



**HAL**  
open science

# Points rationnels dans leur fibre: compléments à un théorème de Poonen

Laurent Moret-Bailly

► **To cite this version:**

Laurent Moret-Bailly. Points rationnels dans leur fibre: compléments à un théorème de Poonen. 2019. hal-02343213v2

**HAL Id: hal-02343213**

**<https://hal.science/hal-02343213v2>**

Preprint submitted on 6 Nov 2019 (v2), last revised 31 Jul 2020 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Points rationnels dans leur fibre: compléments à un théorème de Poonen

Laurent Moret-Bailly<sup>\*†‡</sup>

## Abstract

Let  $k$  be a field and let  $f : X \rightarrow Y$  be a surjective morphism of  $k$ -varieties with  $\dim Y = d \geq 1$ . Improving on results of Poonen, we prove that there are subvarieties  $X' \subset X$  and  $Y' = f(X') \subset Y$ , of dimension  $d - 1$ , such that the induced morphism  $f' : X' \rightarrow Y'$  is purely inseparable. Moreover, we can take  $f$  to be an isomorphism if  $f$  is smooth, and we can take  $Y'$  smooth if  $Y$  is. If  $X$  is smooth, there is a closed point  $x \in X$  having the same residue field  $k'$  as  $f(x)$ , with  $k'$  separable over  $k$ . We also prove arithmetic analogues.

## Résumé

Soient  $k$  un corps et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif de  $k$ -variétés, avec  $\dim Y = d \geq 1$ . On précise des résultats de Poonen en montrant qu'il existe des sous-variétés  $X' \subset X$  et  $Y' = f(X') \subset Y$ , de dimension  $d - 1$ , telles que le morphisme induit  $f' : X' \rightarrow Y'$  soit radiciel. Si  $f$  est lisse, on peut exiger que  $f'$  soit un isomorphisme, et l'on peut prendre  $Y'$  lisse si  $Y$  l'est. Si  $X$  est lisse, il existe un point fermé  $x$  de  $X$  ayant le même corps résiduel  $k'$  que  $f(x)$ ,  $k'$  étant de plus séparable sur  $k$ . Enfin, on donne des analogues arithmétiques.

*Classification AMS* : 14 A15, 14 D99.

## 1 Le cas des variétés sur un corps

Une *variété* sur un corps  $k$  est par définition un  $k$ -schéma de type fini. Si  $x$  est un point d'un schéma  $X$ , on note  $\kappa(x)$  le corps résiduel de  $x$ .

**Théorème 1.1.** *Soient  $k$  un corps et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif de  $k$ -variétés intègres, avec  $\dim(Y) \geq 1$ .*

---

<sup>\*</sup>Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France

<sup>†</sup>laurent.moret-bailly[at]univ-rennes1.fr

<sup>‡</sup>L'auteur a bénéficié du soutien du projet Geolie (ANR-15-CE 40-0012) de l'Agence nationale de la recherche.

(1) *Il existe un diagramme commutatif de  $k$ -variétés*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i)  $i$  et  $j$  sont des immersions localement fermées ;
- (ii)  $X'$  et  $Y'$  sont intègres et  $Y'$  est de codimension 1 dans  $Y$  ;
- (iii)  $f'$  est surjectif et radiciel ;

ainsi que les propriétés conditionnelles suivantes (cumulables le cas échéant) :

- (iv)  $f'$  est un isomorphisme si  $f$  est lisse ;
- (v)  $Y'$  est lisse sur  $k$  si  $Y$  l'est.

(2) *Si  $X$  est lisse sur  $k$ , il admet un point fermé  $x$  tel que  $\kappa(x) = \kappa(f(x))$  et que l'extension finie  $\kappa(x)/k$  soit séparable.*

En choisissant un point fermé de  $X'$ , on retrouve l'énoncé suivant, dû à Poonen :

**Corollaire 1.2.** [P, Theorem 1] *Sous les hypothèses du théorème 1.1, il existe un point fermé  $x$  de  $X$  tel que l'extension  $\kappa(x)/\kappa(f(x))$  soit radicielle. Si de plus  $f$  est lisse, on peut choisir  $x$  tel que  $\kappa(x) = \kappa(f(x))$ .  $\square$*

(Dans [P], les hypothèses sont légèrement différentes mais l'énoncé est clairement équivalent ; d'autre part la deuxième assertion ne figure pas dans l'énoncé, mais elle est signalée dans une remarque suivant la preuve).

Le reste du §1 est consacré à la démonstration du théorème 1.1. Les parties (i) à (iv) de (1) peuvent d'ailleurs se déduire facilement du corollaire 1.2 par un simple argument de fibration (voir 1.4). En revanche, pour obtenir (1) (v) et (2), il faut revenir sur la démonstration dans le cas où  $\dim(Y) = 1$  ; la méthode s'inspire de celle de Poonen. Pour plus de clarté, on donnera ici une preuve complète du théorème 1.1, même dans les cas où un renvoi à [P] aurait permis d'abrégé la rédaction.

### 1.3 Le cas où $\dim(Y) = 1$

Dans toute cette section, on suppose  $Y$  de dimension 1. On peut toujours remplacer  $X$  et  $Y$  par des ouverts denses ; nous le ferons à plusieurs reprises sans commentaire. En particulier, nous supposons  $X$  et  $Y$  affines. On peut aussi remplacer  $X$  par une courbe irréductible de  $X$ , dominant  $Y$ , lisse si  $X$  l'est, et étale sur  $Y$  si  $f$  est lisse. Ainsi nous pouvons supposer, en préservant les hypothèses dans chaque cas, que  $X$  et  $Y$  sont des courbes affines.

### 1.3.1 Preuve de (2)

On suppose donc  $X$  lisse, et l'on fixe un  $k$ -morphisme surjectif  $\pi : Y \rightarrow U$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{A}_k^1$ . Il suffit de démontrer le résultat avec  $f$  remplacé par  $\pi \circ f$ . On supposera donc que  $Y$  est un ouvert de  $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ .

Le corps de fonctions  $K := k(X)$  est une extension séparable de  $k$ , de degré de transcendance 1 ; en particulier le degré d'imperfection de  $K$  sur  $k$  est égal à 1 (en d'autres termes,  $[K : kK^p] = p$ ) ; *a fortiori*, le degré d'imperfection de  $K$  sur  $k(Y)$  est  $\leq 1$ . Par suite (voir [B, V, §13, exercice 3] ou [W, §40]) l'extension finie  $k(X)/k(Y)$  est *engendrée par un élément*  $\zeta$ , que l'on peut choisir entier sur  $k[t]$ . Ainsi nous pouvons supposer que :

- $Y = \text{Spec}(R) \subset \mathbb{A}_k^1$  avec  $R = k[t][q^{-1}]$ , où  $q \in k[t]$  n'est pas constant ;
- $X = \text{Spec}(R[z]/(P)) \subset \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[t, z])$ , où  $P \in k[t, z]$  est irréductible et unitaire en  $z$ , et  $f : X \rightarrow Y$  est induit par la première projection  $p : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  ; le générateur  $\zeta$  choisi est la classe de  $z$ .

On cherche un point fermé  $x$  de  $X$  ayant même corps résiduel  $k'$  que sa projection sur  $Y$ ,  $k'$  étant de plus séparable sur  $k$ . Pour garantir la première condition, il suffit que  $x$  appartienne au graphe  $\Gamma_b \subset \mathbb{A}_k^2$  d'un  $k$ -morphisme  $b : Y \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ . On cherche donc  $b \in R$  tel que  $\Gamma_b \cap X \neq \emptyset$  ; cette condition équivaut à dire que  $P(t, b)$  n'est pas inversible dans  $R$ . Quant à la séparabilité, elle est automatique si  $k$  est parfait ; sinon, elle est satisfaite si l'intersection de  $\Gamma_b$  avec  $X$  est transverse. Distinguons deux cas :

*Cas 1 :  $k$  est infini.* Alors il existe une droite  $D \subset \mathbb{A}_k^2$  d'équation  $z = \lambda t + \mu$  ( $\lambda, \mu \in k$ ) qui coupe  $X$  transversalement en au moins un point. En effet, les droites ayant cette propriété forment un ouvert  $U$  du plan des  $(\lambda, \mu)$  ; on a  $U \neq \emptyset$  car  $X$  est lisse, donc  $U(k) \neq \emptyset$  puisque  $k$  est infini.

*Cas 2 :  $k$  est parfait.* Écrivons  $P(t, z) = z^m + \sum_{i=1}^m a_{m-i}(t) z^{m-i}$ . Si  $a_0 = 0$ , on a  $P = z$  (car  $P$  est irréductible) et  $f$  est un isomorphisme ; on suppose donc  $a_0 \neq 0$ . Prenons  $b = q^{-N}$  ( $N$  entier  $> 0$ )<sup>1</sup>. Alors on a

$$P(t, b) = q^{-Nm}(t) [1 + q^N(t) a_{m-1}(t) + \cdots + q^{Nm}(t) a_0(t)].$$

Le polynôme entre crochets est premier avec  $q$ , et non constant pour  $N \gg 0$  puisque  $a_0 \neq 0$  et que  $q$  n'est pas constant. Donc  $P(t, b) \notin R^\times$ , ce qui achève de démontrer (2).

### 1.3.2 Preuve de (1) : cas où $Y$ est lisse

Si  $Y$  est lisse et  $f$  étale, alors (1) résulte de (2).

Si  $Y$  est lisse mais sans hypothèse sur  $f$ , on peut supposer que  $f$  se décompose en  $X \xrightarrow{g} X_0 \xrightarrow{f_0} Y$  où  $f_0$  est étale et  $g$  radiciel. Appliquant le cas étale à  $f_0$ , on trouve un point fermé  $x_0$  de  $X_0$  tel que  $\kappa(x_0) = \kappa(f_0(x_0))$ , ce corps étant de plus séparable sur  $k$ . Si  $x$  est l'unique point de  $X$  au-dessus de  $x_0$ ,  $\kappa(x)$  est une extension radicielle de  $\kappa(x_0) = \kappa(f(x))$ , ce qui prouve (1), y compris le complément (v) (et (iv) a déjà été vu ci-dessus).

<sup>1</sup>Cette méthode remplace l'argument de comptage utilisé dans [P].

### 1.3.3 Preuve de (1) : cas général

Choisissons un morphisme surjectif  $\pi : Y \rightarrow U$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{A}_k^1$ . Appliquant 1.3.2 à  $\pi \circ f : X \rightarrow U$ , on trouve un point fermé  $x \in X$  tel que  $\kappa(x)$  soit radiciel sur  $\kappa(\pi(f(x)))$  et donc aussi sur  $\kappa(f(x))$ . Ceci établit les propriétés (i) à (iii) avec  $Y' = \{f(x)\}$ . Si  $f$  est lisse (donc étale), alors l'extension  $\kappa(x)/\kappa(f(x))$  est automatiquement séparable et donc triviale, ce qui établit (iv) ; l'assertion (v) a été traitée plus haut.

## 1.4 Le cas général

Commençons par établir l'assertion (2) de 1.1. Si  $X$  est lisse, il existe une courbe lisse irréductible  $C \subset X$  telle que  $f(C)$  soit une courbe dans  $Y$ . Il suffit d'appliquer le cas de dimension 1 au morphisme induit  $C \rightarrow f(C)$ .

Montrons (1). Nous pouvons supposer que  $\dim(Y) = d > 1$ , et qu'il existe un  $k$ -morphisme dominant  $p : Y \rightarrow \mathbb{A}_k^{d-1}$ , lisse si  $Y$  est lisse sur  $k$ . Soit  $K$  le corps des fonctions rationnelles de  $\mathbb{A}_k^{d-1}$ . Le changement de base  $\text{Spec}(K) \rightarrow \mathbb{A}_k^{d-1}$  donne un  $K$ -morphisme  $f_K : X_K \rightarrow Y_K$  vérifiant encore les hypothèses du théorème 1.1 (avec  $f_K$  lisse si  $f$  l'est, et  $Y_K$  lisse sur  $K$  si  $Y$  est lisse sur  $k$ ) et avec  $\dim(Y_K) = 1$ . Le résultat du §1.3 fournit des points fermés  $x_K \in X_K$  et  $y_K = f(x_K) \in Y_K$ . Il suffit alors de prendre pour  $X'$  et  $Y'$  des ouverts convenables des adhérences respectives de  $x_K$  et  $y_K$  dans  $X$  et  $Y$  ; on laisse les détails au lecteur, qui observera notamment que si  $\kappa(y_K)$  est une extension séparable de  $K$ , c'est aussi une extension séparable de  $k$  de sorte que l'adhérence de  $y_K$  est génériquement lisse sur  $k$ .

## 2 Le cas arithmétique

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif de  $\mathbb{Z}$ -schémas intègres de type fini, avec  $\dim(Y) \geq 1$ . D'après [P, Theorem 4], il existe un point fermé  $x$  de  $X$  tel que  $\kappa(x) = \kappa(f(x))$  ; il est donc naturel de généraliser de ce résultat dans l'esprit du théorème 1.1.

Le cas où  $Y$  est un  $\mathbb{F}_p$ -schéma, pour  $p$  premier, relève du théorème 1.1, avec  $k = \mathbb{F}_p$ . Sinon, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif de  $\mathbb{Z}$ -schémas intègres de type fini, où  $Y$  domine  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow i & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (i)  $i$  et  $j$  sont des immersions localement fermées ;
- (ii)  $Y'$  est intègre et  $j(Y')$  est de codimension 1 dans  $Y$  ;

(iii) si  $\dim(Y) \geq 2$ , alors  $Y'$  est lisse sur  $\mathbb{Z}$ .

*Preuve.* Si  $\dim(Y) = 1$ , on peut remplacer  $Y$  par son image dans  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et l'assertion n'est autre que [P, Lemma 3]. En voici une preuve similaire à celle du § 1.3.1 : on se ramène au cas où  $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z}[q^{-1}])$  et  $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[q^{-1}][z]/(P))$  où  $q \geq 2$  et où  $P \in \mathbb{Z}[z]$  est unitaire irréductible avec  $P(0) \neq 0$ . On constate alors que  $P(q^{-N}) = q^{-N \deg(P)} r$  où, pour  $N \gg 0$ ,  $r$  est un entier non inversible et premier à  $q$ . On conclut comme dans 1.3.1 ; explicitement, si  $l$  est un diviseur premier de  $r$ , il suffit de prendre le point de  $\text{Spec}(\mathbb{F}_l[z]) \subset \text{Spec}(\mathbb{Z}[z])$  dont la coordonnée  $z$  est l'inverse de  $q^N$  modulo  $l$ .

Si  $\dim(Y) > 1$ , on peut supposer que  $f_{\mathbb{Q}} : X_{\mathbb{Q}} \rightarrow Y_{\mathbb{Q}}$  est un morphisme lisse de  $\mathbb{Q}$ -variétés lisses, avec  $\dim(Y_{\mathbb{Q}}) \geq 1$ . Appliquant 1.1 à  $f_{\mathbb{Q}}$ , on obtient un sous-schéma localement fermé  $Z$  de  $Y_{\mathbb{Q}}$ , lisse et de codimension 1 dans  $Y_{\mathbb{Q}}$ , et une section de  $f$  au-dessus de  $Z$ . On obtient  $Y'$  en prenant un ouvert convenable de l'adhérence de  $Z$  dans  $Y$ .  $\square$

## Références

- [B] N. BOURBAKI, *Algèbre, chapitres 4 à 7*, Springer, 2007.
- [P] B. POONEN, *Points having the same residue field as their image under a morphism*, J. Algebra 243, n° 1, 224-227 (2001),  
<https://doi.org/10.1006/jabr.2001.8846>
- [W] B. L. VAN DER WAERDEN, *Modern Algebra*, volume I, Ungar Publishing Co., New York (1949).