



HAL
open science

On the Average Pull–Out length of Fiber–Reinforced Composites

François Hild

► **To cite this version:**

François Hild. On the Average Pull–Out length of Fiber–Reinforced Composites. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II, 1994, 319, pp.1123-1128. hal-02342217

HAL Id: hal-02342217

<https://hal.science/hal-02342217>

Submitted on 31 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

On the Average Pull–Out Length of Fiber–Reinforced Composites

François HILD

Note présentée par André ZAOUÏ

Abstract - In this Note, an expression of the average pull-out length is established when the length of a representative element varies with the external load. This expression is derived from a study of fracture locations generalized to varying lengths, and can be used to determine ultimate strengths of fiber–reinforced composites.

Sur la longueur moyenne d'extraction pour des composites à fibres longues

Résumé - Dans cette Note, une expression de la longueur moyenne d'extraction est obtenue lorsque la longueur d'un élément représentatif varie avec le chargement. Cette expression correspond à une généralisation des lieux de rupture dans le cas d'une longueur variable. Le résultat peut être utilisé dans le calcul de résistance de composites à fibres longues.

Version française abrégée - Le phénomène d'extraction, ou de pull-out [Thouless, 1988], qui accompagne souvent la rupture de composites à fibres longues différencie un composite à matrice céramique (CMC) d'un faisceau de fibres parallèles [Daniels, 1945]. L'extraction est produite par le glissement d'une fibre rompue par rapport à la matrice, et est caractérisé par une contrainte critique de glissement τ à l'interface. Le calcul de la résistance des CMC nécessite la connaissance de la longueur moyenne d'extraction et une étude dans laquelle la longueur de l'élément représentatif varie avec la charge appliquée.

On considère un élément de composite de longueur $2L_R$ (Fig. 1) , où L_R est appelée longueur de transfert et correspond à la longueur maximale d'une fibre qui peut être arrachée et conduire à une diminution de charge par rapport au cas où elle ne serait pas rompue. La contrainte de référence T , contrainte des fibres non rompues dans un plan de référence Π_R d'une fissure matricielle ($z=0$), est la contrainte longitudinale maximale dans le composite. On suppose que la fissuration matricielle est saturée. Dans le cas où les fissures matricielles sont traversantes et lorsqu'une fibre rompt, la charge qu'elle supportait est également distribuée sur toutes les fibres non rompues (partage global d'effort). Enfin, une fibre ne peut rompre qu'une seule fois à l'intérieur de la zone de transfert. Dans toute cette Note, le champ de contrainte le long de la fibre, $\sigma(T,z)$, est supposé symétrique par rapport à $z=0$. Lorsque τ est constante, la longueur de transfert est donnée par (1), où R est le rayon des fibres et $2L$ la longueur totale des fibres. Sous l'hypothèse de partage global d'effort, la contribution des fibres rompues à $z=0$ en terme de contrainte d'extraction $\bar{\sigma}_{po}(T)$ est exprimée en (2), où f est la fraction volumique de fibres, $\bar{\sigma}_p(t)$ est la contrainte moyenne à $z=0$ de toutes les fibres rompues à une cote $|z| \leq L_R(t)$ pour une contrainte de référence t , et une probabilité de rupture $P_F(t,L_R(t))$ d'un élément de longueur $2L_R(t)$ pour une contrainte de référence inférieure ou égale à t . En tension, la densité de probabilité de lieux de rupture est uniforme, donc $\bar{\sigma}_p(t) = t / 2$. Par contre, lorsque le champ de contrainte n'est pas uniforme le long de la fibre, le résultat précédent ne s'applique pas, et il faut déterminer la distance moyenne de rupture par rapport à $z=0$ pour estimer la valeur de la contrainte d'extraction. En effet, la contrainte appliquée au composite en $z=0$ est donnée par (3). Le premier terme correspond à la contribution des fibres non rompues, le second terme à la contrainte d'extraction $\bar{\sigma}_{po}(T)$ où $\langle h(T) \rangle$ représente la longueur moyenne d'extraction (LME) pour une contrainte de référence égale à T .

Sous l'hypothèse du maillon le plus faible et d'indépendance des événements, la probabilité cumulée de rupture $P_F(T,L_R(T))$ d'un élément de fibre de longueur $2L_R < 2L$ est écrite en (4). La quantité $P_{F0}(T,z)$ représente la probabilité cumulée de rupture d'un maillon de longueur L_0 dont le plan médian est situé à la cote z . A cet élément, on peut associer la

densité de probabilité de rupture (5.1) et récrire la probabilité cumulée de rupture (5.2). La fonction $\Phi(T,z)$ correspond à la densité de probabilité de rupture d'un élément à la cote z lorsque la contrainte de référence varie de T à $T + dT$ (6.1), et la fonction $\Psi(T)$ à la densité de probabilité de rupture liée à l'augmentation de longueur de transfert de $L_R(T)$ à $L_R(T) + L'_R(T) dT$ (6.2). Lorsque L_R est indépendante de T , ou lorsque $P_{F0}(T,L_R(T)) = 0$, les résultats de [Thouless, 1988; Oh, 1970] s'appliquent. Par analyse dimensionnelle et en utilisant (5.2), la moyenne $\langle h(T) \rangle$ des lieux de rupture $h(T)$ d'un composite de longueur $2L_R(T)$ est donnée par (7), où α est une constante. En tension, à l'aide de (2), (5) et (7), il n'est pas nécessaire d'explicitier la distribution des lieux de rupture, et on trouve $\alpha = 1/2$. Le premier terme de (7) est identique à celui donné dans [Thouless, 1988; Sutcu, 1989]. Le second terme est dû à la dépendance de la longueur de transfert avec T . L'expression (7) ne prend pas en compte les fibres qui ont cassé hors de la zone de transfert et qui lors d'une augmentation de la charge se trouvent à l'intérieur de la zone de transfert. Cette approximation est la plus importante dans le cas d'un champ de contrainte constant sur $2L_R$ (tension). Dans ce cas, il a été montré que l'approximation n'est pas très pénalisante [Hild, 1994].

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour calculer la LME. On suppose que la probabilité de rupture est modélisée par une loi de Weibull à deux paramètres m et S_0 [Weibull, 1939]. Pour une sollicitation de tension, la LME est donné par (8), où S_c représente la résistance caractéristique, et $\gamma\{.,.\}$ la fonction Gamma incomplète. La résistance ultime d'un composite est déterminée par la condition (9), et est proportionnelle à fS_c lorsque $L_R < L$ au point ultime. Ces résultats sont appliqués à une matrice LAS renforcée par des fibres en SiC [Jansson, 1993]. En flexion, le comportement en compression est supposé élastique avec un module d'Young égal à celui du composite, E_c . En tension, le comportement est non linéaire (rupture et extraction de fibres) et le module d'Young est égal à celui de la fraction volumique des fibres fE_f (à cause de la présence des fissures matricielles). Les résultats sont donnés dans le Tableau 1 et sont raisonnablement prévus. Les contraintes ultimes en flexion sont les contraintes apparentes élastiques.

1. Introduction - A feature that distinguishes Ceramic–Matrix Composites (CMC's) from a classical dry fiber bundle [Daniels, 1945] is that fiber breakage is usually accompanied with fiber pull–out [Thouless, 1988] characterized by an interfacial sliding resistance τ . This latter is due to frictional sliding that occurs as the broken ends of the fiber pull out of the matrix. To determine the ultimate strength of a CMC, one needs to determine the average pull–out length as a function of the load level in the fiber. This Note is devoted to establishing an expression of the average pull–out length.

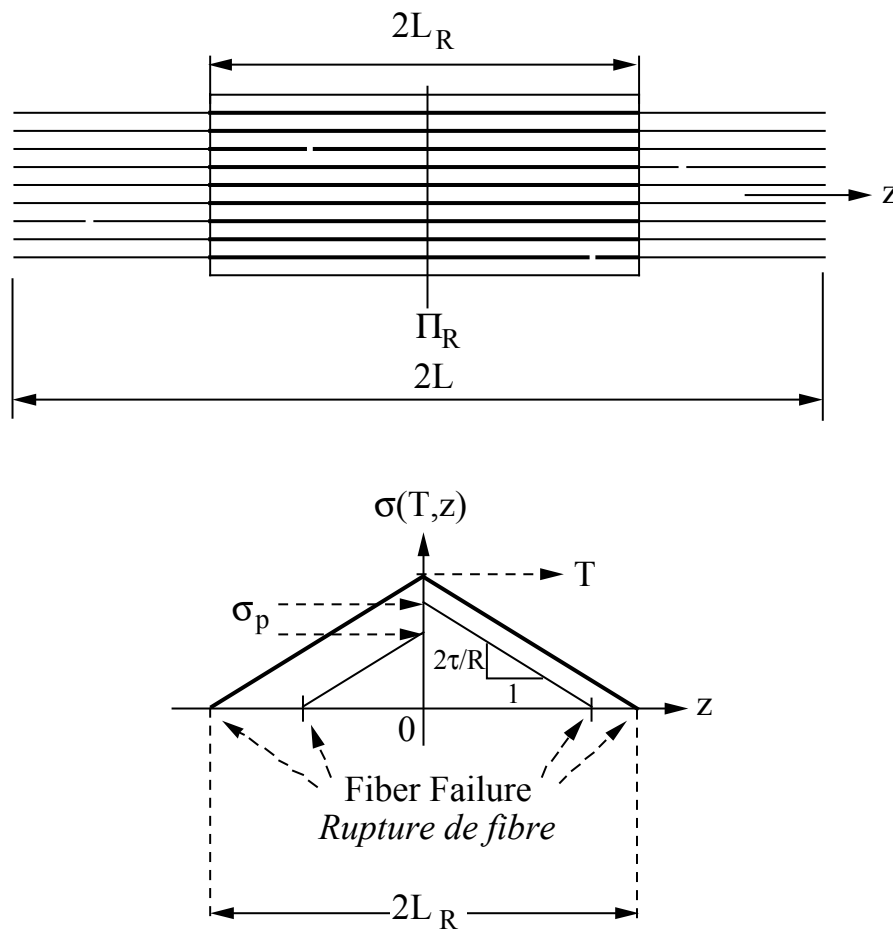


Figure 1.

The cell length is denoted by $2L_R$ (Fig. 1), where L_R is called recovery length, and refers to the longest fiber that can be pulled out and cause a reduction in load carrying capacity. The reference stress T , which corresponds to the stress in the unbroken fibers at a reference plane Π_R ($z=0$) of one of the matrix cracks, is the maximum longitudinal fiber stress. The matrix

cracking process is supposed to be saturated. It is assumed that if a fiber breaks, it equally shares the load among all the unbroken neighboring fibers (global load sharing), i.e. the matrix cracks traverse the whole composite. Within the recovery length it is assumed that a fiber breaks at most one time.

Throughout this Note, the longitudinal stress field, $\sigma(T,z)$, is assumed to be symmetric about $z=0$. When the interfacial sliding resistance is assumed constant, the recovery length, $L_R(T)$, is given by

$$(1) \quad L_R(T) = \frac{RT}{2\tau} \quad \text{if } L_R(T) < L$$

where R is the fiber radius and $2L$ the total composite length (Fig. 1). The contribution of the broken fibers within the recovery length or pull-out stress, $\bar{\sigma}_{po}$, at $z=0$ is written as

$$(2) \quad \bar{\sigma}_{po}(T) = f \int_0^T \bar{\sigma}_p(t) \frac{dP_F(t, L_R(t))}{dt} dt$$

where f is the fiber volume fraction, $\bar{\sigma}_p(t)$ the average stress at $z=0$ when a fiber breaks at a location z , and at a reference stress level t , and $P_F(t, L_R(t))$ is the failure probability that a fiber break within the recovery length L_R at or below a reference stress t (Fig. 1). In tension, the probability density of fracture locations is uniform, therefore $\bar{\sigma}_p(t) = t / 2$. On the other hand, when the stress field along the fiber direction is not homogeneous, the previous result does not apply, and one needs to determine the average fracture location to estimate the pull-out stress. The average stress applied to the composite at the plane $z=0$, $\bar{\sigma}$, is given by

$$(3) \quad \frac{\bar{\sigma}}{f} = T \{ 1 - P_F(T, L_R(T)) \} + \frac{2\tau}{R} \langle h(T) \rangle P_F(T, L_R(T))$$

The first term of the right hand side of Eqn. (3) corresponds to the contribution of the unbroken fibers, and the second term is the pull-out stress $\sigma_{po}^-(T)$. The quantity $\langle h(T) \rangle$ represents the average pull-out length, or average fracture location in $2L_R(T)$ when the reference stress is less than or equal to T .

2. Average Fracture Locations - Under the weakest link assumption and the independent events hypothesis, the cumulative failure probability $P_F(T, L_R(T))$ of a piece of fiber of length $2L_R(T)$ is given by

$$(4) \quad P_F(T, L_R(T)) = 1 - \exp \left[\frac{2}{L_0} \int_0^{L_R(T)} \ln \{ 1 - P_{F0}(T, z) \} dz \right]$$

where $P_{F0}(T, z)$ denotes the cumulative failure probability of a single link of length L_0 whose mid-section is located at z . The failure probability density is obtained by differentiation of Eqn. (4) with respect to T

$$(5.1) \quad \frac{dP_F(T, L_R(T))}{dT} = 2 \int_0^{L_R(T)} \Phi(T, z) dz + 2 \Psi(T)$$

and therefore

$$(5.2) \quad P_F(T, L_R(T)) = \int_0^T 2 \left\{ \int_0^{L_R(t)} \Phi(t, z) dz + \Psi(t) \right\} dt$$

where $\Phi(T, z)$ corresponds to the failure probability density for a reference stress varying between T and $T + dT$, of an element of length dz centered at z , and $\Psi(T)$ is the failure probability density associated with the length increase from $L_R(T)$ to $L_R(T) + L'_R(T) dT$.

The first term is identical to that given in [Thouless, 1988; Oh, 1970] when using a Weibull law, the second term is due to the load dependence of the recovery length L_R . The expressions of the functions Φ and Ψ are respectively given by

$$(6.1) \quad \Phi(T,z) = - \left\{ 1 - P_F(T, L_R(T)) \right\} \frac{1}{L_0} \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \left\{ 1 - P_{F0}(T,z) \right\} \right)$$

$$(6.2) \quad \Psi(T) = - \left\{ 1 - P_F(T, L_R(T)) \right\} \frac{L'(T)}{L_0} \ln \left\{ 1 - P_{F0}(T, L_R(T)) \right\}$$

When L_R is independent of T , or $P_{F0}(T, L_R(T))$ vanishes, $\Psi(T)$ vanishes as well, and the results given in [Thouless, 1988] still apply in the case of a Weibull law .

By dimensional analysis and by inspection of Eqn. (5.2), the average $\langle h(T) \rangle$ of the fracture location $h(T)$ for a piece of composite of length $2L_R(T)$ at a reference stress T is

$$(7) \quad \langle h(T) \rangle = \frac{1}{P_F(T; L_R(T))} \int_0^T 2 \left\{ \int_0^{L_R(t)} z \Phi(t,z) dz + \alpha L_R(t) \Psi(t) \right\} dt$$

where α is a constant. The first term is identical to that given in [Thouless, 1988; Sutcu, 1989]. The second term is due to the load dependence of the recovery length. In tension, by using Eqns. (2), (5) and (7), there is no need to know the exact expression of the fracture location distribution, and one obtains $\alpha = 1/2$. This expression of the average fracture location does not consider the fibers that originally broke outside the recovery length but were brought into it as the load level increased. The approximation made here is the worst when the stress field is constant over the whole length (i.e. pure tension). In that case however, it has been shown that this hypothesis is not very strong [Hild, 1994].

3. Average Pull-Out Length - In the following, we assume that the cumulative failure probability is modeled by a two-parameter Weibull law [Weibull, 1939]: m denotes the shape parameter and S_0 the scale parameter. In pure tension, the pull-out stress becomes

$$(8) \quad \bar{\sigma}_{po}(T) = \frac{fS_c}{2} \gamma \left\{ \frac{m+2}{m+1}, \left(\frac{T}{S_c} \right)^{m+1} \right\}$$

where S_c denotes the characteristic strength ($S_c^{m+1} = S_0^m L_0 \tau/R$), and $\gamma\{.,.\}$ the incomplete Gamma function.

4. Application - To determine the ultimate strength of a fiber-reinforced composite, the following condition has to be satisfied at the most loaded point(s) in tension

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} = 0$$

since the average strain is proportional to the reference stress T . It is worth noting that the ultimate strength is scaled by fS_c provided $L_R < L$ at the ultimate. In the following we compare the predictions given by the previous results to experimental data on CMC's subjected to tension, four-point flexure, and three-point flexure. In flexure it is assumed that the behavior in compression is elastic and the Young's modulus is equal to the Young's modulus of the composite, E_c . In tension, the behavior is non-linear (fiber breakage and fiber pull-out) and the Young's modulus is that of the fiber volume fraction, fE_f because of the presence of matrix cracks. The comparison concerns a Lithium Alumino-Silicate (LAS) matrix reinforced by unidirectional SiC fibers [Jansson, 1993]. The predictions are summarized in Table 1, in flexure the stresses correspond to the apparent elastic stresses.

Strength (MPa)	Tension	4-Point Flexure	3-Point Flexure	
Experiments	790	1050	1180	<i>Expériences</i>
Predictions	850	1080	1090	<i>Prévisions</i>
	<i>Tension</i>	<i>Flexion 4 points</i>	<i>Flexion 3 points</i>	<i>Résistance (MPa)</i>

Table 1.

The agreement between the predictions and the experiments is quite good. One source of discrepancy is given by the hypothesis that the matrix cracking stress is equal to zero.

References

M.D. THOULESS and A.G. EVANS, Effects of Pull-Out on the Mechanical Properties of Ceramic-Matrix Composites, *Acta Metal.*, 36 (3), 1988, pp. 517-522.

H.E. DANIELS, The Statistical Theory of the Strength of Bundles of Threads, *Proc. R. Soc. London. A*, 183, 1945, pp. 405-429.

H.L. OH and I. FINNIE, On the Location of Fracture in Brittle Solids-I Due to Static Loading, *Int. J. Frac. Mech.*, 6 (3), 1970, pp. 287-300.

M. SUTCU, Weibull Statistics Applied to Fiber Failure in Ceramic Composites and Work of Fracture, *Acta Metall. Mech.*, 37 (2), 1989, pp. 651-661.

F. HILD, J.-M. DOMERGUE, F.A. LECKIE and A.G. EVANS, Tensile and Flexural Ultimate Strength of Fiber Reinforced Ceramic-Matrix Composites, *Int. J. Solids Struct.*, 31 (7), 1994, pp. 1035-1045.

W. WEIBULL, A Statistical Theory of the Strength of Materials, *Royal Swed. Inst. for Eng. Res.*, 151, 1939.

S. JANSSON and F.A. LECKIE, The Mechanics of Failure of Silicon Carbide Fiber-Reinforced Glass-Matrix Composites, *Acta Metall.*, 40 (11), 1993, pp. 2967-2978.

Figure caption

Figure 1: Elementary cell and stress field in broken and unbroken fibers.

Figure 1: Cellule élémentaire et contraintes dans les fibres rompues et non rompues.

Table 1: Comparison between predictions and experimental data on a LAS matrix reinforced by unidirectional SiC fibers ($f=0.5$, $S_c = 2500$ MPa, $R=7.5$ μm , $\tau=5$ MPa, $fE_f / E_c = .62$, $m=4$).

Tableau 1: Comparaison entre prévisions et expériences sur une matrice LAS renforcée par des fibres unidirectionnelles en SiC.

Rédacteur : François HILD
Laboratoire de Mécanique et Technologie
E.N.S. Cachan / C.N.R.S. / Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson
F-94235 CACHAN Cedex.