



**HAL**  
open science

# Hétérogénéité des contraintes et rupture des matériaux fragiles

François Hild, René Billardon, Didier Marquis

► **To cite this version:**

François Hild, René Billardon, Didier Marquis. Hétérogénéité des contraintes et rupture des matériaux fragiles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie II, 1992, 315, pp.1293-1298. hal-02342204

**HAL Id: hal-02342204**

**<https://hal.science/hal-02342204>**

Submitted on 31 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Hétérogénéité des contraintes et rupture des matériaux fragiles**

François HILD, René BILLARDON et Didier MARQUIS

Note présentée par André ZAOUI

**Résumé :** Dans cette note, on introduit différents facteurs qui permettent de rendre compte de l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la moyenne des contraintes à rupture de structures en matériaux à comportement élastique fragile. On propose d'utiliser  $H_1$ , le moment d'ordre 1 associé à la répartition des contraintes dans une structure, comme facteur d'hétérogénéité des contraintes.

### **Stress Heterogeneity versus Failure of Brittle Materials**

**Abstract :** In order to model the effect of the stress heterogeneity on the mean failure stress of structures made of brittle materials, different factors are introduced. For practical purposes, it is proposed to use the first order moment associated with the stress distribution,  $H_1$ , as a stress heterogeneity factor.

**Abridged English version :** Initiation on pre-existing defects is the main failure mechanism of brittle materials. Since these defects are in general randomly distributed within the structure, the more heterogeneous the stress field, the lower the probability for a critical defect to be located in a part of the structure which is subjected to high stresses. Hence, under monotonic loadings, the mean failure stress measured for brittle materials generally depends on the type of test performed.

The solid considered in section 2 occupies the domain  $\Omega$  of volume  $V_\Omega$ . It is assumed that the local stress state at any point P is characterized by an equivalent stress denoted by  $\|\sigma\|$  which satisfies Equ. (1). If the cumulative failure probability  $P_F$  of a structure  $\Omega$  (3) satisfies the so-called weakest link and independence of events assumptions, its expression is related to the cumulative failure probability  $P_{F0}$  of a single link of volume  $V_0$  (2) by Equ. (4), where  $\sigma_{cr}$  stands for the critical failure stress of the considered link. The cumulative failure probability  $P_{F0}$  is related to the critical

defect size  $a_c$  and the defect size density  $f$  by Equ. (5) [3]. If Equ. (6) is satisfied ( $\alpha_n$  and  $\sigma_0$  denote constants independent of point P), Equ. (7) and (9) show that *the set of stress heterogeneity factors  $H_n$  defined by relation (8) models the effect of the heterogeneity of the stress field on the cumulative failure probability  $P_F$ , on the mean failure stress  $\bar{\sigma}_{max}$ , and on a generalized expression of the so-called effective volume  $V_{eff}$  [4].*

Besides, the part of the domain such that  $\|\sigma\| \leq \sigma$  is denoted by  $\Omega_\sigma$  of volume  $V_\sigma$ . A function  $G(\sigma)$  and its density  $g(\sigma)$  associated to this volume are defined by Equ. (10) and (11). The stress heterogeneity factors are then identical to the *normalized moments of order  $n \in \mathbb{N}^*$*  associated to the density  $g$  and defined by Equ. (12).

If only one constant  $\alpha_i$  is different from 0 and is supposed to be equal to 1, relations (7) and (9) take the form of relations (14). *If the failure behaviour of the considered solid can be modelled by a Weibull law [5], the cumulative failure probability  $P_F$  satisfies relations (15), and relations (14) remain valid with  $i=m \in \mathbb{R}^+ *$*  ( $m$ ,  $\sigma_0$  and  $V_0$  denote the Weibull parameters which are solely material dependent, and  $\sigma_w$  denotes the so-called Weibull stress [6]). *In this case, the normalized moment  $H_m$  models the effect of the heterogeneity of the stress field on the cumulative failure probability, and on the mean failure stress. It also gives a measure of the effective volume  $V_{eff}$  [4]. This factor is referred to as the "Weibull stress heterogeneity factor".*

Two different equivalent stresses are introduced in section 3 by relations (18) and (19). Since the tensile stresses are the prominent driving force for the failure of brittle materials, these equivalent stresses are related to the positive stress tensor  $\sigma^+$  and to its first two invariants which are defined by relations (16) and (17).

Depending on the equivalent stress used for their evaluation, the normalized moments of order  $n$  are denoted by  $(H_n)_I$  or  $(H_n)^*$ . Their respective values, for  $n$  equal to 1 and 2, have been calculated for various specimens subjected to different loadings and are reported with the mean failure stress which has been experimentally measured for a concrete [1] and for a silicon nitride [2] : see tables 1 and 2. *For these cases, the relative variations of  $H_1$  and  $H_2$  are similar and the factor  $H_1$  is sufficient to qualitatively model the effect of the heterogeneity of the stress field on the mean failure stress.*

Relations (21) give the values of  $H_1(k)$  and  $H_2(k)$  for tubes subjected to internal pressure and of different ratios  $k = r_2 / r_1$ , where  $r_1$  and  $r_2$  denote the internal and the external radii, respectively. As shown in table 3, the ratio  $k$  can be adjusted to obtain for values of  $H_1$  identical to the values reported in tables 1 and 2 for other types of structures, different values of  $H_2$ . Hence, this test appears as a suitable candidate for the measure of the influence of moments of higher order.

## 1- INTRODUCTION.

Sous chargement monotone croissant, les matériaux à comportement fragile présentent en général, pour un critère de rupture donné, des moyennes de contraintes critiques de rupture qui dépendent du type de sollicitation (cf par exemple les résultats expérimentaux donnés dans les tableaux 1 et 2, obtenus sur un béton [1], et sur une céramique massive [2]). Cet effet est dû au mécanisme de rupture de ces matériaux par amorçage sur des défauts initiaux : ces défauts étant en général statistiquement distribués dans toute la structure, plus l'état de contrainte est hétérogène, plus la probabilité de trouver un défaut critique dans une région fortement sollicitée diminue.

Dans cette note, il est proposé de caractériser globalement l'effet de l'hétérogénéité des contraintes à l'intérieur d'une structure par des *facteurs* dits *d'hétérogénéité des contraintes* et de corrélérer ces facteurs aux contraintes critiques de rupture de la structure.

## 2- DESCRIPTION DE L'HETEROGENEITE D'UN CHAMP DE CONTRAINTES.

a) *Facteurs d'hétérogénéité des contraintes.*- La notion de contrainte utilisée ici est définie à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique des milieux continus (i.e. "maillon" élémentaire). On considère une structure occupant le domaine  $\Omega$  de volume  $V_{\Omega}$ . On caractérise en chaque point P de  $\Omega$  l'état de contrainte  $\sigma$  par une contrainte équivalente, égale à une semi-norme notée  $\|\sigma\|$  et on fait l'hypothèse suivante :

$$(1) \quad \sigma_{\max} + \text{Max}_{\Omega} \|\sigma\| \neq 0$$

On peut remarquer que cette contrainte équivalente est finie tant qu'il n'y a pas rupture à l'échelle macroscopique (alors que les contraintes microscopiques peuvent être infinies au voisinage immédiat d'un défaut). On note la probabilité cumulée de rupture d'une cellule (maillon) élémentaire de volume  $V_0$  par :

$$(2) \quad P_{F0} = P_{F0}(\|\sigma\|) + P(\sigma_{cr} \leq \|\sigma\|)$$

où  $\sigma_{cr} \in \mathbb{R}^+$  représente la contrainte critique de rupture du maillon élémentaire, et la probabilité cumulée de rupture de la structure  $\Omega$  par :

$$(3) \quad P_F = P_F(\sigma_{\max})$$

En faisant l'hypothèse que la probabilité cumulée de rupture  $P_F$  vérifie l'hypothèse du maillon le plus faible et l'indépendance des événements :

$$(4) \quad P_F = 1 - \exp \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{V_0} \ln (1 - P_{F0}) dV \right]$$

D'autre part, la probabilité de rupture d'un maillon est la probabilité de trouver un défaut de taille supérieure à la taille critique  $a_c$  obtenue à partir du critère ( $\sigma_{cr} \leq \| \sigma \|$ ) :

$$(5) \quad P_{F0} = \int_{a_c}^{+\infty} f(a) da$$

où la répartition de défauts est caractérisée par une densité de probabilité  $f$ . La taille critique  $a_c$  est directement reliée au critère de rupture caractéristique du matériau ainsi qu'à la modélisation des défauts [3]. Ainsi de manière générale, on peut supposer que :

$$(6) \quad \ln (1 - P_{F0}) = - \sum_{n \geq 1} \alpha_n \left( \frac{\| \sigma \|}{\sigma_0} \right)^n$$

où les constantes  $\alpha_n$  et  $\sigma_0$  sont directement fonction de la modélisation adoptée ainsi que de la distribution initiale de défauts (cause de la rupture). La probabilité cumulée de rupture  $P_F$  de la structure  $\Omega$  peut alors s'écrire :

$$(7a) \quad P_F = 1 - \exp \left[ - \frac{V_{\Omega}}{V_0} \sum_{n \geq 1} \alpha_n H_n ( \sigma_{\max} / \sigma_0 )^n \right]$$

et la moyenne des contraintes de rupture est donnée par :

$$(7b) \quad \bar{\sigma}_{\max} = \int_0^{+\infty} \frac{V_{\Omega}}{V_0} \left\{ \sum_{n \geq 1} \alpha_n H_n \left( \sigma_{\max} / \sigma_0 \right)^n \right\} \exp \left[ - \frac{V_{\Omega}}{V_0} \sum_{n \geq 1} \alpha_n H_n \left( \sigma_{\max} / \sigma_0 \right)^n \right] d\sigma_{\max}$$

où les facteurs  $H_n$  sont donnés par :

$$(8) \quad H_n = \left[ \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} \|\sigma\|^n dV \right] / \sigma_{\max}^n \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

En notant qu'en élasticité linéaire le rapport  $\|\sigma\| / \sigma_{\max}$  est indépendant de  $\sigma_{\max}$ , les facteurs  $H_n$  sont indépendants du niveau de chargement. En revanche, les facteurs  $H_n$  dépendent de la nature du chargement. Enfin, en remarquant qu'en traction pure  $H_n = 1$  quel que soit  $n$ , la définition du volume dit effectif [4] peut être généralisée comme suit :

$$(9) \quad V_{\text{eff}} = V_{\Omega} \sum_{n \geq 1} \alpha_n H_n \left( \sigma_{\max} / \sigma_0 \right)^n \bigg/ \sum_{n \geq 1} \alpha_n \left( \sigma_{\max} / \sigma_0 \right)^n$$

*L'ensemble des facteurs  $H_n$   $n \in \mathbb{N}^*$  caractérise donc globalement la probabilité cumulée de rupture  $P_F$ , la moyenne des contraintes de rupture  $\bar{\sigma}_{\max}$ , une mesure du volume effectif  $V_{\text{eff}}$ , et par là l'effet de l'hétérogénéité des contraintes. Ces facteurs seront appelés facteurs d'hétérogénéité des contraintes.*

*Remarque.-* On note  $\Omega_{\sigma}$  tel que  $\Omega \supset \Omega_{\sigma}$ , l'ensemble des points  $P$  de la structure tels que  $\|\sigma\| \leq \sigma$ , avec  $\sigma \in [\min_{\Omega} \|\sigma\|, \max_{\Omega} \|\sigma\|]$ , et par  $V_{\sigma}$  tel que  $0 \leq V_{\sigma} \leq V_{\Omega}$  le volume occupé par  $\Omega_{\sigma}$ . On définit la fonction  $G(\sigma)$  associée à ce volume par :

$$(10) \quad G(\sigma) = \frac{V_{\sigma}}{V_{\Omega}}$$

En supposant  $G$  presque partout dérivable, on peut définir la densité associée :

$$(11) \quad g(\sigma) = \frac{dG(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{V_{\Omega}} \frac{dV_{\sigma}}{d\sigma}$$

Les moments non centrés d'ordre  $n$  associés à la densité  $g$  sont définis par :

$$(12) \quad M_n = \int_0^{+\infty} \sigma^n g(\sigma) d\sigma = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} \|\sigma\|^n dV \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les facteurs d'hétérogénéité des contraintes (cf (8)) apparaissent alors comme étant les moments normés d'ordre  $n$  :

$$(13) \quad H_n = M_n / \sigma_{\text{Erreur!}}$$

b) *Cas particuliers.* - Dans le cas où  $\alpha_i=1$  et  $\alpha_n=0 \quad \forall n \neq i$ , on obtient :

$$(14a) \quad P_F = 1 - \exp \left[ - \frac{V_{\Omega} H_i}{V_0} \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right)^i \right]$$

$$(14b) \quad \bar{\sigma}_{\max} = \sigma_0 \left( \frac{V_0}{V_{\Omega} H_i} \right)^{1/i} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{i} \right) = (\bar{\sigma}_{\max})_{\text{traction}} / (H_i)^{1/i}$$

$$(14c) \quad V_{\text{eff}} = H_i V_{\Omega}$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction eulérienne de seconde espèce et  $(\bar{\sigma}_{\max})_{\text{traction}}$  la moyenne des contraintes de rupture en traction correspondant au volume  $V_{\Omega}$ .

*Si le comportement à rupture du matériau vérifie la loi de Weibull [5] :*

$$(15a) \quad P_F = 1 - \exp \left[ - \int_{\Omega} \frac{1}{V_0} \left( \frac{\|\sigma\|}{\sigma_0} \right)^m dV \right] = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_w}{\sigma_0} \right)^m \right]$$

$$(15b) \quad \sigma_w = \sigma_{\max} \left( \frac{V_{\Omega} H_m}{V_0} \right)^{1/m}$$

où  $m$ ,  $\sigma_0$  et  $V_0$  représentent les paramètres dits de Weibull, paramètres caractéristiques du matériau et indépendants du type de sollicitation, et  $\sigma_w$  la contrainte dite de Weibull [6], alors, les relations (9) restent valables avec  $i=m \in \mathbb{R}^+ *$ .

*Le moment  $H_m$  caractérise alors l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la probabilité cumulée de rupture, la moyenne des contraintes de rupture et le volume effectif. Ce moment sera appelé "facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull".*

### 3- APPLICATION A LA RUPTURE DES MATERIAUX FRAGILES

*Dans ce paragraphe, on constate que dans certains cas, le facteur  $H_1$  est suffisant pour caractériser qualitativement l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte moyenne de rupture.*

a) *Choix de la contrainte équivalente de rupture* - Des observations fractographiques montrent que la rupture des matériaux à comportement fragile s'amorce, en général, sur des défauts initiaux dans les zones en traction. On introduit donc le tenseur des contraintes positives  $\sigma^+$  et ses deux premiers invariants, dont les expressions sont :

$$(16) \quad \sigma^+ = \sum_{I=1}^3 \langle \sigma_I \rangle_+ V_I \otimes V_I$$

$$(17 \text{ a,b}) \quad \sigma_H^+ = J_1(\sigma^+), \quad \sigma_{\text{eq}}^+ = J_2(\sigma^+)$$

où  $\sigma_I$  sont les valeurs propres de  $\sigma$  et  $V_I$  les vecteurs propres correspondants.

Le critère de Rankine est l'un des critères couramment employés pour caractériser la rupture des matériaux à comportement fragile. La contrainte équivalente naturellement associée à ce critère est notée :

$$(18) \quad \|\sigma\|_I = \max_I \langle \sigma_I \rangle_+$$

A partir de la définition de la contrainte équivalente d'endommagement [7] associée au taux de restitution de densité d'énergie élastique d'endommagement, il est également possible d'introduire la *contrainte équivalente d'endommagement positive* :



$$(19) \quad \|\sigma\|^* = \sqrt{\frac{2}{3}(1+\nu)(\sigma_H^+)^2 + 3(1-2\nu)(\sigma_{eq}^+)^2}$$

où  $\nu$  représente le coefficient de Poisson du matériau non endommagé.

b) *Analyse de quelques résultats expérimentaux* - Selon la contrainte équivalente de rupture utilisée pour leur évaluation, les moments normés d'ordre  $n$  sont notés :

$$(20 \text{ a,b}) \quad (H_n)_I = H_n [\|\sigma\|_I], \quad (H_n)^* = H_n [\|\sigma\|^*]$$

Leurs valeurs respectives sont données dans les tableaux 1 et 2 pour des structures soumises à quatre sollicitations différentes. Les deux définitions (20a,b) sont identiques dans le cas de sollicitations telles que  $\sigma^+$  n'a qu'une seule valeur propre non nulle.

Le tableau 1 donne également les valeurs de la contrainte moyenne de rupture expérimentalement mesurée sur un béton [1]. Le tableau 2 donne la même information pour des essais réalisés sur du nitrure de silicium [2]. Dans les deux cas, une diminution de la moyenne des contraintes de rupture correspond à une augmentation, de  $H_1$  et de  $H_2$ . Le seul facteur  $H_1$  apparaît donc, dans ces cas, suffisant pour caractériser *qualitativement* l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte moyenne de rupture.

SOLLICITATION	CONTRAINTE MOYENNE DE RUPTURE	(H <sub>1</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>1</sub> ) <sup>*</sup>	(H <sub>2</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>2</sub> ) <sup>*</sup>	
TRACTION	2.7 MPa	1.000	1.000	1.000	1.000	TENSION
FLEXION 4 POINTS	5.4 MPa	0.188	0.188	0.111	0.111	4-POINT BENDING
FLEXION 3 POINTS	5.9 MPa	0.125	0.125	0.056	0.056	3-POINT BENDING
	MEAN FAILURE STRESS	(H <sub>1</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>1</sub> ) <sup>*</sup>	(H <sub>2</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>2</sub> ) <sup>*</sup>	TYPE OF LOADING

Tableau 1: Contrainte moyenne de rupture en fonction du type d'essai (béton)  
*Table 1: Mean failure stress of a concrete for different types of loadings*

SOLLICITATION	CONTRAINTE MOYENNE DE RUPTURE	(H <sub>1</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>1</sub> ) <sup>*</sup>	(H <sub>2</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>2</sub> ) <sup>*</sup>	
TRACTION	526 MPa	1.000	1.000	1.000	1.000	TENSION
FLEXION 4 POINTS	629 MPa	0.188	0.188	0.111	0.111	4-POINT BENDING
FLEXION 3 POINTS	660 MPa	0.125	0.125	0.056	0.056	3-POINT BENDING
FLEXION BIAXIALE	721 MPa	0.101	0.086	0.032	0.024	DISC BENDING
	MEAN FAILURE STRESS	(H <sub>1</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>1</sub> ) <sup>*</sup>	(H <sub>2</sub> ) <sub>I</sub>	(H <sub>2</sub> ) <sup>*</sup>	TYPE OF LOADING

Tableau 2: Contrainte moyenne de rupture en fonction du type d'essai (céramique)  
*Table 2: Mean failure stress of a monolithic ceramic for different types of loadings*

c) *Un essai pour identifier l'influence de H<sub>2</sub>* - L'essai d'un tube aux extrémités libres soumis à une pression interne uniforme permet d'obtenir des valeurs de H<sub>1</sub> et H<sub>2</sub> variables en fonction du rapport  $k = r_2 / r_1$  des rayons extérieur et intérieur du tube (quelle que soit celle des deux contraintes équivalentes qui est employée) :

$$(21a) H_1(k) = \frac{1}{1+k^2} + \frac{2k^2}{k^4-1} \ln(k)$$

$$(21b) H_2(k) = \frac{1}{1+k^2} + \frac{4k^2}{(k^4-1)(k^2+1)} \ln(k)$$

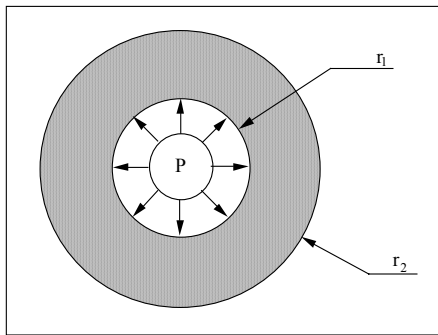


Figure 1: Tube sous pression interne  
*Figure 1: Tube under internal pressure*

Ainsi, pour des valeurs de H<sub>1</sub> identiques à celles obtenues pour les essais décrits précédemment, cet essai permet d'obtenir des valeurs de H<sub>2</sub> différentes (cf tableau 3). La mesure de la moyenne des contraintes de rupture, obtenue au cours de l'essai, permettrait donc de mesurer l'influence de H<sub>2</sub>, voire de moments normés d'ordre supérieur. On notera que pour k de l'ordre de 5, la pression à appliquer dans un tel essai est de l'ordre de 4 MPa dans le cas du béton et de 500 MPa dans le cas du nitrure de silicium.

SOLLICITATION	H <sub>1</sub>	$\frac{r_2}{r_1}$	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> (k)	
TRACTION	1.000	1.00	1.000	1.000	TENSION
TORSION	0.667	1.72	0.500	0.462	TORSION
FLEXION PURE	0.250	3.81	0.167	0.089	PURE BENDING
FLEXION 4 POINTS	0.188	4.64	0.111	0.057	4-POINT BENDING
FLEXION 3 POINTS	0.125	6.05	0.056	0.032	3-POINT BENDING
FLEXION BIAXIALE	0.101	6.93	0.032	0.024	DISC BENDING
	0.086	7.67	0.024	0.019	
	H <sub>1</sub>	$\frac{r_2}{r_1}$	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> (k)	TYPE OF LOADING

Tableau 3: Valeurs de H<sub>2</sub> pour un tube sous pression interne (H<sub>2</sub>(k)) et pour différents autres types d'essais (H<sub>2</sub>)

*Table 3: Values of H<sub>2</sub> for a tube under internal pressure (H<sub>2</sub>(k))*

*and for different other types of structures ( $H_2$ )*

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] L'HERMITE S. , *Annales de l'I.T.B.T.P.*, 309-310, 1973, p. 39-41.
- [2] HILD F., AMAR E., MARQUIS D., *J. Am. Ceram. Soc.*, 75 [3], 1992, p. 700-702.
- [3] HILD F., MARQUIS D., *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 311, Série II, 1990, p. 573-578.
- [4] DAVIES D.G.S., *Proc. Brit. Ceram. Soc.*, 22, 1973, p. 429-452.
- [5] WEIBULL W., *J. Appl. Mec.*, 18 [3], 1951, p. 293-297.
- [6] BEREMIN F.M., *Metallurgical Transactions A*, 14a, 1983, p. 2277-2287.
- [7] LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L., In *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985, p. 343-444.