



**HAL**  
open science

# Relations entre descriptions probabiliste et continue du comportement mécanique de composites à matrice fragile

François Hild

► **To cite this version:**

François Hild. Relations entre descriptions probabiliste et continue du comportement mécanique de composites à matrice fragile. *Revue des composites et des matériaux avancés = Journal of Composite and Advanced Materials*, 1998, 8, pp.9-22. hal-02342777

**HAL Id: hal-02342777**

**<https://hal.science/hal-02342777>**

Submitted on 1 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Relations entre descriptions probabiliste et continue du comportement mécanique de composites à matrice fragile

François Hild

*LMT-Cachan, ENS de Cachan / CNRS / Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson - 94235 CACHAN CEDEX*

---

*RÉSUMÉ. Les variables internes modélisant les mécanismes de dégradation dans des composites à matrice fragile sont liées à des grandeurs microscopiques faisant appel à des notions probabilistes de la rupture. Deux illustrations sont présentées. La première concerne la fissuration matricielle et la seconde la décohésion et le glissement. Dans les deux cas, il est montré que les moments d'ordre supérieur à un doivent être considérés dans le cas général d'une description continue du comportement.*

*ABSTRACT. Internal variables modeling the degradation mechanisms occurring in brittle-matrix composites are related to microscopic quantities by using a probabilistic approach to failure. Two examples are presented. The first one deals with matrix-cracking and the second one is concerned with debonding and slip. In both cases it is shown that in general the moments of order higher than one are needed to describe the behavior in a Continuum Mechanics framework.*

*MOTS-CLÉS : Thermodynamique des milieux continus, Variables internes, Probabilité de rupture, Fissuration matricielle, Décohésion et frottement, Rupture de fibres.*

*KEY WORDS: Continuum thermodynamics, Internal variables, Failure probability, Matrix-cracking, Debonding and slip, Fiber breakage.*

---

## 1. Introduction

Des lois de comportement de composites sont généralement écrites dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus [GER 83]. Le but est de décrire tous les

mécanismes de dégradation se produisant dans le matériau. Dans la modélisation, il s'agit d'introduire les variables internes qui décrivent le comportement de tels matériaux et le potentiel d'état associé  $\bar{\psi}$ . Le potentiel d'état est constitué d'une partie élastique récupérable  $\bar{\psi}^e$  et d'une partie élastique irrécupérable  $\bar{\psi}^i$ . L'énergie irrécupérable correspond à la somme de toutes les densités d'énergies élastiques associées aux champs de contraintes résiduelles. Cet article est consacré à l'étude des mécanismes de fissuration matricielle, de rupture des fibres, de décohesion et de glissement interfaciaux dans des matrices fragiles renforcées par des fibres longues. Le champ de contraintes résiduelles lié à la fabrication n'est pas considéré. On insistera sur les effets relatifs au caractère aléatoire de la rupture au niveau microscopique dans le cas de composites unidirectionnels et la relation qu'il y a entre le caractère probabiliste à l'échelle des constituants et la description continue souvent employée à l'échelle du composite.

## 2. Formalisme général

Lors d'un chargement, un composite renforcé par des fibres subit une multifissuration matricielle et une rupture multiple des fibres s'accompagnant de décohesion et de glissement à l'interface. Le composite est souvent décrit par un assemblage en série de cellules élémentaires (figure 1) qui contiennent des fissures matricielles distribuées de manière aléatoire et caractérisées par une densité de probabilité  $F(L)$  qui évolue en fonction de la contrainte mésoscopique  $\bar{\sigma}$ .

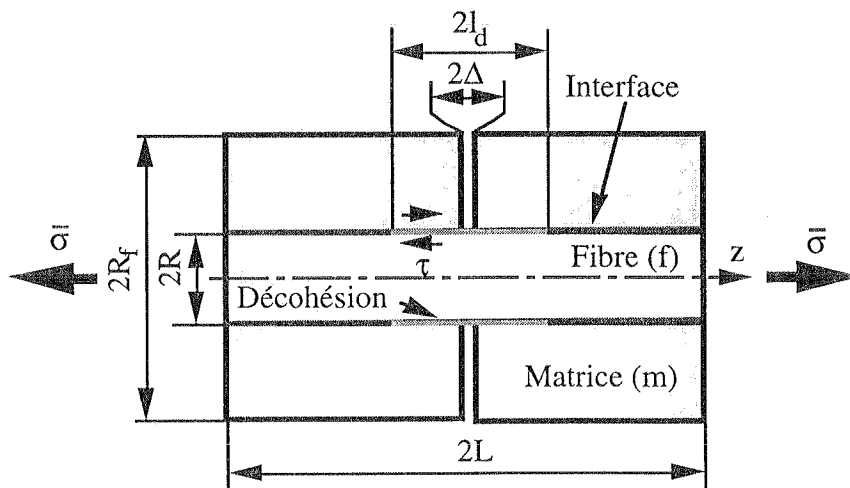


Figure 1. Cellule élémentaire

Les fissures matricielles engendrent un accroissement de densité d'énergie récupérable de Gibbs  $\Delta\bar{\varphi}^e$  donné par

$$\Delta\bar{\varphi}^e = \frac{1}{L} \int_0^{+\infty} \Delta\varphi^e(L)LF(L)dL \quad \text{avec} \quad \bar{L} = \int_0^{+\infty} LF(L)dL \quad [1]$$

où  $\Delta\varphi^e(L)$  est la variation de densité d'énergie récupérable de Gibbs liée à la présence d'une fissure dans une cellule de longueur  $L$ . L'équation [1] suppose que seules les interactions entre les fissures les plus proches sont prises en compte. La décohésion et le glissement interfacial induisent des déformations inélastiques et des boucles d'hystérésis [AVE 71]. Par application du principe des travaux virtuels, la déformation inélastique mésoscopique (ou moyenne)  $\bar{\varepsilon}^i$  s'écrit

$$\bar{\varepsilon}^i = \frac{1}{\bar{L}} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^L \frac{\sigma_f^r(z, L)}{E_f} dz \right] F(L)dL \quad [2]$$

où  $\sigma_f^r(z, L)$  est la contrainte résiduelle dans les fibres associée au mécanisme de décohésion et de frottement,  $z$  la position courante dans une cellule de longueur  $L$ . Le champ de contrainte correspondant est auto-équilibré et permet donc un stockage d'énergie libre (de Helmholtz)  $\bar{\psi}^i$

$$\bar{\psi}^i = \frac{EfE_f}{2(1-f)E_m\bar{L}} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^L \left\{ \frac{\sigma_f^r(z, L)}{E_f} \right\}^2 dz \right] F(L)dL \quad [3]$$

où  $f$  est la fraction volumique de fibres,  $E_f$  et  $E_m$  sont les modules d'Young respectifs de la fibre et de la matrice.

Les mécanismes élémentaires d'endommagement du composite sont décrits par des variables internes. La fissuration matricielle est modélisée par une variable d'endommagement  $D$  [LEM 77] telle que

$$\Delta\bar{\varphi}^e = \bar{\varphi}^e(D) - \bar{\varphi}^e(D=0) = \frac{\bar{\sigma}^2}{2E(1-D)} \quad [4]$$

Les équations [1] et [4] montrent que la variable d'endommagement  $D$  est fonction, *a priori*, de tous les moments de la distribution  $F$  des longueurs  $L$ . La déformation inélastique  $\bar{\varepsilon}^i$  est une des variables internes modélisant l'endommagement interfacial (i.e., la décohésion et le frottement). La seconde variable  $d$  est obtenue à partir de l'expression de la densité d'énergie irrécupérable  $\bar{\psi}^i$

$$\bar{\psi}^i = \frac{E(\bar{\varepsilon}^i)^2}{2d} \quad [5]$$

Cette expression a également été introduite dans l'étude des bétons et des roches [AND 81 ; AND 86]. La densité d'énergie libre (de Helmholtz)  $\bar{\psi}$  s'écrit

$$\bar{\psi} = \frac{E(1-D)}{2} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^i)^2 + \frac{E(\bar{\varepsilon}^i)^2}{2d} \quad [6]$$

et les forces associées aux quatre variables d'état sont définies par

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varepsilon}}, \quad Y = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial D}, \quad y = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial d}, \quad X = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varepsilon}^i} \quad [7]$$

L'équation [7.1] permet de définir la contrainte mésoscopique, l'équation [7.2] le taux de restitution de densité d'énergie de fissuration, l'équation [7.3] le taux de restitution de densité d'énergie d'auto-contrainte, et l'équation [7.4] la contrainte de rappel associée au mécanisme d'endommagement interfacial. Les lois d'évolution des variables internes peuvent être obtenues soit par analyse micromécanique, soit par identification à partir d'essais macroscopiques (figure 2). La mesure de la variable interne  $d$  passe par la quantification de la densité d'énergie irrécupérable  $\bar{\psi}^i$  : cf. par exemple [CHR 87] ou [CHO 91].

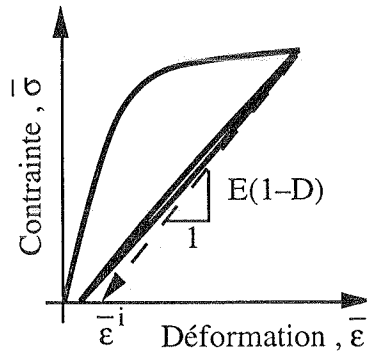


Figure 2. Courbe contrainte/déformation mésoscopiques

À titre d'illustration, les résultats précédents vont être analysés dans deux cas particuliers pour lesquels des expressions simples peuvent être obtenues.

### 3. Particularisations

Dans un premier temps, on ne considère que le mécanisme de fissuration matricielle. En utilisant le modèle de transfert de charge de Cox [COX 52], on peut calculer la variation de densité d'énergie récupérable  $\Delta\varphi^e(L)$

$$\Delta\varphi^e(L) = \frac{(1-f)E_m \tanh(\beta L) \bar{\sigma}^2}{fE_f \beta L 2E} \quad [8]$$

où  $\beta$  est une constante dépendant des propriétés élastiques et géométriques de la fibre et de la matrice ( $\beta$  est inversement proportionnel au rayon  $R$  de la fibre). On définit une longueur représentative  $L_r$  de la fissuration à l'aide de la condition

$$\Delta\varphi^e(L_r) = \Delta\bar{\varphi}^e \quad [9]$$

Pour calculer  $\Delta\bar{\varphi}^e$ , la densité de probabilité  $F(L)$  est obtenue en supposant que les défauts sont distribués le long de la matrice à l'aide d'un processus ponctuel de Poisson. Ce modèle rentre dans un cadre beaucoup plus large [JEU 91] qui ne sera pas discuté ici. Sous ces hypothèses, la fonction de répartition des fragments  $F(L)$  s'écrit (cf. par exemple [GRA 90])

$$F(L) = \lambda_r(\sigma) \exp[-\lambda_r(\sigma)L] \quad [10]$$

où  $\lambda_r(\sigma)$  désigne la densité de défauts rompus par unité de longueur. Si la densité  $\lambda_r(\sigma)$  est supposée être décrite par une fonction puissance de la contrainte locale (ou microscopique)  $\sigma$ , on retrouve alors les bases du modèle de Weibull. Le calcul de la longueur moyenne des fragments permet de lier  $\bar{L}$  à  $\lambda_r(\sigma)$

$$\bar{L} = \frac{1}{\lambda_r(\sigma)} \quad [11]$$

À l'aide des deux hypothèses précédentes, on peut évaluer la variation moyenne d'enthalpie libre

$$\Delta\bar{\varphi}^e = \frac{(1-f)E_m}{fE_f} \frac{1}{\beta L} \left[ \frac{1}{2\beta L} G\left(\frac{1}{2\beta L}\right) - 1 \right] \frac{\bar{\sigma}^2}{2E} \quad [12]$$

où  $G$  représente la fonction de Bateman, transformée de Laplace de la tangente hyperbolique [SPA 87]. L'équation [12] montre que la variable d'endommagement  $D$  (cf. équation [4]) ainsi que la longueur représentative normée  $\beta L_r$  (cf. équation [9]) sont des fonctions non triviales de  $\beta \bar{L}$

$$\frac{\tanh(\beta L_r)}{\beta L_r} = \frac{1}{\beta \bar{L}} \left[ \frac{1}{2\beta \bar{L}} G\left(\frac{1}{2\beta \bar{L}}\right) - 1 \right] \quad [13]$$

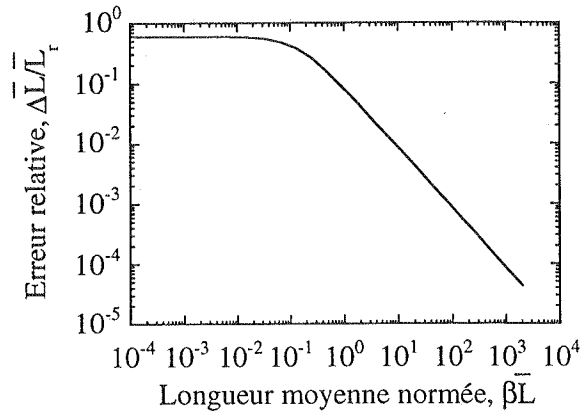
En particulier, cette fonction est différente de celle obtenue en écrivant  $\Delta\varphi^e(\bar{L}) = \Delta\bar{\varphi}^e$  pour laquelle on obtient

$$L_r = \bar{L} \quad [14]$$

La figure 3 montre l'évolution de l'erreur  $\Delta\bar{L}$  définie par

$$\Delta\bar{L} = |L_r - \bar{L}| \quad [15]$$

Pour de grandes valeurs de  $\beta\bar{L}$ , les deux longueurs sont quasiment identiques. Par contre lorsque  $\beta\bar{L}$  diminue, il y a divergence entre les deux longueurs (à cause des interactions entre fissures). En conséquence, la mesure de la longueur moyenne  $\bar{L}$  n'est pas nécessairement la bonne quantité pour décrire la variable d'endommagement  $D$ .



**Figure 3.** Évolution de l'erreur relative  $\Delta\bar{L}/L_r$  en fonction de la longueur moyenne normée  $\beta\bar{L}$

Dans un second temps, nous considérons que les mécanismes de fissuration et de décohésion/glisement sont découplés. Ceci revient à dire que les calculs précédents restent encore valables dans ce qui suit. En supposant que la ténacité interfaciale est faible et que le glissement interfacial est modélisé par une résistance au cisaillement constante  $\tau$  [AVE 71 ; KEL 65], la longueur équivalente de décohésion  $l_{de}$  est définie à partir de l'expression de la déformation inélastique

$$\bar{\epsilon}^i = \frac{\tau l_{de}^2}{2E_f R L_r} \quad [16]$$

La déformation inélastique est ainsi une fonction des distributions de fissures matricielles et de longueurs de décohésion. Le calcul de la variable d'endommagement d'interface  $d$  est obtenu à partir du calcul de la densité d'énergie irrécupérable (cf. équation [3]). Dans le cas où la séparation minimale entre deux fissures est supérieure à la longueur de décohésion, celle-ci prend une valeur unique et la variable d'endommagement  $d$  s'écrit

$$d = \frac{3(1-f)E_m l_{de}}{4fE_f L_r} \quad [17]$$

Ce résultat n'est valable que lorsque le comportement interfacial vérifie les hypothèses de découplage entre fissuration et décohésion. Lorsque le comportement interfacial est plus complexe, la variable  $d$  n'est proportionnelle au rapport  $l_{de} / L_r$  qu'à la condition que le champ de contrainte à l'avant de la pointe de la fissure soit le champ de contrainte élastique du matériau sain. Afin d'illustrer les résultats précédents, nous allons étudier le comportement d'un monofilament dans lequel la matrice est plus résistante que la fibre. Ceci constitue un test classique de caractérisation des propriétés d'interface, éventuellement des propriétés de rupture des fibres [BAX 93]. La particularité de cet essai est que la courbe contrainte/déformation mésoscopique est dominée par le phénomène de décohésion et de glissement. En effet, les distances moyennes entre fissures à saturation sont souvent de deux voire trois ordres de grandeur supérieures au rayon de la fibre ( $\beta \bar{L} \approx 10^2, 10^3$ ). Ceci a pour conséquence de conduire à des valeurs négligeables de la variable d'endommagement  $D$ , et à assimiler la longueur représentative  $L_r$  à la longueur moyenne  $\bar{L}$ . Ce cas correspond à une situation « en série ». Une situation « en parallèle » est étudiée dans [HIL 97]. Pour déterminer l'expression de la longueur de décohésion  $l_{de}$ , il s'agit d'obtenir l'évolution de la déformation inélastique  $\bar{\epsilon}^i$  en fonction de la contrainte appliquée  $\bar{\sigma}$ . Dans le cas d'un modèle d'interface à cisaillement  $\tau$  constant, deux voies sont possibles. La première voie consiste à étudier analytiquement le phénomène de multifissuration. En effet, le phénomène d'écran (ou d'exclusion) est écrit aisément pour un défaut isolé. Dans un cas unidimensionnel, la rupture ayant eu lieu pour  $z = 0$ , l'intervalle  $]-l_R / 2, +l_R / 2[$  est inaccessible (zone d'exclusion) à toute nouvelle rupture car la contrainte dans cette zone reste inférieure au niveau de contrainte atteint lors de la rupture à  $z = 0$  (figure 4). La longueur  $l_R$  s'écrit [KEL 65]

$$l_R = \frac{RT}{\tau} \quad [18]$$

où  $T$  désigne la contrainte de traction qui existerait si aucune rupture n'avait eu lieu.

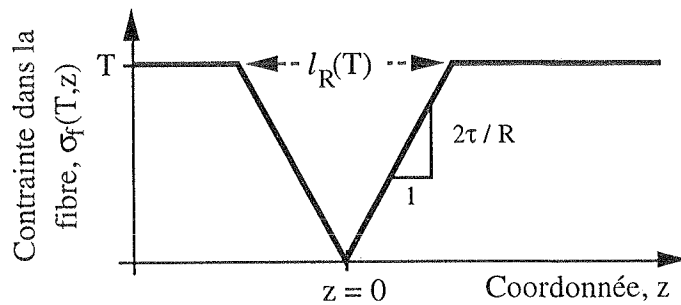


Figure 4. Zone d'exclusion pour toute nouvelle rupture



Gulino et Phoenix [GUL 91] proposent une manière approchée d'étudier la fragmentation en supposant que le processus reste poissonien et en négligeant des défauts qui, cassés pour une contrainte locale  $\tau$  inférieure à la contrainte  $T$ , peuvent empêcher la rupture ultérieure de défauts. L'inconvénient de ce modèle est que le phénomène de saturation (correspondant au cas où toute la longueur du composite est constituée de zones d'exclusions) n'est pas prévu. Pour améliorer ce modèle, on peut remarquer qu'un modèle d'îles booléennes [JEU 87 ; SER 88] constitue également une *borne inférieure* au nombre de défauts susceptibles être rompus. En effet, ce modèle ne prend pas en compte le phénomène d'exclusion et *surestime* donc la zone dans laquelle de nouvelles fissures ne peuvent plus s'amorcer. On suppose que la densité  $\lambda_t(T)$  par unité de longueur est décrite par une fonction puissance de la contrainte locale  $T$

$$\lambda_t(T) = \frac{1}{L_0} \left( \frac{T}{S_0} \right)^m \quad [19]$$

où  $m$  et  $L_0 S_0^m$  sont les paramètres de Weibull. Deux grandeurs caractéristiques  $S_c$  et  $\delta_c$  peuvent être définies [HEN 89 ; CUR 91] à l'aide de la relation  $\lambda_t(S_c) l_R(S_c) = 1$

$$S_c^{m+1} = \frac{L_0 S_0^m \tau}{R} \quad \text{et} \quad \delta_c = l_R(S_c) \quad [20]$$

Ainsi, l'évolution du nombre de défauts rompus  $\lambda_b$  par unité de longueur caractéristique  $\delta_c$  vérifie l'inéquation suivante

$$\lambda_b(\bar{T}) \geq \frac{m}{m+1} \gamma \left[ \frac{m}{m+1}, \bar{T}^{m+1} \right] \quad \text{avec} \quad \bar{T} = \frac{T}{S_c} \quad [21]$$

où  $\gamma$  désigne la fonction gamma incomplète. Ce résultat a la propriété intéressante de décrire la saturation de manière raisonnable (cf. tableau 1). D'autre part, l'expression de  $F(L)$  obtenue lors de l'étude de la fragmentation matricielle pourra être employée en première approximation. Afin de calculer la déformation inélastique moyenne  $\bar{\varepsilon}^i$ , l'équation [2] peut être réécrite comme suit

$$\bar{\varepsilon}^i = \frac{1}{L} \int_0^{\infty} L \varepsilon^i(L) F(L) dL \quad [22]$$

où  $\varepsilon^i(L)$  est la déformation inélastique d'une cellule de longueur  $L$ . Dans le cas d'un modèle d'interface à cisaillement  $\tau$  constant, la déformation inélastique  $\varepsilon^i(L)$  s'exprime par

$$\varepsilon^i(L) = \begin{cases} \frac{f\tau}{(1-f)RE_m} \left( l_R - \frac{L}{2} \right) & \text{pour } L < l_R \\ \frac{f\tau l_R^2}{2(1-f)LRE_m} & \text{pour } L \geq l_R \end{cases} \quad [23]$$

de telle manière que la déformation inélastique moyenne  $\bar{\varepsilon}^i$  devient

$$\bar{\varepsilon}^i = \frac{f\tau l_R}{(1-f)RE_m} - \frac{f\tau L}{(1-f)RE_m} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l_R}{L}\right) \right] \quad [24]$$

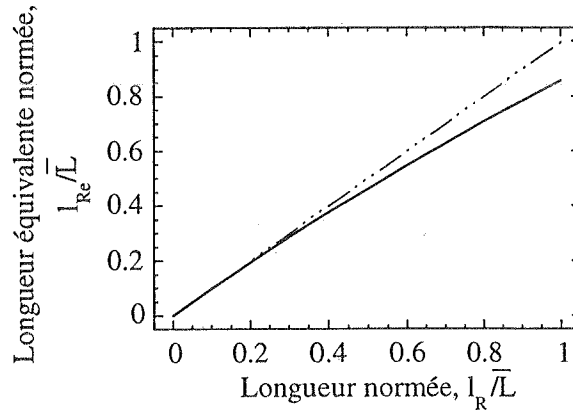
En utilisant l'équation [16] et en remplaçant  $l_{de}$  par  $l_{Re}$ ,  $fE_f$  par  $(1-f)E_m$  (le rôle de la matrice et de la fibre est échangé dans le test de multifragmentation), on obtient

$$l_{Re}^2 = 2Ll_R - 2L^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l_R}{L}\right) \right] \quad [25]$$

Expression qui, au premier ordre en  $l_R / \bar{L}$ , devient

$$l_{Re} \approx l_R \quad [26]$$

Ce résultat montre à nouveau qu'au premier ordre la longueur représentative de glissement  $l_{Re}$  peut être approchée par  $l_R$  mais qu'elle diverge lorsque l'on s'approche de la saturation (figure 5).



**Figure 5.** Évolution de la longueur équivalente de glissement normée  $l_{Re} / \bar{L}$  en fonction de la longueur de glissement normée  $l_R / \bar{L}$

La densité d'énergie irrécupérable  $\bar{\psi}^i$  donnée par l'équation [3] peut être réécrite comme suit

$$\bar{\psi}^i = \frac{1}{L} \int_0^{\infty} L \psi^i(L) F(L) dL \quad [27]$$

où  $\psi^i(L)$  désigne la densité d'énergie irrécupérable d'une cellule de longueur  $L$ . Dans le cas d'un modèle d'interface à cisaillement  $\tau$  constant, la densité d'énergie irrécupérable  $\psi^i(L)$  s'exprime par

$$\psi^i(L) = \begin{cases} \frac{fE\tau^2}{(1-f)E_mE_fR^2} \left( \frac{l_R^2}{2} - \frac{Ll_R}{2} + \frac{L^2}{6} \right) & \text{pour } L < l_R \\ \frac{fE\tau^2}{(1-f)E_mE_fR^2} \frac{l_R^3}{6L} & \text{pour } L \geq l_R \end{cases} \quad [28]$$

de telle manière que la densité d'énergie irrécupérable moyenne  $\bar{\psi}^i$  devient

$$\bar{\psi}^i = \frac{fE\tau^2}{(1-f)E_mE_fR^2} \left[ \frac{l_R^2}{2} - Ll_R + L^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{l_R}{L}\right) \right\} \right] \quad [29]$$

En utilisant l'équation [5], on obtient l'expression suivante pour la variable d'endommagement  $d$

$$d = \frac{fE_f}{(1-f)E_m} \frac{\frac{1}{2} \left[ l_R + L \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{l_R}{L}\right) \right\} \right]^2}{\frac{l_R^2}{2} - Ll_R + L^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{l_R}{L}\right) \right\}} \quad [30]$$

expression qui, au premier ordre en  $l_R/L$  devient

$$d \approx \frac{3fE_f}{4(1-f)E_m} \frac{l_R}{L} \quad [31]$$

Ce résultat est identique à celui de l'équation [17] en intervertissant  $fE_f$  et  $(1-f)E_m$  (le rôle de la matrice et de la fibre est échangé dans le test de multifragmentation).

Si l'on veut rendre compte des phénomènes d'exclusion, surtout sensibles près de la saturation, on peut utiliser d'autres approches. Citons d'abord celle de Curtin [CUR 91] qui base son raisonnement sur l'empilement de sphères incompressibles le long d'une ligne [WID 66]. Il a été montré que ce modèle n'était qu'une approximation d'une solution dite « exacte » [HUI 95]. Parallèlement à la démarche analytique, on peut également faire appel à une démarche numérique. Ces démarches font toutes appel à une méthode de Monte-Carlo. Dans le cas d'un modèle d'interface à contrainte de cisaillement  $\tau$  constante, l'approche numérique n'est pas forcément nécessaire, bien qu'elle ait été employée [HEN 89]. On remarquera cependant que lorsque les phénomènes d'exclusion ne sont pas aussi simples que ceux évoqués

précédemment, une méthode numérique s'impose assez naturellement [BAX 93 ; FEI 94 ; HIL 97].

Pour étudier l'évolution de la longueur représentative de glissement  $l_{re}$ , nous allons faire appel à une méthode numérique, par souci de simplicité. Afin de vérifier les calculs, nous comparerons les résultats à saturation de la densité de défauts rompus  $\lambda_b$  par unité de longueur caractéristique  $\delta_c$  (tableau 1) à ceux obtenus par Hui et al. [HUI 95], Curtin [CUR 91] et Henstenburg et Phoenix [HEN 89]. Deux approches peuvent être utilisées.

La première (appelée méthode 1), très proche du concept d'élément fini, consiste à discrétiser une longueur  $L_{tot}$  en  $N_{tot}$  éléments de longueur  $dz$  identique, chacun de ces éléments ne pouvant être le siège que d'une seule rupture. Si l'on suppose un processus de Poisson ponctuel, la probabilité de trouver un défaut rompu dans un élément de longueur  $dz \ll L_{tot}$  est  $dz\lambda_r$ , que l'on peut aisément restituer en utilisant un générateur aléatoire de « bonne » qualité [PRE 92]. La séquence de chargement est alors obtenue en rangeant les contraintes de rupture par ordre croissant et en vérifiant que tout nouveau défaut susceptible de casser ne se trouve pas dans une zone d'exclusion. Le processus continue jusqu'à ce que soient « épuisées » toutes les contraintes de rupture. Cette méthode est très simple à programmer mais est très exigeante en place mémoire puisque toutes les contraintes de rupture doivent être stockées. Asymptotiquement, ce type de méthode tend vers un processus de Poisson ponctuel (cf. par exemple [GRA 90]). La limitation de la méthode est le nombre d'éléments (de l'ordre de  $10^5$  dans notre cas). Les résultats de 10 réalisations par valeurs de module de Weibull analysées sont donnés en tableau 1. La longueur analysée est  $L_{tot} = 10^3 \delta_c$  et les éléments ont une longueur  $dz = 10^{-2} \delta_c$ .

**Tableau 1.** Évolution du nombre de défauts rompus à saturation  $\lambda_b(\infty)$  en fonction du module de Weibull  $m$  à l'aide de différentes méthodes

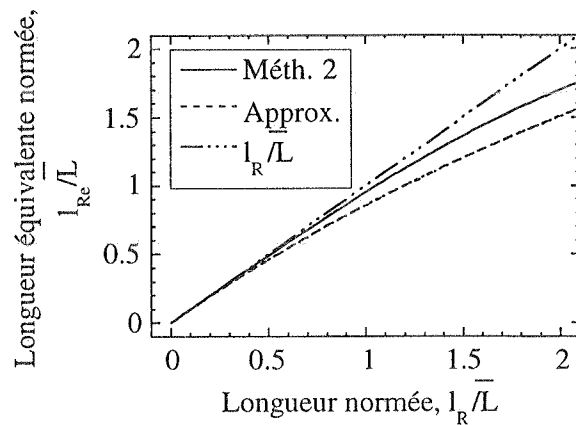
m	Henstenburg <sup>1</sup>	Curtin <sup>2</sup>	Hui <sup>3</sup>	Eq. [21]	Méth. 1	Méth. 2
3	1.03	1.03	1.05	0.92	1.06	1.05
5	1.13	1.15	1.13	0.94	1.14	1.14
10	1.24	1.24	1.24	0.96	1.25	1.24
15	1.29	1.30	1.29	0.98	1.30	1.30
$\infty$	1.49*	1.49*	1.50	1.00	1.48*	1.49*

<sup>1</sup> = [HEN 89], <sup>2</sup> = [CUR 91], <sup>3</sup> = [HUI 95], \* :  $m = 1000$ .

La seconde approche (appelée méthode 2) est moins coûteuse en mémoire mais peut s'avérer plus longue que la précédente lorsque le nombre de défauts analysés croît. En effet, seuls les défauts qui ont cassé sont stockés. Les hypothèses de départ

sont identiques à celles de la méthode précédente ( $L_{tot} = N_{tot} \times dz$ ). La différence provient du fait que le pas de contrainte est calculé de manière à faire rompre, s'il n'est pas dans une zone d'exclusion, un seul défaut. Le pas de contrainte  $\Delta T$  est déterminé de telle manière que :  $dz \frac{\partial \lambda_i}{\partial t(T)} \Delta T = 1$  ; la position de ce nouveau défaut étant tirée à partir d'une fonction uniforme sur la longueur  $L_{tot}$ . Ce défaut cassera effectivement s'il ne se trouve dans aucune zone d'exclusion des défauts déjà rompus. C'est cette condition qui peut s'avérer pénalisante à vérifier si le nombre de défauts déjà cassés devient grand car ce test doit être conduit à chaque fois qu'un nouveau défaut est généré. Asymptotiquement, ce type de méthode tend également vers un processus de Poisson ponctuel (cf. par exemple [GRA 90]). Les résultats de 10 réalisations sont aussi donnés en tableau 1 pour une longueur  $L_{tot} = 10^3 \delta_c$  et des éléments de longueur  $dz = 10^{-3} \delta_c$ .

Les résultats du tableau 1 montrent que les deux méthodes conduisent à des résultats très proches de ceux obtenus par Hui et al. [HUI 95]. Afin d'éviter les effets de bord, des conditions de périodicité sont imposées dans la recherche des zones d'exclusion.



**Figure 6.** Évolution de la longueur équivalente de glissement normée  $l_{Re} / \bar{L}$  en fonction de la longueur de glissement normée  $l_R / \bar{L}$ . Trois méthodes différentes sont utilisées avec  $m = 3$

La figure 6 donne l'évolution de la longueur équivalente de glissement normée  $l_{Re} / \bar{L}$  en fonction de la longueur de glissement normée  $l_R / \bar{L}$  pour un module de Weibull  $m = 3$ . Toutes les trois approches conduisent au même résultat lorsque  $l_R / \bar{L} \ll 1$  :  $l_R \approx l_{Re}$ . Par contre, on observe une divergence lorsque  $l_R / \bar{L}$  croît. On a reporté les résultats d'une réalisation ( $\lambda_b(\infty) = 1.051$ ) avec la méthode 2 (notée Méth. 2), ceux donnés par l'approximation (notée Approx.) d'un processus

poissonien (équation [25]) et enfin ceux pour lesquels on néglige les recouvrements de différentes zones d'exclusion ( $l_{Re} \approx l_R$ ). L'approximation d'un processus poissonien *surestime* le nombre de ruptures et sous-estime la déformation inélastique moyenne  $\bar{\varepsilon}^i$ , donc la longueur équivalente de glissement  $l_{Re}$ . Au contraire, l'égalité  $l_{Re} = l_R$  constitue une borne supérieure car elle ne rend pas compte des recouvrements de zones d'exclusion et *surestime* la longueur équivalente de glissement  $l_{Re}$ .

#### 4. Conclusions

Tous ces résultats montrent que le choix des longueurs équivalentes de fissuration et de glissement égales à la distance moyenne de fissuration et à la longueur moyenne de glissement ne sont valables qu'en première approximation. La signification de la taille d'une cellule élémentaire représentative ainsi que des longueurs à l'intérieur de celle-ci est donc à définir avec précaution. Si l'on veut caractériser la dégradation à partir d'observations microscopiques, une distance moyenne entre fissures, une longueur moyenne de décohésion sont des quantités pertinentes. Par contre, si on veut traduire l'effet de ces distributions aléatoires sur le comportement mécanique, ce sont d'autres éléments de la distribution qui peuvent s'ajouter à ceux que l'on considère assez systématiquement (moyennes, i.e., moments d'ordre un). Les moments d'ordre un constituent une approximation au premier ordre pour les exemples traités ci-dessus. Une étude micromécanique est alors nécessaire pour connaître l'influence exacte associée à chaque distribution.

#### 5. Bibliographie

- [AND 81] Andrieux S., « Un modèle de matériau microfissuré avec frottement », *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, t. 293, 1981, pp. 329-332.
- [AND 86] Andrieux S. et al., « Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches », *J. Méc. Th. Appl.*, Vol. 5, n° 3, 1986, pp. 471-513.
- [AVE 71] Aveston J. et al., « Single and Multiple Fracture », *National Physical Laboratory: Properties of Fiber Composites* (1971), pp. 15-26.
- [BAX 93] Baxevanakis C. et al., « Fracture Statistics of Single-Fiber Composite Specimens », *Comp. Sci. Tech.*, Vol. 48, 1993, pp. 47-56.
- [CHO 91] Cho C. et al., « Estimation of Interfacial Shear in Ceramic Composites from Frictional Heating Measurements », *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 74, n° 11, 1991, pp. 2802-2808.
- [CHR 87] Chrysochoos A., « Dissipation et blocage d'énergie lors d'un écrouissage en traction simple », thèse d'État, Université Montpellier II, 1987.

- [COX 52] Cox H.L., « The Elasticity and the Strength of Paper and other Fibrous Materials », *Br. J. Appl. Phys.*, Vol. 3, 1952, pp. 72-79.
- [CUR 91] Curtin W.A., « Exact Theory of Fiber Fragmentation in Single-Filament Composite », *J. Mater. Sci.*, Vol. 26, 1991, pp. 5239-5253.
- [FEI 94] Feillard P. et al., « Theoretical Aspects of the Fragmentation Test », *Comp. Sci. Tech.*, Vol. 50, 1994, pp. 265-279.
- [GER 83] Germain P. et al., « Continuum Thermodynamics », *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 50, 1983, pp. 1010-1020.
- [GRA 90] Grady D.E., « Particle Size Statistics in Dynamic Fragmentation », *J. Appl. Phys.*, Vol. 68, n° 12, 1990, pp. 6099-6105.
- [GUL 91] Gulino R. et Phoenix S.L., « Weibull Strength Statistics for Graphite Fibres Measured from the Break Progression in a Model Graphite/Glass/Epoxy Microcomposite », *J. Mater. Sci.*, Vol. 26, n° 11, 1991, pp. 3107-3118.
- [HEN 89] Henstenburg R.B. et Phoenix S.L., « Interfacial Shear Strength Studies Using the Single-Filament-Composite Test. Part II: A Probability Model and Monte Carlo Simulations », *Polym. Comp.*, Vol. 10, n° 5, 1989, pp. 389-406.
- [HIL 97] Hild F. et Feillard P., « Ultimate Strength Properties of Fiber-Reinforced Composites », *Rel. Eng. Sys. Saf.*, Vol. 56, n° 3, 1997, pp. 225-235.
- [HUI 95] Hui C.Y. et al., « An Exact Closed Form Solution for Fragmentation of Weibull Fibers in a Single Filament Composite with Applications to Fiber-Reinforced Ceramics », *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 43, n° 10, 1995, pp. 1551-1585.
- [JEU 87] Jeulin D., « Anisotropic Rough Surface Modeling by Random Morphological Functions », *Acta Stereol.*, Vol. 6, 1987, pp. 183-189.
- [JEU 91] Jeulin D., « Modèles morphologiques de structures aléatoires et changement d'échelle », thèse d'État, Université de Caen, 1991.
- [KEL 65] Kelly A. et Tyson W.R., « Tensile Properties of Fiber-Reinforced Metals: Copper/Tungsten and Copper/Molybdenum », *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, 1965, pp. 329-350.
- [LEM 77] Lemaitre J. et Dufailly J., « Modélisation et identification de l'endommagement plastique des métaux », *3<sup>e</sup> congrès français de mécanique* (1977).
- [PRE 92] Press W.H. et al., « *Numerical Recipes in Fortran* », Cambridge University Press, Cambridge, MA (USA), 1992.
- [SER 88] Serra J., « Boolean Random Functions », *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*, Academic Press, London (UK), 1988.
- [SPA 87] Spanier J. et Oldham K.B., « *An Atlas of Functions* », Springer, New York, NY (USA), 1987.
- [WID 66] Widom B., « Random Sequential Addition of Hard Spheres to a Volume », *J. Chem. Phys.*, Vol. 44, n° 10, 1966, pp. 3888-3894.