{\det g_{ij}(s)}}{ds} \right)_{s=0} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\frac{d \det g_{ij}(s)}{ds} \right)_{s=0} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}} (\det g_{ij} \text{tr}(g^{-1} \delta g)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} \delta g) \text{vol}_g. \end{aligned}$$

□

Considérons maintenant une variété à bord M orientable. Soit ω une forme volume sur M et $x \in \partial M$. Dans une carte locale au voisinage de x , on peut considérer la forme $i_n \omega$ où n est un vecteur avec une composante x_1 strictement positive. La classe de cette forme volume définit l'orientation induite sur ∂M , dite convention de la *normale sortante*. Par exemple, considérons le prototype d'une variété à bord, $] -\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ muni de l'orientation définie par la forme volume $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Alors l'orientation induite sur le bord \mathbb{R}^{n-1} de $] -\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ est représentée par la forme volume $dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Exemple G.6 (Element d'aire). Considérons une sous-variété à bord Ω dans l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$. Sur cette variété, la restriction à Ω du volume riemannien, noté $\text{vol}_{\mathbf{q}}$ définit une forme volume. Soit \mathbf{n} la normale unitaire sortante sur le bord $\partial\Omega$. Alors la 2-forme $i_{\mathbf{n}} \text{vol}_{\mathbf{q}}$ est une « forme volume » sur la surface $\partial\Omega$ qu'on appelle habituellement *élément d'aire* sur la surface $\partial\Omega$. De plus, $i_{\mathbf{n}} \text{vol}_{\mathbf{q}}$, qu'on notera ds , correspond au volume riemannien sur cette surface.

Théorème G.7. *Soient Σ_0 et Σ deux surface orientées de l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ et φ , un difféomorphisme de Σ_0 sur Σ . Soit X un champ de vecteur de \mathcal{E} défini sur Σ (qui n'est pas nécessairement tangent à Σ). En notant $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi$, $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi$ et par $\text{com}(\mathbf{F}_\varphi)$ la comatrice de \mathbf{F}_φ , on a*

$$\varphi^*((X \cdot \mathbf{n}) ds) = \text{com}(\mathbf{F}_\varphi)^t (X \circ \varphi) \cdot \mathbf{n}_0 ds_0 = J_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1} (X \circ \varphi) \cdot \mathbf{n}_0 ds_0.$$

Remarque G.8. Cette égalité est connue en mécanique sous la forme condensée dite de Nanson [34], souvent écrite

$$\mathbf{n} ds = J_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-t} \mathbf{n}_0 ds_0.$$

Démonstration. Pour commencer, rappelons que la comatrice $\text{com}(\mathbf{F}_\varphi)$ est définie par

$$\text{com}(\mathbf{F}_\varphi) := \det(\mathbf{F}_\varphi) (\mathbf{F}_\varphi^{-1})^t.$$

Ceci étant, on notera que, pour tous champs de vecteurs \mathbf{u}, \mathbf{v} tangents à Σ , on a

$$((X \cdot \mathbf{n}) ds)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (X \cdot \mathbf{n}) \det(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (i_X \text{vol}_{\mathbf{q}})(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

On a donc

$$\varphi^*((X \cdot \mathbf{n}) ds) = \varphi^*(i_X \text{vol}_{\mathbf{q}}) = i_{\varphi^* X} \varphi^* \text{vol}_{\mathbf{q}} = \det(\mathbf{F}_\varphi) i_{\varphi^* X} \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Mais

$$i_{\varphi^* X} \text{vol}_{\mathbf{q}} = (\varphi^* X \cdot \mathbf{n}_0) ds_0, \quad \text{et} \quad \varphi^* X = \mathbf{F}_\varphi^{-1}(X \circ \varphi) = \frac{1}{\det(\mathbf{F}_\varphi)} (\text{com}(\mathbf{F}_\varphi))^t(X \circ \varphi),$$

d'où

$$\varphi^*((X \cdot \mathbf{n}) ds) = \text{com}(\mathbf{F}_\varphi)^t(X \circ \varphi) \cdot \mathbf{n}_0 ds_0 = J_\varphi \mathbf{F}_\varphi^{-1}(X \circ \varphi) \cdot \mathbf{n}_0 ds_0.$$

□

ANNEXE H. ANALYSE VECTORIELLE

Il existe deux notions de divergence sur une variété M ; la première nécessite l'existence d'une forme volume sur M et ne s'applique qu'aux champs de vecteurs, la deuxième nécessite l'existence d'une dérivée covariante sur M et s'étend aux champs de tenseurs contravariants.

Définition H.1 (Divergence). (1) Soit X un champ de vecteurs sur une variété M , munie d'une forme volume μ . Alors, on définit la divergence de X par la relation

$$\mathbf{div}^\mu X := \frac{di_X \mu}{\mu} = \frac{\mathcal{L}_X \mu}{\mu}.$$

(2) Soit X un champ de vecteurs sur une variété M , munie d'une dérivée covariante ∇ . Alors, on définit la divergence de X comme la trace du tenseur mixte ∇X , autrement dit

$$\mathbf{div}^\nabla X := \text{tr}(\nabla X).$$

Remarque H.2. On a $\mathbf{div}^\mu X = \mathbf{div}^\nabla X$, pour tout $X \in \text{Vect}(M)$, si et seulement si la forme volume μ est parallèle, c'est à dire si $\nabla \mu = 0$. Ceci a lieu si (M, g) est une variété riemannienne, $\mu = \text{vol}_g$ est le volume riemannien et ∇ est la connexion riemannienne.

La seconde définition s'étend à tout champ de tenseurs *contravariants* \mathbf{T} , par contraction des deux premiers indices du champ de tenseurs mixtes $\nabla \mathbf{T}$.

Exemple H.3. Soit σ un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2. Alors, dans tout système de coordonnées locales, on a

$$(\mathbf{div}^\nabla \sigma)^j := (\nabla_{\partial_k} \sigma)^{kj}.$$

Soit Z un champ de covecteurs sur M , on définit alors l'opérateur différentiel D en posant

$$DZ(A, B) = \frac{1}{2} ((\nabla_A Z)(B) + (\nabla_B Z)(A))$$

soit, en coordonnées locales

$$(DZ)_{ij} := \frac{1}{2} \left(\partial_i Z_j + \partial_j Z_i - \Gamma_{ij}^k Z_k - \Gamma_{ji}^k Z_k \right).$$

Lemme H.4. Si (M, g) est une variété riemannienne et ∇ désigne sa connexion canonique, alors

$$L_X g = 2DX^\flat,$$

pour tout champ de vecteurs X sur M .

Lemme H.5. Soit M une variété munie d'une dérivée covariante symétrique ∇ . Soit $\sigma = (\sigma^{ij})$, un champ de tenseurs contravariants symétriques d'ordre 2 et $Z = (Z_i)$, un champ de tenseurs covariants. On a

$$\mathbf{div}^\nabla(\sigma \cdot Z) = \mathbf{div}^\nabla(\sigma) \cdot Z + \sigma : DZ.$$

Remarque H.6 (Divergence du premier tenseur de Piola-Kirchoff). La notion de pullback d'une dérivée covariante (voir définition E.8) permet de donner un sens rigoureux (et intrinsèque) à la divergence du premier tenseur de Piola-Kirchoff \mathbf{P} . En effet, celui-ci apparaît comme une section du fibré $p^*T\Omega_p \otimes T\Omega_0$ au dessus de Ω_0 , où $p^*T\Omega_p$ est le fibré pullback de $T\Omega_p$ par p (voir définition E.6). On en déduit alors d'abord une dérivée covariante pullback $p^*\nabla$ sur $p^*T\Omega_p$ à partir de la dérivée covariante induite sur $T\Omega_p$ par celle de $T\mathcal{E}$ (voir définition E.8), puis par

la règle de Leibniz, une dérivée covariante sur $p^*T\Omega_p \otimes T\Omega_0$. Dans un système de coordonnées locales, cette dérivée covariante a pour composantes

$$(\nabla \mathbf{P})_K^{iJ},$$

ce qui permet de définir sa divergence de manière intrinsèque par

$$(\mathbf{div} \mathbf{P})^i := (\nabla \mathbf{P})_K^{iK}.$$

Définition H.7 (Rotationnel). Soit (M, g) une variété riemannienne orientable de dimension 3. On peut alors définir le rotationnel d'un champ de vecteur X sur M de manière intrinsèque en posant

$$i_{\mathbf{rot} X} := dX^\flat, \quad X \in \text{Vect}(M).$$

Lemme H.8. Soit (M, g) une variété riemannienne orientable de dimension 3. Alors

$$\mathbf{rot}(X \times Y) = (\mathbf{div} Y)X - (\mathbf{div} X)Y - [X, Y],$$

pour tout champs de vecteurs X, Y .

Démonstration. On a $(X \times Y)^\flat = i_Y i_X \text{vol}_g$ d'où l'on tire, grâce à la formule de Cartan

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{rot}(X \times Y)} \text{vol}_g &= d(X \times Y)^\flat \\ &= di_Y i_X \text{vol}_g \\ &= \mathcal{L}_Y i_X \text{vol}_g - i_Y di_X \text{vol}_g \\ &= i_{\mathcal{L}_Y X} \text{vol}_g + i_X \mathcal{L}_Y \text{vol}_g - i_Y \mathcal{L}_X \text{vol}_g \\ &= i_{[Y, X]} \text{vol}_g + i_X (\mathbf{div} Y) \text{vol}_g - i_Y (\mathbf{div} X) \text{vol}_g \\ &= i_{(\mathbf{div} Y)X - (\mathbf{div} X)Y - [X, Y]} \text{vol}_g. \end{aligned}$$

□

ANNEXE I. INTÉGRATION D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE

Le but de cette section est d'expliquer comment on intègre une forme différentielle de degré n à support compact sur une variété de dimension n . L'ingrédient essentiel dans cette construction repose sur la formule du changement de variable dans \mathbb{R}^n :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(\mathbf{x})) J_\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

pour toute fonction f à support compact et tout difféomorphisme φ où J_φ désigne son Jacobien.

Soit M une variété orientable de dimension n . Il existe alors un atlas formé par des cartes (U_α, ϕ_α) telles que les changements de cartes ont des Jacobiens positifs. Commençons par considérer une forme différentielle ω de degré n sur M et dont le support est inclus dans une carte locale (U_α, ϕ_α) de cet atlas. On peut alors considérer le pullback

$$\omega_\alpha := (\phi_\alpha^{-1})^* \omega = f_\alpha dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

qui est une forme différentielle sur \mathbb{R}^n et où $f_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à support compact contenu dans l'ouvert $\phi(U)$. On peut donc considérer l'intégrale (au sens de Riemann ou de Lebesgue)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

qui est une quantité finie. Si maintenant (U_β, ϕ_β) est une autre carte contenant le support de ω et telle que le changement de carte

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

ait un Jacobien positif, alors $y = \phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ et

$$\omega_\alpha = [(\phi_\alpha^{-1})^* \circ (\phi_\beta)^*] \omega_\beta = \phi_{\alpha\beta}^* \omega_\beta,$$

soit

$$f_\alpha(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = (f_\beta(\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})))J(\phi_{\alpha\beta}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f_\beta(\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) J(\phi_{\alpha\beta}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f_\beta(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

en vertu de la *formule de changement de variables* dans les intégrales. On peut donc définir sans ambiguïté

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega$$

puisque cette quantité est indépendante de la carte (U_α, ϕ_α) choisie. On remarquera au passage que l'application

$$\omega \mapsto \int_M \omega,$$

est une application linéaire.

Pour définir l'intégrale d'une forme ω à support compact qui n'est pas contenu dans une carte, on utilise une *partition de l'unité* (voir [18, Chapitre 1, Appendice H] pour plus de détails), c'est à dire une famille de fonctions lisses à support compact ρ_α , définies sur M et telles que :

- (1) Pour tout $x \in M$, $\rho_\alpha(x) \geq 0$;
- (2) chaque ρ_α à son support dans U_α ;
- (3) Pour chaque $x \in M$, il existe seulement un nombre fini de valeur α telles que $\rho_\alpha(x) \neq 0$;
- (4) $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$ (il s'agit d'une somme finie de termes non nuls).

On note alors que le support de $\rho_\alpha \omega$ est contenu dans une carte et on peut donc définir :

$$\int_M \omega := \int_M \left(\sum_\alpha \rho_\alpha \right) \omega = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\alpha \omega$$

qui est une somme finie puisque ω est à support compact.

On en déduit le théorème suivant.

Théorème I.1 (Formule du changement de variable). *Soit p un plongement de \mathcal{B} dans \mathcal{E} et $\omega \in \Omega^3(p(\mathcal{B}))$, alors :*

$$\int_{p(\mathcal{B})} \omega = \int_{\mathcal{B}} p^* \omega.$$

Le théorème suivant est fondamental dans la théorie de l'intégration des formes différentielles. Il généralise le *théorème fondamental de l'intégration* qui stipule que :

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

si f est une fonction C^∞ sur l'intervalle $[a, b]$.

Théorème I.2 (Théorème de Stokes). *Soit M une variété différentielle orientée de dimension n , et ω une $(n - 1)$ -forme différentielle à support compact sur M de classe C^∞ . Alors, on a :*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega$$

où d désigne la dérivée extérieure, ∂M le bord de M (éventuellement vide), muni de l'orientation sortante, et $i : \partial M \rightarrow M$ est l'injection canonique.

Il est intéressant de noter que toutes les formules intégrales issues de l'analyse vectorielle classique dans \mathbb{R}^n sont des cas particuliers de cette formule générale.

Exemple I.3 (Formule de Green–Ostrogradski). Considérons le cas particulier où Ω est un domaine compact de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , bordé par une surface lisse $\Sigma = \partial\Omega$. Soit X un champ de vecteur lisse sur \mathbb{R}^3 et $\text{vol}_{\mathbf{q}} := dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume canonique sur \mathbb{R}^3 . Alors on a :

$$di_X \text{vol}_{\mathbf{q}} = \mathbf{div}(X) \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Dans un système de coordonnées locales (u, v) , la surface Σ est représentée localement par :

$$f : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

La normale unitaire sortante \mathbf{n} en un point de Σ s'écrit alors :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{H} \partial_u f \times \partial_v f, \quad (\text{produit vectoriel})$$

où $H = \|\partial_u f \times \partial_v f\|$ et l'élément d'aire sur Σ est donné par :

$$ds = H du \wedge dv.$$

On trouve alors

$$j^*(i_X \text{vol}_{\mathbf{q}}) = \det(X, \partial_u f, \partial_v f) du \wedge dv = (X \cdot \mathbf{n}) ds,$$

où $j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'inclusion canonique. La formule de Stokes s'écrit alors :

$$(I.1) \quad \iint_{\Sigma} (X \cdot \mathbf{n}) ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}(X) \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

C'est la formule de *Green–Ostrogradski* (qui est encore valable en dimension n).

Exemple I.4 (Formule de Stokes–Ampère). Soit Σ une surface orientée de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 bordée par une courbe fermée C munie de l'orientation induite. Soit X un champ de vecteur lisse sur \mathbb{R}^3 et $\text{vol}_{\mathbf{q}} := dx \wedge dy \wedge dz$, la forme volume canonique sur \mathbb{R}^3 . Considérons la 1-forme α sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$\alpha := X^1 dx + X^2 dy + X^3 dz.$$

Alors la 2-forme $d\alpha$ s'écrit :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

autrement dit

$$d\alpha = i_{\mathbf{rot} X} \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, si $j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'inclusion canonique, la restriction de la forme $d\alpha$ à Σ s'écrit :

$$j^*(d\alpha) = j^*(i_{\mathbf{rot} X} \text{vol}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{rot} X \cdot \mathbf{n}) ds,$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire et ds l'élément d'aire. Considérons alors l'inclusion canonique $i : C \rightarrow \Sigma$, désignons par $\boldsymbol{\tau}$ la tangente unitaire orientée à C et dl l'élément de longueur (qui est une forme volume sur C). Alors on a :

$$i^* j^* \alpha = (X \cdot \boldsymbol{\tau}) dl$$

et la formule de Stokes nous donne :

$$(I.2) \quad \int_C (X \cdot \boldsymbol{\tau}) dl = \int_C i^* j^* (\alpha) = \int_{\Sigma} dj^* (\alpha) = \int_{\Sigma} j^* (d\alpha) = \int_{\Sigma} (\mathbf{rot} X \cdot \mathbf{n}) ds$$

C'est la formule de *Stokes–Ampère*.

RÉFÉRENCES

- [1] K. M. and. Geometry of matrix decompositions seen through optimal transport and information geometry. *Journal of Geometric Mechanics*, 9(3) :335–390, 2017.
- [2] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :319–361, 1966.
- [3] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 63(4) :337–403, Dec. 1976/77.
- [4] M. Beatty. Stability of hyperelastic bodies subject to hydrostatic loading. *Non-linear Mech.*, 5 :367–383, 1970.
- [5] B. Bernstein. Hypo-elasticity and elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 6 :89–104, 1960.
- [6] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès, Paris, 2001.
- [7] P. G. Ciarlet and et G. Geymonat. Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible. *C.R. Acad. Sc. Paris, Série II*, 295 :423–426, 1982.
- [8] B. Clarke. The metric geometry of the manifold of Riemannian metrics over a closed manifold. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 39(3-4) :533–545, 2010.
- [9] B. Clarke and Y. A. Rubinstein. Conformal deformations of the Ebin metric and a generalized Calabi metric on the space of Riemannian metrics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 30(2) :251–274, 2013.
- [10] T. Doyle and J. Ericksen. *Nonlinear elasticity, in : Advances in Applied Mechanics 4*. Academic Press, New York, 1956.
- [11] C. Duval and H. P. Künzle. Sur les connexions newtoniennes et l'extension non triviale du groupe de galilée. *C.R. Acad. Sc. Paris, Série A*, 285 :813–816, 1977.
- [12] D. G. Ebin. *On the space of Riemannian metrics*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1967.
- [13] D. G. Ebin. On the space of Riemannian metrics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :1001–1003, 1968.
- [14] A. C. Eringen. *Nonlinear theory of continuous media*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 1962.
- [15] L. P. Euler. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 14 :154–193, 1765.
- [16] Z. Fiala. Time derivative obtained by applying the riemannian manifold of riemannian metrics to kinematics of continua. *C. R. Mecanique*, 332 :97–102, 2004.
- [17] D. S. Freed and D. Groisser. The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and of its quotient by the diffeomorphism group. *Michigan Math. J.*, 36(3) :323–344, 1989.
- [18] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [19] O. Gil-Medrano and P. W. Michor. The Riemannian manifold of all Riemannian metrics. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 42(166) :183–202, 1991.
- [20] A. Green and P. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 18(4) :251–281, 1965.
- [21] A. E. Green and W. Zerna. *Theoretical elasticity*. Second edition. Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [22] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. 2nd Edition, Springer, Berlin, 2002. Traduction de la quatrième édition allemande par G. Juvet et R. Leroy.
- [23] D. Husemoller. *Fibre Bundles*. Springer New York, 1994.
- [24] H. Inci, T. Kappeler, and P. Topalov. *On the Regularity of the Composition of Diffeomorphisms*, volume 226 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, first edition, Mar. 2013.
- [25] C. Jaumann. Geschlossenes system physikalischer und chemischer differentialgesetze. *Sitzber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, 120 :385–530, 1911.
- [26] F. Klein. *Le programme d'Erlangen*. Gauthier-Villars éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.
- [27] H. P. Künzle. Galilei and Lorentz structures on space-time : comparison of the corresponding geometry and physics. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 17 :337–362, 1972.
- [28] H. P. Künzle. Covariant Newtonian limit of Lorentz space-times. *General Relativity and Gravitation*, 7(5) :445–457, 1976.
- [29] P. Ladevèze. Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations (internal report n°9 of lmt-cachan). Technical report, 1980.
- [30] P. Ladevèze. Sur une théorie des grandes transformations : modélisation et calcul (internal report n°116 of lmt-cachan). Technical report, 1991.

- [31] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation* (translated by J. G. Simmonds from the French edition "Mecanique non linéaire des structures", Hermès, Paris 1996. Springer, Mechanical Engineering Series, 1999.
- [32] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. New York : Macmillan 1990. (Maxwell Macmillan International Editions), 1990.
- [33] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1983 original.
- [34] E. J. Nanson. Note on hydrodynamics. *Messenger of Mathematics*, 7 :182–185, 1878.
- [35] W. Noll. A new mathematical theory of simple materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 48(1) :1–50, Jan. 1972.
- [36] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London*, A200 :523–541, 1950.
- [37] C. Pearson. On configuration-dependent loading. *Quart. Appl. Math.*, 14 :133–144, 1956.
- [38] P. Rougée. The intrinsic lagrangian metric and stress variables. *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover/Germany 199*, pages 217–226, 1991.
- [39] P. Rougée. A new lagrangian intrinsic approach of continuous media in large deformation. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 10 :15–39, 1991.
- [40] P. Rougée. *Mécanique des grandes transformations*, volume 25 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [41] P. Rougée. An intrinsic lagrangian statement of constitutive laws in large strain. *Computers & Structures*, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.
- [42] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus, Tome 1 - Concepts généraux*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2005.
- [43] M. Sewell. On configuration-dependent loading. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 23 :327–351, 1967.
- [44] J. C. Simo and K. S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems : computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2) :201–215, 1984.
- [45] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Maîtrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.
- [46] J.-M. Souriau. *Les groupes comme Universaux*, pages 302–316. Hermann, Paris, 2005.
- [47] C. Stolz. *Milieux continus en transformations finies : hyperélasticité, rupture, élastoplasticité*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2009.
- [48] C. Truesdell. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, 4 :83–133, 1955.
- [49] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics. In *Handbuch der Physik, Band III/3*, pages 1–602. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [50] C. C. Wang and C. Truesdell. *Introduction to rational elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids : Mechanics of Continua.
- [51] H. Xiao, O. T. Bruhns, and M. A. On objective corotational rates and their defining spin tensors. *Int. J. Solids Structures*, 35(30) :4001–4014, 1998.
- [52] S. Zaremba. Sur une forme perfectionnee de la theorie de la relaxation. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, pages 534–614, 1903.

(Boris Kolev) UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, ENS PARIS-SACLAY, CNRS, LMT - LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET TECHNOLOGIE, 91190, GIF-SUR-YVETTE, FRANCE

E-mail address: boris.kolev@ens-paris-saclay.fr

(Rodrigue Desmorat) UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, ENS PARIS-SACLAY, CNRS, LMT - LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET TECHNOLOGIE, 91190, GIF-SUR-YVETTE, FRANCE

E-mail address: rodrigue.desmorat@ens-paris-saclay.fr