



**HAL**  
open science

## Fiabilité de matériaux avec défauts en propagation stable

François Hild, Didier Marquis

► **To cite this version:**

François Hild, Didier Marquis. Fiabilité de matériaux avec défauts en propagation stable. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1995, 320, pp.57-62. hal-02342249

**HAL Id: hal-02342249**

**<https://hal.science/hal-02342249>**

Submitted on 31 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fiabilité de matériaux avec défauts en propagation stable

François HILD et Didier MARQUIS

*Résumé* – Dans cette Note, on détermine une expression de la probabilité de rupture d'un élément de volume avec des défauts en propagation stable. Cette expression est obtenue par l'intermédiaire du calcul de l'évolution de la densité de répartition de défauts au cours de la sollicitation.

## Reliability of materials with flaws under stable propagation conditions

*Abstract* – In this Note, an expression of the failure probability of a volume element containing initial flaws under stable propagation condition is given. This expression is obtained by evaluating the evolution of the flaw distribution density during the load history.

*Abridged English Version* – Stable propagation is observed in the case of cyclic, static or dynamic loading conditions applied to brittle or ductile materials (Suresh, 1991). In some cases, propagation is accompanied by crack kinking. For brittle materials or in high cycle fatigue, failure is due to the presence of some initial flaws randomly distributed within the material. To assess the reliability of a volume element, one needs to study the evolution of the failure probability as a function of load level as well as elapsed time.

In section 2, the flaws are supposed randomly distributed within a volume element  $\Omega_0$ , of volume  $V_0$ , and taken into account by a probability density function  $f$ . The initial flaw distribution depends upon morphological parameters denoted by  $w$ . When propagation is unstable, the cumulative failure probability  $P_{F0}(Q)$  of a volume  $\Omega_0$  for a given loading parameter  $Q$  is given in equation (1), where  $\mathcal{D}_c(Q)$  is the set of critical flaws, e.g. the strain energy release rate  $\mathcal{G}(w; Q) \geq \mathcal{G}_c$ . In the case of stable propagation the initial parameters evolve to become  $W$  for a load  $Q$  after an instant  $\tau$ . In particular, bifurcation may occur (see fig. 2) in the case of some plane problems, where  $w = \{a, \underline{n}\}$  and  $W = \{A, \underline{N}\}$ . The quantities  $W$  are supposed to be uniquely related to the initial values  $w$  through functions given in equation (2). At an instant  $\tau$  and a fixed  $Q$ , the failure probability  $P_{F0}(Q, \tau)$  is linked with the flaw density function  $f_\tau$  through equation (3). If no new cracks initiate during the loading,  $f_\tau$  is related to  $f_0$  by equation (4), where  $J$  denotes the Jacobian of the transformation defined in equation (2). This relationship is a generalization of the results derived in the case of a flaw size distribution (Hild, 1991). When more than one parameter is needed,  $J$  characterizes the correlation between the morphological parameters as  $\tau$  evolves. In particular, if the initial parameters are decorrelated,  $J$  gives directly the evolution of their correlation as a function of  $\tau$ . Through equation (4), equation (3) can be written as equation (5), where  $\mathcal{D}_c^*(Q, \tau)$  defines the initial flaws that become critical for  $Q$  and after  $\tau$ . These results can be generalized at a structural level, for instance by assuming that the initial flaws do not interact (Hild, 1990).

In section 3, the propagation condition is given by  $\mathcal{G}(w; Q) \geq \mathcal{G}_{th}$ , where  $\mathcal{G}_{th}$  is a threshold energy release rate. The parameters  $\mathcal{G}_{th}$  and  $\mathcal{G}_c$  enable us to define two load levels  $Q_{th}^1$  (below which no failure at all is possible for a given value of  $P_{F0} = P_{F0}^1$ ) and  $Q_c^1$  (below which no monotonic failure is possible): fig. 1. This result is valid for any value of  $P_{F0}$ , therefore two bounds can be derived. An upper bound  $P_{F0}^U(Q)$ , corresponding to  $\mathcal{G}(w; Q) \geq \mathcal{G}_c$  [equation (6a)], and lower bound  $P_{F0}^L(Q)$ , corresponding to  $\mathcal{G}(w; Q) < \mathcal{G}_{th}$  [equation (6b)]. In the case of high cycle fatigue, equation (6b) gives the values of the fatigue limits for different

probabilities. Furthermore these limits are independent of the crack propagation law. Since  $\mathcal{G}(w; Q)$  is quadratically dependent upon  $Q$ ,  $P_{F0}^L$  and  $P_{F0}^U$  are related by equation (7).

In section 4, a constant failure probability in a  $Q, \tau$  plane is analyzed: it only varies between  $Q_{th}^1$  and  $Q_c^1$  ( $Q_{th}^1 = \sqrt{k} Q_c^1$ ). Equation (5) shows at a constant failure probability depends upon  $f_0$  and the boundaries of  $\mathcal{D}_c^*(Q, \tau)$ . The equation of a constant failure probability is given in equation (8). When  $\tau$  tends to 0,  $Q$  tends to  $Q_c^1$ , and when  $\tau$  tends to  $+\infty$ ,  $Q$  tends to  $Q_{th}^1$ . The curves of figure 1 can be used to determine the load carrying capacity of a volume element for a given instant to failure and a given failure probability.

In section 5, initial flaws are modelled by cracks of size  $a$ , and orientation  $\theta$  (fig. 2). After  $\tau$ , the initial morphological parameters  $a$  and  $\theta$  can evolve to become  $A$  and  $\Theta$ . First, the load is a constant uniaxial stress  $\sigma$ . For the sake of simplicity, as soon as a flaw starts to grow [when  $\mathcal{G}(a, \theta; \sigma) = \mathcal{G}_{th}$ ], it bifurcates and propagates along a direction perpendicular to the maximum principal macroscopic stress direction. The crack growth law given in equation (9) is written in terms of the projected length  $X$ , and refers to laws modelling sub-critical crack growth (Evans, 1972; Evans, 1974) and cyclic phenomena (Paris, 1961). The constants  $C$  and  $n$  are material parameters,  $E$  the Young's modulus and  $Y$  is a dimensionless parameter assumed to be constant. Integration of equation (9) is analogous to equation (2) in the particular case discussed here. Equation (10) corresponds to the generalization of a two-parameter Weibull law (Weibull, 1939) or a Lamon law (Lamon, 1983), and equation (11) to the generalization of a three-parameter Weibull law. In both cases the stress  $\sigma$  when stable propagation does not exist is replaced by  $\sigma \{1 + ((n-2)/2) CY^2 \sigma^2 (E \mathcal{G}_c)^{(n-2)/2} \tau\}^{1/(n-2)}$ . Second, under an equibiaxial stress state  $\sigma$ ,  $\mathcal{G}$  is independent of  $\theta$ . Therefore  $P_{F0}(\sigma, \tau)$  can be related to the marginal size distribution  $\mathcal{F}_0(a)$  through equation (12):  $a_c(\sigma, \tau)$  refers to the initial flaw that becomes critical after an instant  $\tau$  [equation (13)]. A constant failure probability [ $a_c(\sigma, \tau) = \text{const.}$ ] has the same shape as that given in equation (10) and (11). Consequently, within the framework of this section, a constant failure probability taking into account size and orientation is similar to that taking only size into account (Hild, 1994).

1. INTRODUCTION. – Dans le cas de sollicitations cycliques, statiques ou dynamiques, les fissures au sein des matériaux peuvent se propager de manière stable. C'est le cas de matériaux à comportement fragile pour lesquels une propagation stable (ou sous-critique) est observée ou pour des matériaux sous sollicitations cycliques (Suresh, 1991). Cette propagation stable peut s'accompagner d'une bifurcation de la fissure par rapport à son orientation initiale. D'autre part, dans le cas des matériaux à comportement fragile et dans le cas de sollicitations à grand nombre de cycles, la rupture se produit par extension instable de défauts initiaux distribués de manière aléatoire dans le matériau. La fiabilité d'un élément de volume du matériau nécessite l'étude de l'évolution de la probabilité de rupture en fonction du niveau de sollicitation et de la durée de la sollicitation. Dans cette Note, il est proposé d'étudier l'évolution de la probabilité de rupture d'une structure sous condition de propagation stable des défauts initiaux, en fonction de la distribution initiale de défauts.

2. PROBABILITÉ CUMULÉE DE RUPTURE. – On considère un élément occupant un domaine  $\Omega_0$  de volume  $V_0$ , contenant des défauts initiaux répartis suivant une densité de probabilité  $f$ . A l'instant (qui peut désigner soit un nombre de cycles  $N$ , soit une durée  $t$ ) initial  $\tau = 0$ , cette densité  $f_0$  dépend de paramètre(s)  $w$  qui caractérise(nt) la morphologie du

défaut. Dans le cas où la propagation n'est pas prise en compte, la probabilité cumulée de rupture  $P_{F0}$ , de l'élément de volume  $\Omega_0$  pour un chargement  $Q$  fixé, est donnée par

$$(1) \quad P_{F0}(Q) = \int_{\mathcal{D}_c(Q)} f_0(w) dw$$

où  $\mathcal{D}_c(Q)$  est l'ensemble des défauts critiques : par exemple l'ensemble des défauts tels que le taux de restitution d'énergie élastique  $\mathcal{G}(w; Q)$  soit supérieur à une valeur critique  $\mathcal{G}_c$ . Dans le cas de propagation stable, les paramètres morphologiques initiaux  $w$  évoluent pour devenir  $W$  après un instant  $\tau$ . En particulier des bifurcations peuvent avoir lieu et conduire à une évolution non seulement de la taille du défaut mais également de son orientation, voire d'autres paramètres. On se reportera à la figure 2 pour les définitions de  $w = \{a, \underline{n}\}$  et  $W = \{A, \underline{N}\}$  dans un cas particulier schématique de fissures en milieu plan. Les grandeurs  $W$  sont supposées être liées aux grandeurs initiales  $w$  de manière unique par des fonctions de classe  $C^1$  telles que

$$(2) \quad W = \xi(w; Q, \tau)$$

A l'instant  $\tau$  et pour un chargement  $Q$  correspond une probabilité de rupture  $P_{F0}$  liée à la répartition de défauts modélisée par la densité de probabilité  $f_\tau$

$$(3) \quad P_{F0}(Q, \tau) = \int_{\mathcal{D}_c(Q)} f_\tau(W; Q, \tau) dW$$

avec par exemple,  $\mathcal{D}_c(Q) = \{W | \mathcal{G}(W; Q) \geq \mathcal{G}_c\}$ . Si l'on suppose qu'aucun nouveau défaut n'est créé au cours du chargement, c'est-à-dire que seuls les défauts initialement présents conduisent à la rupture, la densité de probabilité  $f_\tau$  est reliée à la densité initiale de probabilité  $f_0$  par

$$(4) \quad f_\tau[\xi(w; Q, \tau)] = J^{-1}(w; Q, \tau) f_0(w)$$

où  $J$  désigne le jacobien de la transformation définie par l'équation (2). Cette relation constitue une généralisation de résultats obtenus dans le cas où la distribution initiale de défauts est décrite par un seul paramètre (Hild, 1991). Dans le cas où plusieurs paramètres sont nécessaires à la modélisation d'un défaut initial, le jacobien  $J$  permet de caractériser la *corrélation* entre les paramètres lors de leur évolution avec  $\tau$ . En particulier, si les paramètres initiaux sont décorrélés, le jacobien  $J$  donnera directement l'évolution de leur corrélation en fonction de  $\tau$ .

Par l'intermédiaire de l'équation (4), la probabilité  $P_{F0}$  après une durée  $\tau$  peut être exprimée uniquement en fonction de la répartition initiale  $f_0$

$$(5) \quad P_{F0}(Q, \tau) = \int_{\mathcal{D}_c^*(Q, \tau)} f_0(w) dw$$

où  $\mathcal{D}_c^*(Q, \tau)$  permet de définir les défauts initiaux qui deviennent critiques après un instant  $\tau$ , par exemple  $\mathcal{D}_c^*(Q, \tau) = \{w | \mathcal{G}[\xi(w; Q, \tau); Q] \geq \mathcal{G}_c\}$ . L'équation (5) montre qu'il n'est pas nécessaire de calculer l'évolution de la distribution de défauts, mais de simplement écrire l'évolution des bornes d'intégration, c'est-à-dire des frontières du domaine  $\mathcal{D}_c^*(Q, \tau)$ . Enfin, la généralisation au cas d'une structure peut, par exemple s'effectuer dans le cadre de l'hypothèse d'indépendance des événements lorsque les défauts

interagissent peu entre eux (Hild, 1990). Dans le reste de cette Note, le chargement même triaxial est supposé simple et caractérisé par le seul paramètre  $Q$ .

3. BORNES DE PROBABILITÉ DE RUPTURE. – Dans ce paragraphe, on suppose l'existence d'un taux de restitution d'énergie seuil  $\mathcal{G}_{th}$ , valeur en dessous de laquelle les défauts ne se propagent pas, quelle que soit leur orientation. Les grandeurs  $\mathcal{G}_{th}$  et  $\mathcal{G}_c$  permettent d'introduire deux niveaux de charge  $Q_{th}$  (en dessous de laquelle aucune rupture n'est possible pour une probabilité de rupture  $P_{F0}$  fixée) et  $Q_c$  (en dessous de laquelle aucune rupture sans propagation stable n'est possible pour  $P_{F0}$  fixée) : fig. 1.

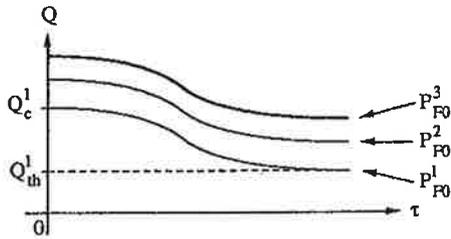


Fig. 1. – Isoprobabilités de rupture pour un élément de volume.  
Fig. 1. – Constant failure probabilities for a volume element.

Ce raisonnement peut être tenu quelle que soit la valeur de la probabilité de rupture  $P_{F0}$ . En conséquence, deux bornes à la probabilité de rupture  $P_{F0}$  peuvent être données. Une borne supérieure,  $P_{F0}^U$ , qui correspond à  $\mathcal{G}(a, \underline{n}, w; Q) \geq \mathcal{G}_c$ , et une borne inférieure,  $P_{F0}^L$ , faisant appel au critère de non propagation  $\mathcal{G}(a, \underline{n}, w; Q) < \mathcal{G}_{th}$ ,

$$(6a) \quad \begin{cases} P_{F0}^U(Q) = \int_{\mathcal{D}_c(Q)} f_0(a, \underline{n}, w) da d\underline{n} dw, \\ \mathcal{D}_c(Q) = \{a, \underline{n}, w \mid \mathcal{G}(a, \underline{n}, w; Q) \geq \mathcal{G}_c\} \end{cases}$$

$$(6b) \quad \begin{cases} P_{F0}^L(Q) = \int_{\mathcal{D}_{th}(Q)} f_0(a, \underline{n}, w) da d\underline{n} dw, \\ \mathcal{D}_{th}(Q) = \{a, \underline{n}, w \mid \mathcal{G}(a, \underline{n}, w; Q) < \mathcal{G}_{th}\} \end{cases}$$

où  $\mathcal{D}_{th}$  est l'ensemble des défauts ne se propageant jamais. L'équation (6b) permet d'obtenir l'évolution des limites d'endurances pour différentes probabilités de rupture. En particulier, ces limites d'endurance sont *indépendantes* de la loi de propagation. Sachant que le taux de restitution d'énergie élastique  $\mathcal{G}(w; Q)$  est une fonction homogène de degré deux du chargement  $Q$ , il existe une relation très simple entre ces deux bornes

$$(7) \quad Q_{th} = \sqrt{k} Q_c, \quad P_{F0}^U(Q) = P_{F0}^L(\sqrt{k} Q), \quad k = \mathcal{G}_{th}/\mathcal{G}_c.$$

4. ISOPROBABILITÉ DE RUPTURE. – Les résultats du paragraphe précédent montrent qu'une isoprobabilité de rupture ( $P_{F0}^1$ ) ne peut varier qu'entre deux bornes de chargement  $Q_{th}^1$  et  $Q_c^1$  ( $Q_{th}^1 = \sqrt{k} Q_c^1$ ). Grâce à l'équation (5), une isoprobabilité de rupture est simplement liée à la densité  $f_0$  et aux bornes du domaine des défauts critiques  $\mathcal{D}_c^*$ . Ainsi l'équation d'une isoprobabilité est donnée par

$$(8) \quad P_{F0}(Q, \tau) = P_{F0}^1$$

A l'aide des bornes précédentes, on en déduit que lorsque  $\tau$  tend vers zéro alors  $Q$  tend vers  $Q_c^1$  et lorsque  $\tau$  tend vers l'infini  $Q$  tend vers  $Q_{th}^1$ . La figure 1 illustre l'utilisation des résultats précédents lors de la conception ou de la maintenance de pièces : le chargement

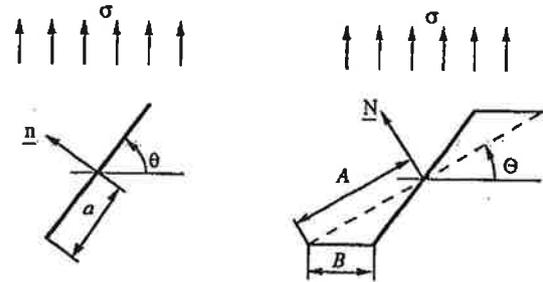
supportable par un élément de volume est alors déduit pour une durée d'usage et une probabilité de rupture fixées. Avec des hypothèses complémentaires (par exemple non interaction entre défauts) la même démarche peut être appliquée à une structure.

5. APPLICATION DANS DEUX CAS SIMPLES. – Dans ce qui suit on suppose que les défauts sont des fissures en milieu plan de taille initiale  $a$  et d'orientation  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ). Après un instant  $\tau$ , la fissure est supposée être caractérisée par  $A$  et  $\Theta$  (fig. 2). On suppose tout d'abord un état de contrainte macroscopique uniaxial caractérisé par une contrainte  $\sigma$ , indépendant du temps. Afin de simplifier les calculs, on suppose que la bifurcation d'une fissure s'effectue lorsque  $\mathcal{G}(a, \theta; \sigma) = \mathcal{G}_{th}$ , et que la direction de propagation est perpendiculaire à la direction de contrainte principale maximale macroscopique. D'autre part, la loi de propagation est supposée être donnée par l'évolution de la longueur projetée  $X = a \cos \theta + B$  de la fissure (fig. 2)

$$(9) \quad \frac{dX}{d\tau} = CY^n \sigma^n X^{n/2}, \quad E \mathcal{G}_{th} \leq Y^2 \sigma^2 X < E \mathcal{G}_c$$

où  $C$  et  $n$  sont des paramètres du matériau,  $E$  le module d'Young et  $Y$  est un facteur de forme de la fissure supposé constant; cette hypothèse simplificatrice permet de mener analytiquement les calculs suivants. Cette loi permet de modéliser les phénomènes de fissuration sous-critique (Evans, 1972; Evans, 1974) ainsi que les phénomènes de sollicitations cycliques (Paris, 1961). L'intégration de l'équation (9) correspond à l'équation (2) dans le cas particulier considéré.

Fig. 2. – Fissure initiale ( $a, \theta$ ) et fissure après propagation ( $A, \Theta$ ).  
Fig. 2. – Initial crack ( $a, \theta$ ) and crack after propagation ( $A, \Theta$ ).



Dans le cas où  $f_0(a, \theta) = (2/\pi) f_0(a)$ , et que  $f_0(a)$  peut être approximée par  $\kappa p a^{-p-1}$  au voisinage des grandes tailles de défauts, la probabilité de rupture  $P_{F0}$  est donnée par

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{F0}(\sigma, \tau) = \left(\frac{\sigma}{S_0}\right)^{2p} \left\{ 1 + \frac{n-2}{2} CY^2 \sigma^2 (E \mathcal{G}_c)^{(n-2)/2} \tau \right\}^{2p/(n-2)} I_p \\ I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^p \theta d\theta, \quad S_0 = \frac{\sqrt{E \mathcal{G}_c}}{Y} \kappa^{-1/2p} \end{array} \right.$$

Ce résultat correspond à une généralisation d'une loi de Weibull à deux paramètres (Weibull, 1939) ou de Lamon (Lamon, 1983) dans le cas particulier envisagé. Dans le cas où  $f_0(a)$  peut être approximée par  $\kappa (\beta + 1/2) (a_M - a)^{\beta-1}$  au voisinage d'une taille maximale de défaut bornée  $a_M$ , la probabilité de rupture  $P_{F0}$  est donnée par

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{F0}(\sigma, \tau) \\ = \left( \frac{\sigma \left\{ 1 + ((n-2)/2) CY^2 \sigma^2 (E \mathcal{G}_c)^{(n-2)/2} \tau \right\}^{1/(n-2)} - S_u}{S_0} \right)^{\beta+1/2} \\ S_u = \frac{\sqrt{E \mathcal{G}_c}}{Y \sqrt{a_M}}, \quad S_0 = \frac{S_u}{2} \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}\kappa} \right)^{1/(\beta+1/2)} \end{array} \right.$$

Les équations (10) et (11) sont similaires à des résultats obtenus sans propagation stable (Hild, 1990). Le seul changement est donné par la contrainte considérée qui est  $\sigma \{ 1 + ((n-2)/2) CY^2 \sigma^2 (E G_c)^{(n-2)/2} \tau \}^{1/(n-2)}$  à la place de  $\sigma$ .

Dans le cas d'un état de contrainte équibiaxial, caractérisé par une contrainte  $\sigma$ , aucune bifurcation n'a lieu ( $G$  est indépendant de  $\theta$ , d'où  $\theta = \Theta$ ). D'autre part, la loi de propagation ainsi que les critères d'amorçage et de rupture sont indépendants de l'orientation  $\theta$ . La probabilité de rupture  $P_{F0}$  fait alors référence à la distribution marginale de taille  $\mathcal{F}_0(a)$

$$(12) \quad P_{F0}(\sigma, \tau) = \int_{a_c(\sigma, \tau)}^{+\infty} \mathcal{F}_0(a) da, \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_0(a) = \int_0^{\pi/2} f_0(a, \theta) d\theta$$

La taille  $a_c(\sigma, \tau)$  correspond à la taille initiale de défaut qui devient critique après un instant  $\tau$

$$(13) \quad a_c(\sigma, \tau) = \left( \frac{E G_c}{Y^2 \sigma^2} \right) \left[ 1 + \frac{n-2}{2} CY^2 \sigma^2 (E G_c)^{(n-2)/2} \tau \right]^{2/(n-2)}$$

Dans ce cas, l'équation d'une isoprobabilité de rupture [ $a_c(\sigma, \tau) = \text{Cte}$ ] est de forme identique à celle donnée dans les équations (10) et (11).

En conséquence, en utilisant les hypothèses simplificatrices de ce paragraphe, l'équation d'une isoprobabilité de rupture qui tient compte de la taille et de l'orientation et celle où on ne tient compte que de la distribution en taille (Hild, 1994) est similaire.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- A. G. EVANS, A Method for Evaluating the Time-Dependent Failure Characteristics of Brittle Materials – and its Application to Polycrystalline Alumina, *J. Mat. Sci.*, 7, 1972, p. 1137-1146.
- A. G. EVANS et S. M. WIEDERHORN, Crack Propagation and Failure Prediction in Silicon Nitride at Elevated Temperature, *J. Mat. Sci.*, 9, 1974, p. 270-278.
- F. HILD et D. MARQUIS, Corrélation entre la distribution des défauts et la distribution de la contrainte à rupture pour des matériaux à comportement fragile, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, 1990, p. 573-578.
- F. HILD et D. MARQUIS, Monotonic and Cyclic Rupture of a Silicon Nitride Ceramic, Life Prediction Methodologies and Data for Ceramic Materials (ASTM STP 1201), *American Society for Testing and Materials*, 1994, p. 112-126.
- F. HILD et S. ROUX, Fatigue Initiation in Heterogeneous Brittle Materials, *Mech. Res. Comm.*, 18, (6), 1991, p. 409-414.
- J. LAMON et A. G. EVANS, Statistical Analysis of Bending Strengths for Brittle Solids: a Multiaxial Fracture Problem, *J. Am. Ceram. Soc.*, 66, 1983, p. 177-182.
- P. C. PARIS *et al.*, A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, *The Trend in Engineering*, 13, 1961, p. 9-14.
- S. SURESH, *Fatigue of Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- W. WEIBULL, A Statistical Theory of the Strength of Materials, *Royal Swed. Inst. for Eng. Res.*, 151, 1939.