HAL
open science

Comptes-rendus de la 22e Rencontre du Non-Linéaire Paris 2019

Eric Falcon, Marc Lefranc, François Pétrélis, Chi Tuong Pham

To cite this version:

Eric Falcon, Marc Lefranc, François Pétrélis, Chi Tuong Pham. Comptes-rendus de la 22e Rencontre du Non-Linéaire Paris 2019. 22e Rencontre du Non-Linéaire, Université Paris Diderot Non-Linéaire Publications, 2019, 9782953859683. hal-02338236

HAL Id: hal-02338236

https://hal.science/hal-02338236v1

Submitted on 23 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université PARIS DIDEROT PARIS 7

USPC Université Sorbonne Paris Cité

Éric FALCON
Marc LEFRANC
François PÉTRÉLIS
Chi-Tuong PHAM

Comptes-rendus de la 22e

Rencontre du Non Linéaire

Paris 2019

Université Paris Diderot
Amphithéâtre Buffon

http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/

Crédits Photo : C. Laroche et E. Falcon - AiR (Art in Research)

É. Falcon, M. Lefranc
F. Pétrélis, C.-T. Pham
Éditeurs

Comptes-Rendus de la 22e Rencontre du Non-Linéaire Paris 2019

Université Paris Diderot

Non-Linéaire Publications

22e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
Université Paris Diderot, PARIS
26–28 Mars 2019

Nous remercions vivement pour leur soutien matériel et financier l'université Paris Diderot, le CNRS, l'Institut Universitaire de France, le Département de Physique de l'École normale supérieure, le Département de Mécanique, Énergétique et Procédés (MEP) de l'Université Paris-Saclay, le Laboratoire de Physique Statistique de l'École normale supérieure, le laboratoire Matière et Systèmes Complexes, le laboratoire de Physique de l'École normale supérieure de Lyon.

Le comité scientifique est composé de :

Stéphane Barland	INPhyNI – Nice-Sophia Antipolis
Elsa Bayart	Laboratoire de Physique – ENS Lyon
Julien Barré	MAPMO – Orléans
Éric Falcon	MSC – Paris Diderot
David Gérard-Varet	IMJ – Paris Diderot
Marie-Christine Firpo	LPP – École Polytechnique
Mariana Haragus	LMB – Univ. Franche-Comté
Régis Marchiano	IJLRDA – Sorbonne Université
François Pétrélis	Laboratoire de Physique – ENS Paris
Chi-Tuong Pham	LIMSI – Paris-Sud
Salima Rafai	LIPhy – UJF Grenoble
Benoît Roman	PMMH – ESPCI

Les Rencontres du Non-Linéaire sont organisées par :

Éric Falcon	MSC – Paris Diderot
Marc Lefranc	PhLAM – Lille
François Pétrélis	Laboratoire de Physique – ENS Paris
Chi-Tuong Pham	LIMSI – Paris-Sud

Le mini-colloque « *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics in the Lab* » est organisé par :

Stéphan Fauve	Laboratoire de Physique — ENS Paris
Claude Jaupart	IPGP – USPC
Michaël Le Bars	IRPHE – Université Aix–Marseille
François Pétrélis	Laboratoire de Physique – ENS Paris

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non-Linéaire Publications, *Avenue de l'université, BP 12*
76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

`http://nonlineaire.univ-lille1.fr/`

Renseignements :

`rnl@univ-lille1.fr`

Table des matières

Comptes-rendus de la 22e Rencontre du Non-Linéaire

Écoulement gaz–liquide dans un milieu poreux confiné : caractérisation par analyse d'images
Thomas Busser, Barbara Pascal, Nelly Pustelnik, Patrice Abry, Marion Serres, Régis Philippe, Valérie Vidal 3

Simulation de la densité limite de champ moyen pour des populations hétérogènes avec interactions
Antonin Della Noce, Amélie Mathieu, Paul-Henry Cournède 9

Dynamiques transitoires de sillage dans le « pinball fluidique »
Nan Deng, Luc R. Pastur, Bernd R. Noack, Guy Cornejo-Maceda, François Lusseyran, Jean-Christophe Loiseau, Marek Morzyński 15

Le tenseur complexe de Faraday pour comprendre la non-pertinence de la théorie de Born–Infeld
Michel Gondran, Abdel Kenoufi, Alexandre Gondran 21

Mélange et démélange induits par des particules actives de camphre
Clément Gouiller, Laurent Maquet, Florence Raynal, Mickael Bourgoin, Romain Volk, Cécile Cottin-Bizonne, Christophe Ybert 27

Short-distance propagation of nonlinear optical pulses
Mathieu Isoard, Anatoly M. Kamchatnov, Nicolas Pavloff 33

Subcritical transition to turbulence in wall-bounded flows: The case of plane Poiseuille flow
Paul Manneville, Masaki Shimizu 39

Description N-corps de l'interaction onde–particule dans une structure périodique
Damien F. G. Minenna, Yves Elskens, Frédéric André, Fabrice Doveil, Alexandre Poyé 45

Encodage d'une information sinusoïdale dans un circuit neuronal et résonances induites par une perturbation
Savério Morfu, Maxime Bordet, Matthieu Rossé 51

Ondes de surface produites par le déplacement d'un objet solide
Jose Antonio Trejo Gutierrez, Ivonne Judith Hernandez Hernandez, Gerardo Ruiz Chavarria 57

An experimental study of turbulence generation and decay in Taylor–Couette system due to an abrupt stoppage
Harminder Singh, Arnaud Prigent, Innocent Mutabazi 63

Perturbation theory in algebraic setting
Lorenzo Valvo, Michel Vittot 69

Polynomial description of acoustic modes in fluid ellipsoids
Jérémie Vidal, Sylvie Su, David Cébron 75

Instabilité de rides sur des microcapsules en écoulement extensionnel
Kaili Xie, Clément de Loubens, Marc Jaeger, Marc Leonetti 81

Effet de la gravité sur le mûrissement dans un mélange binaire
Raphaël Zanella, Hervé Henry 85

Résumés des exposés

Convection in a "centrifuge"
Thierry Alboussière 93

Dynamics and fragmentation of small flexible fibers in turbulence
Sofía Allende, Christophe Henry, Jérémie Bec 94

Ailes battantes à rigidité anisotrope inspirées de l'insecte
Romeo Antier, Sophie Ramananarivo, Benjamin Thiria, Ramiro Godoy-Diana 95

Quel est l'impact des vagues sur la turbulence atmosphérique ?
Alex Ayet, Bertrand Chapron, Jean-Luc Redelsperger, Guillaume Lapeyre, Louis Marié 96

Dynamics of an artificial aquatic blade subjected to von Kármán vortices
Yohann Bachelier, Delphine Doppler, J. John Soundar Jerome, Nicolas Rivière 97

Effet de viscosité élongationnelle de l'écoulement Streaming généré par un cylindre vibrant
S. Amir Bahrani, Maxime Costalonga, Laurent Royon, Philippe Brunet 98

Bifurcations de l'équation de Vlasov
Julien Barré, David Métivier, Yoshiyuki Y. Yamaguchi 99

Turbulence lagrangienne, irréversibilité et flots généralisés
Jérémie Bec, Simon Thalabard 100

Cycles limites et quasipériodiques dans une cavité cisaillée
Yacine Bengana, Laurette S. Tuckerman 101

Forced three-wave interactions of capillary-gravity waves
Michael Berhanu, Annette Cazaubiel, Florence Haudin, Éric Falcon 102

Instabilités et formation de patterns dans les électrons relativistes : observations directes et modélisation
C. Szwaj, C. Evain, E. Burkard, E. Roussel, M. Le Parquier, Serge Bielawski, F. Ribeiro, M. Labat, N. Hubert, J.-B. Brubach, P. Roy, E. Blomley, M. Brosi, E. Brrndermann, S. Funkner, N. Hiller, M. J. Nasse, G. Niehues, M. Schedler, P. Schönfeldt, J. L. Steinmann, S. Walther, A.-S. Müller . . 103

Spatio-temporal dynamics of semiconductor microlasers with chaotic ray dynamics
Stephan Bittner, Stefano Guazzotti, Yongquan Zeng, Kyungduk Kim, Qi Jie Wang, Ortwin Hess, Hui Cao 104

Observation de la modulation non-linéaire contra-propagative des bords d'un train d'onde de gravité à la surface d'un fluide
Félicien Bonnefoy, Pierre Suret, Alexey Tikan, Francois Copie, Gaurav Prabhudesai, Guillaume Michel, Annette Cazaubiel, Éric Falcon, Gennady El, Stéphane Randoux 105

Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment
Vincent Bouillaut, Simon Lepot, Sébastien Aumaître, Basile Gallet 106

3D inertial wave attractors
Samuel Boury, Thierry Dauxois, Evgeny Ermanyuk, Sylvain Joubaud, Philippe Odier, Ilias Sibgatullin 107

Instabilités oscillatoires en milieu poreux d'un fluide en équilibre diphasique
Alexis Bres, François Pétrélis, Stéphan Fauve 108

Attracteur d'ondes d'inertie en régime linéaire et non linéaire
Maxime Brunet, Thierry Dauxois, Pierre-Philippe Cortet 109

Croissance d'arbre soumis à des règles d'allocation de ressource
Olivier Bui, Xavier Leoncini 110

Écoulement gaz–liquide dans un milieu poreux confiné : caractérisation par analyse d'images
Thomas Busser, Barbara Pascal, Nelly Pustelnik, Patrice Abry, Marion Serres, Régis Philippe, Valérie Vidal 111

Generalized dimensions and local indicators of dynamical systems
Théophile Caby, Davide Faranda, Giorgio Matnica, Sandro Vaienti, Pascal Yiou 112

Turbulence d'ondes en hypergravité
Annette Cazaubiel, S. Mawet, A. Darras, G. Grojean, J. W. A. van Loon, S. Dorbolo, É. Falcon . . 113

Multi-stable liquid funnel-like interfaces induced by optical radiation pressure
Hugo Chesneau, Julien Petit, Nicolas Bertin, Hamza Chraïbi, Étienne Brasselet, Régis Wunenburger, Jean-Pierre Delville 114

Turbulence in edge tokamak plasma and interaction with magnetic X-point configuration in 3D fluid simulations
Guido Ciraolo, Davide Galassi 115

Interaction onde–écoulement moyen en hydrodynamique dispersive
Thibault Congy, Gennady El, Mark Hoefer 116

Intermittence et multi-stabilité d'un tube mou parcouru par un écoulement d'air
Anne Cros, Arturo Orozco Estrada, Ricardo Morales Hernández, Ricardo Lima 117

Convective patterns in viscous planetary interiors
Anne Davaille 118

Dynamique de sédimentation de particules
David De Souza, Romain Monchaux, Anne Dejoan 119

Topology of quasi-singularities in an experimental turbulent swirling flow
Paul Debue, Valentina Valori, Yasar Ostovan, Christophe Cuvier, Jean-Philippe Laval, Jean-Marc Foucaut, Bérengère Dubrulle, François Daviaud 120

Mathematical models of self-organization
Pierre Degond 121

Comportement asymptotique de populations hétérogènes avec interactions
Antonin Della Noce, Amélie Mathieu, Paul-Henry Cournède 122

Dynamiques transitoires de sillage dans le « pinball fluidique »
Nan Deng, Luc R. Pastur, Bernd R. Noack, Guy Cornejo-Maceda, François Lusseyran, Jean-Christophe Loiseau, Marek Morzyński 123

Solutal convection induced by dissolution
Julien Philippi, Michael Berhanu, Sylvain Courrech du Pont, Julien Derr 124

Rivers in the lab
Olivier Devauchelle, Anaïs Abramian, Éric Lajeunesse, Pauline Delorme, François Métivier, Laurie Barrier 125

Vers une standardisation des ultrasons non linéaires pour le contrôle non destructif du futur
Serge Dos Santos, Ali Masood, Martin Lints, Denis Arruga, Giuseppe Nardoni 126

Dynamique non-linéaire du centre guide d'un électron soumis à un champ laser de forte intensité
Jonathan Dubois, Simon A. Berman, Cristel Chandre, Turgay Uzer 127

Du tout simple au très compliqué : itinéraire dans la non-linéarité des plasmas
Dominique Escande 128

Contrôle d'une instabilité spatio-temporelle affectant les électrons relativistes dans les centres de rayonnement synchrotron
Clément Evain, C. Szwaj, E. Roussel, M. Le parquier, M.-A. Tordeux, M. Labat, F. Ribeiro, N. Hubert, J.-B. Brubach, P. Roy, S. Bielawski 129

Analyse d'échelles dans un écoulement de von Kármán numérique
Hugues Faller, Caroline Nore, Bérengère Dubrulle, Loïc Cappanera, Jean-Luc Guermond 130

Condensation sous-critique en convection de Rayleigh–Bénard en rotation
Benjamin Favier, Céline Guervilly, Edgar Knobloch 131

La bataille d'Actium et le Mythe de l'échénéis-remora.
Johann Fourdrinoy, Clément Caplier, Yann Devaux, Areti Gianni, Ierotheos Zacharias, Isabelle Jouteur, Paul Martin, Julien Dambrine, Madalina Petcu, Morgan Pierre, Germain Rousseaux 132

Fluidisation d'un empilement granulaire bidimensionnel par le fond mobile d'un plan incliné
Nathalie Fraysse, Cyrille Claudet 133

Ondes de relief et sillage émis par un courant géostrophique
Cruz Garcia-Molina, Chantal Staquet, Joël Sommeria, Bruno Voisin, Adekunle Ajayi 134

L'adhésion élastocapillaire permet aux coléoptères de marcher la tête en bas
Tristan Gilet, Sophie Marie Gernay, Pierre Lambert 135

Keplerian turbulence in astrophysical accretion discs
Christophe Gissinger 136

Le tenseur complexe de Faraday pour comprendre la non validité de la théorie de Born–Infeld
Michel Gondran, Abdel Kenoufi, Alexandre Gondran 137

Flambage d'une tige dans un milieu granulaire
Antoine Seguin, Philippe Gondret 138

Mélange et démélange induits par des particules actives de camphre.
Clément Gouiller, Laurent Maquet, Florence Raynal, Mickael Bourgoin, Romain Volk, Cécile Cottin-Bizonne, Christophe Ybert 139

Érosion par dissolution : ruissellement sur plan incliné
Adrien Guérin, Julien Derr, Sylvain Courrech du Pont, Michael Berhanu 140

Le ludion dans un fluide stratifié : une dualité onde corpuscule ?
Benjamin Castillo Morales, Sergio Hernández Zapata, Gerardo Ruiz Chavarria, Patrice Le Gal . . . 141

Dynamics of a reactive spherical particle falling in a linearly stratified layer
Ludovic Huguet, Michael Le Bars 142

Long-time evolution of optical pulses in a nonlinear medium
Mathieu Isoard, Anatoly M. Kamchatnov, Nicolas Pavloff 143

Fluid-particle suspension by gas release from a granular bed
Valérie Vidal, Tess Homan, Clément Picard, Sylvain Joubaud 144

Rare transitions to a thin-layer turbulent condensate
Adrian van Kan, Takahiro Nemoto, Alexandros Alexakis 145

Multiples attracteurs climatiques dans une planète-océan couplée
Maura Brunetti, Jérôme Kasparian, Christian Vérard 146

Instabilité modulationelle d'une onde plane en présence de perturbations bruyantes et localisées : expérience dans les fibres optiques
Adrien Kraych, Dmitry Agafontsev, Pierre Suret, Gennady El, Stéphane Randoux 147

Agrégation de radeaux granulaires à une interface
Antoine Lagarde, Suzie Protière 148

Oceanic vortices in a jar: Laboratory experiments in stratified rotating flows
Patrice Le Gal 149

Ondes internes de gravité générées par convection turbulente
Pierre Léard, Patrice Le Gal, Michael Le Bars 150

Mesure complète et ultra-rapide de structures non linéaires générées par l'instabilité modulationnelle en optique
Alexandre Lebel, Alexey Tikan, Stéphane Randoux, Pierre Suret, François Copie 151

Turbulence d'ondes inertielles générée par instabilité elliptique
Thomas Le Reun, Benjamin Favier, Michael Le Bars 152

Transition to turbulence in Couette-Poiseuille flow
Tao Liu, Lukasz Klotz, Benoît Semin, Ramiro Godoy-Diana, José Eduardo Wesfreid 153

Un modèle fractionnaire de trafic
Erick Javier López-Sánchez, Patricia Eugenia Olivera-Martínez 154

Dynamics of single rising bubble in suspension
Madec Christopher, J. John Soundar Jerome, Joubaud Sylvain 155

Subcritical transition to turbulence in wall-bounded flows: The case of plane Poiseuille flow
Paul Manneville, Masaki Shimizu 156

Description N-corps de l'interaction onde–particule dans une structure périodique
Damien F. G. Minenna, Yves Elskens, Frédéric André, Fabrice Doveil, Alexandre Poyé 157

Morphogenesis and morphodynamics of sandy beaches
Eduardo Monsalve, S. Courrech du Pont, B. Thiria 158

États transitoires dans l'écoulement de Couette plan
Romain Monchaux, David De Souza 159

Encodage d'une information sinusoïdale dans un circuit neuronal et résonances induites par une perturbation
Savério Morfu, Maxime Bordet, Mathieu Rossé 160

États stationnaires des plasmas de tokamak en MHD visco-résistive
Hanen Oueslati, Marie-Christine Firpo, Aziz Salhi 161

Caractérisation et modélisation de la morphogenèse urbaine
Romain Pousse, Stéphane Douady 162

Étude de la turbulence à très hauts Re **et** Gr **dans le grand Taylor–Couette thermique**
Harminder Singh, Arnaud Prigent, Hugues Besnard, Antoine Bonnesoeur, Olivier Crumeyrolle, Innocent Mutabazi 163

Forces on capillary floaters
Giuseppe Pucci, Ian Ho, David M. Harris 164

Bi-stabilité diffusive-convective en présence d'un changement de phase
Jhaswantsing Purseed, Benjamin Favier, Laurent Duchemin 165

Drosophilia during early gastrulation is not only a living being
Julien Fierling, Alexandre Torzynski, Catherine Quilliet, Jocelyn Etienne, Philippe Marmottant, Guy Blanchard, Claire Lye, Benedicte Sanson 166

Contrôle de vitesse de flamme par un forçage paramétrique
Basile Radisson, Bruno Denet, Christophe Almarcha 167

Zonostrophic beta-plumes, zonal jets and particle diffusivity in locally-forced shallow water experiments
Peter Read, Boris Galperin, Stefania Espa, Enrico Ferrero, Simon Cabanes, Federica Ive, Massimiliano Manfrin, Hélène Scolan, Roland Young 168

Unraveling nonlinearities in elastic knots
Pedro Reis 169

Un modèle de lithosphère en couche mince pseudo-plastique
Guillaume Richard, François James 170

Effet de confinement lors de l'étalement de suspensions non-browniennes
Menghua Zhao, Alice Pelosse, Laurent Limat, Élisabeth Guazzelli, Matthieu Roché 171

Méthodes d'événements rares pour l'effondrement et le développement de la turbulence de Couette plan
Joran Rolland 172

Application de l'effet d'*echo* pour la génération d'harmonique d'ordre élevé dans des paquets d'électrons relativistes
Éléonore Roussel 173

Ondes de surface produites par le déplacement d'un objet solide
Jose Antonio Trejo Gutierrez, Ivonne Judith Hernandez Hernandez, Gerardo Ruiz Chavarria 174

Un modèle simplifié de locomotion aquatique
Jesus Sanchez-Rodriguez, Christophe Raufaste, Médéric Argentina 175

Modèle mathématique de la dynamique de transmission de l'infection par Taenia-cysticercose
Norma Yanet Sánchez-Torres, Marco V. José 176

Ségrégation granulaire dans les astéroïdes
Jérémy Sautel, Charles-Édouard Lecomte, Nicolas Taberlet 177

An experimental study of turbulence generation and decay in Taylor–Couette system due to an abrupt stoppage
Harminder Singh, Arnaud Prigent, Innocent Mutabazi 178

Experimental acoustic eigenmodes measurements: from sphere to spheroid
Sylvie Su, Philippe Cardin, David Cébron, Henri-Claude Nataf 179

Integrable turbulence in optical fibers and 1D water tank experiments
Pierre Suret 180

Nonlinear transport by gravity waves inside the ocean
Bruce R. Sutherland, Houssam Yassin, Ton S. van den Bremer 181

Morphogenèse glaciaire induite par ablation différentielle
Nicolas Taberlet, Nicolas Plihon 182

Là où l'imprédictabilité s'estompe : étude comparée de l'effet tunnel chez les marcheurs et en mécanique quantique
Loïc Tadrist, Tristan Gilet, Peter Schlagheck, John W. M. Bush 183

Numerical modelling of edge tokamak plasma: Impact of collisionality on turbulence properties
Raffaele Tatali, H. Bufferand, T. Cartier-Michaud, G. Ciraolo, D. Galassi, Ph. Ghendrih, F. Nespoli, E. Serre, P. Tamain 184

Wave propagation modelling in shallow water with an entire family of shallow water wave equations
Aurélien Serge Tchakoutio Nguetcho, Jean-Marie Bilbault, Serge Dos Santos, Michel Aillerie 185

Dispersion relation for unidirectional surface gravity waves
Alexey Tikan, Félicien Bonnefoy, Guillaume Michel, Prabhudesai Gaurav, Annette Cazaubiel, Francois Copie, Éric Falcon, Stéphane Randoux, Pierre Suret 186

How to simulate kinetic nonlinear effects in fusion plasmas
Natalia Tronko, Alberto Bottino, Cristel Chandre, Dominique Escande, Eric Sonnendruecker 187

Cycles hétéroclines en Taylor–Couette contra-rotatif
Laurette S. Tuckerman, Yacine Bengana 188

Perturbation theory in algebraic setting
Lorenzo Valvo, Michel Vittot 189

Polynomial expansion of compressible modes in rotating rigid ellipsoids
Jérémie Vidal, Sylvie Su, David Cébron 190

Interactions non linéaires d'ondes basse fréquence dans une colonne de plasma magnétisée
Simon Vincent, Victor Désangles, Nicolas Plihon, Vincent Dolique 191

Concentration préférentielle de chaînes élastiques en turbulence
Jason R. Picardo, Dario Vincenzi, Nairita Pal, Samriddhi Sankar Ray 192

Quadrupolar circulation in plane Couette flow
Zhe Wang, Yohann Duguet, Romain Monchaux 193

Wrinkling and folding on soft microcapsules
Kaili Xie, Clément de Loubens, Marc Jaeger, Marc Leonetti 194

Effet de la gravité sur le mûrissement dans un mélange binaire
Raphaël Zanella, Hervé Henry 195

Annexes

Index des auteurs 199

Programmes du Mini-colloque et de la 22e Rencontre du Non-Linéaire 205

Comptes-rendus de la

22e Rencontre du Non-Linéaire

Écoulement gaz–liquide dans un milieu poreux confiné : caractérisation par analyse d'images

Thomas Busser[1], Barbara Pascal[1], Nelly Pustelnik[1], Patrice Abry[1], Marion Serres[1,2,3], Régis Philippe[2] & Valérie Vidal[1]

[1] Laboratoire de Physique, UMR-CNRS 5672, École normale supérieure de Lyon, Université de Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon, France
[2] Laboratoire de Génie des Procédés Catalytiques, CNRS UMR 5285, CPE Lyon, UCBL, Univ.Lyon, 43 bd du 11 novembre 1918, 69616 Villeurbanne, France
[3] IFPEN - IFP Énergies nouvelles, Rond-point de l'échangeur de Solaize, 69360 Solaize, France
thomas.busser@ens-lyon.fr

Résumé. Un écoulement conjoint gaz–liquide dans un milieu poreux quasi-2D conduit à trois régimes hydrodynamiques suivant la valeur des débits imposés. L'analyse des images met en évidence la difficulté d'un algorithme morphologique classique à détecter précisément le contour et la structure des bulles. Nous introduisons deux méthodes plus sophistiquées permettant d'obtenir des contours plus réalistes et comparons quantitativement ces trois méthodes. L'étude statistique des propriétés des bulles permet de déterminer les tailles typiques des bulles dans les différents régimes d'écoulement, ainsi que le périmètre global, caractéristique des interfaces. Ce dernier semble atteindre un minimum pour le régime de transition, dû à la coalescence de bulles dans le système.

Abstract. A joint gas–liquid flow through a quasi-2D porous medium leads to three hydrodynamic regimes depending on the imposed gas and liquid flow rates. The image analysis highlights the difficulty of a classical morphological algorithm in accurately detecting the bubbles contour and structure. We introduce two more sophisticated methods leading to more realistic contours, and compare quantitatively these three methods. The statistical properties of the bubbles make it possible to determine the typical bubble sizes in the different flow regimes and the global perimeter, characteristic of the interfaces. This latter seems to exhibit a minimum for the transition regime, due to bubble coalescence in the system.

1 Introduction

Les écoulements multiphasiques dans des milieux poreux sont très largement répandus, allant des processus naturels (liquéfaction des sols, fracture hydraulique, éruptions volcaniques) aux processus industriels (réacteurs catalytiques, extraction assistée de pétrole). Les enjeux de leur compréhension sont donc multiples et pluridisciplinaires : génie des procédés (optimisation de procédés catalytiques, procédés de filtration) [1], géophysique [2], etc. Dans toutes ces applications, les interfaces de contact entre les différentes phases jouent un rôle crucial sur l'écoulement et les réactions chimiques possiblement associées. Leur position et leur dynamique restent cependant très difficiles à quantifier [3]. Dans ce contexte, les expériences de laboratoire peuvent apporter des éléments fondamentaux pour comprendre et prédire l'hydrodynamique de ces écoulements complexes [4, 5].

Nous étudions ici un écoulement 2D gaz–liquide conjoint à travers une mousse solide à cellules ouvertes de grande porosité ($\sim 90\,\%$) qui pourrait être utilisée en tant que catalyseur pour des réactions gaz–liquide [1, 6, 7]. L'expérience mise en place permet d'étudier l'hydrodynamique de l'écoulement et de mettre en évidence différents régimes. Nous comparons trois algorithmes différents pour analyser les images et distinguer les phases liquide et gaz dans le milieu poreux. Nous nous intéressons ensuite aux propriétés des bulles (fraction de gaz, diamètre équivalent, périmètre) afin de discuter l'efficacité de chaque méthode et d'améliorer la compréhension de la physique du système.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

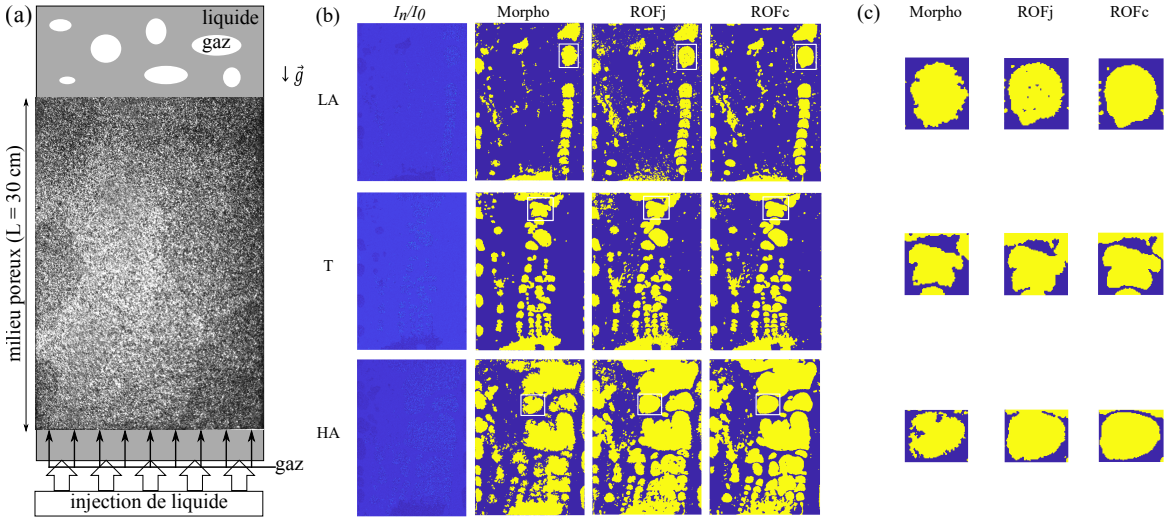


Figure 1. (a) Schéma du dispositif expérimental avec une image brute. (b) Exemple d'analyse d'images pour les trois régimes observés (LA = faible activité, T = transition, HA = forte activité) pour les trois méthodes développées. La colonne de gauche correspond à l'image brute I_n divisée par l'image de référence I_0. Les trois autres images correspondent aux résultats d'analyse avec les différents algorithmes de traitement. En bleu (sombre) : le liquide. En jaune (clair) : le gaz. (c) Zoom sur les bulles encadrées dans la figure (b).

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est une cellule de Hele-Shaw verticale (Fig. 1 (a)) de dimensions 40 cm (hauteur) × 20 cm (largeur) × 2 mm (espacement entre les plaques). Chacun des deux panneaux de verre, d'une épaisseur de 6 mm, est scellé avec un cadre en PEEK (polyétheréthercétone), un polymère thermoplastique utilisé pour sa bonne résistance mécanique et chimique. Le milieu poreux est une mousse métallique solide à cellules ouvertes (NiCrFeAl, Alantum, porosité 90 %) de hauteur $L \simeq 30$ cm, placée juste au-dessus des injecteurs et occupant toute la section de la cellule. Le liquide (eau déionisée) est injecté à un débit constant, Q_{L}, au moyen d'une pompe à entraînement magnétique (Bronkhorst Tuthill DXS1.6PPT2NNM103) et d'un régulateur de débit Coriolis (Bronkhorst CORI-FLOW) pour assurer un écoulement stable du liquide dans la cellule. Le gaz (air) est envoyé à débit constant Q_{G}, à l'aide d'un régulateur de débit (Alicat MC-5SLM-D/CM-C2M), dans neuf injecteurs en base de la mousse, assurant une répartition homogène. Les débits sont compris dans les gammes suivantes : $100 \leq Q_{\mathrm{L}} \leq 1000$ mL/min et $100 \leq Q_{\mathrm{G}} \leq 1900$ mL/min. L'éclairage en transmission est assuré par un panneau lumineux (Euroshop LED) placé derrière la cellule, permettant une visualisation directe de l'écoulement à travers le milieu poreux (Fig. 1 (a)). L'acquisition d'images est réalisée par une caméra monochrome (Basler, CMOS 1", 2048 × 2048 pixels), couplée à un objectif 16 mm, avec une fréquence de 100 images/s.

Nous étudions ici trois couples de débits de liquide et de gaz correspondant à l'observation de trois régimes différents [8]. À bas débits ($Q_{\mathrm{G}} = 300$ mL/min, $Q_{\mathrm{L}} = 300$ mL/min), le régime de faible activité (LA) est marqué par la présence de petites bulles ; lorsque l'on augmente les débits ($Q_{\mathrm{G}} = 400$ mL/min, $Q_{\mathrm{L}} = 700$ mL/min), on observe un régime de transition dans lequel une population de grosses bulles apparaît ; à hauts débits ($Q_{\mathrm{G}} = 1200$ mL/min et $Q_{\mathrm{L}} = 300$ mL/min), le régime de forte activité est principalement caractérisé par de grosses bulles.

3 Méthodologie

3.1 Détection des bulles

La figure 1 (b), gauche, présente les images obtenues en divisant l'image brute I_n par l'image de référence I_0 correspondant à l'image initiale de la mousse envahie par le liquide seulement (pas de gaz

dans le système). À partir de ces images, trois méthodes d'analyse ont été développées et testées sous MATLAB (Mathworks ®) :

• **Analyse morphologique :** Cette méthode est basée sur une double binarisation et l'emploi d'outils morphologiques successifs (érosion, dilatation, remplissage). Elle est fortement dépendante des seuils utilisés, qui nécessitent un réglage à la main pour chaque série de données. Les segmentations en deux régions sont présentées par les images binaires (0 pour le liquide et 1 pour le gaz) de la figure 1 (b).

• **ROFj et ROFc :** Deux méthodes de segmentation d'images texturées, basées sur un modèle de texture invariante d'échelle, sont envisagées. L'invariance d'échelle est caractérisée par le comportement linéaire en l'échelle $j \in \{j_1, \ldots, j_2\}$: $\mathcal{X}_{\underline{n},j} = v_{\underline{n}} + jh_{\underline{n}}$ **(RL)**, en chaque pixel $\underline{n}$, où $\mathcal{X}_{\underline{n},j}$ est une quantité multi-échelle calculée à partir de la transformée en ondelettes de l'image. Suivant [9], une texture homogène est une région de l'image de h et v constants. La segmentation vise donc à obtenir des estimées de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{h}$ (sous forme de matrices agrégeant l'information en tous les pixels) constantes par morceaux (c.p.m.). La régularité locale $\boldsymbol{h}$ et le paramètre $\boldsymbol{v}$ (lié à la variance locale) sont estimés conjointement par la résolution d'un problème d'optimisation de la forme

$$\left(\widehat{\boldsymbol{v}}, \widehat{\boldsymbol{h}}\right) = \arg\min_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{h}} \textstyle\sum_{j=j_1}^{j_2} \|\boldsymbol{\mathcal{X}}_j - \boldsymbol{v} - j\boldsymbol{h}\|_2^2 + \Psi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h})$$

réalisant un compromis entre un terme de moindres carrés de fidélité au modèle **(RL)** et une pénalisation Ψ favorisant le caractère c.p.m. ROFj et ROFc correspondent à des pénalisations Ψ différentes

$$\text{ROFj} : \Psi_{\text{j}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) = \lambda(\text{TV}(\boldsymbol{v}) + \alpha\text{TV}(\boldsymbol{h})) \quad \text{et} \quad \text{ROFc} : \Psi_{\text{c}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) = \lambda\text{TV}_\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h})^1.$$

Ψ_{j} favorise indépendamment le caractère c.p.m. de $\widehat{\boldsymbol{v}}$ et $\widehat{\boldsymbol{h}}$, tandis que Ψ_{c} couple fortement les variations de $\widehat{\boldsymbol{v}}$ et $\widehat{\boldsymbol{h}}$ et favorise la coïncidence des régions pour $\widehat{\boldsymbol{v}}$ et $\widehat{\boldsymbol{h}}$. Une courte étape de binarisation permet d'obtenir les segmentations gaz–liquide proposées en Fig. 1 (b) à partir des estimées $\widehat{\boldsymbol{v}}$ et $\widehat{\boldsymbol{h}}$ c.p.m.

Si ROFj et ROFc ont l'avantage de proposer une description mathématique bien adaptée aux textures d'images d'écoulement, leur principale difficulté repose dans le choix des paramètres de régularisation λ et α qui pilotent le compromis entre le respect du modèle et le caractère c.p.m. Pour chaque série, l'étude de la première image fournit un couple de paramètres (λ,α) satisfaisant, qui est fixé pour le reste de la série.

3.2 Statistiques et propriétés des bulles

À partir des images analysées, nous utilisons l'algorithme « regionprops » de MATLAB (Mathworks ®) pour détecter les bulles dans l'image et extraire le périmètre (P_{b}) et l'aire (A_{b}) de chaque bulle. Le diamètre équivalent des bulles est déduit de l'aire : $d = \sqrt{4A_{\text{b}}/\pi}$. Nous déterminons également pour chaque image le périmètre des interfaces gaz–liquide (P) et l'aire totale de gaz (A) en sommant les périmètres et les aires de chaque bulle de l'image. On en déduit alors la fraction totale de gaz dans une image, ε, ainsi que la fraction de gaz associée à chaque bulle, ε_{b}.

4 Résultats et discussion

4.1 Détection des bulles

La comparaison des algorithmes pour la détection des bulles, présentée sur la figure 1 (b) et les zooms sur la figure 1 (c), montrent tout d'abord que le contour des bulles est plus segmenté avec l'analyse morphologique qu'avec les algorithmes ROFj et ROFc, notamment pour les régimes LA et HA. Cela peut fortement impacter l'estimation des périmètres P_{b} et P. De plus, on voit que les résultats obtenus

[1] Pour une image $\boldsymbol{x}$, soit $\mathbf{H}\boldsymbol{x}$ (resp. $\mathbf{V}\boldsymbol{x}$) son gradient horizontal (resp. vertical). On définit la *variation totale* $\text{TV}(\boldsymbol{x}) := \sum_{\underline{n}} \sqrt{(\mathbf{H}\boldsymbol{x})_{\underline{n}}^2 + (\mathbf{V}\boldsymbol{x})_{\underline{n}}^2}$ et la *variation totale couplée* $\text{TV}_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{\underline{n}} \sqrt{(\mathbf{H}\boldsymbol{x})_{\underline{n}}^2 + (\mathbf{V}\boldsymbol{x})_{\underline{n}}^2 + \alpha(\mathbf{H}\boldsymbol{y})_{\underline{n}}^2 + \alpha(\mathbf{V}\boldsymbol{y})_{\underline{n}}^2}$

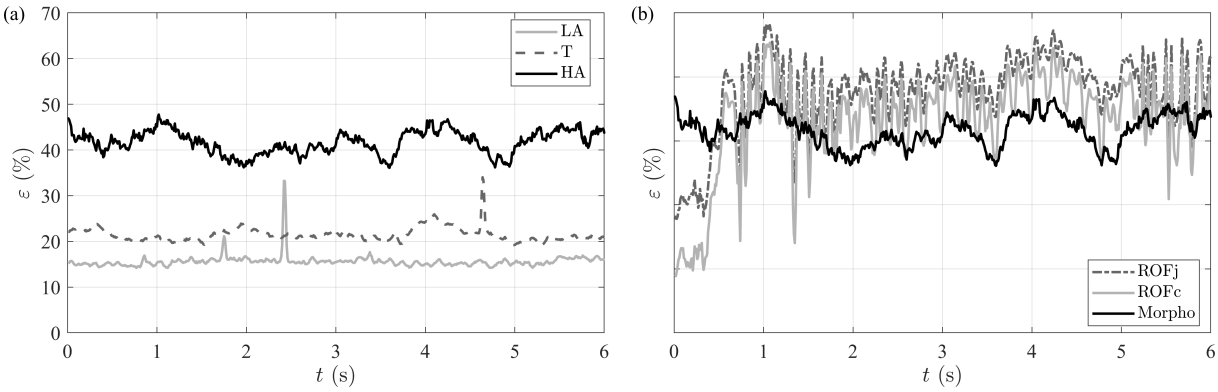


Figure 2. Évolution temporelle de la fraction totale de gaz ε. (a) Comparaison des résultats obtenus avec l'analyse morphologique pour les régimes de faible activité (LA), de transition (T) et de forte activité (HA). (b) Comparaison des résultats obtenus avec les différents algorithmes de traitement d'images pour le régime de forte activité (HA).

avec l'algorithme ROFj montrent des bulles de gaz pas complètement remplies par rapport aux résultats donnés par ROFc et l'analyse morphologique. Enfin, les algorithmes ROFc et en particulier ROFj font apparaitre davantage de petites bulles n'existant pas dans les données expérimentales. Ces artefacts peuvent modifier les résultats des propriétés notamment pour le régime LA où il y a moins de bulles à détecter. L'algorithme ROFc semble le plus prometteur pour la détection des bulles sur une image. Dans la section suivante, nous analysons les résultats obtenus lorsqu'on applique les algorithmes sur une série de 600 images (correspondant à 6 s dans l'expérience).

4.2 Stationnarité

La figure 2 (a) compare l'évolution temporelle de ε obtenue avec l'analyse morphologique pour les trois régimes. Les pics observés dans les régimes LA et T sont aisément identifiables et dus à un problème ponctuel de détection du programme. Si l'on excepte ces erreurs, on obtient un signal dont la valeur moyenne et les fluctuations augmentent avec l'activité, comme attendu physiquement. La figure 2 (b) montre l'évolution de ε pour les différentes méthodes dans le régime HA. Ces résultats mettent en évidence la présence de fluctuations brutales de la fraction de gaz estimée à partir des algorithmes ROFj et ROFc. Ce phénomène pourrait s'expliquer par une forte sensibilité des algorithmes ROFj et ROFc au réglage des paramètres de régularisation λ et α, sensibilité amplifiée par l'étape de binarisation. En effet les paramètres λ et α sont *fixés* pour l'ensemble de la série. Ainsi, d'une image à l'autre, ils peuvent brusquement s'avérer non satisfaisants.

Les valeurs moyennes et écarts-types de ε pour tous les configurations (régimes et méthodes) sont tracés dans la figure 3 (a). Ces résultats confirment que les fluctuations sont largement plus grandes pour ROFj et ROFc. On observe également que mis à part le cas LA, il y a un bon accord entre les 3 méthodes pour la valeur moyenne de ε. La figure 3 (b) présente les résultats pour le périmètre total. Il est intéressant de noter que le périmètre total présente un minimum dans le régime T, dans lequel les petites bulles du régime LA commencent à coalescer avant de former dans le régime HA une population de grosses bulles. Ces résultats sont à interpréter avec précaution suite aux critiques précédentes. Il est cependant intéressant de noter que l'algorithme ROFc reste le plus prometteur, car il reproduit de manière plus réaliste le contour et l'intérieur des bulles (Fig. 1 (b) et (c)). Une étude de sensibilité de cet algorithme aux paramètres d'entrée est en cours.

4.3 Statistique des bulles

Les algorithmes ROFj et ROFc nécessitant encore quelques ajustements, nous présentons ici les premiers résultats sur l'étude statistique des propriétés des bulles, basée sur l'analyse morphologique. La

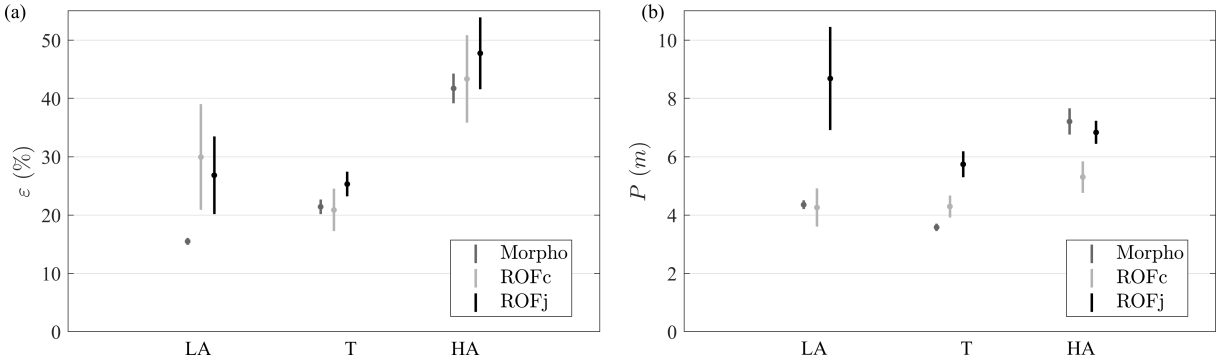


Figure 3. Valeurs moyennes et écarts-types obtenus avec les trois algorithmes de traitement d'images pour les différents régimes d'écoulement : (a) fraction totale de gaz, ε ; (b) périmètre total des bulles par image, P.

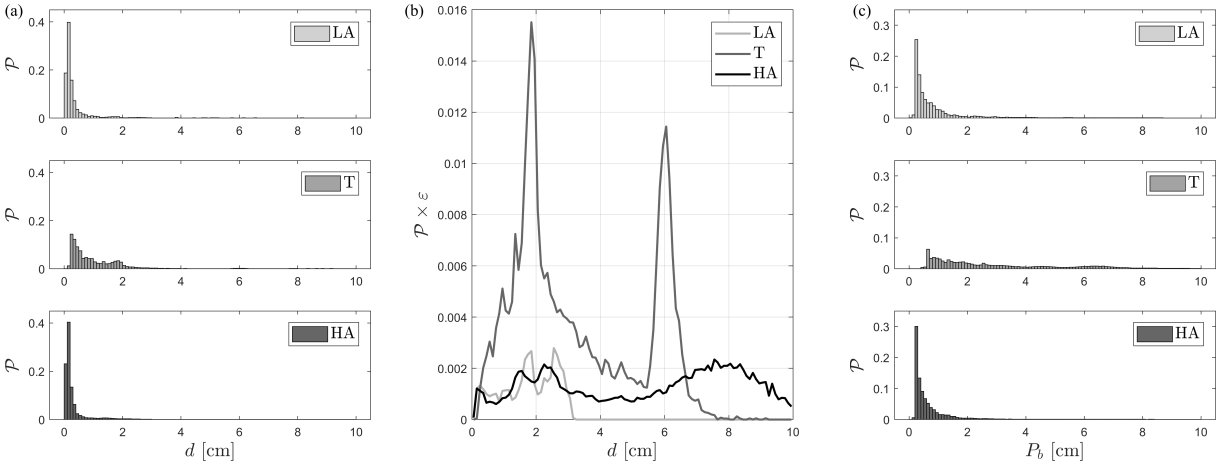


Figure 4. (a) Histogramme de la probabilité en nombre ($\mathcal{P}$) du diamètre des bulles pour les trois différents régimes. (b) Probabilité en nombre du diamètre des bulles pondérée par la fraction de gaz pour les trois différents régimes (équivalent à une probabilité en volume). (c) Histogramme de la probabilité en nombre du périmètre des bulles P_b pour les trois différents régimes.

figure 4 (a) présente les histogrammes de la probabilité en nombre ($\mathcal{P}$) du diamètre d des bulles. Pour les régimes LA et HA on observe de nombreuses bulles de petit diamètre. Une grande partie d'entre elles ont une taille inférieure à la longueur capillaire et peuvent correspondre soit à des artefacts d'analyse, soit à des bulles dont le diamètre ne peut plus être déduit de la surface apparente car il devient comparable ou inférieur à l'espacement entre les deux plaques de la cellule. Cet effet est moins visible pour le régime T, la distribution de probabilité est plus étalée et laisse apparaître des bulles de plus grand diamètre. Les petites bulles sont néanmoins prépondérantes en nombre. Cela complique l'analyse statistique et ne permet pas de caractériser la taille typique des bulles dans chaque régime. Les résultats sont sensiblement les mêmes pour le périmètre des bulles (Fig. 4 (c)).

Afin de s'affranchir de la présence de ces nombreuses petites bulles, on pondère la probabilité en nombre $\mathcal{P}$ par la fraction de gaz des bulles ε_b afin d'obtenir une probabilité en volume, $\mathcal{P} \times \varepsilon_\mathrm{b}$ (Fig. 4 (b)). Le régime LA est caractérisé par des bulles de 2 cm de diamètre typiquement. On voit ensuite apparaître une population de bulles plus grosses dans le régime T, $d \simeq 6$ cm. Pour ce régime la probabilité est la plus grande pour les deux populations de bulles. Ces résultats confirment bien la transition entre le régime de faible et de forte activité avec deux types de population de bulles. Le régime HA est quant à lui caractérisé par des bulles plus grosses ($d \simeq 8$ cm) mais conserve une population de petites bulles

($d \simeq 2$ cm). On peut intuiter une disparition de cette population de petites bulles avec une augmentation de l'activité (des débits gaz et/ou liquide).

5 Conclusion

L'étude expérimentale d'un écoulement gaz–liquide dans un milieu poreux en cellule de Hele-Shaw permet de mettre en évidence différents régimes hydrodynamiques par visualisation directe de l'écoulement suivant la valeur du débit de gaz et de liquide. Les images acquises par la caméra sont analysées par trois algorithmes de traitement d'images différents dont les résultats sont comparés. Ces méthodes d'analyse permettent de distinguer la position des phases liquide et gaz dans l'écoulement. L'outil d'analyse morphologique, le plus simple des trois, montre de bonnes performances dans la détection des bulles malgré des contours des bulles très segmentés, empêchant une quantification correcte des périmètres. Parmi les deux autres algorithmes, basés sur la détermination de régularité locale et la variance, l'algorithme ROFc permet d'obtenir des résultats plus précis. Bien qu'il montre en l'état des fluctuations importantes sur l'estimation de la quantité de gaz dans le système, son développement et son utilisation semblent prometteurs et font l'objet des perspectives de ce travail.

L'analyse des propriétés statistiques des bulles met en évidence les limitations actuelles des algorithmes ROFj et ROFc par rapport à l'analyse morphologique. Cette dernière montre une évolution temporelle plus stable de la fraction de gaz dans le système pour les différents régimes. Le calcul du périmètre total par image montre que le régime de transition se caractérise par une diminution du périmètre par rapport aux deux autres régimes. Enfin, une étude statistique plus poussée montre la transition entre une population de petites bulles dans le régime à faible activité, et une population de grosses bulles dans le régime de forte activité, avec une coexistence marquée dans le régime de transition.

Références

1. J.-N. Tourvieille, R. Philippe & C. De Bellefon, Milli-channel with metal foams under an applied gas–liquid periodic flow: External mass transfer performance and pressure drop, *Chem. Eng. J.*, **267**, 332–346 (2015).
2. K. R. Newman *et al.*, Active methane venting observed at giant pockmarks along the U.S. mid-Atlantic shelf break, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **267**, 341–352 (2008).
3. F. J. Navarro-Brull & R. Gómez, Modeling pore-scale two-phase flow: How to avoid gas-channeling phenomena in micropacked-bed reactors via catalyst wettability modification, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **57**, 84–92 (2017).
4. G. Varas, G. Ramos, J.-C. Géminard & V. Vidal, Flow and fracture in water-saturated, unconstrained granular beds, *Front. Phys.*, **3**, 44 (2015).
5. C. P. Stemmet, J. Van Der Schaaf, B. F. M. Kuster & J. C. Schouten, Solid foam packings for multiphase reactors: Modelling of liquid holdup and mass transfer, *Chem. Eng. Res. Design*, **84**, 1134–1141 (2006).
6. R. R. Zapico, P. Marín, F. V. Díez & S. Ordóñez, Liquid hold-up and gas–liquid mass transfer in an alumina open-cell foam, *Chem. Eng. Sci.*, **143**, 297–304 (2016).
7. Y. Liu, D. Edouard, L. D. Nguyen, D. Begin, P. Nguyen, C. Pham & C. Pham-Huu, High performance structured platelet milli-reactor filled with supported cobalt open cell SiC foam catalyst for the Fischer–Tropsch synthesis, *Chem. Eng. J.*, **222**, 265–273 (2013).
8. M. Serres, *Étude hydrodynamique d'un écoulement gaz-liquide dans un milieu poreux confiné*, Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, Université de Lyon (2017).
9. B. Pascal, N. Pustelnik, P. Abry, M. Serres & V. Vidal, Joint estimation of local variance and local regularity for texture segmentation. Application to multiphase flow characterization, in *25th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Calgary, Canada, pp. 2092–2096 (2018).

Simulation de la densité limite de champ moyen pour des populations hétérogènes avec interactions

Antonin Della Noce[1], Amélie Mathieu[2] & Paul-Henry Cournède[1]

[1] Laboratoire MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, 9 rue Joliot-Curie, 91190, Gif-sur-Yvette
[2] UMR ÉcoSys, INRA AgroParisTech, Route de la ferme, 78850 Thiverval-Grignon
antonin.della-noce@centralesupelec.fr

Résumé. Les modèles de populations hétérogènes considérés ici consistent en des systèmes dynamiques dont les conditions initiales sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec autant d'équations qu'il y a d'individus dans la population, et dont les interactions sont exprimées par un potentiel régulier. La distribution de champ moyen, caractérisant la dynamique d'une population avec une infinité d'individus, est alors bien définie. Une méthode pour la simulation numérique, basée sur la régression par processus gaussiens, est présentée puis appliquée sur un modèle de plantes en compétition pour la lumière.

Abstract. The heterogeneous population models considered here consist in dynamical systems, whose initial conditions are independent and identically distributed random variables, representing trajectories of individuals interacting with each other through a potential function. The mean-field distribution characterizing the dynamics of an infinitely-crowded population is then well-defined. A methodology to estimate this distribution, based on Gaussian processes regression, is presented and applied to a models of plants population in competition for light.

Introduction

Soit $\mathcal{X}$ un espace euclidien et Θ, un espace polonais de dimension finie. On considère une fonction $g : \mathcal{X} \times \Theta \times \mathcal{X} \times \Theta \to \mathcal{X}$, que nous appelons dans la suite fonction de transition, et μ_0 une mesure de probabilité sur $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \Theta$. Une population hétérogène de taille $N > 1$ est représentée par un système dynamique dont les conditions initiales sont des variables aléatoires échantillonnées de manière indépendante selon la distribution μ_0 et dont la dynamique est décrite par la fonction g :

$$\begin{aligned} &(X_i^0, \theta_i)_{1\leq i\leq N} \sim \mu_0^{\otimes N} \text{ le produit tensoriel de la mesure } \mu_0, \\ &\forall i \in \{1, ..., N\}, \begin{cases} X_i(0) = X_i^0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \dfrac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{1}{N-1} \displaystyle\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} g(X_i(t), \theta_i, X_j(t), \theta_j). \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Dans certain cas, g peut être vue comme une force résultant de l'interaction entre deux particules dans la population. Cette interaction dépend de l'état X_i de l'individu i (e.g. sa position, sa vitesse, ...), mais également de caractéristiques intrinsèques à l'individu regroupées dans la variable $\theta_i \in \Theta$ (e.g. sa masse, sa couleur,...), qui sont variables d'un individu à l'autre selon la distribution μ_0 mais que l'on considère constantes au cours du temps. Si la distribution μ_0^θ de la variable aléatoire θ est non réduite à une distribution de Dirac, la population est dite hétérogène dans le sens où elle met en relation des individus différents. Ce formalisme est particulièrement pertinent quand le système modélisé consiste en un ensemble d'êtres vivants, avec une plus ou moins grande diversité génétique.

L'équation (1) implique une équation de transport sur la mesure empirique de la population, définie par $\mu_N[t] = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i(t)}$. Cette équation s'exprime sous sa forme faible de la manière suivante : pour toute fonction test $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ (i.e. infiniment dérivable et à support compact) et tout temps $T \in \mathbb{R}_+$

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

on a

$$\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,X,\theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial X}(t,X,\theta).\left(\frac{N}{N-1} \int_{\mathcal{Z}} g(X,\theta,X',\theta')\mu_N[t](\mathrm{d}X',\mathrm{d}\theta') \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{N-1} g(X,\theta,X,\theta) \right) \right] \mu_N[t](\mathrm{d}X,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{Z}} \varphi(T,X,\theta)\mu_N[T](\mathrm{d}X,\mathrm{d}\theta) - \int_{\mathcal{Z}} \varphi(0,X,\theta)\mu_N[0](\mathrm{d}X,\mathrm{d}\theta). \tag{2}$$

Ainsi la dynamique de la population avec un nombre infini d'individus ($N = +\infty$) peut être vue comme la solution du problème dont la formulation faible est obtenue en passant formellement à la limite en N dans l'équation (2). On cherche alors l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu[t] \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ à valeurs dans l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{Z}$, telle que pour toute fonction test φ et pour tout temps $T \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,X,\theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial X}(t,X,\theta).\int_{\mathcal{Z}} g(X,\theta,X',\theta')\mu[t](\mathrm{d}X',\mathrm{d}\theta') \right] \mu[t](\mathrm{d}X,\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\mathcal{Z}} \varphi(T,X,\theta)\mu[T](\mathrm{d}X,\mathrm{d}\theta) - \int_{\mathcal{Z}} \varphi(0,X,\theta)\mu_0(\mathrm{d}X,\mathrm{d}\theta) \tag{3}$$

Si l'on est en mesure de démontrer que pour tout temps t la mesure $\mu[t]$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{\otimes d_z}$ sur $\mathcal{Z}$, et que l'on note $(X,\theta) \in \mathcal{Z} \mapsto f(t,z) \in \mathbb{R}_+$ la densité associée à $\mu[t]$, et que celle-ci est suffisamment régulière, la formulation (3) entraîne, par intégration par parties, la formulation forte suivante bien plus évocatrice, assez similaire à l'équation de Vlasov pour les plasmas

$$\forall (X,\theta) \in \mathcal{Z},\ \begin{cases} f(0,X,\theta) = f_0(X,\theta) \text{ la densité associée à } \mu_0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,X,\theta) + \mathrm{div}_X \left[f(t,X,\theta) \displaystyle\int_{\mathcal{Z}} g(X,\theta,X',\theta') f(t,X',\theta')\lambda^{\otimes d_z}(\mathrm{d}X',\mathrm{d}\theta') \right] = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Les équations (1), (2) et (3) correspondent à différents niveaux d'observation du système : l'équation (1) est à une échelle individuelle ; l'équation (2) décrit la dynamique d'un nuage de points où les individus ne sont plus distingués entre eux ; enfin l'équation (3) se place à une échelle *macroscopique* où l'ensemble de la population est perçue comme un continuum. Être en mesure de résoudre numériquement le problème (3) peut permettre d'approcher la dynamique d'une grande population sans avoir à simuler l'ensemble des individus la constituant. La section 1 donne un exemple de modèle de population hétérogène issu de [1]. La section 2 donne une résolution théorique du problème (3), basée sur la méthode des flots caractéristiques [3], dans le cas particulier du modèle présenté en section 1. Ces développements orientent vers une certaine méthodologie pour la simulation numérique décrite dans la section 3.

1 Exemple du modèle de Schneider pour la croissance de plantes en compétition

Nous spécifions les propos de l'introduction sur un exemple simple. L'article [1] propose une série de modèles pour décrire la croissance de populations de plantes (*Arabidopsis thaliana*) en compétition. Nous avons choisi le modèle qui avait le plus de pertinence statistique, tout en ayant de bonne propriété de régularité. Ces modèles de compétition ont ensuite été repris dans [3] pour rendre compte de la dynamique d'une forêt sur plusieurs décennies.

Dans ce modèle, dont le paramétrage est donné dans la figure 1, la croissance d'une plante isolée est donnée par l'équation différentielle suivante sur sa taille s :

$$\begin{cases} s(0) = s^0 \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \gamma(S - s(t)) \end{cases} \tag{5}$$
$$\Rightarrow s(t) = S - (S - s^0)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

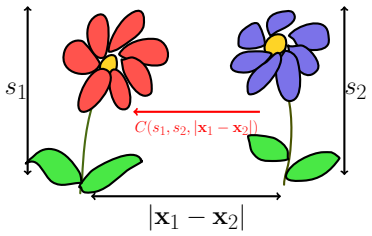


Figure 1. Paramétrage du modèle de Schneider : la *compétition* exercée par la plante 2 sur la plante 1 est notée $C(s_1, s_2, |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$. Elle dépend des tailles des parties aériennes des deux plantes, s_1 et s_2, et de leur distance $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$.

Cette croissance est paramétrée par des caractéristiques propres que sont γ, le taux de croissance, et S la taille d'équilibre de la plante. En présence de plantes concurrentes, l'équation (5) est modifiée : la taille de la plante $i \in \{1, ..., N\}$ est influencée par les tailles des autres plantes dans la population via l'équation

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, ..., N\}, \begin{cases} s_i(0) = s^0 \\ \dfrac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t}(t) = \gamma_i \left[S_i \left(1 - \dfrac{1}{N-1} \displaystyle\sum_{1 \le j \le N, j \ne i} C(s_i(t), s_j(t), |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \right) - s_i(t) \right] \end{cases} \\ &\text{avec } C(s_1, s_2, |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \frac{s_2}{2S_M \left[1 + \dfrac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}{\sigma_x^2} \right]} \left[1 + \tanh\left(\frac{s_2 - s_1}{\sigma_s} \right) \right] \end{aligned} \tag{6}$$

Le terme de compétition C est normalisé de manière à être une grandeur sans dimension à valeur dans $[0; 1]$: la compétition exercée par la plante 2 sur la plante 1 est d'autant plus importante que la plante 2 est grande dans l'absolu, est grande par rapport à la plante 1 et enfin qu'elle est proche de la plante 1. Les paramètres propres à l'individu dans ce modèle sont $\theta = (\mathbf{x}, S, \gamma) \in \Theta = [0; L]^2 \times [S_m; S_M] \times [\gamma_m; \gamma_M]$ avec L, S_m, S_M, γ_m, γ_M des constantes connues. On suppose qu'ils sont distribués dans la population comme des échantillons i.i.d. d'une densité p_0^θ. Nous avons choisi cette expression pour la densité p_0^θ :

$$\begin{aligned} &\forall (x, y, S, \gamma) \in \Theta,\ p_0^\theta(x, y, S, \gamma) = \frac{\mathbb{I}\{0 \le x, y \le L\}}{L^2} . \frac{\mathbb{I}\{S_1(x) \le S \le S_2(x)\}}{\sigma_s} . \frac{\mathbb{I}\{\gamma_1(y) \le \gamma \le \gamma_2(y)\}}{\sigma_\gamma} \\ &\text{où} \quad S_1(x) = S_m + \frac{x}{L}(S_M - \sigma_s - S_m),\ S_2(x) = S_1(x) + \sigma_s, \\ &\qquad \gamma_1(y) = \gamma_m + \frac{y}{L}(\gamma_M - \sigma_\gamma - \gamma_m),\ \gamma_2(y) = \gamma_1(y) + \sigma_\gamma. \end{aligned} \tag{7}$$

Cette densité signifie que les plantes sont réparties uniformément sur le carré $[0; L]^2$, que les plantes proches de $x = L$ ont tendance à avoir une grande taille d'équilibre et que les plantes proches de $y = L$ ont tendance à avoir une croissance rapide. Ainsi la distribution initiale de la population est $\mu_0 = \delta_{s^0} \otimes \left(p_0^\theta \lambda^{\otimes 4}\right)$ car la taille initiale est constante égal à s^0.

2 Résolution théorique et propagation du chaos

Par souci de concision, nous présenterons la résolution théorique de l'équation (3) dans le cas du modèle de Schneider, qui ne correspond pas tout à fait au cas général, car la distribution marginale de l'état initial est un Dirac (centré en s^0). On a dans ce cas particulier $g : (s, \theta, s', \theta') \in \mathbb{R} \times \Theta \times \mathbb{R} \times \Theta \mapsto \gamma(S(1 - C(s, s', |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)) - s)$.

Pour résoudre le problème de transport (3), on peut considérer l'équation de l'évolution de la taille $s(t,\theta)$ d'un individu en compétition avec un continuum d'individus [3].

$$\forall \theta \in \Theta, \begin{cases} \mathbf{s}(0,\theta) = s^0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \dfrac{\partial s}{\partial t}(t,\theta) = \displaystyle\int_\Theta g(s(t,\theta),\theta,s(t,\theta'),\theta') p_0^\theta(\theta') \lambda^{\otimes 4}(\mathrm{d}\theta') \end{cases} \tag{8}$$

On peut voir en cette équation la version continue de l'équation (6), où la moyenne empirique est remplacée par l'espérance théorique. On peut démontrer que l'équation fonctionnelle (8) admet une unique solution $(t,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \Theta \mapsto s(t,\theta)$. La preuve consiste en une généralisation du théorème Cauchy–Lipschitz à des équations différentielles dont la condition initiale est une distribution de probabilité, et dont l'inconnue évolue dans un espace euclidien classique. Le flot caractéristique $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto s(t,\theta)$ est la taille d'un individu au sein d'une population infinie, cet individu ayant une position, une taille d'équilibre isolée et une vitesse de croissance données par θ. Il permet donc de déterminer la dynamique de l'ensemble du continuum. On peut ainsi montrer que si $\mu[t]$ est la distribution de la variable aléatoire $(s(t,\theta),\theta)$, avec θ une variable aléatoire de densité p_0^θ, alors $t \mapsto \mu[t]$ est l'unique solution du problème (3) dans le cas du modèle de Schneider. Il découle de ce résultat une expression de l'action de $\mu[t]$ sur les fonctions test φ

$$\int_{\mathbb{R}\times\Theta} \varphi(s,\theta)\mu[t](\mathrm{d}s,\mathrm{d}\theta) = \int_\Theta \varphi(s(t,\theta),\theta) p_0^\theta(\theta)\lambda^{\otimes 4}(\mathrm{d}\theta). \tag{9}$$

On pose $s_1(t;\theta_1,...,\theta_N)$ la variable aléatoire donnant la taille de l'individu 1 dans une population finie de caractéristiques $(\theta_1,...,\theta_N)$, elles-mêmes variables aléatoires indépendantes de densité p_0^θ. On a alors la convergence presque sûre suivante

$$s_1(t;\theta_1,...,\theta_N) \underset{N\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} s(t,\theta_1). \tag{10}$$

Cela implique en particulier que les individus interagissant avec une population infinie sont indépendants, alors qu'ils ne le sont pas pour une population de taille finie. Cette propriété de factorisation asymptotique, appelée propagation du chaos, offre un autre attrait à la simulation de la distribution de champ moyen $\mu[t]$, pouvant permettre de simplifier l'inférence statistique sur un grand système complètement corrélé du fait de l'interaction de ses constituants.

3 Méthode numérique

La méthode numérique choisie ici s'inspire largement de la méthode des caractéristiques utilisées dans la résolution théorique de l'équation (8). Cette méthodologie n'a pas recours à un maillage, car l'espace Θ est de dimension 4. La preuve de consistance de ce schéma est un travail en cours. Bien que les simulations numériques semblent encourageantes, et malgré notre ferme intuition sur la consistance de cette méthode, nous incitons à une certaine prudence quant aux résultats présentés. Le fait que g soit non linéaire par rapport aux états s et s' rend la tâche plus complexe : dans le cas opposé, si g est linéaire par rapport aux variables d'états, on peut démontrer que le flot caractéristique est une fonction linéaire de l'état ; la résolution numérique revient alors à identifier les coefficients.

Partons de l'équation (8) et considérons le schéma d'Euler explicite associé à cette équation intégro-différentielle. Pour un pas de temps $\Delta t > 0$ choisi suffisamment petit (la condition CFL n'est pas encore déterminée), on considère la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par l'équation de récurrence suivante :

$$\forall \theta \in \Theta, \begin{cases} s_0(\theta) = s^0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ s_{n+1}(\theta) = s_n(\theta) + \Delta t \displaystyle\int_\Theta g(s_n(\theta),\theta,s_n(\theta'),\theta') p_0^\theta(\theta)\lambda^{\otimes 4}(\mathrm{d}\theta'). \end{cases} \tag{11}$$

Cette suite de fonctions ne peut être calculée exactement en pratique du fait que l'intégrale n'est pas analytique. On peut en revanche avoir une estimation précise de $s_n(\theta)$ en remplaçant l'intégrale par une

moyenne empirique sur un échantillon de la loi p_0^θ. Soit $\omega_N = (\theta_i^\omega)_{1\leq i\leq N}$ une collection de variables aléatoires de même loi p_0^θ et mutuellement indépendantes. On considère la suite de fonctions aléatoires paramétrées par ω_N, $(s_n(\cdot,\omega_N))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est définie par l'équation de récurrence suivante

$$\forall\theta\in\Theta,\ \begin{cases} s_0(\theta,\omega_N) = s^0, \\ s_n(\theta,\omega_N) = s_n(\theta,\omega_N) + \dfrac{\Delta t}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N g(s_n(\theta,\omega_N),\theta,s_n(\theta_i^\omega),\theta_i^\omega). \end{cases} \tag{12}$$

Cette fonction $s_n(\cdot,\omega_N)$ est a priori un bon estimateur de la fonction déterministe s_n pour une grande taille d'échantillon N, mais elle ne permet pas d'avoir une vision globale de la fonction s_n sur l'ensemble de l'espace Θ, car avoir une estimation de la valeur de $s_{n_0}(\theta_0)$ pour un certain entier n_0 et un certain θ_0 nécessite de calculer toutes les valeurs antérieures $s_1(\theta_0,\omega_N),...,s_{n_0-1}(\theta_0,\omega_N)$. Nous allons donc restreindre l'évaluation de la fonction $s_n(\cdot,\omega_N)$ sur un ensemble fixe de taille raisonnable $\Theta_{1:M} = (\theta_j)_{1\leq j\leq M}$, que nous appellerons ensemble d'apprentissage, puis étendre ces valeurs à l'ensemble de l'espace Θ par interpolation. Le choix de la base de fonctions d'interpolation est important si l'on souhaite que l'information se propage efficacement des points $\Theta_{1:M}$ à l'espace Θ. Dans notre cas, ce choix a été motivé par une approximation de la distribution de la variable aléatoire $s_n(\theta,\omega_N)$, approximation permettant de placer le problème d'interpolation dans le cadre de la régression par processus gaussiens [4]. Nous faisons donc l'approximation suivante pour N suffisamment grand :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\theta\in\Theta,\ s_n(\theta,\omega_N)\sim\mathcal{N}\left(s_n(\theta),\frac{\Delta t^2}{N}\mathrm{Var}_{\theta'}(g(s_{n-1}(\theta),\theta,s_{n-1}(\theta'),\theta')\right). \tag{13}$$

Cette approximation semble justifiée par le théorème de la limite centrale, cela est vrai pour $n=1$, mais faux pour $n\geq 2$. En revanche, cette approximation remplit un certain nombre de conditions cohérentes avec l'intuition que l'on peut se faire de la suite $(s_n(\cdot,\omega_N))_{n\in\mathbb{N}}$, essentiellement au niveau de l'expression de la variance : les fluctuations de la variable $s_n(\theta,\omega_N)$ sont d'autant plus faible que Δt est petit et que N est grand, enfin cette expression de la variance serait exacte si la fonction g et s_{n-1} étaient linéaires. Le rôle de cette approximation est plus d'orienter le choix de la base d'interpolation. On choisit ainsi le noyau d'interpolation suivant

$$\forall\theta,\theta'\in\Theta,\ k_n(\theta,\theta') = \frac{\Delta t^2}{N}\widehat{\mathrm{Cov}}_{\theta_1}(g(m^s(\theta,\beta_{n-1}),\theta,m^s(\theta_1,\beta_{n-1}),\theta_1),g(m^s(\theta',\beta_{n-1}),\theta',m^s(\theta_1,\beta_{n-1}),\theta_1)) \tag{14}$$

où $\widehat{\mathrm{Cov}}_{\theta_1}$ est la covariance empirique que l'on peut évaluer en utilisant l'échantillon ω_N, et m_n^s est une fonction paramétrique identifiée en minimisant l'erreur de moindre carré sur l'échantillon ω_N.

$$\beta_n = \underset{\beta}{\mathrm{argmin}}\ \sum_{i=1}^N (m^s(\theta_i^\omega,\beta) - s_n(\theta_i^\omega,\omega_N))^2. \tag{15}$$

Nous avons choisi dans notre cas une fonction quadratique pour m^s, soit $\beta = (b,\mathbf{v},B)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4\times\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $m^s(\theta,\beta) = b + \mathbf{v}^\mathsf{T}\theta + \mathrm{Tr}\left(B^\mathsf{T}\theta\theta^\mathsf{T}\right)$. Cette première approximation paramétrique a l'avantage de capturer précisément les variations de la fonction $\theta\mapsto s_n(\theta,\omega_N)$ et d'être simple à identifier. On fait ainsi un nouveau niveau d'approximation en substituant les fonctions $m^s(\cdot,\beta_n)$ aux fonctions s_n dans la distribution supposée dans l'équation (13). En fin de compte si l'on considère la distribution jointe du vecteur aléatoire $(s_n(\theta,\omega_N);s_n(\Theta_{1:M},\omega_N))$ pour $\theta\in\Theta$ et $s_n(\Theta_{1:M},\omega_N) = (s_n(\theta_j,\omega_N))_{1\leq j\leq N}$, on a

$$\begin{pmatrix} s_n(\theta,\omega_N) \\ s_n(\Theta_{1:M},\omega_N)\end{pmatrix}\sim\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} m^s(\theta,\beta_n) \\ m^s(\Theta_{1:M},\beta_n)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} k_n(\theta,\theta) & k_n(\theta,\Theta_{1:M}) \\ k_n(\theta,\Theta_{1:M}) & k_n(\Theta_{1:M},\Theta_{1:M})\end{pmatrix}\right). \tag{16}$$

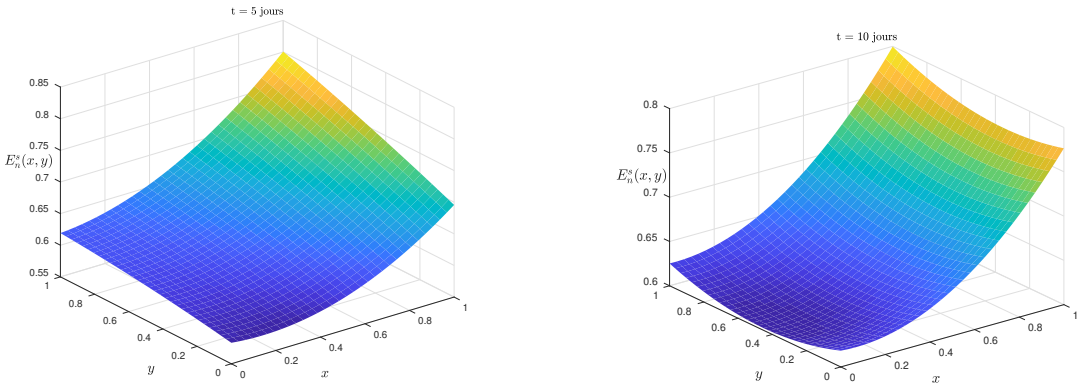
À partir du calcul des valeurs de $s_n(\Theta_{1:M},\omega_N)$, on peut ainsi en déduire la distribution de $s_n(\theta,\omega_N)$ connaissant ces valeurs en effectuant un conditionnement au sein d'un vecteur gaussien, soit

$$\begin{aligned} &s_n(\theta,\omega_N)|s_n(\Theta_{1:M},\omega_N)\sim\mathcal{N}\big[m^s(\theta,\beta_n) + k_n(\theta,\Theta_{1:M})k_n(\Theta_{1:M},\Theta_{1:M})^{-1}(s_n(\Theta_{1:M},\omega_N) - m^s(\Theta_{1:M},\beta_n)), \\ &k_n(\theta,\theta) - k_n(\theta,\Theta_{1:M})k_n(\Theta_{1:M},\Theta_{1:M})^{-1}k_n(\Theta_{1:M},\theta)\big] \end{aligned} \tag{17}$$

L'estimateur final de la fonction s_n peut être pris comme la moyenne de cette distribution conditionnelle, que l'on peut noter $\tilde{s}_n(\theta, \omega_N)$ et qui a la forme suivante

$$\begin{aligned} &\tilde{s}_n(\theta, \omega_N) = m^s(\theta, \beta_n) + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j k_n(\theta, \theta_j), \\ &\text{où} \quad (\alpha_1, ..., \alpha_M)^\mathsf{T} = k_n(\Theta_{1:M}, \Theta_{1:M})^{-1}(s_n(\Theta_{1:M}, \omega_N) - m^s(\Theta_{1:M}, \beta_n)). \end{aligned} \tag{18}$$

Les graphes qui suivent présentent l'évolution de la surface $(x, y) \in [0; L]^2 \mapsto E_n^s(x, y) = \mathbb{E}_\theta\left(\tilde{s}_n(\theta, \omega_N)|x, y\right)$, l'espérance de la taille des plantes conditionnellement à leur position, avec l'itération du schéma n.



(a) $t = 5$ jours (b) $t = 10$ jours

Figure 2. Ces simulations ont été réalisées avec la configuration suivante : $\Delta t = 0{,}1$ jours, $N = 100$, $M = 100$, $L = 1$ m, $S_m = 0{,}8$ m, $S_M = 1$ m, $\gamma_m = 0{,}1$ jour^{-1}, $\gamma_M = 1$ jour^{-1}, $s^0 = 0{,}5$ m

Conclusion et perspectives

Les simulations réalisées sur l'exemple simple du modèle de Schneider sont prometteuses : la comparaison de $\tilde{s}_n(\theta, \omega_N)$ et de $s_n(\theta, \omega_N)$ sur un ensemble test de θ, n'ayant pas servi à l'interpolation, donnent des erreurs relatives inférieures à 10^{-3} % en moyenne. En revanche, l'analyse de stabilité et de consistance du schéma numérique proposé reste à faire. Dans le cas plus complexe où l'état initial admet une densité de probabilité, il ne s'agit pas seulement de reconstruire le flot caractéristique, mais également sa fonction réciproque, et la question du choix d'une *bonne* base de fonctions d'interpolation se pose. Cette méthode permettant de simuler en temps raisonnables les distributions limite de champ moyen ouvre des perspectives pour l'inférence statistique de modèle de populations avec interactions utilisant des approximations variationnelles.

Références

1. M. Schneider , R. Law & J. Ilian, Quantification of neighbourhood-dependent plant growth by Bayesian hierarchical modelling, *J. Ecol.*, **94**, 310–321 (2006).
2. F. Golse, On the dynamics of large particle systems in the mean field limit, in *Journées équations aux dérivées partielles*, 1–47 (2013).
3. Y. Nakagawa, M. Yokozawa & T. Hara, Competition among plants can lead to an increase in aggregation of smaller plants around larger ones, *Ecol. Modell.*, **301**, 41–53 (2015).
4. C. E. Rasmussen, Gaussian processes in machine learning, in *Advanced Lectures on Machine Learning: ML Summer Schools 2003*, Springer, pp. 63–71 (2003).

Dynamiques transitoires de sillage dans le « pinball fluidique »

Nan Deng[1,2], Luc R. Pastur[1], Bernd R. Noack[2,3,4], Guy Cornejo-Maceda[2], François Lusseyran[2], Jean-Christophe Loiseau[5] & Marek Morzyński[6]

[1] IMSIA – UMR9219 , ENSTA ParisTech, Palaiseau, France
[2] LIMSI – CNRS, Université Paris Saclay, Orsay, France
[3] Harbin Institute of Technology, China
[4] Tecnische Universität Berlin, Allemagne
[5] Laboratoire DynFluid, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, France
[6] Poznan University of Technology, Pologne
nan.deng@ensta-paristech.fr

Résumé. Nous nous intéressons à la dynamique transitoire d'une configuration fluide formée de trois cylindres fixes distribués sur un triangle équilatéral en écoulement transverse (« pinball fluidique »), pour différentes valeurs du nombre de Reynolds sur la route vers le chaos. Nous étudions plus particulièrement l'action des degrés de liberté élémentaires du système dynamique sous-jacent sur les coefficients de traînée et de portance de l'écoulement fluide.

Abstract. In this work, we are interested in the transient dynamics of a fluid configuration consisting of three fixed cylinders whose axes distribute over an equilateral triangle in transverse flow ("fluidic pinball"). As the Reynolds number is increased on the route to chaos, its transient dynamics tells us about the contribution of the elementary degrees of freedom of the system to the lift and drag coefficients.

1 Introduction

La configuration d'écoulement dite du « pinball fluidique » a été récemment introduite avec l'objectif de proposer un système à la fois simple et rapide à simuler numériquement pour expérimenter différentes techniques de contrôle en mécanique des fluides, et suffisamment riche pour tester les problèmes liés aux entrées et sorties multiples dans ces systèmes, dont la dynamique est intrinsèquement non-linéaire et la dimension de l'espace des états virtuellement infinie (équations de Navier–Stokes). Il s'agit de trois cylindres disposés sur les sommets d'un triangle équilatéral en écoulement transverse, dont les actionneurs sont les cylindres eux-mêmes, susceptibles de tourner sur leur axe propre, tandis que les capteurs sont des sondes de vitesse ou de pression placées dans le sillage ou à la surface des cylindres [2]. La dynamique *naturelle*, non forcée, de cette configuration d'écoulement s'est révélée étonnamment riche [3]. C'est ce que nous souhaitons mettre en évidence dans cette contribution, où les dynamiques transitoires du système dynamique sous-jacent, étudiées du point de vue des coefficients de portance et de traînée du système fluide, sont instructives quant aux mécanismes à l'œuvre dans l'écoulement. C'est en particulier le cas vis-à-vis des deux bifurcations, Hopf puis fourche supercritiques, subies par le système, pour des nombres de Reynolds croissants, sur sa route vers le chaos.

2 Configuration d'écoulement

La configuration géométrique, bi-dimensionnelle dans le plan (x, y), est constituée de trois cylindres fixes de diamètre D montés sur les sommets d'un triangle équilatéral de côté $3D/2$, cf figure 1. L'écoulement amont, de vitesse uniforme U_∞ en entrée du domaine, est transverse, en incidence nulle sur le cylindre amont. La résolution des équations de Navier–Stokes s'appuie sur une méthode de discrétisation en éléments finis du second ordre de type Taylor–Hood [3], sur une grille non structurée de 4 225 triangles et 8 633 sommets, et une intégration implicite en temps du troisième ordre [1, 2]. Le nombre de Reynolds est défini par $\mathrm{Re} = U_\infty D/\nu$, où ν est la viscosité cinématique du fluide. La condition de sortie

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

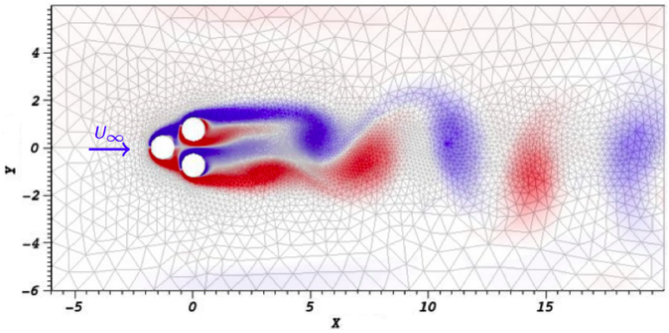


Figure 1. Configuration dite du « pinball fluidique » et dimensions du domaine simulé. Un champ typique de vorticité est représenté en couleur. La vitesse amont est notée U_∞.

est à contrainte nulle. Le coefficient de portance $C_\mathrm{L} = 2F_\mathrm{L}/\rho U_\infty^2$ est calculé à partir de la résultante F_L des forces de pression qui s'exercent sur les trois cylindres. Le coefficient de traînée C_D inclut dans la résultante des forces de traînée la contribution de la contrainte pariétale visqueuse.

3 Route vers le chaos

La route vers le chaos dans cette configuration fait apparaître une première bifurcation de Hopf supercritique pour $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_\mathrm{HP} \approx 20$, associée au lâcher cyclique de tourbillons contra-rotatifs dans le sillage des trois cylindres à partir des couches cisaillées qui délimitent la configuration, formant une allée de tourbillons de von Kármán. Pour la valeur critique $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_\mathrm{FC} \approx 70$, le système subit une bifurcation fourche supercritique associée à une brisure de symétrie du champ moyen, le jet entre les deux cylindres aval étant défléchi vers le haut ou le bas. À $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_\mathrm{QP} \approx 100$, la dynamique devient quasi-périodique, avec des modulations basse fréquence de la position du jet. Enfin, pour $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_\mathrm{CH} \approx 115$, la dynamique du système est pleinement chaotique et le champ moyen retrouve sa symétrie initiale [6].

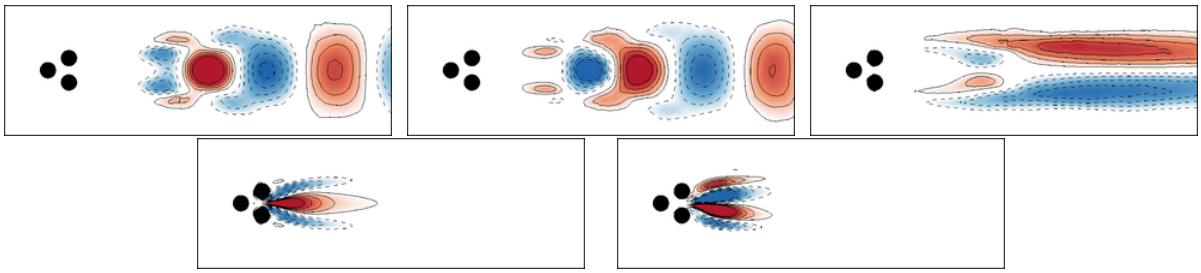


Figure 2. Champs de vorticité des modes $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_3(\mathbf{x})$ (en haut), $\mathbf{u}_4(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_5(\mathbf{x})$ (en bas), associés aux cinq degrés de liberté élémentaires $\{a_1(t) - a_5(t)\}$, à $\mathrm{Re} = 80$.

Deng *et al.* (2019) ont montré que la dynamique de l'écoulement fluide résultant de la bifurcation de Hopf supercritique pouvait être décrite par trois degrés de liberté a_1, a_2, a_3, associés aux modes $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_3(\mathbf{x})$ de la figure 2. Les deux premiers degrés de liberté $a_{1,2}(t)$ sont associés aux oscillations de l'écoulement et à l'allée de von Kármán. Le troisième degré de liberté $a_3(t)$ rend compte de la distorsion de l'état de base par les fluctuations $a_{1,2}$, via le tenseur de Reynolds, depuis l'état de base stationnaire symétrique instable jusqu'au champ moyen asymptotique [4,5]. La bifurcation fourche supercritique peut quant à elle être décrite par deux degrés de liberté supplémentaires a_4, a_5, associés aux modes $\mathbf{u}_4(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_5(\mathbf{x})$ de la figure 2. Les degrés de liberté a_4, a_5, sont responsables de la brisure de symétrie induite par la bifurcation fourche. Les champs de vitesse associés aux degrés de liberté a_3 et a_5 sont symétriques, tandis que ceux associés à a_1, a_2 et a_4 sont anti-symétriques. Les modes $\{\mathbf{u}_i\}$ sont orthogonaux entre eux ; tous

les détails sur leur construction sont donnés dans [3]. Au seuil de la bifurcation fourche, la dynamique de l'écoulement peut être décrite par le modèle réduit minimal à cinq degrés de liberté [3] :

$$\dot{a}_1 = \sigma(a_3)a_1 + \omega(a_3)a_2, \tag{1}$$
$$\dot{a}_2 = \sigma(a_3)a_2 - \omega(a_3)a_1, \tag{2}$$
$$a_3 = \kappa(a_1^2 + a_2^2), \tag{3}$$
$$\dot{a}_4 = \sigma_4 a_4 - \beta_5 a_5 a_4, \tag{4}$$
$$a_5 = \kappa_4 a_4^2, \tag{5}$$

où $\sigma(a_3) = \sigma_1 - \beta a_3$, $\omega(a_3) = \omega_1 - \delta a_3$, ω_1 étant la pulsation de l'allée de von Kármán au voisinage de l'état stationnaire instable. Tous les coefficients du système d'équations sont positifs. Les équations (3) et (5) traduisent la servitude des degrés de liberté a_3 et a_5 vis-à-vis des degrés de liberté dominants $a_{1,2}$ et a_4, respectivement. À plus haut nombre de Reynolds, les degrés de liberté se couplent et des termes croisés, linéaires et quadratiques du vecteur d'état $\mathbf{a} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5)^t$, apparaissent à chacune des lignes du système [3] :

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{5} \ell_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{5} q_{ijk} a_j a_k. \tag{6}$$

4 Dynamiques transitoires et états asymptotiques

Sur la figure 3 sont représentées les dynamiques transitoires des coefficients de portance C_L et de traînée C_D jusqu'au régime asymptotique, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re. Dans tous les cas, la condition initiale est la solution symétrique stationnaire instable $\mathbf{u}_0$. Théoriquement, le système ne devrait jamais en sortir, cette solution étant un point fixe des équations. En pratique, les erreurs de discrétisation numériques rendent la solution imparfaite, et malgré un transitoire extrêmement long (plusieurs centaines de temps convectif), la trajectoire du système finit par s'en échapper, pour converger asymptotiquement vers un attracteur. La dynamique initiale démarre ainsi dans le sous-espace symétrique avec $\{a_1 - a_5\}$ nuls, tandis que le régime asymptotique a quitté ce sous-espace après que les degrés de liberté a_1, a_2 et a_4, anti-symétriques, ont atteint leur dynamique asymptotique. On constate sur la figure 3 les résultats remarquables suivants :

- Pour Re = 80, lors de la dynamique transitoire, les degrés de liberté $a_{1,2,3}$ de la bifurcation de Hopf s'expriment *avant* les degrés de liberté $a_{4,5}$ de la bifurcation fourche. On remarque que l'état transitoire observé sur la plage $t \in [700, 800]$, symétrique en moyenne, est caractérisé par un coefficient de traînée *inférieur* à celui du régime final, mais supérieur à celui de l'état initial.

- Pour les valeurs du nombre de Reynolds de 100 à 120, qui couvrent les régimes périodique (Re = 100), quasi-périodique (Re = 105 & 110) et chaotique (Re = 120), les degrés de liberté $a_{1,2,3}$ de la bifurcation de Hopf s'expriment *après* les degrés de liberté $a_{4,5}$ de la bifurcation fourche. À la différence de ce qui était observé pour Re = 80, la traînée associée à l'état stationnaire non symétrique observé autour de $t \approx 700$ pour Re = 100 à 120, est *minimale*, tandis que la traînée associé à l'état final est maximale.

- Comme pour Re = 80, à Re = 130, dans le régime pleinement chaotique, les degrés de liberté $a_{1,2,3}$ s'expriment à nouveau *avant* les degrés de liberté $a_{4,5}$. Ainsi, jusqu'à $t \approx 600$, le coefficient de portance reste centré ($a_4 = 0$), avant de devenir non nul en moyenne au-delà de ce temps ($a_4 \neq 0$).

- Les oscillations de la force de traînée, pour Re = 80 à 110, sont essentiellement dues aux modulations basse fréquence de l'écoulement. Le lâcher tourbillonnaire, en tant que tel, ne contribue que marginalement aux fluctuations asymptotiques de la traînée, contrairement à la force de portance, qui explore de grandes variations à la fréquence du lâcher tourbillonnaire.

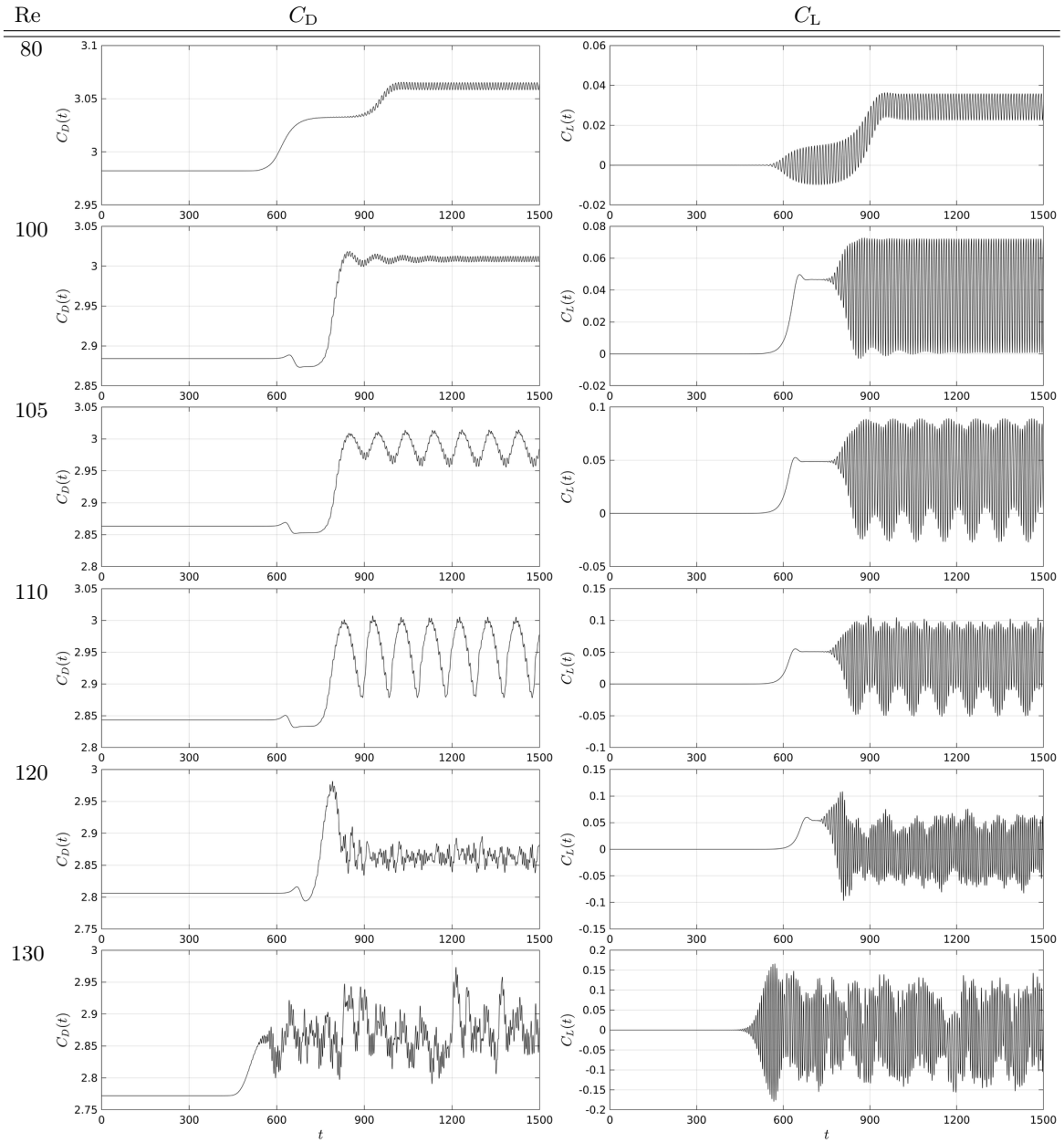


Figure 3. Dynamique transitoire des coefficients de traînée C_{D} (à gauche) et de portance C_{L} (à droite) pour un nombre de Reynolds de valeurs croissantes.

Si les différents degrés de liberté agissent de manière similaire sur le coefficient de traînée pour toutes valeurs du nombre de Reynolds dans la gamme considérée, cela signifie que a_4 et a_5 ont pour effet de *réduire* la traînée du sillage et que a_3 y contribue fortement, tandis que $a_{1,2}$ agissent essentiellement à travers l'amplitude $a_1^2 + a_2^2$, et dans une moindre mesure que a_3, hormis en présence de modulations aux basses fréquences. Dans la section suivante, nous nous intéressons aux états d'écoulements engendrés par l'expression de ces degrés de liberté individuels.

5 États transitoirement explorés

Sur la figure 4 sont représentés les états $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0)$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 700)$ transitoirement visités lors des dynamiques précédemment décrites, ainsi que le champ asymptotique moyen $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ lorsque $t \to t_\infty$. On constate que pour $100 < \mathrm{Re} < 120$, le comportement transitoire de C_L et C_D reste constant un laps de temps non négligeable autour de $t \approx 700$, après que l'écoulement a brisé la symétrie de la configuration géométrique, révélée ici par $C_\mathrm{L} \neq 0$ (cf figure 3). L'état observé sur cette plage temporelle se trouve dans un voisinage proche de la solution stationnaire asymétrique $\mathbf{u}^+$ (instable) du système, comme on peut le voir pour $\mathrm{Re} = 100$ en comparant le champ à $t = 700$ sur la figure 4 et la solution stationnaire asymétrique $\mathbf{u}^+(\mathbf{x})$ de la figure 5. Cette remarque reste valable pour $\mathrm{Re} = 105$ et 110. Comme on peut le voir sur la figure 4, la bulle de recirculation des états $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ et $\mathbf{u}^+(\mathbf{x})$ est très étendue, ce qui explique la faible traînée associée. L'asymétrie des champs $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 700)$, aux nombres de Reynolds 100 à 120, explique pourquoi le coefficient de portance cesse d'être nul en moyenne. L'action du degré de liberté a_3, en distordant les états de base $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ ou $\mathbf{u}^+(\mathbf{x})$ en $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, réduit considérablement la zone de recirculation du sillage en aval des cylindres et contribue à l'augmentation notable de la traînée, comme cela a été évoqué dans la section précédente (voir également [1] à propos de l'action de a_3 sur l'état de base).

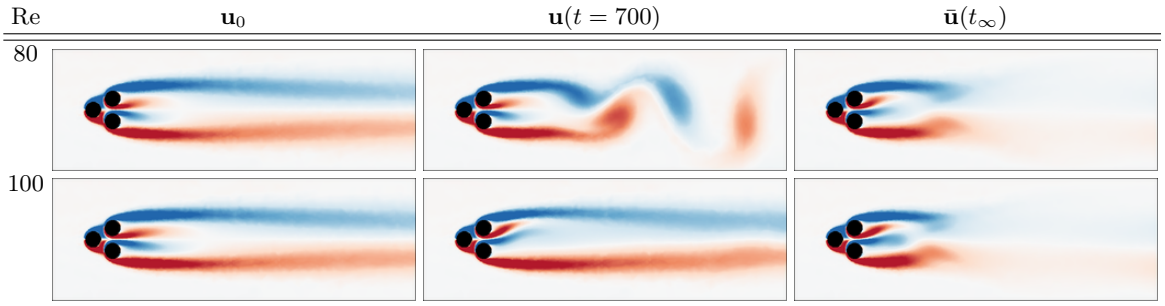


Figure 4. États transitoirement explorés par la dynamique du système à différentes valeurs du nombre de Reynolds : condition initiale $\mathbf{u}_0$, état au temps $t = 700$, et champ moyen asymptotique $\bar{\mathbf{u}}(t_\infty)$.

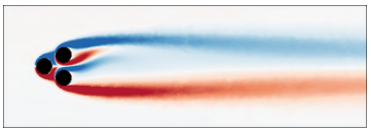


Figure 5. Solution stationnaire asymétrique $\mathbf{u}^+$ pour $\mathrm{Re} = 100$, à comparer au champ $\mathbf{u}(t = 700)$ pour $\mathrm{Re} = 100$ de la figure 4.

6 Discussion et conclusion

Sur la plage $[0, \mathrm{Re}_\mathrm{FC}]$ du nombre de Reynolds, seul l'état stationnaire symétrique $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ est point fixe du système, stable pour $\mathrm{Re} \leq \mathrm{Re}_\mathrm{HP}$, instable pour $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_\mathrm{HP}$. Les dynamiques transitoires et asymptotiques sont alors bien décrites par l'ansatz $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + a_1(t)\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + a_2(t)\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) + a_3(t)\mathbf{u}_3(\mathbf{x})$, où les coefficients a_1 à a_3 obéissent aux équations (1) à (3) [1, 5]. Au-delà de cette valeur critique, deux nouvelles solutions stationnaires instables asymétriques, $\mathbf{u}^\pm(\mathbf{x})$, apparaissent, en plus de la solution $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, comme résultat de la bifurcation fourche. Ces nouvelles solutions font intervenir les deux nouveaux degrés de liberté a_4, a_5, de telle sorte que $\mathbf{u}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \pm a_4^\mathrm{Re}\mathbf{u}_4(\mathbf{x}) + a_5^\mathrm{Re}\mathbf{u}_5(\mathbf{x})$, où a_4^Re et a_5^Re sont des valeurs des coefficients a_4 et a_5 spécifiques aux nombres de Reynolds Re considérés [3].

Les dynamiques transitoires aux différents nombres de Reynolds, explorées sur la route vers le chaos, révèlent des chemins empruntés dans l'espace des états du système qui évoluent avec le nombre de Reynolds. La force de traînée se révèle minimale lorsque les degrés de liberté a_1, a_2, a_3 associés à la bifurcation de Hopf sont absents, tandis que des efforts sur les cylindres de moyenne non nulle, transverses à l'écoulement, sont présents lorsque les degrés de liberté a_4, a_5 associés à la bifurcation fourche sont non nuls.

En termes de contrôle de l'écoulement, la recherche d'une traînée minimale consisterait à supprimer l'expression des degrés de liberté a_1, a_2, a_3. L'écoulement résultant serait alors non symétrique aux valeurs du nombre de Reynolds considérées dans ce travail. Un écoulement symétrique de traînée minimal impliquerait la suppression supplémentaire des degrés de liberté a_4, a_5.

Remerciements. Ce projet est soutenu par le projet ANR-ASTRID FlowCon (ANR-17-ASTR-0022), le China Scholarship Council, le Polish National Science Center (contrat No. : DEC-2011/01/B/ST8/07264) et le Polish National Center for Research and Development (contrat No. PBS3/B9/34/2015).

Références

1. B. R. Noack & M. Morzyński, *The Fluidic Pinball: A Toolkit for Multiple-Input Multiple-Output Flow Control (version 1.0)*, Tech. Rep. 02/2017. Chair of Virtual Engineering, Poznan University of Technology, Poland (2017).
2. N. Deng, B. R. Noack, M. Morzyński & L. R. Pastur, Low-order model for successive bifurcations of the fluidic pinball, `arXiv:1812.08529` (2018).
3. C. Taylor & P. Hood, A numerical solution of the Navier–Stokes equations using the finite element technique, *Comput. Fluids*, **1**, 73–100 (1973).
4. B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzyński, G. Tadmor & F. Thiele, A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **497**, 335–363 (2003).
5. N. Deng, L. R. Pastur, M. Morzyński & B. R. Noack, Route to chaos in the fluidic pinball, in *ASME 2018 5th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting* (p. V001T01A005), American Society of Mechanical Engineers (2018).
6. N. Deng, L. R. Pastur, M. Morzyński & B. R. Noack, Reduced-order modeling of the pinball fluidique, in *International Conference on Chaotic Modeling, Simulation and Applications* (2018).
7. J. C. Loiseau, N. Deng, L. R. Pastur, M. Morzyński, B. R. Noack & S. L. Brunton, Sparse reduced-order modeling of the fluidic pinball, in *Journées du GDR Contrôle des Décollements* (2017).

Le tenseur complexe de Faraday pour comprendre la non-pertinence de la théorie de Born–Infeld

Michel Gondran[1], Abdel Kenoufi[1] & Alexandre Gondran[2]

[1] Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, Paris, France
[2] École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France
michel.gondran@polytechnique.org

Résumé. Pour construire une électrodynamique non linéaire covariante, Born et Infeld ont proposé une densité lagrangienne construite sur les deux invariants de Lorentz $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Cependant les expériences n'ont jamais exhibé les effets non linéaires attendus. Cette théorie connaît depuis 1985 une renaissance en théorie des membranes et des cordes comme étant une partie de l'action effective.

Nous reconsidérons ici l'approche de Born–Infeld en faisant l'hypothèse que le tenseur de Faraday $\mathcal{F}$ et son dual $\mathcal{F}^*$ doivent être remplacés dans les densités lagrangiennes par le tenseur complexe $\mathcal{F}_\mathcal{C} = \mathcal{F} + \mathrm{i} \cdot \mathcal{F}^*$ qui correspond à l'invariant de Lorentz $(\mathbf{E} + \mathrm{i}\,\mathbf{B})^2$. Nous montrons d'abord que, par une extension du principe de moindre action aux densités lagrangiennes à valeur complexe et grâce à un nouvel outil de calcul variationnel complexe, on retrouve les équations de Maxwell à partir de ce tenseur complexe de Faraday. Nous montrons ensuite que l'on obtient directement les équations de Maxwell par le simple remplacement de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ dans une des formulations de la densité lagrangienne de Born–Infeld. Cela permet d'expliquer pourquoi les expériences n'ont jamais mis en évidence les effets non linéaires de Born–Infeld.

Finalement si le tenseur complexe de Faraday $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ peut être considéré comme le tenseur pertinent de l'électrodynamique, cela suggère que c'est lui qui doit être utilisé dans la recherche du lien entre relativité générale et électrodynamique.

1 Introduction

En électrodynamique, on utilise usuellement le tenseur de Faraday $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ et son dual $\mathcal{F}^*_{\mu\nu}$ pour décrire le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Les équations de Maxwell sont alors obtenues à partir de ces deux tenseurs au moyen de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu = \frac{1}{4}\mathcal{F}^*{}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{*\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{1}$$

qui utilise l'invariant de Lorentz $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$. Motivés pour trouver une action covariante pour construire une électrodynamique non linéaire, Born et Infeld ont proposé la densité lagrangienne suivante [1, 2] :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} = -\frac{k^2}{2}\left(\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{k}\mathcal{F}^{\mu\nu})} - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}\right) \tag{2}$$

où $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique, et où k est un paramètre dimensionnel. Cette densité utilise le second invariant de Lorentz, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, comme le montre l'expression équivalente suivante :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} = -k^2(\sqrt{1 - \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{k^2} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{k^4}} - 1)$$

Cette densité n'a pas été validée expérimentalement et les effets non linéaires attendus n'ont jamais été exhibés [3]. Cependant, elle est depuis quelques années utilisée en théorie des membranes et des supercordes, comme étant une partie de l'action effective [4–10]. Depuis 2013, le modèle de Born–Infeld est repris comme une possible généralisation de la relativité générale (*the mimetic Born–Infeld gravity*) en remplaçant dans (2) le tenseur de Faraday par la partie symétrique du tenseur de Ricci [11].

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Nous reconsidérons ici l'approche de Born–Infeld en faisant l'hypothèse que le tenseur de Faraday $\mathcal{F}$ et son dual $\mathcal{F}^*$ doivent être remplacés dans les densités lagrangiennes par le tenseur complexe de Faraday $\mathcal{F}_\mathcal{C} = \mathcal{F} + \mathrm{i}\,\mathcal{F}^*$ qui correspond à l'invariant de Lorentz $(\mathbf{E} + \mathrm{i}\,\mathbf{B})^2$ [12].

Ce tenseur complexe $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ et ce vecteur complexe $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathrm{i}\,\mathbf{B}$ ont une longue histoire puisqu'ils ont été introduits en 1907 par L. Silberstein [2,14]. En remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ dans (1) et (2), on définit deux densités lagragiennes à valeurs complexes $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{BIC}}$. Pour exploiter une densité lagrangienne à valeurs complexes, nous avons défini l'extrémum d'une fonction à valeurs complexes qui généralise l'extrémum d'une fonction à valeurs réelles [3–6].

Dans la section 2, nous rappelons cette définition et son utilisation pour définir une extension du principe de moindre action pour les densités lagrangiennes à valeurs complexes. Nous pouvons alors montrer comment on peut déduire les équations de Maxwell avec le tenseur complexe de Faraday $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ et une densité lagrangienne complexe et covariante. Dans la section 3, nous retrouvons encore les équations de Maxwell si nous utilisons dans la densité lagrangienne de Born–Infeld le tenseur complexe de Faraday à la place du tenseur réel habituel. Nous concluons qu'il est fort possible que le tenseur complexe de Faraday soit le tenseur pertinent de l'électrodynamique, ce qui devrait avoir de fortes implications sur la physique théorique.

2 Densité lagrangienne analytique pour les équations de Maxwell

Le calcul variationnel complexe est construit sur la définition du minimum d'une fonction à valeurs complexes [3, 4]. Cette définition est construite à partir de la généralisation de la fonction $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}\,xy$.

Pour une fonction f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ avec $f(z) = P(x, y) + \mathrm{i}\,Q(x, y)$, le minimum de f sur un ensemble fermé $A = \{x \in X, y \in Y\}$ est atteint en $z^0 = x^0 + \mathrm{i}\,y^0$ si (x^0, y^0) est un point-selle de $P(x, y)$:

$$\max_{y\in Y} P(x^0, y) = P(x^0, y^0) = \min_{x\in X} P(x, y^0) \tag{3}$$

Une condition nécessaire pour z_0 d'être un minimum d'une fonction analytique f est que $f'(z_0) = 0$. Une fonction $f(z)$ est convexe si $P(x, y)$ est convexe en x et concave en y. Si f est analytique, $P(x, y)$ convexe en x est équivalent à $P(x, y)$ concave en y. La condition $f'(z_0) = 0$ est donc aussi une condition suffisante que z_0 soit un minimum d'une fonction analytique complexe f.

On étend les définitions précédentes aux fonctions complexes additives $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$:

$$f(\mathbf{z}) = f(z_1, z_2, ..., z_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z_k). \tag{4}$$

On notera que $(\mathbf{E} + \mathrm{i}\,\mathbf{B})^2$ s'écrit sous la forme de la fonction complexe additive suivante $(E_x + \mathrm{i}\,B_x)^2 + (E_y + \mathrm{i}\,B_y)^2 + (E_z + \mathrm{i}\,B_z)^2$. On peut alors définir un calcul variationnel pour les fonctions à valeurs complexes en utilisant les définitions précédentes.

Dans un espace de Minkowski avec $\mathbf{x}^\mu = (x^0, x^i) = (t, \mathbf{x})$, on considère les champs $\varphi(\mathbf{x}^\mu) = (\varphi_1(\mathbf{x}^\mu), \varphi_2(\mathbf{x}^\mu), ..., \varphi_n(\mathbf{x}^\mu))$ à valeurs complexes et **la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ à valeurs complexes**. On suppose que cette densité lagrangienne $\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ est holomorphe additive en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, strictement convexe en $\mathbf{q}$ et dérivable en t. On définit alors la fonctionnelle d'action complexe sur $\Omega \times [t_0, t]$ où Ω est un ouvert, de la même façon que pour une fonctionnelle d'action réelle :

$$S(\varphi) = \int_{\Omega\times[t_0,t]} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\,\mathrm{d}^4x$$

On démontre aisément que le champ physique $\tilde{\varphi}$ vérifiant l'extrémum de S est solution des n équations complexes d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i}\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega\times]t_0, t[. \tag{5}$$

Ainsi, les équations d'Euler–Lagrange pour une densité lagrangienne complexe additive sont formellement les mêmes que pour le cas réel. Avant d'appliquer ce nouveau calcul variationnel complexe pour retrouver les équations de Maxwell, rappelons comment on les obtient habituellement dans le cadre de l'électrodynamique classique linéaire. La méthode consiste à rechercher l'extrémum de l'action $\int \mathcal{L}\,\mathrm{d}^4x$ par rapport au quadrivecteur $(\varphi, \mathbf{A})$ avec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \rho\varphi + \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}, \tag{6}$$

pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ reliés à $(\varphi, \mathbf{A})$ par les équations :

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}. \tag{7}$$

Les équations d'Euler–Lagrange classiques donnent le deuxième groupe des équations de Maxwell :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \tag{8}$$

tandis que l'on déduit directement de (7) le premier groupe des équations de Maxwell :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Dans le calcul complexe des variations, on fait l'hypothèse que le champ est remplacé par le vecteur complexe $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathrm{i}\,\mathbf{B}$ ou le tenseur $\mathcal{F}_\mathcal{C} = \mathcal{F} + \mathrm{i}\cdot\mathcal{F}^*$. Ce qui conduit à la densité lagrangienne complexe $\mathcal{L}_\mathcal{C}$:

$$\mathcal{L}_\mathcal{C} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mathcal{C}\,\mu\nu}\mathcal{F}_\mathcal{C}{}^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu = \frac{1}{2}\mathbf{F}^2 - \rho\varphi + \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}. \tag{10}$$

Les équations d' Euler–Lagrange complexes (5) permettent alors de trouver l'extremum de l'action $\int \mathcal{L}_\mathcal{C}\,\mathrm{d}^4x$ pour $\mathbf{F}$ relié à $(\varphi, \mathbf{A})$ par :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi + \mathrm{i}\,\nabla\times\mathbf{A}. \tag{11}$$

On trouve directement les quatre équations de Maxwell sous la forme des deux équations suivantes en $\mathbf{F}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \rho \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} - \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \mathrm{i}\,\mathbf{j}. \tag{12}$$

On remarque que le calcul du déterminant du tenseur de Faraday complexe donne $\det(\mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\mathbf{F}^4$. On a donc $\sqrt{-\det(\mathcal{F}^{\mu\nu})} = \mathbf{F}^2$. On en déduit que **la densité lagrangienne complexe (10) s'écrit**

$$\mathcal{L}_C = \frac{1}{2}\sqrt{-\det(\mathcal{F}_C^{\mu\nu})} - j_\mu A^\mu. \tag{13}$$

Cela suggère que le tenseur complexe de Faraday semble être le tenseur pertinent de l'électromagnétisme puisqu'il permet de définir le bon lagrangien de l'électromagnétisme en utilisant la covariance générale de l'action. En effet, si l'on remplace dans (13) le tenseur complexe de Faraday par le tenseur de Faraday ou son dual, on ne retrouve pas la bonne densité lagrangienne car $\det(\mathcal{F}_C) = \det(\mathcal{F}_C^*) = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$. Ce point de vue va être renforcé au paragraphe suivant où l'introduction d'un lagrangien à valeurs complexes va nous permettre de revisiter la théorie non linéaire de Born et Infeld [1].

3 Théorie de Born–Infeld à valeurs complexes

Si l'on considère, comme nous l'avons vu au paragraphe précèdent, que le tenseur complet de l'électromagnétisme est le tenseur complexe de Faraday, alors le lagrangien complexe de type Born et Infeld (2) s'écrit en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_C$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BIC}} \equiv -\frac{k^2}{2}\left(\sqrt{-\det(g^{\mu\nu} + \frac{1}{k}\mathcal{F}_C^{\mu\nu})} - 1\right). \tag{14}$$

Or :

$$\det(g^{\mu\nu} + \frac{1}{k}\mathcal{F}_C^{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{k}F_x & -\frac{1}{k}F_y & -\frac{1}{k}F_z \\ \frac{1}{k}F_x & -1 & \frac{\mathrm{i}}{k}F_z & -\frac{\mathrm{i}}{k}F_y \\ \frac{1}{k}F_y & -\frac{\mathrm{i}}{k}F_z & -1 & \frac{\mathrm{i}}{k}F_x \\ \frac{1}{k}F_z & \frac{\mathrm{i}}{k}F_y & -\frac{\mathrm{i}}{k}F_x & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -1 + \frac{2}{k^2}\mathbf{F}^2 - \frac{1}{k^4}\mathbf{F}^4 = -\left(1 - \frac{1}{k^2}\mathbf{F}^2\right)^2,$$

soit finalement :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BIC}} = -\frac{k^2}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{k^2}\mathbf{F}^2\right) - 1\right] = \frac{1}{2}\mathbf{F}^2.$$

Le lagrangien complexe de Born et Infeld (14) n'est que le lagrangien complexe de Faraday ! Il est donc naturel qu'il ne donne pas d'effet non linéaire.

La différence entre les deux approches provient de ce que $-\det\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{k_1}F^{\mu\nu}\right)$ est la partie réelle de $-\det\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{k}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right)$ avec $k = \sqrt{2}k_1$ et que la partie réelle de $\mathcal{L}_{\mathrm{BIC}}$ est différente de $\mathcal{L}_{\mathrm{BI}}$.

Le i dans l'expression du champ électromagnétique $\mathbf{E} + \mathrm{i}\,\mathbf{B}$ n'est pas le nombre complexe ordinaire i, mais le pseudo-scalaire $\widehat{i}$ de l'algèbre de Clifford $\mathrm{C}\ell_3$. Le champ électromagnétique est en effet représenté dans l'algèbre de Clifford $\mathrm{C}\ell_3$, définie sur l'espace $\mathbb{R}^3$, par le vecteur :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \hat{i}\,\mathbf{B}, \tag{15}$$

où $\mathbf{E}$ est le vecteur $E^1e_1 + E^2e_2 + E^3e_3$ et $\mathbf{B}$ le bivecteur $B^1e_2e_3 + B^2e_3e_1 + B^3e_1e_2$. Comme $\widehat{i} = e_1e_2e_3$ commute avec tous les éléments de $\mathrm{C}\ell_3$ et vérifie $\hat{i}^2 = -1$, il peut être identifié au nombre imaginaire i. On a donc une explication de l'équivalence des équations de Maxwell classiques (8) et (9) sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ avec les équations de Maxwell complexes (12) sur $\mathbf{F}$ lorsque les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ peuvent être à valeurs complexes.

4 Conclusion

Grâce à la généralisation du principe de moindre action aux lagrangiens à valeurs complexes, nous avons retrouvé les équations de Maxwell et compris les problèmes liés au lagrangien réel de Born–Infeld.

Les résultats précédents nous donnent à penser que le véritable tenseur de l'électrodynamique est le tenseur complexe de Silberstein–Dirac et que c'est à partir d'une généralisation de celui-ci aux espaces courbes qu'il faut certainement partir pour définir une théorie unitaire entre relativité générale et électromagnétisme.

Références

1. M. Born & L. Infeld, Foundations of the new field theory, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **144**, 425–451 (1934).
2. M. Born, Théorie non linéaire du champ électromagnétique, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **7**, 155–261 (1937).
3. J. Rafelski, W. Greiner & L. P. Fulcher, Superheavy elements and nonlinear electrodynamiscs, *Nuovo Cimento*, **13**, 135–160 (1973).
4. A. Nakamura & K. Shiraishi, Born–Infeld monopoles and instantons, *Hadronic J.*, **14**, 369–375 (1991).
5. A. A. Tseytlin , On non-Abelian generalisation of Born–Infeld action in string theory, *Nucl. Phys. B*, **501**, 41–52 (1997).
6. C. G. Callan Jr. & J. M. Maldacena, Brane dynamics from the Born–Infeld action, *Nucl. Phys. B*, **513**, 198–212 (1998).
7. S. Deser & G. W. Gibbons, Born–Infeld-Einstein actions?, *Class. Quantum Grav.*, **15**, 35–39 (1998).
8. E. Moreno, C. Nunez & and F. A. Schaposnik, Electrically charged vortex solution in Born–Infeld theory, *Phys. Rev. D*, **58**, 025015 (1998).

9. D. Brecher, BPS states of the non-Abelian Born–Infeld action, *Phys. Lett. B*, **442**, 117–124 (1998).
10. E. Sérié, *Théories de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle de Born–Infeld*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, p. 112 (2005).
11. A. H. Chamseddine & V. Mukhanov, Mimetic dark matter, *J. High Energy Phys.*, **2013**, 135 (2013).
12. L. Landau & E. Lifchitz, *Théorie des champs* Mir, Moscou, (1970).
13. L. Silberstein, Nachtrag zur Abhandlung über Electromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung, *Ann. Phys. Leipzig*, **24**, 783–784 (1907).
14. L. Silberstein, *The Theory of Relativity*, Macmillan and Co, London, (1924).
15. M. Gondran, Analyse MinPlus complexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **333**, 592–598 (2001).
16. M. Gondran, Calcul des variations complexes et solutions explicites d'équations d'Hamilton–Jacobi complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **332**, 677–680 (2001).
17. M. Gondran & R. Hoblos, Complex calculus of variations, *Kybernetika*, **39**, 249–263 (2003).
18. M. Gondran, A. Kenoufi & A. Gondran, Complex variational calculus with mean of (min,+)-analysis, *Tema*, **18**, 385–403 (2017).
19. I. Bialynicki-Birula, in *Progress in Optics XXXVI*, E. Wolf (éditeur), Elsevier, Amsterdam, pp. 245–294 (1996).
20. P. A. M. Dirac, *The principles of Quantum Theory*, 4th ed., Clarendon Press, Oxford, p. 9 (1958).

Mélange et démélange induits par des particules actives de camphre

Clément Gouiller[1], Laurent Maquet[1], Florence Raynal[2], Mickael Bourgoin[3], Romain Volk[3], Cécile Cottin-Bizonne[1] & Christophe Ybert[1]

[1] Univ. Lyon, Univ. Claude Bernard Lyon 1, CNRS, Institut Lumière Matière, F-69622, Villeurbanne, France
[2] LMFA, CNRS, Univ Lyon, École Centrale de Lyon, Univ. Lyon 1, INSA Lyon, F-69134, Écully, France
[3] Laboratoire de Physique, ENS de Lyon, Univ. Lyon, CNRS, F-69364 Lyon CEDEX 07, France
clement.gouiller@univ-lyon1.fr

Résumé. Nous générons un écoulement bidimensionnel en utilisant des nageurs interfaciaux (particules actives de diamètre millimétrique flottant à l'interface air/eau) et étudions le mélange de bulles de verre (particules passives micrométriques flottant sur l'interface) qui en résulte. Grâce à la détermination expérimentale du champ de concentration en bulles de verre et à son évolution temporelle, nous démontrons qu'un régime stationnaire de mélange imparfait est atteint. Nous proposons que ce dernier résulte d'un équilibre entre deux processus : l'un de mélange, l'autre de démélange. Enfin, nous identifions une analogie entre notre système et la turbulence.

Abstract. Using interfacial swimmers (active millimetric particles floating on a water/air interface) we create a bidimensionnal flow and study the induced mixing of glass bubbles (passive micrometric particles floating at the interface). Determining experimentally the glass bubbles concentration field and studying its temporal evolution, we show that a stationnary situation of incomplete mixing is reached. This feature results from two competing processes: one of mixing, one of unmixing. Finally, an analogy with turbulence is identified.

1 Introduction

Le mélange et la dispersion de particules fines sont des processus fondamentaux intervenant dans de nombreux systèmes depuis les nuages de poussières interstellaires jusqu'aux poudres dans les mélangeurs industriels, en passant par les polluants atmosphériques et océaniques. L'efficacité de ces processus de transport est liée aux propriétés d'advection par l'écoulement portant les particules ainsi qu'à l'éventuelle mobilité microscopique de celles-ci. Dans ce contexte, la plupart des études existantes ont abordé le problème sous l'angle du couplage dit d'advection/diffusion, où la mobilité microscopique des particules transportées se limite aux seuls effets de diffusivité moléculaire [1,2]. Il existe toutefois des situations bien plus riches : le cas des particules dites actives (présentant la capacité de s'auto-propulser) ou encore celui des particules dites phorétiques (dont la mobilité intrinsèque dépend de l'environnement local chimique, thermique, électrique, magnétique...) [3] en sont des exemples emblématiques. L'étude de l'impact de cette mobilité microscopique sur le transport et la dynamique individuelle et collective de telles particules a connu lors de la dernière décennie un intérêt croissant de la part de la communauté scientifique [4]. Il a déjà été démontré que la présence de gradients chimiques peut accélérer ou au contraire ralentir le mélange de colloïdes [4]. Cette approche est limitée par le fait que les gradients chimiques sont introduits à l'état initial et disparaissent au cours du mélange, de sorte que les effets phorétiques qui en émergent sont restreints à l'étude d'un régime transitoire. Pour dépasser cette limitation, cet article s'intéresse au mélange sur une interface air/eau de micro-bulles de verre en présence de nageurs actifs interfaciaux, disques d'agarose imprégnés de camphre. Déposé à la surface de l'eau, un nageur flotte et libère du camphre continûment. Cette molécule étant tensioactive, son hétérogénéité en solution est source d'écoulements Marangoni. Les nageurs interfaciaux jouent donc à la fois le rôle de source d'écoulements et d'hétérogénéités chimiques. Cet article démontre qu'il est possible d'obtenir le champ de concentration en bulles de verre et étudie son évolution temporelle, démontrant qu'un régime stationnaire de mélange imparfait est atteint. Une explication à ce phénomène sera proposée. Enfin, l'analyse du spectre du champ de concentration en bulles de verre nous permet de faire une analogie entre notre système et la turbulence.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

2 Matériel et méthodes

2.1 Système expérimental

Les expériences sont réalisées dans un cristallisoir en verre de diamètre 22 cm, rempli avec $h = 1{,}0$ cm d'eau distillée renouvelée à chaque expérience. $N = 10$ nageurs interfaciaux (disques d'agar à l'intérieur desquels du camphre a été précipité, voir Fig. 1 (a)) sont déposés à la surface de l'eau et flottent. Ces disques ont une épaisseur $e = 0{,}5$ mm et un rayon $R = 2{,}5$ mm. Le protocole de fabrication utilisé est proche de celui proposé par Soh *et al.* [5]. Une masse $m \sim 40$ mg de bulles de verre (Fig. 1 (b)) est déposée à la surface, proche du centre de la cuve. Le dispositif est placé sur une plaque de DEL et filmé en vue de dessus (Fig. 1 (c)). Une image typique de celles obtenues quelques minutes après le début de l'expérience à l'aide d'une caméra HXC Flare (1/2000 s, f/3,2, ISO 80) est donnée en Fig. 1 (d). Les acquisitions sont réalisées avec une résolution de 2048 × 2048 pixels à 20 images par seconde.

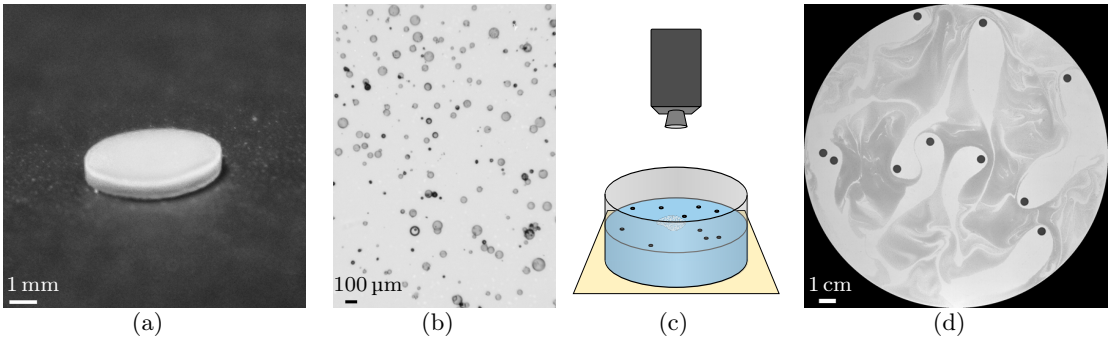


Figure 1. (a) Photographie d'un nageur interfacial, disque de diamètre 5 mm et d'épaisseur 0,5 mm. (b) Observation au macroscope de bulles de verre. (c) Schéma du dispositif expérimental lors de la situation initiale, où les bulles de verre viennent d'être déposées. (d) Image typique obtenue lors d'une expérience, après quelques minutes. Un nageur apparaît comme un disque noir tandis que les bulles de verre ont une allure de poudre.

2.2 Propriétés de déplacement des nageurs

Un algorithme de détection de cercles utilisant la transformée généralisée de Hough permet d'obtenir la position des nageurs interfaciaux à tout instant. Un algorithme de reconstruction de trajectoires permet d'en déduire leur vitesse et direction de nage. Des exemples de trajectoires sont donnés en Fig. 2 (a). La figure 2 (b) représente la densité de probabilité de vitesse pour un nageur interfacial en présence de 10 nageurs, avec et sans bulles de verre. Elle présente un maximum pour une vitesse $v \sim 6\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ qui correspond à la vitesse qu'a un nageur lorsqu'il est relativement loin de ses voisins (Fig. 2 (a), situation (1)). Des vitesses de nage plus faibles sont atteintes par une collision avec un autre nageur (situation (2)) ou avec le bord de la cuve (situation (3)). La figure 2 (b) montre également que la présence de bulles de verre ralentit légèrement le mouvement des nageurs.

2.3 Champ de concentration scalaire

Pour étudier le mélange de bulles de verre à l'interface air/eau, nous avons déterminé le champ de concentration en bulles de verre en tout point de la surface. Pour cela, nous avons utilisé une relation de type Beer–Lambert pour l'absorption : $C(x, y, t) = \log\left(\dfrac{I_0(x, y)}{I(x, y, t)}\right)$ où (x, y) sont les coordonnées spatiales, I_0 l'intensité correspondant à une image de référence prise en l'absence de bulles de verre et de

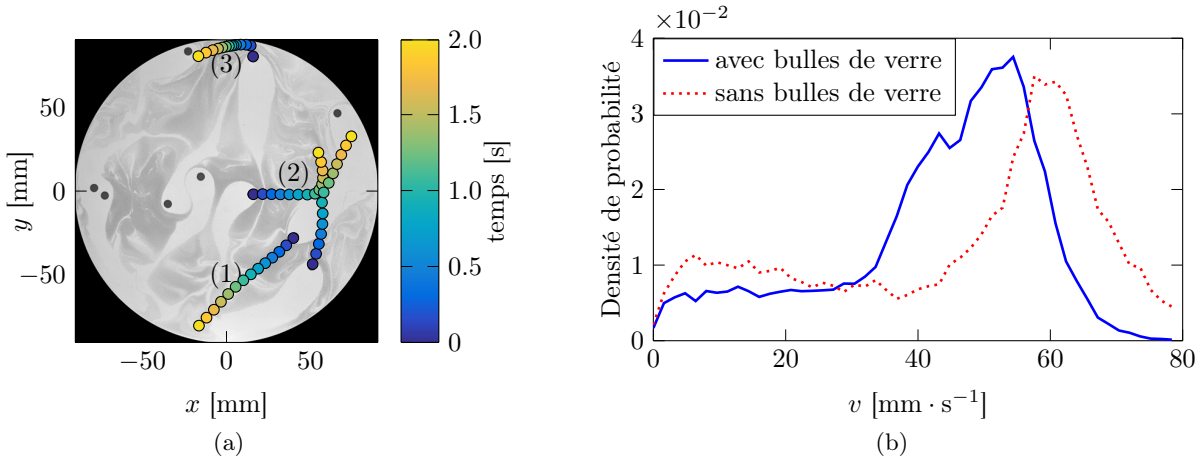


Figure 2. (a) Trajectoires typiques de nageurs interfaciaux. Lorsqu'un nageur est suffisamment éloigné des autres, il se déplace en ligne droite (situation (1)). Deux nageurs entrant en collision se repoussent (situation (2)). Un nageur se rapprochant du bord est freiné puis reprend sa vitesse normale en s'écartant du bord (situation (3)). (b) Histogramme de répartition des vitesses en présence et absence de bulles de verre pour 10 nageurs de rayon 2,5 mm.

nageurs et I est l'intensité lumineuse reçue à l'instant t. Une calibration, présentée en Fig. 3 (a), permet de montrer que cette loi donne une relation linéaire entre la masse de bulles de verre versée dans la cuve et la concentration moyenne déduite par cette loi. Un exemple de champ de concentration ainsi obtenu est donné en Fig. 3 (b).

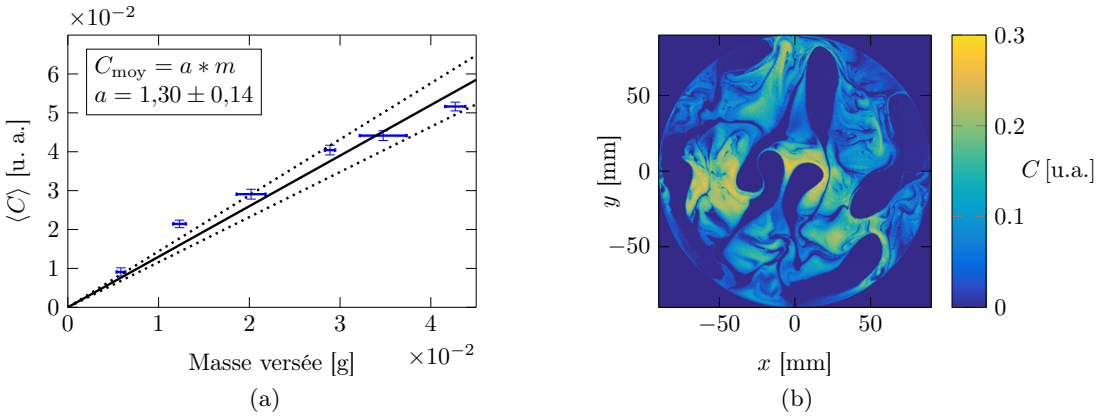


Figure 3. (a) Calibration : valeur moyenne du champ de concentration mesuré expérimentalement en fonction de la masse de bulles de verre versée. (b) Champ de concentration en bulles de verre correspondant à la situation représentée en Fig. 1 (d) obtenu par la comparaison de l'image étudiée avec une image de référence en absence de nageurs et de bulles de verre.

3 Résultats

3.1 L'écart-type : un indicateur global du mélange

Connaissant le champ de concentration $C(x, y, t)$, nous en déduisons l'écart-type (normalisé à $t = 0$) :

$$C_{\mathrm{std}}(t) = \frac{\sqrt{\langle C(x,y,t)^2\rangle_{x,y} - \langle C(x,y,t)\rangle_{x,y}^2}}{\sqrt{\langle C(x,y,0)^2\rangle_{x,y} - \langle C(x,y,0)\rangle_{x,y}^2}}. \tag{1}$$

L'évolution temporelle de l'écart-type pour une expérience dans laquelle les bulles de verre sont déposées de façon localisée au centre de la cuve à l'instant $t = 0$, en présence de $N = 10$ nageurs de rayon $R = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ (schéma en Fig. 1 (c)) est tracée en Fig. 4 (a).

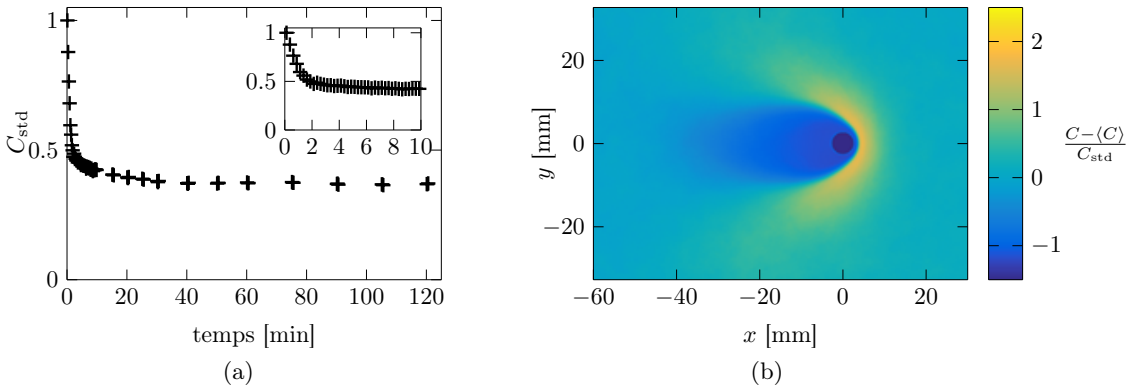


Figure 4. (a) Évolution temporelle de l'écart-type du champ de concentration en bulles de verre. Encart : zoom sur le régime transitoire. L'incertitude de mesure est inférieure à 1 %. (b) Champ de concentration moyen en bulles de verre renormalisé autour d'un nageur interfacial isolé (éloigné des bords ainsi que des autres nageurs).

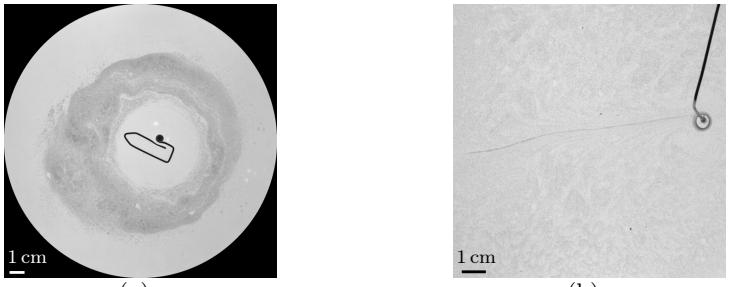
Durant les deux premières minutes, l'écart-type décroît rapidement de 1 à 0,42 du fait de l'effet homogénéisant du mouvement désordonné des nageurs. Un état stationnaire est ensuite atteint, caractérisé par une valeur non nulle de l'écart-type ($C_{\mathrm{std}}(t \to \infty) = 0{,}37$). Cette valeur finie témoigne d'hétérogénéités persistantes dans le système. L'état stationnaire de mélange imparfait résulte ainsi d'un équilibre dynamique entre l'action homogénéisante du mouvement des nageurs et un processus de démélange. Pour identifier l'origine de ce processus, nous avons calculé le champ de concentration moyen autour d'un nageur une fois le régime stationnaire atteint. Pour cela, nous avons fait une moyenne cohérente des champs de concentration autour des différents nageurs présents dans la cuve, et ce à chaque instant. Pour limiter l'influence des bords, nous n'avons considéré que les nageurs situés à une distance d'au moins 2,5 cm des bords de la cuve. Pour limiter l'influence des autres nageurs, nous avons choisi de ne prendre en compte que ceux suffisamment isolés, c'est-à-dire n'ayant pas d'autre nageur présent dans un rectangle allant de 9 mm devant le nageur à 32 mm derrière et 14 mm dans la direction perpendiculaire au mouvement. Ces valeurs ont été déterminées en observant les images pour différents nombres de nageurs. Le résultat pour $N = 10$ nageurs de rayon $R = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ est donné en Fig. 4 (b).

L'observation du champ de concentration moyen permet de quantifier ce que l'on pouvait observer sur la Fig. 1 (d) : il y a autour de chaque nageur une zone de déplétion (la concentration en bulles de verre y est nulle). À la frontière de cette zone se trouve une zone d'accumulation en bulles de verre qui ont été chassées de la zone de déplétion et que le nageur transporte devant lui à la manière d'un chasse-neige. Cette création de zones d'accumulation et de déplétion en bulles de verre par le passage de nageurs explique que l'état stationnaire obtenu soit un état de mélange imparfait. Pour le vérifier, il est possible de

mesurer l'écart-type du champ de concentration moyen autour d'un nageur en considérant une aire égale à l'aire totale de la cuve divisée par le nombre de nageurs. Le résultat obtenu est de 0,9 fois l'écart-type du champ de concentration total. Le motif zone de déplétion/d'accumulation est donc responsable de la majorité des inhomogénéités qui sont irréductibles. Hors de ces zones, le mouvement désordonné des nageurs mélange les bulles de verre en un état presque homogène, à l'exception des filaments résiduels observables sur la Fig. 1 (d). L'existence d'un état stationnaire de mélange est donc dû à la présence de zones de déplétion et d'accumulation en bulles de verre autour d'un nageur. Nous expliquerons dans la partie suivante l'origine de ces zones.

3.2 Effets chimiques ou de Reynolds fini ?

Deux effets peuvent être responsables de la création de zones d'accumulation et de déplétion : les écoulements Marangoni et les forces capillaires, induits par le gradient de camphre, qui entraîneraient les bulles de verre (effet d'origine chimique) ou les effets de Reynolds finis, le passage d'un disque pouvant modifier l'organisation du scalaire (effet d'origine mécanique). Pour trancher, nous avons mis en place deux expériences témoins ne conservant que l'une ou l'autre des explications possibles : immobiliser un nageur interfacial pour ne garder que les phénomènes chimiques (Fig. 5 (a)) ou déplacer à l'aide d'un bras motorisé un disque non chargé en camphre pour ne garder que les phénomènes mécaniques (Fig. 5 (b)).



(a) (b)

Figure 5. (a) Champ de concentration autour d'un nageur interfacial immobilisé. (b) Champ de concentration autour d'un disque d'agar tracté par un moteur à $6\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, vitesse typique du déplacement d'un nageur interfacial.

Il existe une zone de déplétion autour du nageur sur la Fig. 5 (a) mais pas sur la Fig. 5 (b). L'existence de zones de déplétion/accumulation est donc due aux écoulements Marangoni engendrés par la dissolution de camphre autour du nageur. La dissymétrie de la zone de déplétion dans la direction de nage, non observée pour un nageur immobilisé (Fig. 5 (a)), est causée par l'histoire du nageur. Le camphre déposé lors de son passage s'est accumulé derrière le nageur, créant ainsi une dissymétrie de la concentration en camphre et donc du champ de concentration en bulles de verre.

L'étude de l'écart-type nous a renseigné sur l'état global du système, et nous avons pu fournir une explication au comportement observé. Pour caractériser les propriétés de mélange du système et ainsi pouvoir les comparer à celles obtenues pour d'autres systèmes, il est intéressant de connaître la répartition du scalaire aux différentes échelles.

3.3 Spectre scalaire

Pour obtenir cette information, nous traçons la moyenne du spectre du champ de concentration renormalisé obtenu à chaque instant au cours du régime stationnaire (Fig. 6). Ce spectre est découpé en trois régimes. Celui des nombres d'onde inférieurs à $0{,}02\,\mathrm{mm}^{-1}$, correspondant à des distances supérieures à 50 mm. Ces échelles correspondent à celles des zones de déplétion. Pour des nombres d'onde allant

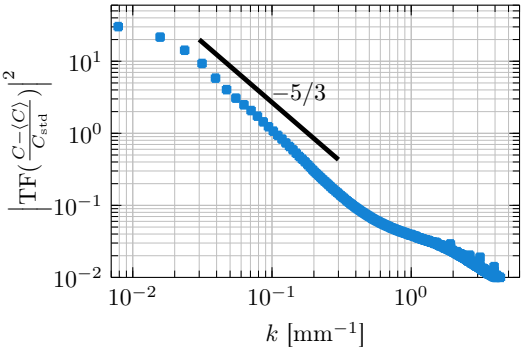


Figure 6. Spectre moyen du champ de concentration en bulles de verre.

jusqu'à 0,5 mm^{-1}, correspondant à une taille de 2 mm, une loi d'échelle d'exposant $-5/3$ est observable. Cette taille correspond à la taille maximale des filaments observables dans le champ de concentration. L'exposant $-5/3$ est habituel en turbulence, mais assez inattendu ici puisque le nombre de Reynolds associé à un nageur est seulement d'environ cinquante. Cela motive une analogie entre notre système et un système turbulent avec dans notre cas les zones de déplétion jouant le rôle de forçage (grandes échelles), un régime inertiel où la loi d'échelle est observée et, enfin, un régime dissipatif aux nombres d'ondes supérieurs à 0,5 mm^{-1}, c'est-à-dire à l'échelle des filaments.

4 Conclusion

La présence de nageurs interfaciaux camphrés sur une interface air/eau induit le mélange de particules passives flottantes. En donnant une méthode de mesure du champ de concentration en bulles de verre, nous avons montré qu'elles sont mélangées jusqu'à atteindre un état stationnaire de mélange imparfait : le champ de concentration ne devient jamais homogène. Calculant le champ de concentration moyen autour d'un nageur interfacial, nous avons mis en évidence l'existence d'une zone de déplétion puis, à ses bords dans la direction de nage, d'une zone d'accumulation de bulles de verre. Deux expériences modèles nous ont permis de montrer que l'existence de ces zones est due aux effets chimiques engendrés autour du nageur par la dissolution de camphre. Enfin, la représentation du spectre moyen du champ de concentration au cours du mélange stationnaire fait apparaître l'existence sur une décade d'une loi d'échelle d'exposant $-5/3$, motivant une analogie avec la turbulence.

Remerciements. Les auteurs remercient V. Vidal de son aide pour caractériser les bulles de verre. Ce travail a été réalisé grâce au soutien financier de l'ANR-16-CE30-0028 ainsi que du projet IDEXLYON de l'Université de Lyon dans le cadre du Programme Investissements d'Avenir (ANR-16-IDEX-0005).

Références

1. M. A. Celia, T. F. Russell, I. Herrera & R. E. Ewing, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Adv. Water Resour.*, **13**, 187–206 (1990).
2. W. Hundsdorfer & J. G. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*, Springer Series in Computational Mathematics vol. 33, Springer (2013).
3. B. Abécassis, C. Cottin-Bizonne, C. Ybert, A. Ajdari & L. Bocquet, Boosting migration of large particles by solute contrasts, *Nat. Mater.*, **7**, 785–789 (2008).
4. J. Deseigne, C. Cottin-Bizonne, A. D. Stroock, L. Bocquet & C. Ybert, How a "pinch of salt" can tune chaotic mixing of colloidal suspensions, *Soft Matter*, **10**, 4795–4799 (2014).
5. S. Soh, M. Branicki & B. A. Grzybowski, Swarming in shallow waters, *J. Phys. Chem. Lett.*, **2**, 770–774 (2011).

Short-distance propagation of nonlinear optical pulses

Mathieu Isoard[1], Anatoly M. Kamchatnov[2,3] & Nicolas Pavloff[1]

[1] LPTMS, UMR 8626, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France
[2] Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840, Russia
[3] Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky lane 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia
mathieu.isoard@u-psud.fr

Résumé. Nous étudions la propagation transverse d'un pulse lumineux quasi-unidimensionnel dans un milieu optique non linéaire, en présence d'un fond d'intensité lumineuse constante. Dans un premier temps, le signal initial se divise en deux parties qui se propagent dans des directions opposées. Ce phénomène peut être décrit théoriquement à l'aide d'une approche non dispersive en utilisant une modification de la méthode de Riemann proposée par Ludford. Les résultats sont en excellent accord avec les simulations numériques.

Abstract. We theoretically describe the quasi one-dimensional transverse spreading of a light pulse propagating in a defocusing nonlinear optical material in the presence of a uniform background light intensity. For short propagation distances the pulse can be described within a nondispersive approximation by means of Riemann's approach. The theoretical results are in excellent agreement with numerical simulations.

1 Introduction

It has long been realized that light propagating in a nonlinear medium was amenable to a hydrodynamic treatment [1,2]. In the present work we use such an approach to study a model configuration which has been realized experimentally in a one-dimensional situation in the defocusing regime in Ref. [3]: the nonlinear spreading of a region of increased light intensity in the presence of a uniform constant background. In the absence of background, and for a smooth initial intensity pattern, the spreading is mainly driven by the nonlinear defocusing and can be treated analytically in some simple cases [1]. The situation is more interesting in the presence of a constant background: the pulse splits in two parts, each eventually experiencing nonlinear wave breaking, leading to the formation of dispersive shock waves at both extremities of the split pulse. In the present work we concentrate on the pre-shock period and demonstrate that it can be very accurately described within a non-dispersive nonlinear approximation.

The paper is organized as follows: in Sec. 2 we present the model and the set-up we aim at studying. The spreading and the splitting stage of evolution is accounted for in Sec. 3 within a dispersionless approximation which holds when the pulse region initially presents no large intensity gradient. The problem is first mapped onto an Euler–Poisson equation in Sec. 3.1. This equation is solved in Sec. 3.2 by using Riemann–Ludford method. In Sec. 3.3 the theoretical results are compared with numerical simulations. Our conclusions are presented in Sec. 4.

2 The model

In the paraxial approximation, the stationary propagation of the complex amplitude $A(\mathbf{r})$ of the electric field of a monochromatic beam is described by the equation (see, e.g., Ref. [4])

$$\mathrm{i}\,\partial_z A = -\frac{1}{2n_0k_0}\nabla_\perp^2 A - k_0\delta n\, A.$$

In this equation, n_0 is the linear refractive index, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ is the carrier wave vector, z is the longitudinal coordinate along the beam, $\nabla_\perp^2$ the transverse Laplacian and δn is a nonlinear contribution to the index. In a non absorbing defocusing Kerr nonlinear medium one can write $\delta n = -n_2|A|^2$, with $n_2 > 0$.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

We consider a system with a uniform background light intensity, denoted as I_0, on top of which an initial pulse is added at the entrance of the nonlinear cell. To study the propagation of this pulse along the beam (direction z), we introduce the following characteristic quantities: the nonlinear length $z_{\rm NL} = (k_0 n_2 I_0)^{-1}$ and the transverse healing length $\beta_\perp = (z_{\rm NL}/n_0 k_0)^{1/2}$. Since the transverse profile depends on a single Cartesian coordinate, we write $\nabla_\perp^2 = \beta_\perp^{-2}\partial_x^2$ where x is the dimensionless transverse coordinate, and also define an effective "time" $t = z/z_{\rm NL}$. In this framework, the quantity $\psi(x,t) = A(x,t)/\sqrt{I_0}$ is solution of the dimensionless nonlinear Schrödinger (NLS) equation

$$\mathrm{i}\,\psi_t = -\tfrac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi. \tag{1}$$

The initial $\psi(x,t=0)$ is real (i.e., no transverse velocity or, in optical context, no focusing of the light beam at the input plane), with a dimensionless intensity $\rho(x,t) = |\psi|^2$ which departs from the constant background value (which we denote as ρ_0) only in the region near the origin where it forms a bump. To be specific, we consider the typical case where

$$\rho(x,0) = \rho_0 + \rho_1 \exp\left(-2\,x^2/x_0^2\right), \quad \text{and} \quad u(x,0) = 0. \tag{2}$$

The maximal density of the initial profile is $\rho(0,0) = \rho_0 + \rho_1 \equiv \rho_m$.

3 The dispersionless stage of evolution

The initial pulse splits into two signals propagating in opposite directions of x-axis. The aim of this section is to theoretically describe this splitting within a dispersionless approximation.

3.1 Riemann variables and Euler–Poisson equation

By means of the Madelung substitution $\psi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)}\exp\left(\mathrm{i}\int^x u(x',t)\,\mathrm{d}x'\right)$, the NLS equation (1) can be cast into a hydrodynamic-like form for the density $\rho(x,t)$ and the flow velocity $u(x,t)$:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + u u_x + \rho_x + \left(\frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho}\right)_x = 0. \tag{3}$$

These equations are to be solved with the initial conditions (2). The last term of the left hand-side of the second of Eqs. (3) accounts for the dispersive character of the fluid of light. In the first stage of spreading of the bump, if the density gradients of the initial density are weak (i.e., if $x_0 \gg \min\{\rho_0^{-1/2}, \rho_1^{-1/2}\}$), the effects of dispersion can be neglected, and the system (3) simplifies to

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + u u_x + \rho_x = 0. \tag{4}$$

The above equations can be written in a more symmetric form by introducing the Riemann invariants

$$\lambda^\pm(x,t) = \tfrac{1}{2}u(x,t) \pm \sqrt{\rho(x,t)}, \tag{5}$$

which evolve according to the system (equivalent to (4)):

$$\partial_t\lambda^\pm + v_\pm(\lambda^-,\lambda^+)\,\partial_x\lambda^\pm = 0, \quad \text{with} \quad v_\pm(\lambda^-,\lambda^+) = \tfrac{1}{2}(3\lambda^\pm + \lambda^\mp) = u \pm \sqrt{\rho}. \tag{6}$$

The Riemann velocities $v_\pm$ in (6) have a simple physical interpretation for a smooth velocity and density distribution: v_+ (v_-) corresponds to a signal which propagates downstream (upstream) at the local velocity of sound $c = \sqrt{\rho}$ and which is dragged by the background flow u.

The system (6) can be linearized by means of the hodograph transform (see, e.g., Ref. [5]) which consists in considering x and t as functions of λ^+ and λ^-. One readily obtains

$$\partial_\pm x - v_\mp \partial_\pm t = 0, \tag{7}$$

where $\partial_\pm \equiv \partial/\partial\lambda^\pm$. One introduces two auxiliary (yet unknown) functions $W_\pm(\lambda^-, \lambda^+)$ such that

$$x - v_\pm(\lambda^-, \lambda^+)\, t = W_\pm(\lambda^-, \lambda^+). \tag{8}$$

Inserting the above expressions in (7) shows that the $W_\pm$'s are solution of Tsarev equations [6]

$$\frac{\partial_- W_+}{W_+ - W_-} = \frac{\partial_- v_+}{v_+ - v_-}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial_+ W_-}{W_+ - W_-} = \frac{\partial_+ v_-}{v_+ - v_-}. \tag{9}$$

From Eqs. (6) and (9) one can verify that $\partial_- W_+ = \partial_+ W_-$, which shows that W_+ and W_- can be sought in the form

$$W_\pm = \partial_\pm \chi, \tag{10}$$

where $\chi(\lambda^-, \lambda^+)$ plays the role of a potential. Substituting expressions (10) in one of the Tsarev equations shows that χ is a solution of the following Euler–Poisson equation

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial\lambda^+ \partial\lambda^-} - \frac{1}{2\,(\lambda^+ - \lambda^-)} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda^+} - \frac{\partial \chi}{\partial \lambda^-} \right) = 0. \tag{11}$$

3.2 Solution of the Euler–Poisson equation

We use Riemann's method (see, e.g., Ref. [7]) to solve the Euler–Poisson equation (11) in the (λ^+, λ^-)–plane which we denote below as the "characteristic plane". We follow here the procedure exposed in Ref. [8] which applies to non-monotonous initial distributions, such as the one corresponding to Eq. (2).

We first schematically depict in Fig. 1 (a) the initial spatial distributions $\lambda^\pm(x, 0)$ of the Riemann invariants (left panel). The initial condition (2) yields $\lambda^\pm(x, 0) = \pm\sqrt{\rho(x, 0)}$. A later stage of evolution is shown in the right panel of Fig. 1. We introduce notations for some remarkable values of the Riemann invariants: $\lambda^\pm(-\infty, t) = \lambda^\pm(\infty, t) = \pm\sqrt{\rho_0} \equiv \pm c_0$ and $\lambda^\pm(0, 0) = \pm\sqrt{\rho_m} \equiv \pm c_m$. We also define as part A (part B) the branch of the distribution of the $\lambda^\pm$'s which is at the right (at the left) of the extremum $\pm c_m$. These notations are summarized in Fig. 1 (a).

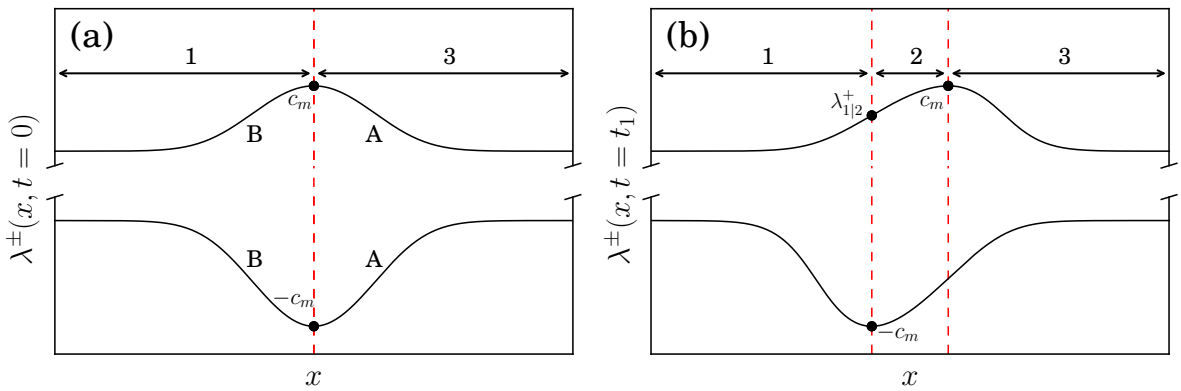


Figure 1. Sketch of the distributions $\lambda^\pm(x, t)$ at time $t = 0$ (left panel) and at finite time $t > 0$ (right panel). In each panel the upper solid curve represent λ^+ (always larger than c_0), and the lower one λ^- (always lower than $-c_0$). Panel (a) corresponds to the initial distribution, in which part B corresponds to region 1 and part A to region 3 (see the text). For $t > 0$, λ^+ (λ^-) moves to the right (to the left) and part B of λ^+ starts to overlap with part A of λ^-. This leads to the configuration represented in panel (b) where a new region (labeled region 2) has appeared. For later convenience, the value $\lambda^+_{1|2}(t_1)$ is added in this panel. It corresponds to the value of λ^+ at the boundary between regions 1 and 2 (see the discussion in Sec. 3.3).

At a given finite time, the x-axis can be considered as divided in three domains, each requiring a specific treatment. Each domain is characterized by the behavior of the Riemann invariants. In domain 3

(domain 1 respectively), λ^+ is decreasing (increasing) while λ^- is increasing (decreasing); in domain 2 both are increasing, see Fig. 1 (b). The theoretical description of this nonlinear wave is challenging because in each regions *both* Riemann invariants (λ^+ and λ^-) depend on position (i.e., there is no simple wave region).

The values of the Riemann invariants corresponding to Fig. 1 (b) are represented in the characteristic plane in Fig. 2 (a). The red curve $\mathcal{C}^0$ in Figs. 2 (a) and (b) corresponds to the initial conditions depicted in Fig. 1 (a). Since $\lambda^+(x,0) = -\lambda^-(x,0)$, the curve $\mathcal{C}^0$ lies along the anti-diagonal in the characteristic plane. The (blue) curvy lines correspond to regions where both Riemann invariants depend on position: the domains 1, 2 and 3. In each of these three domains the solution χ of the Euler–Poisson equation has a different expression. In order to describe these three branches, following Ludford [8], we introduce several sheets in the characteristic plane by unfolding the domain $[c_0, c_m] \times [-c_m, -c_0]$ into a four times larger region as illustrated in Fig. 2 (b). We remark here that the whole region above $\mathcal{C}^0$ — shaded in Fig. 2 (b) — is unreachable for the initial distribution we consider: for instance, the upper shaded triangle in region 1 would correspond to a configuration in which $\lambda^+_{\text{region1}}(x,t) > |\lambda^-_{\text{region1}}(x,t)|$, which does not occur in our case, see Fig. 1 (b). The potential $\chi(\lambda^-, \lambda^+)$ can now take a different form in each of the regions labeled as 1, 2 and 3 in Fig. 2 (b) and still be considered as single-valued. In each of the three domains, we use Riemann–Ludford method to solve Eq. (11). This yields, to a very good approximation (a thorough analysis can be found in Ref. [9])

$$\chi^{(n)}(\lambda^-, \lambda^+) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^+ - \lambda^-}} \int_{-\lambda^-}^{\lambda^+} \sqrt{r}\; w^{\mathrm{A/B}}(r)\,\mathrm{d}r, \tag{12}$$

for regions $n = 1$ and 3. In the above formula, the superscript A should be used when $n = 3$, and the superscript B when $n = 1$, and w^{A} (resp. w^{B}) is the inverse function of the initial λ profiles in part A (resp. part B). For the initial condition (2) one has

$$x = w^{\mathrm{A/B}}(\lambda) = \pm x_0 \sqrt{-\frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 - \rho_0}{\rho_1}} \quad \text{if } x \gtrless 0.$$

In region 2, the formulae (12) are replaced by

$$\chi^{(2)}(\lambda^-, \lambda^+) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^+ - \lambda^-}} \left(\int_{c_m}^{\lambda^+} \sqrt{r}\, w^{\mathrm{B}}(r)\,\mathrm{d}r + \int_{-\lambda^-}^{c_m} \sqrt{r}\, w^{\mathrm{A}}(r)\,\mathrm{d}r \right). \tag{13}$$

3.3 Results and comparison with numerical simulations

Once $\chi^{(n)}(\lambda^-, \lambda^+)$ has been determined in each of the three regions ($n = 1$, 2 or 3), the problem is solved. One first computes $W^{(n)}_{\pm}(\lambda^-, \lambda^+)$ in each region from Eqs. (10), (12) and (13). Then, the procedure to obtain the values of λ^+ and λ^- as functions of x and t is the following:

• One starts by determining the value of λ^+ for which $\lambda^- = -c_m$ at time t. This value of λ^+ defines the boundary between regions 1 and 2. We denoted it as $\lambda^+_{1|2}(t)$; it is represented in Fig. 1 (b). From Eqs. (8), $\lambda^+_{1|2}(t)$ is a solution of

$$\frac{W^{(1)}_+(-c_m, \lambda^+_{1|2}) - W^{(1)}_-(-c_m, \lambda^+_{1|2})}{v_+(-c_m, \lambda^+_{1|2}) - v_-(-c_m, \lambda^+_{1|2})} + t = 0. \tag{14}$$

We then know that, in region 1 at time t, λ^+ takes all possible values between c_0 and $\lambda^+_{1|2}(t)$.

• One picks a value of λ^+ in $[c_0, c_m]$. From Eqs. (8), λ^- is then solution of

$$\frac{W^{(n)}_+(\lambda^-, \lambda^+) - W^{(n)}_-(\lambda^-, \lambda^+)}{v_+(\lambda^-, \lambda^+) - v_-(\lambda^-, \lambda^+)} + t = 0, \tag{15}$$

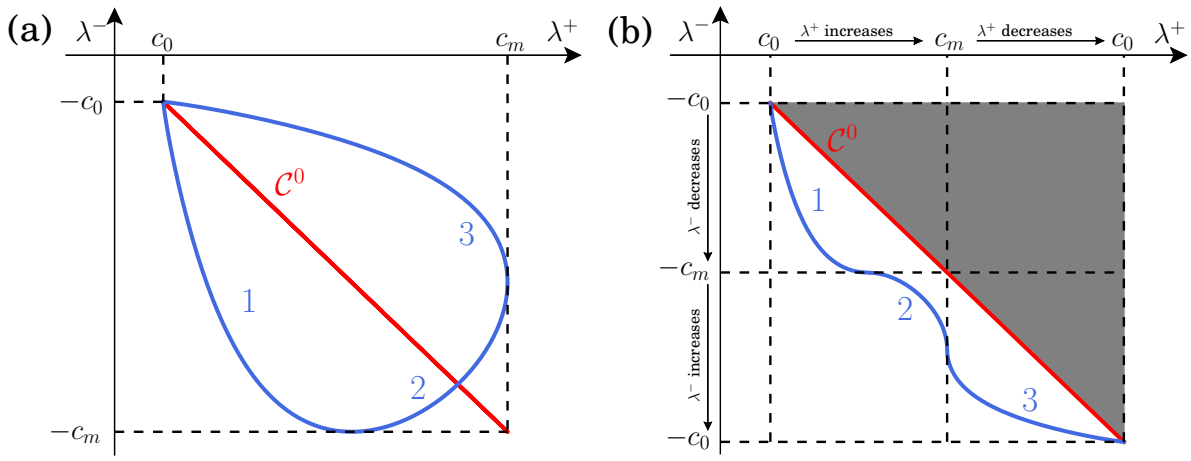


Figure 2. (a) Behavior of the Riemann invariants in the characteristic plane at a given time t (blue curve). The red curve $\mathcal{C}^0$ corresponds to the initial condition $[\lambda^-(x,0) = -\lambda^+(x,0)]$. (b) The same curves in the four-sheeted unfolded surface. In our problem, the whole gray shaded domain above $\mathcal{C}^0$ is unreachable.

with $n = 1$ if $\lambda^+ \in [c_0, \lambda^+_{1|2}(t)]$ and $n = 2$ if $\lambda^+ \in [\lambda^+_{1|2}(t), c_m]$. This determines the value of the Riemann invariants in regions 1 and 2. In region 3 one uses the symmetry of the problem and writes $\lambda^\pm(x,t) = -\lambda^\mp(-x,t)$, see Fig. 1 (b).

• At this point, for each value of t and λ^+ we know the value of the other Riemann invariant λ^-. The position x is then simply obtained by either one of Eqs. (8). So, for given t and λ^+ in region n, one has determined the values of λ^- and x. In practice, this makes it possible to associate a couple (λ^-, λ^+) to each (x,t). The density and velocity profiles are then obtained through Eqs. (5).

The results of the above approach are compared in Fig. 3 with the numerical solution of Eq. (1), taking the initial condition given by Eq. (2) with $\rho_0 = 0.5$, $\rho_1 = 1.5$ and $x_0 = 20$. One reaches an excellent agreement for the density profile and also for the velocity profile (not shown in the figure) up to $t \simeq 20$. As time increases, the profile steepens and oscillations become visible at both ends of the pulse at $t \gtrsim 16$. There exists a certain time, the wave breaking time $t_{\rm WB}$, at which nonlinear nondispersive spreading leads to a gradient catastrophe; our approximation subsequently predicts a nonphysical multivalued profile, as can be seen in Fig. 3 (for $t > 20$). The time $t_{\rm WB}$ can be computed by noticing that the wave breaking occurs for the value $\lambda^+_{\rm WB} = (\rho_0 + \rho_1/\sqrt{e}\,)^{1/2}$ which is associated in the initial profile with the largest gradient in $\partial_x \rho$. At the wave-breaking time the profile of λ^+ in region 3 has a vertical tangent line: $\partial x/\partial \lambda^+ = 0$. For simplicity we also assume that the wave breaking occurs in a region where one can safely approximate $\lambda^- = -c_0$. Differentiation of (7) then yields

$$t_{\rm WB} = \frac{2}{3}\left|\frac{{\rm d}W^{(3)}_+(-c_0,\lambda^+)}{{\rm d}\lambda^+}\right|_{\lambda^+_{\rm WB}} = \left|\frac{\int_{c_0}^{\lambda^+}\sqrt{r}w^{\rm A}(r)\,{\rm d}r}{\sqrt{2}(\lambda^+ + c_0)^{5/2}} + \frac{\sqrt{2}(c_0-\lambda^+)w^{\rm A}(\lambda^+)}{3\sqrt{\lambda^+}(\lambda^+ + c_0)^{3/2}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\lambda^+}{\lambda^+ + c_0}}\frac{{\rm d}w^{\rm A}}{{\rm d}\lambda^+}\right|_{\lambda^+_{\rm WB}}. \quad (16)$$

The numerical value of $t_{\rm WB}$ is found to be $\simeq 19.15$ for our choice of initial condition, in good agreement with numerical simulations. Note also that for a small bump ($\rho_1 \ll \rho_0$) the wave breaking time becomes very large. From (16), and for an initial profile of type (2), one gets at leading order in ρ_1/ρ_0:

$$t_{\rm WB} \simeq \frac{2\sqrt{e}}{3}\frac{x_0}{c_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right). \quad (17)$$

This means that the breaking time is much greater than the time $\sim x_0/c_0$ of propagation of sound along the pulse profile. In our optical system the wave breaking is regularized by the formation of a dispersive

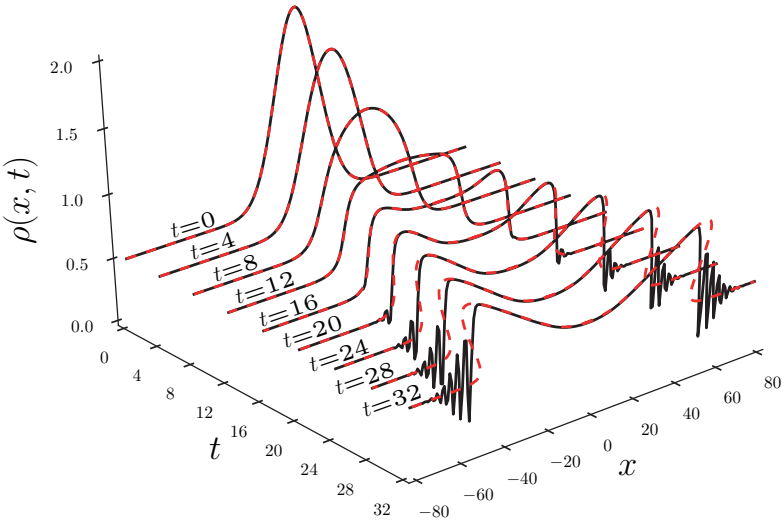


Figure 3. Density profile $\rho(x,t)$ corresponding to the initial conditions (2) with $\rho_0 = 0.5$, $\rho_1 = 1.5$ and $x_0 = 20$. The red dashed line corresponds to the exact solution of the dispersionless system (6) (see the text), while the black curve displays the density obtained from the numerical solution of Eq. (1).

shock wave which is a region with large oscillations of intensity and phase, whose extend increases with time, as can be seen in Fig. 3. Its description requires a nonlinear treatment able to account for dispersive effects and this goes beyond te scope of the present letter (see, e.g., Ref. [9]).

4 Conclusion

In this work we demonstrate that a nondispersive hydrodynamic approach to the spreading and splitting of an optical pulse compares extremely well with the results of numerical simulations up to the wave breaking time. At larger time, one observes the formation of an optical dispersive shock wave, which can be studied within Whitham modulation theory. In the case of the initial distribution given by Eq. (2), the shock should be described by four varying Riemann invariants and this requires a thorough investigation. Work in this direction is in progress.

References

1. V. I. Talanov, *Radiophys.*, **9**, 138–141 (1965).
2. S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov & R. V. Khokhlov, *Usp. Fiz. Nauk*, **93**, 19–70 (1967).
3. W. Wan, S. Jia & J. W. Fleischer, *Nat. Phys.*, **3**, 46–51 (2007).
4. L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Course of Theoretical Physics vol. 8, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford (2006).
5. A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations — An Introductory Course*, World Scientific, Singapore (2000).
6. S. P. Tsarev, *Math. USSR Izv.*, **37**, 397–419 (1991).
7. A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Lectures on Theoretical Physics volume VI, Academic Press, New York (1964).
8. G. S. S. Ludford, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 499–510 (1952).
9. M. Isoard, A. M. Kamchatnov & N. Pavloff, `arXiv:1902.06975 [nlin.PS]` (2019).

Subcritical transition to turbulence in wall-bounded flows: The case of plane Poiseuille flow

Paul Manneville[1] & Masaki Shimizu[2]

[1] Hydrodynamics Laboratory, CNRS-UMR7646, École Polytechnique, Palaiseau, 91128 France
[2] Graduate School of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka, 560-0043 Japan
paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

Abstract. In wall-bounded flows, the laminar regime remain linearly stable up to large values of the Reynolds number while competing with nonlinear turbulent solutions issued from finite amplitude perturbations. The transition to turbulence of plane channel flow (plane Poiseuille flow) is more specifically considered *via* numerical simulations. Previous conflicting observations are reconciled by noting that the two-dimensional directed percolation scenario expected for the decay of turbulence may be interrupted by a symmetry-breaking bifurcation favoring localized turbulent bands. At the other end of the transitional range, a preliminary study suggests that the laminar-turbulent pattern leaves room to a featureless regime beyond a well defined threshold to be determined with precision.

Résumé. Le régime laminaire des écoulements contrôlés par des effets de paroi reste linéairement stable jusqu'à des valeurs élevées du nombre de Reynolds pour lesquelles il se trouve en compétition avec des solutions non-linéaires turbulentes issues de perturbations d'amplitude finie. La transition vers la turbulence de l'écoulement de Poiseuille plan est examinée sur la base de nos simulations numériques. Des observations antérieures contradictoires sont réconciliées en notant que le scénario de percolation dirigée en dimension deux attendu pour le déclin de la turbulence est interrompu par une bifurcation qui brise la symétrie en favorisant des bandes turbulentes localisées. Une étude préliminaire suggère qu'à l'autre extémité de l'intervalle transitionnel, le motif laminaire-turbulent laisse la place au régime uniforme au delà d'un seuil bien défini qui reste cependant à déterminer avec précision.

1 Context

Closed systems such as Rayleigh–Bénard convection become turbulent according to a *globally supercritical scenario* starting from an intuitively simple linear instability. As the control parameter is increased, this *primary* instability is then followed by a small number of successive, *secondary*, *tertiary*,... instabilities, continuously replacing a bifurcat*ing* regime by a nearby bifurcat*ed* regime, rendering the whole process, at least in principle, accessible to weakly nonlinear perturbation theory [1]. Open flows with inflectional velocity profiles are prone to an inertial instability (Kelvin–Helmholtz) and, as observed in mixing layers, jets, or wakes, similarly follow a globally supercritical scenario [2].

This is in strong contrast with the case of wall-bounded shear flows depicted in Fig. 1. With velocity profiles deprived from inflection points, unidirectional flows along walls, in tubes or plane channels, boundary layers, etc. remain inertially stable and may experience instability against Tollmien–Schichting waves, but only beyond some high linear threshold R_c, where R is a suitably defined Reynolds number [2]. R_c can even be pushed to infinity, e.g. for flows in ducts of circular or square sections, or for plane Couette flow (PCF). Whether this instability is supercritical (a) or subcritical (b) [case of plane channel (Poiseuille) flow] is irrelevant since, in practice, much below R_c, nontrivial states may exist in addition to the trivial laminar state owing to nonlinearities inherent in the advection term of Navier–Stokes equation (NSE). The flow can therefore "jump" to the nontrivial branch populated with chaotic solutions as a result of the amplification of finite amplitude perturbations, hence a direct, discontinuous, *globally subcritical* transition to turbulence, and the definition of a global stability threshold $R_g \ll R_c$ below which laminar

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

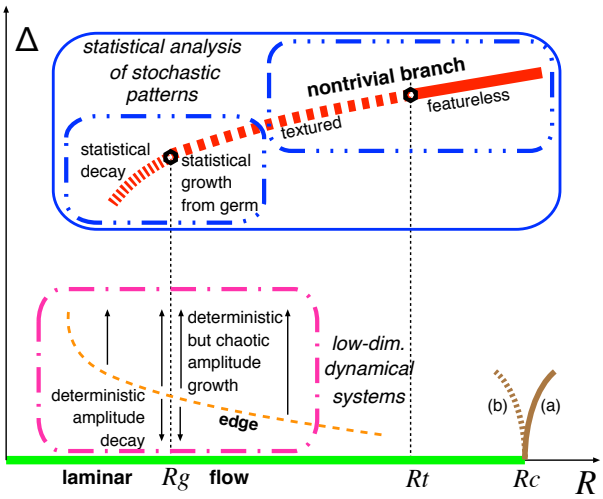


Figure 1. Generic bifurcation diagram for transitional wall-bounded flows.

flow is recovered from any initial condition after a possibly long transient. A general review can be found in [3].

Relying on the identification of essential features of the processes sustaining nontrivial states, a cyclical sequence of streamwise vortices inducing streaks by lift-up and subsequent breakdown – Waleffe's SSP [4], a large body of research on this transition has been focussing on the elucidation of the structure of the phase space in the framework of low-dimensional dynamical systems. The concept of minimal flow unit (MFU) introduced in [5] –minimal periodized domain in which nontrivial states can persist– was instrumental in such studies, ending in a picture where unstable coherent structures and manifolds attached to them are key elements [6]. Interesting outcomes of this approach are the interpretation of turbulence's lifetime distributions in terms of chaotic transients and the discovery of *edge states* sitting on the boundary of the attraction basin of the laminar solution, from the neighborhood of which trajectories can be found to land on the turbulent attractor or else are visited during decay to laminar flow.

By nature unable to deal with spatial modulations in physical space the MFU approach had to be extended to treat the passage from attractor coexistence *in phase space* to what is actually observed: the coexistence *in physical space* of domains filled with one of the possible states, either trivial or nontrivial, and interfaces between them, which –by the way– is generic in extended systems experiencing a subcritical instability. Accordingly, localized edge states were found, e.g. [7], that can serve as germ for the expansion of turbulence above $R_{\rm g}$ or show up at the latest stages of decay. This directly leads to the interpretation of the transition in terms of spatiotemporal intermittency promoted by Pomeau [8] who conjectured that this regime should decay following a scenario interpreted within the phase-transition framework as a transition in the universality class of a stochastic contamination process called *directed percolation* (DP). This non-equilibrium process describe the invasion of a uniformly quiescent *absorbing* regime, here obviously laminar flow, by an *active* state, here chaotic or turbulent, as the contamination probability increases. In this framework, the global stability threshold $R_{\rm g}$ corresponds to the DP threshold $R_{\rm c}^{\rm DP}$ and scaling properties are expected in its vicinity. This statistical-physics viewpoint has received some support from experiments in a quasi-one-dimensional cylindrical Couette flow (CCF) configuration [9] and by numerical simulations of a model of shear flow without walls in a quasi-two-dimensional geometry [10], among a few other cases.

Channel flow is one such additional case for which agreement has been found with 2D-DP universality in a decay experiment from uniform turbulence [11]. This result is however contradicted by the observation of oblique localized turbulent bands (LTBs) in numerical [12] or laboratory experiments [13] below $R_{\rm c}^{\rm DP}$ reported in [11]. Our numerical study, to be developed below [14] reveals how these two contradictory

results can be reconciled by identifying a transition that preempts the DP scenario just above its supposed critical point.

As R further increases, the spatiotemporally intermittent laminar-turbulent distribution progressively disappears leaving a state of essentially uniform turbulence called *featureless* [15]. In PCF [16] and CCF at large circumferential aspect ratio [15,16], as well as in channel flow [17], and a few other cases, the laminar-turbulent alternation displays a well-organized oblique turbulent band (or spiral) pattern. A threshold R_t can sometimes be defined for the establishment of the featureless regime, e.g. in PCF [16,18], as also suggested by our preliminary results for channel flow (see below).

Summarizing this long introduction, wall-bounded flows generically experience a direct and wild transition to turbulence with different regimes as illustrated in Fig. 1: (i) nontrivial solution branch disconnected from laminar flow, to be studied using statistical-physics tools in use for critical phenomena, with decay after long chaotic transients below R_g; (ii) above R_g, regular pattern observable up to an upper threshold R_t and featureless turbulent flow above R_t; (iii) at the moderate R of interest, viscous effects strong enough to ensure the persistence of coherent structures, making tools from the theory of deterministic, dissipative, low-dimensional dynamical systems still relevant.

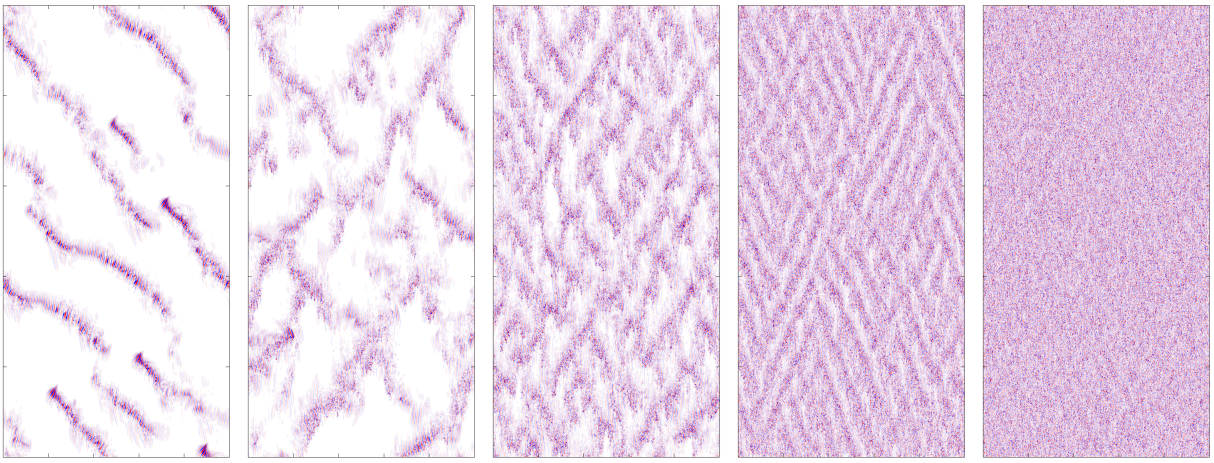
Remark also that laminar flow is still a possible *linearly stable* solution to the NSE all along the transitional range $[R_\mathrm{g}, R_\mathrm{t}]$ and *finite amplitude* germs are required to leave the trivial branch, which ordinarily is sufficient to establish the *sub-critical* character of the transition. This character is however often expressed through an expected *discontinuous* behavior of observables at the corresponding threshold, here R_g. This qualitative expectation may be misleading since, quantitatively, the "distance" between the trivial and nontrivial branch may tend to zero in terms of turbulent fraction, as observed in several cases [9–11].

2 Plane channel flow

We now turn to our own results for channel flow obtained by direct numerical simulations of NSE using a program developed by one of us. Details can be found in [14]. The flow is driven by a constant body force f. The centerline velocity U of the laminar flow induced by this force and the half-distance h between the plates are used to turn the equations dimensionless, hence $U = fh^2/2\nu$, with ν the kinematic viscosity of the fluid, and $R = Uh/\nu = fh^3/2\nu^2$. A domain $(L_x \times 2 \times L_z)$ is considered with periodic boundary conditions in the stream-wise and span-wise directions (x, z) and the usual no-slip condition in the wall-normal direction y. A spectral Fourier–Chebyshev–Fourier scheme is developed in a velocity-vorticity formulation involving the wall-normal velocity u_y and vorticity $\omega_y = \partial_z u_x - \partial_x u_z$ [19]. Most simulations have been performed for $L_x = 500$ and $L_z = 250$ and complementary studies not reported here in four times larger or smaller domains. The working resolution is with 767 Fourier wavenumbers in each in-plane direction and 32 Chebyshev polynomials along y. Aliasing is fully removed by evaluating nonlinear terms using a total of $(2304 \times 64 \times 2304)$ mode amplitudes. The simulations appear to be well-resolved in the range of R of interest to the transition.

Overview of the transitional range in physical space. At given R below $R_\mathrm{c} = 5772$ [20], besides the laminar solution, NSE possess solutions triggered by finite perturbations and belonging to the nontrivial branch mentioned in Section 1. Such solutions are associated to a mean stream-wise velocity $\langle U_\mathrm{m}\rangle$ smaller than the corresponding laminar value $U_\mathrm{m}^\mathrm{lam} = \frac{2}{3}$ (in units of U). Due to turbulence, speed $\langle U_\mathrm{m}\rangle$, often called *bulk velocity*, is an empirical quantity that fluctuates and has to be averaged in time. Accordingly, we define $\tilde{R} = \frac{3}{2}\langle U_\mathrm{m}\rangle R$ to facilitate the comparison with other works that use the bulk velocity in the definition of the Reynolds number ($\tilde{R} \equiv R$ for laminar flow). The different flow regimes we have observed are depicted in Fig. 2. A preliminary simulation at $R = 2000$, starting from a finite amplitude initial random condition, has provided us with a pattern that has next been evolved upon decreasing or increasing R regularly (values up to $R = 6000 \gtrsim R_\mathrm{c}$ have been considered). Solutions presented have reached a statistically steady state.

LTBs described in [12,13] are here shown for $R = 850$, in the one-sided propagation regime where all the bands go in the same direction. They are seen to recede and disappear for $R \lesssim 700$. At $R = 1200$



$R = 850, \tilde{R} = 789$ $R = 1200, \tilde{R} = 1012$ $R = 1800, \tilde{R} = 1237$ $R = 3000, \tilde{R} = 1604$ $R = 4000, \tilde{R} = 1843$

Figure 2. Statistically steady regimes of channel flow as depicted from the wall-normal velocity component measured in the central plane in color levels (white is laminar). Stream-wise direction is vertical upwards.

they propagate in both directions, forming a strongly intermittent loose discontinuous laminar-turbulent network, with turbulent arms broken by laminar gaps. At $R = 1800$, laminar gaps have disappeared and the network is now continuous but still loose and intermittent. When R is further increased this crisscrossed pattern gets tight and more regular with conspicuous domains of one or the other orientation separated by grain boundaries, here at $R = 3000$. This pattern next fades away, being hardly visible at $R = 4000$. A close parallel can be drawn with the case of CCF (and PCF) examined by the Saclay group [16].

The lower transitional range. Below $R \sim 3000$, the laminar-turbulent alternation is sufficiently marked for the definition of a turbulent fraction F_{t} to make sense. This turbulent fraction was determined using a two-level moment-preserving thresholding method [20] that automatically places the cut-off between laminar and turbulent local states so as to reduce the distribution of the gray-levels to an optimal black-and-white distribution.

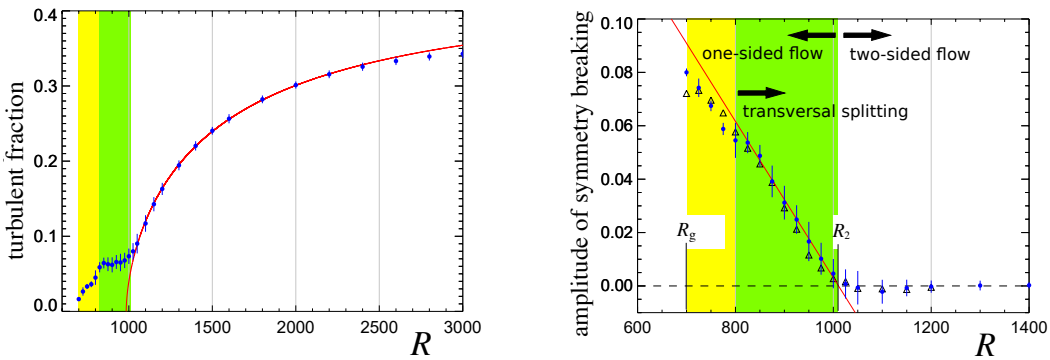


Figure 3. Left: Turbulent fraction as a function of R. Right: Symmetry breaking near the one-sided/two-sided bifurcation point at R_2; triangles are for simulations in a four-fold wider domain.

Figure 3 (left) displays the variation of $F_{\rm t}$ as a function of R. The line corresponds to a fit of the data against the function[1] $F_{\rm t} = A(1 - R_{\rm c}^{\rm DP}/R)^{\beta}$ with $A \simeq 0.45$, $R_{\rm c}^{\rm DP} \simeq 984$, and $\beta \simeq 0.58 \approx \beta^{\rm DP}$ in the two-dimensional case. The behavior reported by Sano & Tamai [11] is therefore recovered but the DP critical point cannot be closely approached since for $F_{\rm t} \lesssim 0.1$ a crossover is observed involving a symmetry-breaking bifurcation from two-sided to one-sided propagation that precisely corresponds to the LTB regime observed in [12, 13] at comparable Reynolds numbers.

At decreasing R, the symmetry-breaking transition is due to the rapidly decreasing probability of lateral branching compared to splitting along the LTBs. The two orientations appear with essentially equal weights and the rate of lateral branching is comparable to that of parallel splitting in the symmetrical regime ($R = 1200$ in Fig. 2). But this rate rapidly decreases in the green zones appearing in Fig. 3 and becomes negligible for $R \leq 800$ in the yellow zones. An observable measuring the lack of symmetry has been designed as plotted in Fig. 3 (right). A simple phenomenological model has been developed for this symmetry restoration [14], supporting a linear variation of the asymmetry amplitude that helped us extrapolate it to zero and define the corresponding threshold at $R_2 \simeq 1010$.

The upper transitional range. For $R \gtrsim 2600$, the spatiotemporally intermittent laminar-turbulent alternation is less marked rendering the analysis in terms of turbulence fraction less appropriate while the pattern becomes both more steady and more regular, suggesting the recourse to Fourier analysis. The transverse perturbation energy field $E_{2D}(x, z; t) = \int_{-1}^{+1} {\rm d}y \frac{1}{2}[u_y^2(x, y, z; t) + u_z^2(x, y, z; t)]$ is considered here and series of Fourier spectra are recorded at statistically steady state. Means and standard deviations of time series of the intensity of each mode with $k_{x,z} = 2m_{x,z}\pi/L_{x,z}$, i.e. $S_{k_x,k_z;n} = |\hat{E}_{\rm 2D}(k_x, k_z; t_n)|^2$, are computed for 50 snapshots separated by $\Delta t = 1000$, hence essentially independent.

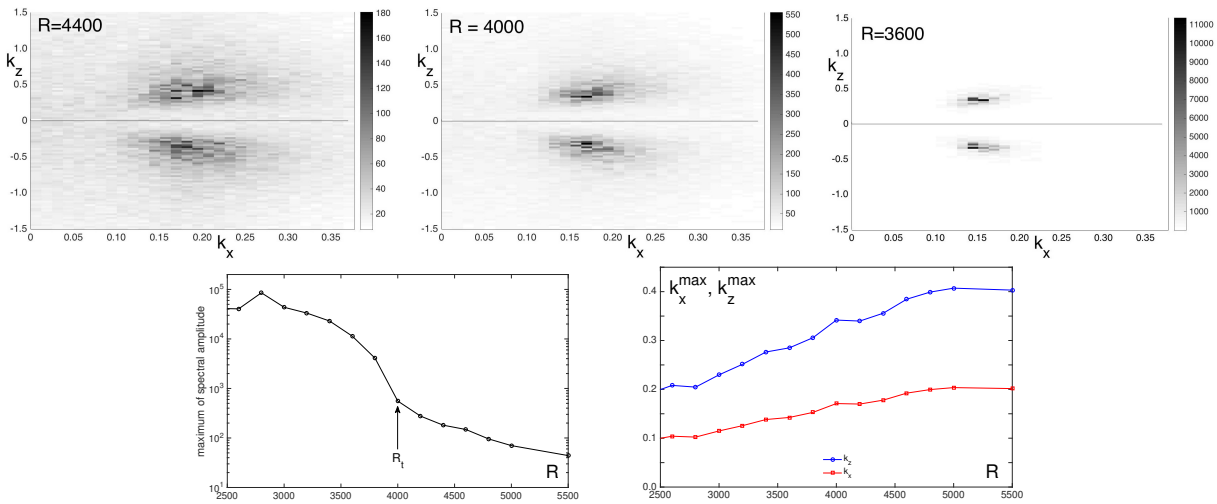


Figure 4. Top: Mean spectra $\overline{S}_{k_x,k_z}$ of E_{2D} for $R = 4400$, 4000, and 3600, from left to right. Bottom. Maximum of spectral intensity $\overline{S}^{\rm max}_{k_x,k_z}$ (left) and location $k_x^{\rm max}, k_z^{\rm max}$ of this maximum in the $(k_x, |k_z|)$-plane (right), as functions of R.

Figure 4 (top) display the means of these spectra $\overline{S}_{k_x,k_z}$. At large R inside the supposedly *featureless* regime, wide bumps are found, corresponding to highly fluctuating, low amplitude, modulations, less and less pronounced as R increases ($\overline{S}^{\rm max}(4400) \simeq 180$). In contrast, when the pattern is well established the spectra are dominated by sharp peaks ($\overline{S}^{\rm max}(3600) \simeq 11200$). The variation of the maximum $\overline{S}^{\rm max}$ as a function of R is displayed using lin-log scale in Fig. 4 (bottom, left). It shows that the inflection at $R \sim 4000$ ($\overline{S}^{\rm max}(4000) \simeq 550$) corresponds to a rapid increase, interpreted as a sudden condensation

[1] The control parameter is $1/R$ rather than R, yielding an excellent fit from $R = 1050$ up to 2400.

of the weak turbulence-intensity modulations into a genuine pattern. Figure 4 (bottom, left) displays the position $(k_x^{\max}, k_z^{\max})$ of these maxima in the wave-vector plane as a function of R. It is seen that for $R \in [2500, 4000]$, the two-components of the wave vectors increase roughly linearly with R, i.e. a regular wavelength decrease from $(\ell_x, \ell_z) \simeq (62, 32)$ at $R = 2500$ to $\simeq (38, 19)$ at $R = 4000$. They however maintain a nearly constant ratio $|k_z|/k_x \sim 2$, hence turbulent bands essentially making an angle $\theta = \arctan(1/2) \approx 26°$ with the streamwise direction all along this range. For $R \geq 4000$, the wavelength of the turbulence-intensity fluctuations continues to decrease slightly as they become weaker and weaker with increasing R.

3 Discussion/Conclusion

The transition to turbulence in wall-bounded flows, briefly reviewed in Section 1, remains a good testing ground for the theory of non-equilibrium phase transitions. In Section 2, we illustrated the case of plane channel flow driven by a constant bulk force using our own simulations. Results presented in the recent literature, among others [11–13, 17], were recovered. In particular, the relevance of the 2D-DP scenario for turbulence decay [11] was confirmed but reconciled with other results showing the presence of localized turbulent states below the DP-threshold [12, 13]. Within our protocol, a symmetry-breaking bifurcation due to the rapid decrease of the rate of lateral branching in the loose spatiotemporally intermittent network regime forces the system to a new regime preempting the critical behavior inherent in the DP framework [14]. Ongoing work is devoted to improve the statistical study of the flow in the upper transitional range. The physical mechanisms underlying the branching processes at increasing R near R_{g} and those responsible for the patterning observed at decreasing R at the still putative threshold R_{t} remain to be elucidated.

Acknowledgments. This work is supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP17K14588. Simulations are performed using NIFS's FUJITSU FX100 "Plasma Simulator" (contract NIFS16KNSS083). We would like to thank Y. Duguet (LIMSI) for interesting discussions about the problem.

References

1. P. Manneville, *Instabilities, Chaos and Turbulence*, 2nd edition, Imperial College Press (2010).
2. P. Huerre & M. Rossi, Hydrodynamic instabilities in open flows, in C. Godrèche & P. Manneville, *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, Cambridge University Press (1998).
3. P. Manneville, *Bull. JSME Mech. Eng. Rev.*, **3**, 15-00684 (2016).
4. F. Waleffe, *Phys. Fluids*, **9**, 883–900 (1997).
5. J. Jiménez & P. Moin, *J. Fluid Mech.*, **225**, 213–240 (1991).
6. G. Kawahara *et al.*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **44**, 203–225 (2011).
7. Y. Duguet *et al.*, *Phys. Fluids*, **21**, 111701 (2009).
8. Y. Pomeau, *Physica D*, **23**, 3–11 (1986).
9. G. Lemoult *et al.*, *Nat. Phys.*, **12**, 254–258 (2016).
10. M. Chantry *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **824**, R1 (2017).
11. M. Sano & K. Tamai, *Nat. Phys.*, **12**, 249–253 (2016).
12. X. Xiong *et al.*, *Phys. Fluids*, **27**, 041702 (2015).
13. C. S. Paranjape *et al.*, `http://www.delegia.com/app/data/8684/Abstract/29766/ETC16_Paranjape.pdf`
14. M. Shimizu & P. Manneville, `arXiv:1808.06479[physics.flu-dyn]`.
15. C. D. Andereck *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155–183 (1986).
16. A. Prigent *et al.*, *Physica D*, **174**, 100–113 (2003).
17. T. Tsukahara *et al.*, *4th TSFP Symposium*, Williamsburg, Proceedings p. 935ff (2005).
18. L. S. Tuckerman & D. Barkley, *Phys. Fluids*, **23**, 041301 (2011).
19. L. Quartapelle, *Numerical Solution of the Incompressible Navier–Stokes Equations*, ISNM vol. 113, Birkhäuser (1993).
20. S. Orszag, *J. Fluid Mech.*, **50**, 689–703 (1971).
21. W.-H. Tsai, *Comput. Vis. Graph. Image Process.*, **29**, 377–393 (1985).

Description N-corps de l'interaction onde–particule dans une structure périodique

Damien F. G. Minenna[1,2,3], Yves Elskens[2], Frédéric André[3], Fabrice Doveil[2] & Alexandre Poyé[2]

[1] Centre National d'Études Spatiales, FR-31401 Toulouse cedex 9, France
[2] Aix-Marseille Université, CNRS, PIIM, UMR 7345, FR-13397 Marseille, France
[3] Thales, FR-78140 Vélizy, France
damien.minenna@univ-amu.fr

Résumé. En électrodynamique classique et en physique microscopique des plasmas, la description N-corps de l'interaction onde–particule a longtemps été jugée impraticable. Nous montrons que cette description est une alternative viable à la traditionnelle approche vlasovienne (cinétique), notamment pour la modélisation temporelle des turbulences et instabilités engendrées par la dynamique non linéaire des particules (piégeage, chaos, couplages à trois ou quatre ondes). Combinée avec un modèle de réduction du nombre de degrés de liberté, cette description nous permet notamment de modéliser fidèlement des structures périodiques (tubes à ondes progressives, lasers à électrons libres ou accélérateurs de particules). Cette description est aussi employée pour décrire la synchronisation entre ondes de Langmuir et électrons dans le contexte de l'amortissement Landau.

Abstract. The N-body Hamiltonian description of the wave–particle interaction is often deemed impossible in classical electrodynamics and for microscopic dynamics of plasmas. We show that this description is a viable alternative to the traditional Vlasovian (kinetic) approach, especially for time simulations of turbulence and instabilities generated by nonlinear particle dynamics (trapping, chaos, three- or four-wave couplings). Combined with a model reduction to decrease the number of degrees of freedom, this description enables us to accurately study periodic structures (such as traveling-wave tubes, free electron lasers or particle accelerators). This description is also used to describe the synchronization between Langmuir waves and electrons in the context of Landau damping.

1 Introduction

L'interaction entre ondes électromagnétiques et particules chargées est un aspect fondamental de la physique. Sans parler de la mécanique quantique, cette interaction est reliée à l'électrodynamique classique, dans le vide et dans les milieux. Elle touche aussi aux bases de la physique des plasmas froids et chauds (fusion par confinement magnétique ou inertiel, météorologie spatiale...), impliquant des effets non linéaire tel que l'amortissement Landau ou le chaos hamiltonien (cf. section 3). Cette interaction est même un facteur clé de la physique des accélérateurs de particules, des tubes électroniques sous vide, et des lasers à électrons libres.

Pourtant, une description complète et détaillée des champs électromagnétiques (EM) reste un défi, car ceux-ci sont, par définition, des fonctions de l'espace et du temps. Ce défi est d'autant plus grand lorsque l'on prend en compte toutes les particules chargées qui ajoutent autant de variables de position et de vitesse. Il devient nécessaire d'utiliser des descriptions réduisant le nombre de degrés de liberté. Pour les champs EM, on utilisera, par exemple, des méthodes d'éléments finis ou des circuits équivalents RLC. La section 2 présente notre modèle de réduction, dit modèle discret de Kuznetsov.

En général, pour représenter les particules dans les modèles d'interaction, il existe trois classes d'approches :

– La plus connue est la description fluide (et par extension la magnétohydrodynamique) où les densités de fluides évoluent suivant l'équation de continuité. Puisque les fluides ne sont pas créés ou détruits, la densité locale des fluides change en conservant la quantité globale de matière. Cette approche est réputée plus facile comparée aux autres, mais elle ne résout pas les effets sensibles à la distribution de vitesses (tels que l'amortissement Landau ou le *bunching* de particule).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

– La description cinétique (aussi appelé description vlasovienne) est une approche qui prend en compte le mouvement des particules au travers d'une fonction de distribution évoluant suivant l'équation de Vlasov (souvent étendue au couple Vlasov–Poisson, ou Boltzmann en présence de collisions). Les théories cinétiques ne cherchent pas à décrire le mouvement exact de chaque particule mais essayent de déduire les caractéristiques collectives du système, considéré comme continu. Cette approche, à la base des codes *particle-in-cell* (PIC), peut s'avérer très utile pour étudier les groupes avec un nombre très grand de particules, comme, par exemple, dans un tokamak.
– La plus complexe à mettre en œuvre est la description par particules discrètes (aussi dite description N-corps ou dynamique moléculaire), car chaque particule du système obéit aux lois de la dynamique. Les fonctions de distribution continues de la description cinétique deviennent discrètes [2]. Cette approche est très coûteuse numériquement du fait de l'immense nombre de degrés de liberté mis en jeu. Toutefois, elle offre un chemin remarquablement intuitif pour comprendre l'interaction onde–particule. On la retrouve dans la caractérisation des lasers à électrons libres, dans l'étude du chaos hamiltonien et dans les modèles d'interaction laser-plasma. Depuis plus de 20 ans, les membres de l'équipe Turbulence Plasma du laboratoire PIIM (Aix-Marseille Université, CNRS) se sont spécialisés dans l'utilisation de la description N-corps, à partir du formalisme hamiltonien [1, 3], et avec comme principal outil expérimental un tube à ondes progressives (cf. section 3).

2 L'interaction onde–particule dans un tube à ondes progressives

Les tubes à ondes progressives (TOPs) [4] (cf. Fig. 1) sont des amplificateurs d'onde sous vide. Ils sont utilisés dans les télécommunications spatiales et dans la recherche fondamentale pour étudier l'interaction onde–particule. Ils sont composés de trois parties sous ultra-vide : (i) un canon à électron ; (ii) une ligne à retard (structure à onde lente) et un collecteur en fin de ligne. La géométrie de la ligne à retard métallique réduit la vitesse de phase v_{ph} de l'onde pour qu'elle coïncide avec la vitesse typique des particules v_{e} du faisceau : c'est la résonance. Des aimants permanents ou une bobine magnétique confinent le faisceau le long de l'axe de propagation.

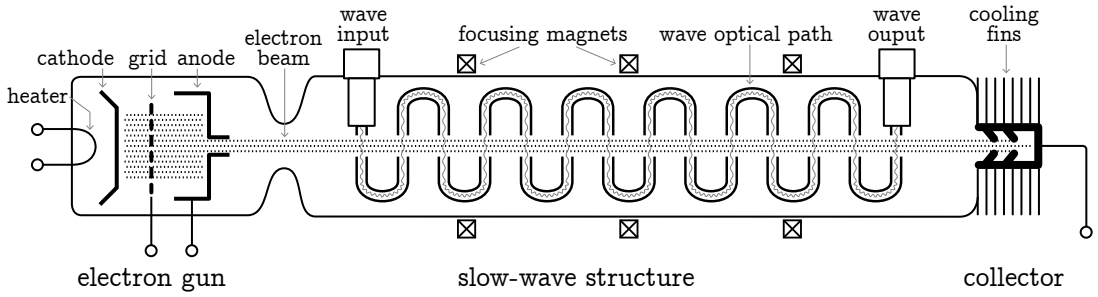
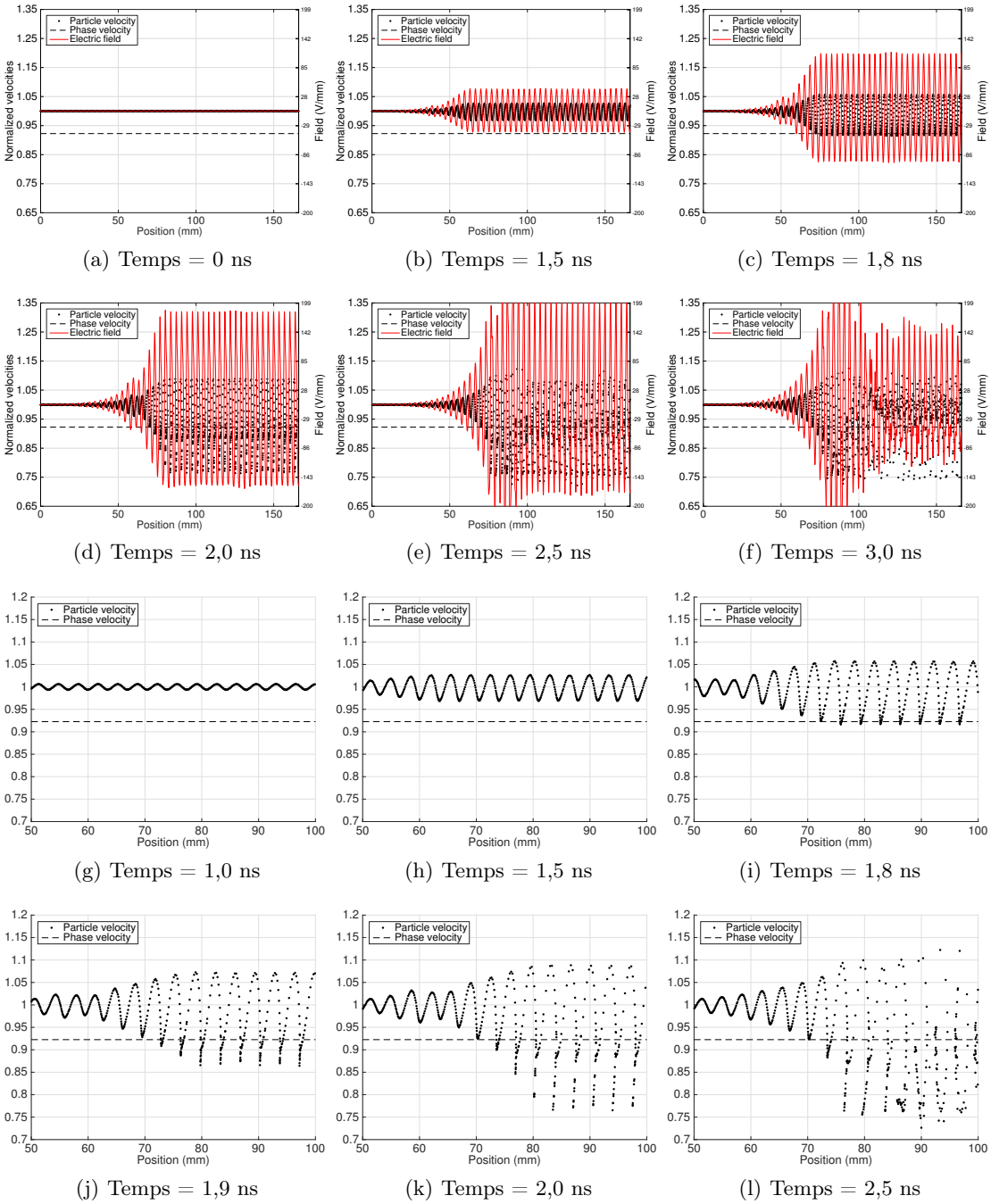


Figure 1. Schéma d'un tube à onde progressive. Reproduite avec la permission de Springer Nature [Minenna *et al.*, *Eur. Phys. J. H* (2019) doi : 10.1140/epjh/e2018-90023-1].

De nos jours, la modélisation des tubes électroniques sous vide, tels que les TOPs, est difficile à cause du nombre de paramètres en jeu et parce qu'en régime non linéaire, le fonctionnement des TOPs, à de très grandes puissances, génère des instabilités critiques. Pour y parvenir, les simulations actuelles reposent soit sur des codes PIC, très longs et coûteux numériquement, soit sur des modèles fréquentiels spécialisés qui perdent en précision dans les cas complexes. Nos proposons une troisième option combinant le modèle discret de Kuznetsov avec une description N-corps pour construire un modèle temporel spécialisé.

Le modèle discret de Kuznetsov [5–11] permet une réduction drastique du nombre de degrés de liberté pour les champs. En effet, les champs électriques et magnétiques, dans une structure périodique, sont



(a) Temps = 0 ns (b) Temps = 1,5 ns (c) Temps = 1,8 ns

(d) Temps = 2,0 ns (e) Temps = 2,5 ns (f) Temps = 3,0 ns

(g) Temps = 1,0 ns (h) Temps = 1,5 ns (i) Temps = 1,8 ns

(j) Temps = 1,9 ns (k) Temps = 2,0 ns (l) Temps = 2,5 ns

Figure 2. Propagation d'un faisceau d'électrons et du champ électrique dans un tube à ondes progressives. Les simulations sont faites avec un algorithme unidimensionnel [12] à partir d'un modèle hamiltonien auto-cohérent N-corps [10]. Points noirs : vitesses des macro-électrons (de charge $\simeq 200\,000e$) normalisées $(v(t)/v(0))$ le long du tube au temps donné. Trait rouge : champ électrique longitudinal. Trait pointillé : vitesse de phase de l'onde réduite $(v_{\mathrm{ph}}/v(0))$. La séparatrice du portrait de phase (onde–particule) est centrée sur ce trait pointillé. Le faisceau est en interaction avec une onde. En prenant $v(0) \gtrsim v_{\mathrm{ph}}$, la synchronisation force les particules à perdre en vitesse. La quantité de mouvement perdue est transférée à l'onde qui croît. Les paramètres initiaux (vitesse électronique initiale, fréquence d'excitation de l'onde, relation de dispersion de la ligne à retard...) sont réglés pour assurer que l'amplification de l'onde atteint la saturation de puissance à $z = 80$ mm. Les effets de charge d'espace (répulsion coulombienne entre particules) sont pris en compte. Les effets non linéaires tels que le piégeage des particules sont observés.

décomposés sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_n \mathsf{V}_n(t)\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathrm{i}\sum_n \mathsf{I}_n(t)\mathbf{H}_n(\mathbf{r})\,, \tag{1}$$

où n est le numéro de période dans la ligne à retard. Ainsi, les champs EM à la position $\mathbf{r}$ sont des superpositions de champs propres $\mathbf{E}_n$ et $\mathbf{H}_n$ (fixés par la géométrie du tube) avec des amplitudes V_n et I_n dépendant du temps. Par exemple, dans un tube à ondes progressives composé de 200 périodes, pour un mode dominant, les champs EM pourront être décomposés en 200 variables V_n, et I_n, de sorte que le système possède 200 degrés de liberté. La différence est drastique comparée avec les codes particle-in-cell (PIC) où les champs à eux seuls nécessitent des millions de degrés de liberté. Dans l'approche hamiltonienne N-corps [9, 10], les I_n et V_n deviennent les variables canoniques et moments conjugués de l'onde.

Ce modèle est utilisé pour simuler, avec succès, des TOPs industriels en régime non linéaire [12]. Cela inclut l'amplification de signaux télécoms non sinusoïdaux. L'approche hamiltonienne N-corps permet un meilleur contrôle des propriétés de conservation dont l'invariant de Poincaré–Cartan [13] et nous permet de construire un algorithme symplectique [14] et parallélisé multi-processeur. Grâce au modèle discret, ces simulations peuvent être réalisées en une dimension spatiale, là où les approches en domaine temporel sont généralement tridimensionnelles et donc plus longues. La figure 2 présente l'évolution des champs et des particules le long d'un TOP.

3 Description N-corps de la synchronisation onde–particule dans les plasmas

L'interaction onde–particule est un mécanisme fondamental en physique des plasmas. Pour étudier le système faisceau–plasma, on peut utiliser un tube à ondes progressives (TOP), permettant une étude dans un environnement mieux contrôlé. En effet, les plasmas sont bruités alors que leur rôle de milieu de propagation des ondes de Langmuir peut être assuré par la structure géométrique (ligne à retard) d'un TOP. Le taux de croissance de l'onde dans le premier cas est fixé par la fonction de distribution du plasma, tandis que dans le second cas, il peut se calculer à partir de l'impédance de la structure (en

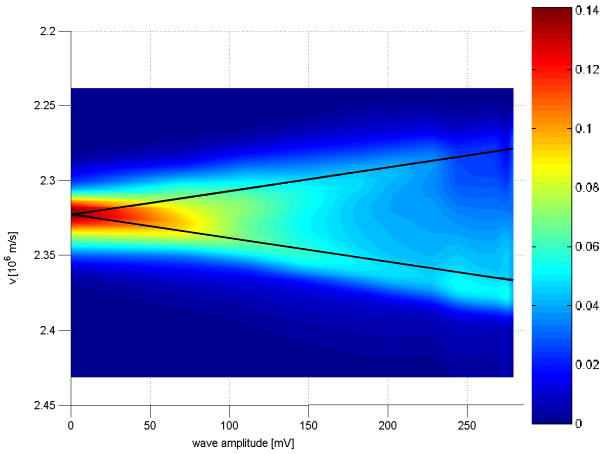


Figure 3. Première observation expérimentale de la synchronisation non linéaire [20] responsable de l'amortissement Landau pour une seule onde. Mesure provenant du TOP du PIIM (Aix-Marseille Université, CNRS). Le faisceau est injecté à $v(0) = 2{,}32 \times 10^6$ m/s en présence d'une onde avec une vitesse de phase $v_{\mathrm{ph}} = 3{,}45 \times 10^6$ m/s. La couleur visualise la fonction de distribution en vitesse (moyenne spatiale) en fonction de l'amplitude de l'onde. Les droites symétriques marquent la portée de la modulation linéaire de la vitesse du faisceau. La synchronisation se manifeste dans une correction quadratique tirant la vitesse du faisceau vers la vitesse de phase de l'onde.

régime linéaire). Ce remplacement permet une analyse détaillée de l'interaction auto-cohérente entre des ondes instables et un faisceau d'électrons froid [15] ou chaud [16, 17].

Depuis 1994, un TOP de 4 mètres [18] (l'un des plus longs du monde [4]) est utilisé à Marseille pour étudier expérimentalement les modèles faisceau–plasma. À la place du collecteur, un analyseur trochoïdal [19] permet de mesurer la distribution en énergie du faisceau. Ce TOP a permis d'observer expérimentalement [20] la synchronisation non linéaire responsable de l'amortissement Landau (cf. Fig. 3), en accord avec la théorie N-corps hamiltonienne [1, 21, 22]. Il a aussi permis l'observation de caractéristiques importantes du chaos hamiltonien [23–26], de tester de nouvelle méthodes sur le transport chaotique [27], ainsi que de tester le chauffage de particules par des ondes [28].

4 Perspectives

L'un des principaux avantages du modèle discret est que les champs EM sont représenté en temps. Nous travaillons sur des cas où les ondes sont non sinusoïdales, tels que les multi-porteuses (avec les amplitudes $\sum_i A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$) ou la modulation digitale des signaux télécoms. En parallèle, nous étudions la formulation de la puissance électromagnétique temporelle pour des ondes sont non sinusoïdales.

Pour le moment, nos simulations sont unidimensionnelles. Une adaptation de la ligne à retard à la géométrie hélicoïdale (structure privilégié pour les TOPs) est en cours.

Récemment [29], la description N-corps a servi de socle à l'examen, dans les plasmas et les guides d'ondes, de la controverse Abraham–Minkowski (bien connue dans les milieux diélectriques). Ceci a permis de mettre en évidence l'universalité de cette controverse qui dit que, quand la lumière est ralentie (peu importe la cause), l'impulsion de cette lumière admet deux formulations différentes (une cinétique et une canonique).

Références

1. Y. Elskens & D. F. Escande, *Microscopic dynamics of plasmas and chaos*, IoP publishing, Bristol (2003).
2. Y. Elskens, D. F. Escande & F. Doveil, Vlasov equation and N-body dynamics — How central is particle dynamics to our understanding of plasmas?, *Eur. Phys. J. D*, **68**, 218–224 (2014).
3. D. F. Escande, D. Bénisti, Y. Elskens, D. Zarzoso & F. Doveil, Basic microscopic plasma physics form N-body mechanics, A tribute to Pierre-Simon de Laplace, *Rev. Mod. Plasma Phys.*, **2**, 9–76 (2018).
4. D. F. G. Minenna, F. André, Y. Elskens, J-F. Auboin, F. Doveil, J. Puech & É. Duverdier, The traveling-wave tube in the history of telecommunication, *Eur. Phys. J. H*, sous presse, `doi:10.1140/epjh/e2018-90023-1` (2019).
5. S. P. Kuznetsov, On one form of excitation equations of a periodic wave-guide, *Sov. J. Commun. Technol. Electron.*, **25**, 419–421 (1980).
6. N. M. Ryskin, V. N. Titov & A. V. Yakovlev, Nonstationary nonlinear discrete model of a coupled-cavity traveling-wave-tube amplifier, *IEEE Trans. Electron Devices*, **56**, 928–934 (2009).
7. P. Bernardi, F. André, J.-F. David, A. Le Clair & F. Doveil, Efficient time-domain simulations of a helix traveling-wave tube, *IEEE Trans. Electron Devices*, **58**, 1761–1767 (2011).
8. P. Bernardi, F. André, J.-F. David, A. Le Clair & F. Doveil, Control of the reflections at the terminations of a slow wave structure in the nonstationary discrete theory of excitation of a periodic waveguide, *IEEE Trans. Electron Devices*, **58**, 4093–4097 (2011).
9. F. André, P. Bernardi, N. M. Ryskin, F. Doveil & Y. Elskens, Hamiltonian description of self-consistent wave-particle dynamics in a periodic structure, *Europhys. Lett.*, **103**, 28004 (2013).
10. D. F. G. Minenna, Y. Elskens, F. André & F. Doveil, Electromagnetic power and momentum in N-body Hamiltonian approach to wave-particle dynamics in a periodic structure, *Europhys. Lett.*, **122**, 44002 (2018).
11. D. F. G. Minenna, A. G. Terentyuk, F. André, Y. Elskens & N. M. Ryskin, Recent discrete model for small-signal analysis of traveling-wave tubes, *Phys. Scr.*, sous presse, `doi:10.1088/1402-4896/ab060e` (2019).
12. D. F. G. Minenna *et al.*, DIMOHA: Traveling-wave tube simulations including band edge and multitone operations, *20th International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2019), Busan*, accepté (2019).

13. V. I. Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir, Moscou (1976).
14. E. Hairer, C. Lubich & G. Wanner, *Geometric numerical integration*, Springer, New York (2010).
15. G. Dimonte & J. H. Malmberg, Destruction of trapping oscillations, *Phys. Fluids*, **21**, 1188–1206, (1978).
16. S. I. Tsunoda, F. Doveil & J. H. Malmberg, Experimental test of the quasilinear theory of the interaction between a weak warm electron beam and a spectrum of waves, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1112–1115 (1997).
17. S. I. Tsunoda, F. Doveil & J. H. Malmberg, Experimental test of quasilinear theory, *Phys. Fluids*, **B3**, 2747–2757 (1991).
18. F. Doveil, Y. Elskens & D. F. G. Minenna, Wave-particle interaction studied in a traveling wave tube, *20th International Congress on Plasma Physics ICPP 2018, Vancouver*, conférence invitée (2018).
19. D. Guyomarc'h & F. Doveil, A trochoidal analyzer to measure the electron beam energy distribution in a traveling wave tube, *Rev. Sci. Instrum.*, **71**, 4087–4091 (2000).
20. F. Doveil, D. F. Escande & A. Macor, Experimental observation of nonlinear synchronization due to a single Wave, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 085003 (2005).
21. F. Doveil & A. Macor, Wave-particle interaction and Hamiltonian dynamics investigated in a traveling wave tube, *Phys. Plasmas*, **13**, 055704 (2006).
22. D. D. A. Santos & Elskens, Phase mixing importance for both Landau instability and damping, *J. Plasma Phys.*, **83**, 705830106 (2017).
23. F. Doveil, Kh. Auhmani, A. Macor & D. Guyomarc'h, Experimental observation of resonance overlap responsible for Hamiltonian chaos, *Phys. Plasmas*, **12**, 010702 (2005).
24. A. Macor, F. Doveil & Y. Elskens, Electron climbing a "devil's staircase" in wave–particle interaction, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 264102 (2005).
25. F. Doveil, A. Macor & Y. Elskens, Direct observation of a devil's staircase in wave–particle interaction, *Chaos*, **16**, 033103 (2006).
26. F. Doveil, A. Macor & A. Aïssi, Observation of Hamiltonian chaos and its control in wave–particle interaction, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **49**, 125–135 (2007).
27. A. Macor, F. Doveil, C. Chandre, G. Ciraolo, R. Lima & M. Vittot, Channelling chaotic transport in a wave–particle experiment, *Eur. Phys. J. D*, **41**, 519–530 (2007).
28. F. Doveil & A. Macor, Two regimes of self-consistent heating of charged particles, *Phys. Rev. E*, **84**, 045401 (R) (2011).
29. D. F. G. Minenna, Y. Elskens, F. Doveil & F. André, Universality of the Abraham–Minkowski dilemma for photon momenta beyond dielectric materials, `arXiv:1902.06431`.

Encodage d'une information sinusoïdale dans un circuit neuronal et résonances induites par une perturbation

Savério Morfu, Maxime Bordet & Matthieu Rossé

ImVia EA 7535, Univ Bourgogne Franche-Comté, Aile des sciences de l'ingénieur BP 47870, 21078 Dijon Cedex
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Notre étude porte sur un circuit dont la tension obéit à un système d'équations correspondant à un modèle de neurone. Nous analysons expérimentalement et en simulation numérique comment ce circuit neuronal encode un stimulus sinusoïdal en train de potentiels d'action. Nous présentons un diagramme d'encodage où apparaissent différentes transitions selon la fréquence du stimulus. Nous montrons ensuite qu'une perturbation haute fréquence peut améliorer la détection d'un stimulus sinusoïdal via le phénomène de résonance vibrationnelle. En effet, la perturbation peut induire des résonances qui coincident avec les transitions observées dans le diagramme d'encodage.

Abstract. We use a neuronal circuit to first show how a sinusoïdal stimulus is encoded. Different phase locking modes have been characterized to build an encoding diagram which displays different transitions. We then show that our circuit can improve the detection of a sine excitation with an appropriate setting of a perturbation via the well-known Vibrational Resonance phenomenon. Especially, the observed resonances are strongly correlated with the previous encoding diagram. Therefore, it is possible to predict these resonances.

1 Introduction

Comprendre comment les systèmes neuronaux encodent l'information est toujours une question ouverte qui continue de faire l'objet de bon nombre de travaux de recherche. En effet, l'efficacité des systèmes neuronaux à traiter l'information a permis le développement d'une grande variété de traitements bio-inspirés. Plus particulièrement, les réseaux cellulaires non linéaires (CNN) peuvent être vus comme des circuits électroniques qui s'inspirent du comportement des neurones pour réaliser des tâches de traitement du signal et des images [1, 2]. En effet, ces circuits neuronaux sont décrits par les mêmes équations différentielles non linéaires que les modèles neuronaux dont ils s'inspirent, ce qui leur permet de tirer profit des propriétés des systèmes non linéaires [3]. Parmi les propriétés des systèmes non linéaires se trouvent les phénomènes de résonance induits par des perturbations, telles que la résonance stochastique et la résonance vibrationnelle [3–8]. Ces phénomènes consistent à améliorer la réponse d'un système non linéaire à une excitation d'entrée par une quantité appropriée d'une perturbation.

Dans ce contexte de circuits bio-inspirés, il est crucial de caractériser, dans un premier temps, la réponse d'un seul neurone, ou circuit neuronal, à différents types de stimulation. Par exemple, il a pu être montré qu'un stimulus sinusoïdal pouvait donner naissance à différents types de mode dépendant de l'amplitude et de la fréquence du stimulus [9]. Ces modes correspondent à la production d'un certain nombre de potentiels d'action durant une période de l'excitation sinusoïdale et permettent d'établir le diagramme d'encodage de cette excitation.

Cependant, il convient de prendre en compte les perturbations qui peuvent entrer en jeu lors du processus d'encodage de l'excitation [10, 11]. En ce sens, il a pu être montré qu'un neurone pouvait utiliser une perturbation haute fréquence pour améliorer la détection d'un stimulus basse fréquence via les phénomènes de résonance vibrationnelle. En effet, si on analyse l'amplitude du spectre du signal en sortie du système, il peut présenter des résonances multiples en fonction de la fréquence de la perturbation. La prédiction de ces résonances s'avère donc crucial pour en tirer bénéfice. C'est l'objet de cette communication. Après avoir brièvement présenté le circuit neuronal et précisé son régime de fonctionnement, nous

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

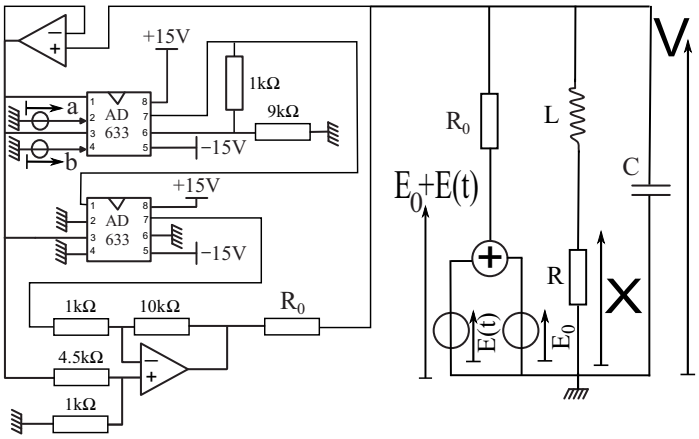


Figure 1. Le circuit neuronal de FitzHugh–Nagumo excité avec la tension $E(t)$. Deux sources de tension continue fixent les racines a et b de la non-linéarité cubique (2) du modèle. Par ailleurs, le circuit est paramétré en mode excitable via la tension continue E_0. Des multiplicateurs analogiques AD633JN et des amplificateurs opérationnels TL081CN sont également utilisés. $L = 9{,}16$ mH est une self-inductance, $C = 22$ nF un condensateur, $R_0 = 1{,}33$ kΩ et $R = 320\Omega$ sont deux résistances linéaires. Les paramètres sont fixés à : $a = 2$ V, $b = -2{,}6$ V, $E_0 = -1$ V.

établissons un diagramme d'encodage du stimulus sinusoïdal. Nous étudions ensuite l'impact d'une pertubation haute fréquence sur la détection de ce stimulus basse fréquence. En particulier, nous interprétons les résonances qui ont lieu à l'aide du diagramme d'encodage précédemment établi.

2 Dispositif expérimental

L'étude expérimentale que nous avons menée repose sur le circuit de la figure 1 qui a permis de mettre en évidence différents phénomènes de résonance, comme la résonance cohérente [13], la résonance vibrationnelle [7] ou encore la résonance stochastique fantôme [8]. Pour ce circuit, les tensions V et X aux bornes du condensateur de capacité C et de la résistance R obéissent au système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} R_0 C \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= f(V) - \frac{R_0 X}{R} + E_0 + E(t), \\ \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= V - X. \end{aligned} \tag{1}$$

Dans ce système d'équations, $E(t)$ représente la tension d'excitation, E_0 une tension constante qui selon sa valeur, place le circuit en régime oscillant ou en régime excitable. Dans notre étude, nous sélectionnerons le mode excitable grâce à cette tension continue E_0. Par ailleurs, les multiplicateurs analogiques AD633JN implémentent la fonction non linéaire

$$f(V) = -V(V-a)(V-b), \tag{2}$$

dont les racines a et b pourront être ajustées par des sources de tension continue.

Le système (1), peut se normaliser sous la forme du système de FitzHugh–Nagumo suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tau} &= f(V) - W + E_0 + E(\tau), \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} &= \epsilon(V - \gamma W). \end{aligned} \tag{3}$$

Il suffit, pour cela, d'introduire pour X et t le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{R_0 C}, \quad W = \frac{R_0 X}{R}, \tag{4}$$

et de considérer les paramètres ϵ et γ definis par

$$\epsilon = \frac{{R_0}^2 C}{L} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{R}{R_0}. \tag{5}$$

Par conséquent, il sera possible d'effectuer une simulation numérique du système d'équations normalisées (3) afin de vérifier les comportements observés expérimentalement. À noter que d'un point de vue expérimental, il suffira de relever l'évolution de la tension V avec un oscilloscope numérique.

3 Les différents régimes de fonctionnement

En l'absence d'excitation ($E(t) = 0$), la tension continue E_0 ajuste le régime de fonctionnement du circuit. Le premier régime est le régime excitable, la tension V prend la forme d'une onde de type potentiel d'action avant de se stabiliser à une valeur constante : un seul potentiel d'action est ainsi produit. Le second régime de fonctionnement est dit oscillant puisque la tension V est une suite périodique de potentiels d'action. Le circuit oscillera si E_0 est choisi dans l'intervalle $[E_0^*;\ E_0']$. Dans le cas contraire, il fonctionnera en mode excitable.

Les valeurs critiques E_0^* et E_0' de E_0 pour lequel le système change de mode de fonctionnement définissent la bifurcation d'Andronov–Hopf. Ces valeurs critiques s'obtiennent par une analyse de la stabilité du point fixe de coordonnée (V^*, W^*) solution de

$$f(V^*) - W^* + E_0 = 0, \tag{6}$$

$$W^* = \frac{V^*}{\gamma}. \tag{7}$$

En effet, la stabilité de ce point fixe est déterminée par la matrice Jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} f_V & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon\gamma \end{pmatrix}, \tag{8}$$

où $f_V(V) = -3V^2 + 2V(a+b) - ab$ est la dérivée première de la fonction cubique f par rapport à V. Les valeurs citiques E_0^* et E_0' de E_0 induisant la bifurcation d'Andronov–Hopf s'obtiennent quand $\mathrm{Tr}[J] = 0$ et $\det[J] > 0$ [14].
Il suffit ensuite de résoudre $f_V(V^*) - \varepsilon\gamma = 0$ et d'exprimer ainsi V^* sous la forme :

$$V^* = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\varepsilon\gamma}}{3}. \tag{9}$$

Les valeurs correspondantes de W^* sont alors données par l'équation (7).

Enfin, après substitution des expressions (9) et (7) dans l'équation (6), les valeurs critiques E_0^* et E_0' de la tension E_0 induisant la bifurcation de Hopf se réduisent à

$$E_0^* = \frac{1}{27\gamma}\Big[\gamma(a+b)(-2a^2 - 2b^2 + 5ab) + 9(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\gamma\varepsilon} \times \big(2a^2\gamma + 2b^2\gamma - 2\gamma ab + 3\gamma^2\varepsilon - 9\big)\Big], \tag{10}$$

$$E_0' = \frac{1}{27\gamma}\Big[\gamma(a+b)(-2a^2 - 2b^2 + 5ab) + 9(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab - 3\gamma\varepsilon} \times \big(-2a^2\gamma - 2b^2\gamma + 2\gamma ab - 3\gamma^2\varepsilon + 9\big)\Big]. \tag{11}$$

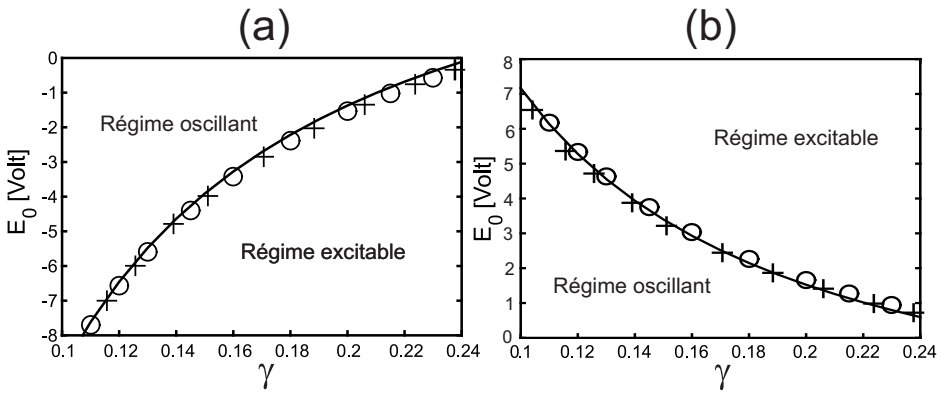


Figure 2. Diagrammes de bifurcation du circuit de FitzHugh–Nagumo dans le plan $[E_0, \gamma]$ pour $E_0 < 0$ (a) et pour $E_0 > 0$ (b). Les relations (10) et (11) prédisant les valeurs critiques E_0^* et E_0' de changement de comportement du circuit suivent les relevés expérimentaux (croix) et les résultats de simulations numériques (cercles). Paramètres fixés à $a = 2\,\mathrm{V}$, $b = -2{,}6\,\mathrm{V}$ et $\epsilon = 4{,}249$. Pour changer la valeur de γ, d'après (5), il suffit de changer la valeur de la résistance R.

D'après la figure 2, les relations théoriques donnant les valeurs critiques E_0^* et E_0' pour lesquels le système change de régime de fonctionnement sont en accord avec les résultats expérimentaux (croix) et les simulations numériques du système (cercle). Pour la suite de l'étude, le système sera paramétré en régime excitable en choisissant $\gamma = 0{,}24$ et $E_0 = -1\,\mathrm{V}$, c'est à dire bien en dessous de la courbe critique de la figure 2 (a). Par conséquent, le circuit ne pourra pas déclencher de potentiel d'action sans l'apport de l'excitation $E(t)$.

4 Encodage d'un stimulus sinusoïdal

Dans cette partie, le stimulus $E(t)$ qui excite le circuit est le signal sinusoïdal d'amplitude B et de fréquence F suivant

$$E(t) = B\cos(2\pi F t). \tag{12}$$

Nos études expérimentales et numériques ont toutes deux montrées que selon l'amplitude et la fréquence du signal sinusoïdal la réponse du circuit pouvait révéler différents modes de vérrouillage. Ces modes, notés $n : m$, correspondent à n potentiels d'action déclenchés en réponse à m périodes du stimulus sinusoïdal.

Par exemple, si on fixe l'amplitude de l'excitation sinusoïdal à $B = 1\,\mathrm{V}$, et qu'on analyse le comportement du circuit en fonction de la fréquence F de l'excitation, les modes $n : m$ suivants ont pu être observés

- les figures 3 (a) et 3 (d), obtenues pour $F = 5\,\mathrm{kHz}$, montrent le mode 1 : 1 où un potentiel d'action est déclenché à chaque période de l'excitation sinusoïdal ;
- pour les figures 3 (b) et 3 (e), augmenter le fréquence à $F = 10\,\mathrm{kHz}$ permet d'observer le mode 1 : 2 où deux périodes de l'excitation sont nécessaires pour produire un potentiel d'action ;
- en continuant d'augmenter la fréquence à $F = 16\,\mathrm{kHz}$, c'est le motif 1 : 3, constitué d'un potentiel d'action toutes les 3 périodes de l'excitation, qui est obtenu aux figures 3 (c) et 3 (f).

Pour caractériser l'apparition de ces modes $n : m$, il est alors possible de tracer le rapport $D = n/m$ en fonction de la fréquence F du signal sinusoïdal. Ce rapport D est tracé à la figure 4 (a) et 4 (b) en gris clair, l'échelle en ordonnée étant indiquée à droite de chaque graphe. L'échelle de gauche en noir correspond à la quantité Q qui sera détaillée dans le paragraphe suivant. Enfin, le rapport D a été tracé

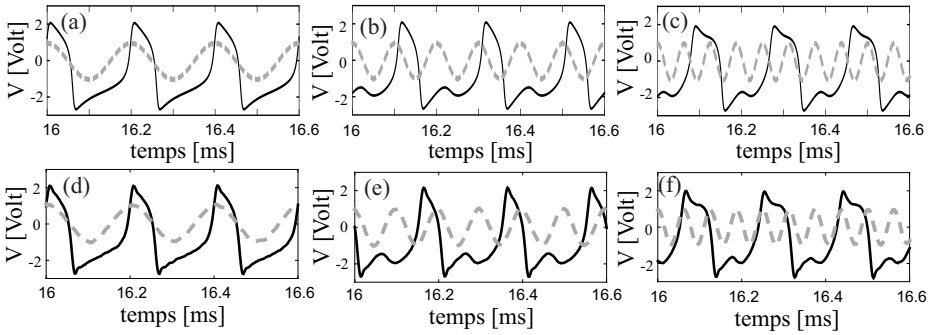


Figure 3. Différents motifs d'encodage du stimulus sinusoïdal (12) observés en simulation numérique (chronogrammes a,b,c en haut) et relevés expérimentalement (chronogrammes d,e,f en bas). L'excitation sinusoïdale a été superposée en trait pointillé gris clair sur chaque chronogramme. $F = 5\,\text{kHz}$ pour (a) et (d), $F = 10\,\text{kHz}$ pour (b) et (e), $F = 16\,\text{kHz}$ pour (c) et (f). l'amplitude de l'excitation est $B = 1\,\text{V}$ et les paramètres du circuit sont ajustés à $\gamma = 0{,}24$, $\epsilon = 4{,}249$, $E_0 = -1\,\text{V}$, $a = 2\,\text{V}$ et $b = -2{,}6\,\text{V}$.

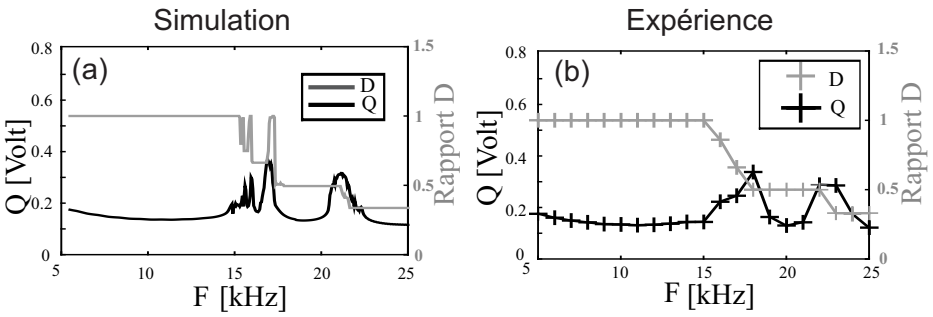


Figure 4. En gris clair, diagramme d'encodage du stimulus sinusoïdal d'amplitude B défini par le rapport D en fonction de la fréquence F. En noir, résonance induite par une perturbation haute fréquence d'amplitude B : l'amplitude de la composante de fourier Q à la basse fréquence f du stimulus (13) est tracée en fonction de la fréquence de la perturbation F. Paramètres : $a = 2\,\text{V}$, $b = -2{,}6\,\text{V}$, $E_0 = -1\,\text{V}$, $\gamma = 0{,}24$, $\epsilon = 4{,}249$, $A = 0{,}8\,\text{V}$, $f = 502\,\text{Hz}$ et $B = 5\,\text{V}$.

pour une amplitude B du signal sinusoïdal valant 5 V. Les parties horizontales de ces graphes traduisent les plages de fréquences pour lesquelles les modes précédents existent, à savoir les modes 1 : 1 quand $D = 1$, 1 : 2 quand $D = 1/2$, et 1 : 3 quand $D = 1/3$.
D'une certaine façon, la quantité D traduit l'encodage d'un stimulus sinusoïdal en train de potentiels d'action par notre circuit neuronal.

5 Corrélation entre les modes d'encodage d'un stimulus sinusoïdal et les résonances induites par une perturbation haute fréquence

On considére maintenant une excitation sinusoïdale d'amplitude A et de fréquence f soumise à une perturbation haute fréquence d'amplitude B et de fréquence $F > f$.
L'excitation $E(t)$ du circuit neuronal s'écrit donc :

$$E(t) = A\cos(2\pi f t) + B\cos(2\pi F t). \tag{13}$$

Nous avons fixé l'amplitude de la composante basse fréquence à $A = 0{,}8\,\mathrm{V}$ et sa fréquence à $f = 502\,\mathrm{Hz}$, de tel sorte que sans la perturbation ($B = 0$), le circuit ne déclenche pas de potentiels d'action. Par ailleurs, l'amplitude de la perturbation haute fréquence B demeure $B = 5\,\mathrm{V}$ comme au paragraphe précédent.

Pour quantifier comment la perturbation haute fréquence affecte la détection du signal sinusoïdal basse fréquence, nous avons déterminé l'amplitude Q du spectre unilatéral de la tension $V(t)$ à la basse fréquence f. Q est donc défini comme étant $2V(f)$, où $V(f)$ représente la transformée de Fourier de $V(t)$. Nous avons alors superposé les valeurs de Q en fonction de la fréquence F de la perturbation dans le même graphe que la quantité D tracée au paragraphe précédent, c'est-à-dire à la figure 4. Comme on peut le constater, la courbe donnant Q en fonction de F présente de multiple résonances. Il est intéressant de comparer l'apparition de ces résonances avec la courbe d'encodage du stimulus sinusoïdal donnant le rapport $D = n/m$ en fonction de la fréquence F.
En effet, la figure 4 montre que chaque résonance coïncide avec une transition du rapport D que ce soit dans nos simulations (Fig. 4 (a)), comme rapporté récemment [10], ou que ce soit expérimentalement avec notre circuit (Fig. 4 (b)).

6 Conclusion

À l'aide d'un circuit neuronal, nous avons mené une étude expérimentale qui a pu être confortée par des simulations numériques. Nous avons tout d'abord établi comment un stimulus sinusoïdal était encodé en train de potentiels d'action. En effet, nous avons défini un diagramme d'encodage où avaient lieu différentes transitions selon la valeur de la fréquence du stimulus. Nous avons alors montré qu'une perturbation haute fréquence pouvait améliorer la détection d'un stimulus sinusoïdal puisque des résonances pouvaient apparaître selon la fréquence de la perturbation. Nous avons pu confirmer expérimentalement que ces résonances correspondaient aux transitions observées dans le diagramme d'encodage du stimulus sinusoïdal. Ainsi, l'apparition de ces résonances peut être prédite.

Références

1. L. O. Chua, T. Roska, *Cellular Neural Networks and Visual Computing: Foundations and Applications*, Cambridge University Press (2002).
2. S. Morfu, B. Nofiele & P. Marquié, On the use of multistability for image processing, *Phys. Lett. A*, **367**, 192–198 (2007).
3. S. Morfu, P. Marquié, B. Nofiele & D. Ginhac, *Adv. Imag. Elect. Phys.*, **152**, 79–151 (2008).
4. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung & F. Marchesoni, Stochastic resonance, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223–287 (1998).
5. P. Balenzuela, H. Braun & D. R. Chialvo, The ghost of stochastic resonance: An introductory review, *Contemp. Phys.*, **53**, 17–38 (2011).
6. P. S. Landa & P. V. E. McClintock, Vibrational resonance, *J. Phys. A*, **33**, L433–L438 (2000).
7. E. Ullner, A. Zaikin, J. García-Ojalvo, R. Báscones & J. Kurths, Vibrational resonance and vibrational propagation in excitable systems, *Phys. Lett. A*, **312**, 348–354 (2003).
8. M. Bordet & S. Morfu, Experimental and numerical enhancement of vibrational resonance in neural circuit, *Electron. Lett.*, **48**, 903–905 (2012).
9. M. Bordet, S. Morfu & P. Marquié, Ghost responses of the FitzHugh–Nagumo system induced by colored noise, *Chaos Soliton. Fract.*, **78**, 205–214 (2015).
10. Y.-Q. Che, J. Wang, W. Jie Si & X. Y. Fei, Phase locking and chaos in a silent Hodgkin–Huxley neuron exposed to sinusoidal electrical field, *Chaos Soliton. Fract.*, **39**, 454–462 (2009).
11. L. Yang, W. Liu, M. Yi, C. Wang, Q. Zhu, X. Zhan & Y. Jia, Vibrational resonance induced by transition of phase locking modes in excitable systems, *Phys. Rev. E*, **86**, 016209 (2012).
12. S. Morfu & M. Bordet, On the correlation between phase-locking modes and Vibrational Resonance in a neuronal model, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **55**, 277–286 (2018).
13. G. Lassere, S. Morfu & P. Marquié, Coherence resonance in Bonhoeffer-Van der Pol circuit, *Electron. Lett.*, **45**, 669–670 (2009).
14. F. Duan, F. Chapeau-Blondeau & D. Abott, Enhancing array stochastic resonance in ensembles of excitable systems, *J. Stat. Mech.*, P08017 (2009).

Ondes de surface produites par le déplacement d'un objet solide

Jose Antonio Trejo Gutierrez, Ivonne Judith Hernandez Hernandez & Gerardo Ruiz Chavarria

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico. Ciudad Universitaria, 04510 Ciudad de Mexico, Mexique
gruiz@unam.mx

Résumé. Nous présentons dans cette contribution une étude sur la production des ondes de surface par le déplacement d'une plaque. On considère deux cas : a) production des ondes de surface par un batteur partiellement immergé et b) production des ondes de surface par le déplacement d'une plaque située au fond. D'abord on présente les solutions de la théorie linéaire non visqueuse. Dans les deux cas le déplacement de la plaque produit un écoulement de volume mais également une onde de surface liée elle-même à un champ de vitesse. Ensuite nous présentons des résultats expérimentaux et numériques dans lesquelles la viscosité et les effets non linéaires sont pris en compte. Dans les expériences, nous avons reconstruit la forme de la surface libre avec la méthode de Schlieren synthétique, tandis que pour les simulations numériques nous avons utilisé Gerris, un outil numérique pour résoudre les équations de Navier–Stokes et continuité. Pour le cas du déplacement de la plaque situé au fond il y a un bon accord entre la théorie linéaire et les données expérimentales, sauf quand la vitesse de déformation du fond est comparable ou supérieure à la vitesse de phase. En revanche pour le cas des vagues produites par l'oscillation verticale d'un batteur, il apparaît un champ de vitesse dont la grandeur croît avec l'amplitude de l'oscillation de la plaque. Nos résultats nous indiquent que cet écoulement est lié au détachement de la couche limite qui se forme sur les parois verticales du batteur. Ce détachement apparaît quand la vitesse et l'accélération de la plaque ont des signes opposés. Ces résultats pourraient expliquer la formation des cellules de recirculation qui ont été rapportés dans plusieurs articles publiés récemment.

1 Introduction

La génération et l'évolution des ondes de surface sont des sujets qui ont reçu une attention considérable due à la présence de celles-ci sur de nombreux systèmes naturels. Dans cet article nous nous intéressons à la formation des ondes de surface par le déplacement d'une plaque qui est un contact avec un liquide. Un cas bien connu est la production des tsunamis par la rupture du fond océanique. Suite à un tremblement de terre dont l'origine est le déplacement relative de deux plaques, la surface de l'eau se perturbe. Une vague s'éloigne de la zone de rupture et elle peut arriver aux zones côtières. À l'heure actuelle il y a un intérêt pour l'étude de la phase initiale des tsunamis et sa relation avec la vitesse du fond [1]. Un autre exemple est la production des ondes par un batteur qui oscille dans la direction verticale. Récemment Punzmann *et al.* [2] ont fait des expériences avec des batteurs cylindriques, coniques et pyramidaux. Les fréquences d'oscillation sont comprises entre 10 et 200 Hz, c'est-à-dire qu'ils étudient des ondes de surface de gravité et capillaires. Ils trouvent l'apparition d'un écoulement à grande échelle composé de plusieurs cellules de recirculation. Ce comportement est différent de la dérive de Stokes prédite au XIXe siècle car la direction de l'écoulement est dirigée alternativement dans le sens de propagation des ondes ou contre celui-ci. Le même comportement a été trouvé par Ruiz Chavarría *et al.* [3] dans un article dédié à la focalisation spatiale des vagues monochromatiques. Ils ont fait des expériences avec un batteur parabolique qui oscille à fréquences entre 5 et 10 Hz. Ils étudient le comportement des ondes dans les régimes linéaire, faiblement non linéaire et fortement non linéaire. Un résultat est que dans le régime fortement non linéaire les fronts d'ondes se déforment à cause d'un écoulement à grande échelle dont la vorticité est non nulle. La comparaison de ces deux manières de générer des ondes de surface avec une plaque mobile a pour but de mettre en évidence l'influence de facteurs non pris en compte dans la plupart des modèles d'ondes de surface, notamment la viscosité. Notre façon de procéder est la suivante : d'abord, l'équation de la théorie des ondes linéaires est résolue pour les deux cas. Les résultats sont

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

ensuite comparés avec des expériences ou des simulations numériques obtenues à partir des équations de Navier–Stokes et de continuité.

2 Dispositif expérimental et méthodes numériques

Nous étudions la génération des ondes de surface par le déplacement d'une plaque dans une couche liquide d'épaisseur h. Pour la présentation des résultats nous utilisons un système de coordonnées où l'origine se trouve à la surface libre non perturbée et dans lequel la coordonnée verticale y est dirigée vers le haut. Nous considérons que les plaques ont une largeur $2b$. Pour le cas de la production des ondes par un fond mobile on a construit un système de deux plaques de la même largeur, l'une monte et l'autre descend. Le déplacement des plaques est sinusoïdal pendant un intervalle de temps T et après elles s'arrêtent. L'équation qui décrit ce déplacement est :

$$\zeta = -h \pm \zeta_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right] \qquad 0 < t < T. \tag{1}$$

D'autre part pour le cas des ondes produites par un batteur partialement immergé, l'équation qui décrit le déplacement de la surface inférieure de la plaque est

$$\zeta = -h_s - \zeta_0 \cos(2\pi f t). \tag{2}$$

Pour les deux cas la valeur de b est 2,4 cm. Les valeurs des autres paramètres sont montrées dans la table suivante :

Paramètre	h (cm)	ζ_0 (cm)	h_s (cm)	T (s)	f (Hz)
Plaques au fond	2	0,24 3		0,1	
Plaque à la surface	10	0,1	0,2		5,58

Les expériences ont été faites dans un bassin fait en plexiglas, de 2,0 m de longueur, 1,2 m de largeur et de 15 cm de profondeur. Afin d'éviter les réflexions sur les parois verticales du bassin on a mis des plages sur les bords. Parmi les différentes possibilités, on a choisi la méthode de Schlieren synthétique pour mesurer la forme de la surface libre [4]. À un stade ultérieur nous effectuerons des mesures de PIV pour vérifier les résultats des simulations numériques.

D'autre part, les méthodes numériques utilisées dans cet article sont de deux types. Pour résoudre l'équation de Laplace nous utilisons une méthode des différences finies du deuxième ordre et pour obtenir le comportement des ondes et le champ de vitesse dans un fluide visqueux nous utilisons Gerris, un outil numérique développé par S. Popinet [5]. Gerris résout les équations de Navier–Stokes et continuité par une méthode des volumes finis. De plus, il utilise la méthode de volume de fluide (VOF) ce qui est particulièrement utile lors de l'étude des ondes de surface.

3 Théorie linéaire non visqueuse des ondes de surface

Les hypothèses qui sont à la base de la théorie non visqueuse des ondes de surface sont d'une part l'incompressibilite du fluide et d'autre part que le champ de vitesse est potentiel, c'est-à-dire, $\overline{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$. Étant donnés ces deux hypothèses, l'équation différentielle pour la fonction ϕ est la suivante

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 0. \tag{3}$$

Il faut encore établir les conditions aux limites. Sur les bords solides on impose la condition d'impénétrabilité, c'est à dire, la dérivée normale du potentiel ϕ est égale à la composante normale de la vitesse de la frontière solide $\frac{\partial\phi}{\partial n} = U_n$. Nous considérons une plaque de largeur $2b$, dont la surface en contact avec le

fluide a une coordonnée verticale ζ qui se déplace au cours du temps t. Alors la condition sur la plaque est

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{4}$$

Sur les autres frontières solides la condition est simplement que la dérivée normale de ϕ est égale à zéro. D'autre part, à la surface libre il faut poser comme condition le fait que la pression est constante dans l'équation de Bernoulli. Si le terme quadratique de la vitesse est négligé, cette condition s'écrit comme : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0$. Dans l'équation précédente intervient la déformation de la surface libre η. Pour relier cette quantité à la fonction ϕ on utilise la condition cinématique, qui dans une approximation linéaire s'écrit comme

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{5}$$

Alors, la condition pour ϕ à la surface libre ($y = 0$) s'écrit finalement comme

$$\left.\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right|_{y=0} = 0. \tag{6}$$

Il reste établir les conditions aux limites selon la direction de propagation des ondes. On impose que ϕ s'annule à l'infini. Finalement, en ce qui concerne la condition initiale on considère que pour $t = 0$, le liquide est au repos.

La procédure de solution est différente dans chacun des cas étudiés. Pour le cas des plaques situées au fond de la couche liquide on applique à ϕ, ζ et η les transformées de Fourier pour la coordonnée x et de Laplace pour le temps. De cette façon l'équation (3) à résoudre devient une équation différentielle ordinaire pour la variable y. La solution pour ϕ et η s'obtient si on utilise les transformées inverses de Fourier et Laplace. Le calcul de cette dernière (la transformée inverse de Laplace) se fait avec la théorie de résidus. Cette méthode a été bien décrit dans un article publie en 1973 par Hammack [1] pour l'étude de l'évolution de tsunamis. La forme finale de ϕ est

$$\phi(x,y,t) = \frac{2\zeta_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(kx)\sin^2(kb)}{k\cosh(kh)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-\omega^2}\left[g\cosh(ky)F_1(t) + \sinh(ky)F_2(t)\right]\mathrm{d}k, \tag{7}$$

tandis que la déformation de la surface libre est

$$\eta(x,t) = \frac{2\zeta_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(kx)\sin^2(kb)}{k\cosh(kh)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-\omega^2}\left[\cos(\omega t) - \cos(\kappa t) + H(t-T)\left[\cos(\omega(t-T)) + \cos(\kappa t)\right]\right]\mathrm{d}k, \tag{8}$$

Dans les équations (7) et (8), $\kappa = \frac{\pi}{T}$, $\omega = \sqrt{gk\tanh(kh)}$ et $H(t-T)$ est la fonction de Heaviside. D'autre part les fonctions $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont définies comme

$$F_1(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{\sin(\kappa t)}{\kappa} + H(t-T)\left(\frac{\sin(\omega(t-T))}{\omega} - \frac{\sin(\kappa(t-T)}{\kappa}\right) \tag{9}$$

$$F_2(t) = \omega\sin(\omega t) - \kappa\sin(\kappa t) + H(t-T)\left[\omega\sin(\omega(t-T)) - \kappa\sin(\kappa(t-T))\right] \tag{10}$$

L'évaluation des intégrales des équations (7) et (8) ne peut pas se faire de façon analytique, alors on a fait une intégration avec la règle de Simpson.

En ce qui concerne les ondes produites par la plaque située au voisinage de la surface libre nous avons résolu l'équation de Laplace avec une méthode des différences finies de deuxième ordre. Due à la symétrie du problème on a calculé la solution uniquement pour $x > 0$. Le domaine d'intégration est un rectangle de 10 cm d'épaisseur et 300 cm de longueur. La plaque est partialement immergée dans le fluide, à une profondeur moyenne de 2 mm. L'amplitude de son oscillation est de 1 mm et sa fréquence est de 5,58 Hz. Le choix de cette fréquence a été fait sur la base d'avoir des ondes d'une longueur $\lambda = 5\,\mathrm{cm}$. L'intervalle temporel d'intégration est de 10 secondes. Étant donné que la vitesse de phase est $c = 28$ cm/s, l'onde n'atteint pas l'extrêmité droite du domaine et par conséquent au cours de la période d'intégration, le fluide situé à la frontière droite reste toujours au repos.

4 Ondes produites par le déplacement du fond

La production des ondes par le déplacement d'une section du fond a été faite dans le bassin décrit précédemment. Au centre du bassin il y a deux plaques faites en plexiglas, chacune a une largeur de 4,8 cm. Le déplacement des plaques se fait à l'aide d'un moteur pas-à-pas piloté par ordinateur, soit avec LabView, soit avec un programme écrit en C. Le déplacement ζ_0 est de 2,4 mm tandis que le temps T peut varier entre 0,01 et 0,2 secondes. Dans les expériences que nous avons faites, la plaque à gauche monte et la plaque à droite descend. Pour mesurer la forme de la surface libre nous avons utilisé la méthode de Schlieren synthétique [4]. Le motif de points se trouve au fond et la caméra qui enregistré leur déplacement apparent se trouve à 1 m de distance de la surface libre afin que l'approximation paraxiale soit bien satisfaite. Nous avons utilisé une caméra rapide qui permet enregistrer 300 images par seconde. Finalement on a mesuré la forme de la surface libre sur une région de 20 cm $\times$ 12 cm. On a décidé de présenter des profils des ondes sur la ligne qui passe par le centre des plaques. La figure 1 montre η en fonction de x pour deux temps, $t = 0{,}091$ s et $t = 0{,}31$ s. La première valeur de t correspond à un instant où la plaque de déplace encore tandis que pour la deuxième valeur de t la plaque est déjà au repos. Sur la figure apparaissent les données expérimentales (ligne continue) et les résultats de la théorie linéaire. Pour le premier temps, il y a un bon accord entre la théorie et les expériences, mais pour le deuxième temps il y a un écart entre les deux courbes. Dans les deux cas la surface libre est antisymétrique par rapport à $x = 0$, ce qui reflète la façon dont les plaques se sont déplacées.

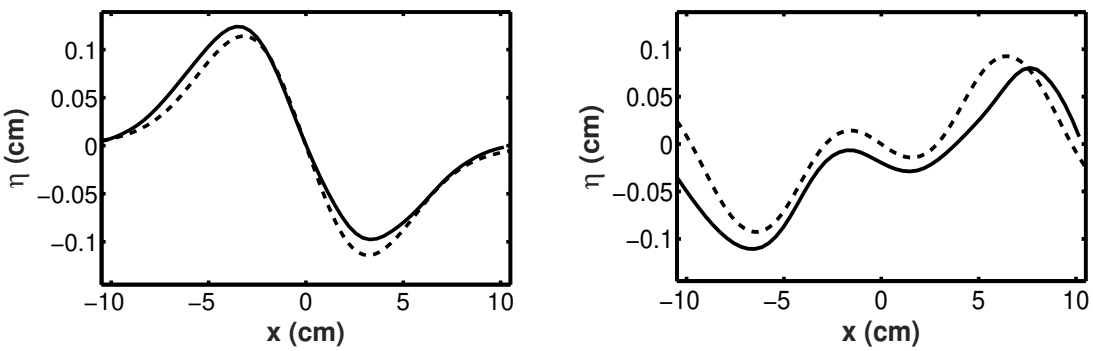
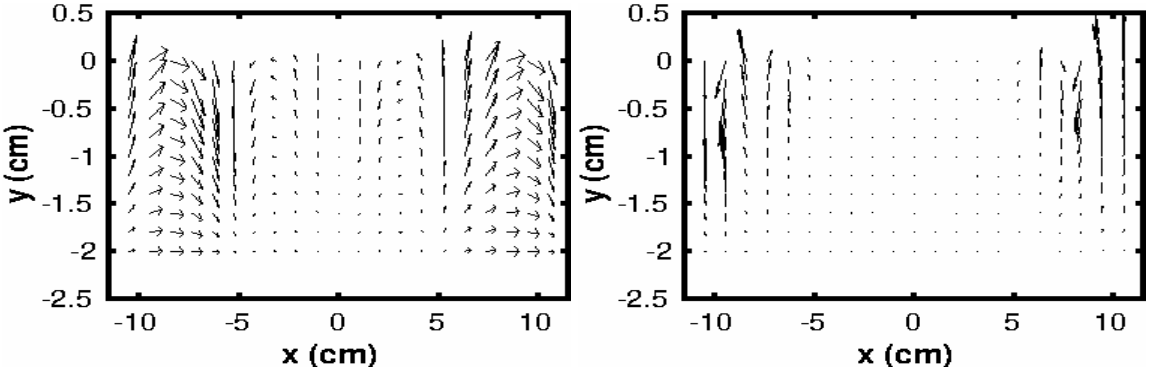


Figure 1. Profil de la surface libre η en fonction de x sur la ligne qui passe par le centre des plaques . (a) $t = 0{,}093$ s et (b) $t = 0{,}91$ s. Solution de la théorie linéaire (—) et résultat expérimental (ligne continue). La théorie linéaire a un bon accord avec les données expérimentales pour $t = 0{,}093$ s. Pour $t = 0{,}31$ s, il y a une certaine différence entre les deux.

Le fond mobile produit un écoulement ce qui est montré dans la figure 2 pour les deux temps considérés dans la figure précédente. Pour le premièr temps, les plaques se déplacent encore et l'onde a commencé à s'éloigner du centre du domaine vers la gauche et vers la droite. Pour le deuxième temps, le mouvement des particules situées au dessus des plaques s'est atténué, alors qu'il y a un mouvement des particules situées en dessous de la région de passage de l'onde.

5 Ondes produites par un batteur à la surface libre

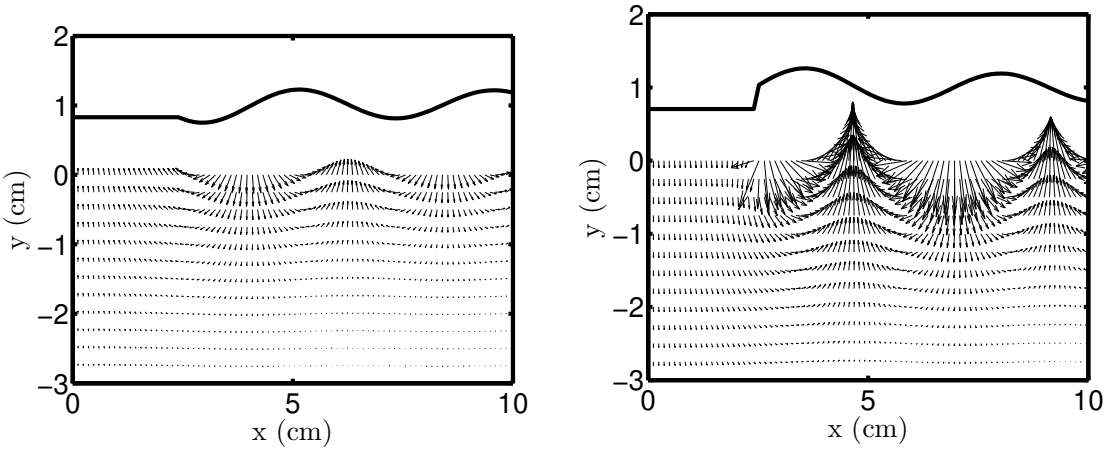
La théorie linéaire reproduit de manière acceptable les résultats expérimentaux pour une vague produite par le déplacement d'un fond mobile. Il n'en est pas de même quand la plaque est située à proximité de la surface libre. Dans ce dernier cas, les effets liés à la couche limite qui se forme au voisinage du corps solide ont un rôle important pour la production et la propagation des ondes. Pour mettre en évidence



(a) (b)

Figure 2. Champ de vitesse sur un plan vertical qui résulte de la théorie linéaire. (a) $t = 0{,}093$ s et (b) $t = 0{,}91$ s.

cette affirmation nous présentons dans la figure 3 les prédictions de la théorie linéaire non visqueuse pour le champ de vitesse et la forme de la surface libre dans un plan vertical pour deux temps ($t = 4{,}52$ s et $t = 4.64$ s). Les solutions pour la vitesse et pour η sont périodiques par rapport au temps. En plus le comportement ondulatoire se produit dans le fluide située à $x > b$. Une prédictions est que les valeurs moyennes de la vitesse et de η sont nulles. Ce qui n'est pas en accord avec les simulations numériques faites avec Gerris et avec les résultats des travaux précédents [1, 2]. Le champ de vitesse dans un plan vertical obtenue avec Gerris est présenté dans la figure 4. Les valeurs de temps sont $t = 9{,}1$ s et $t = 8{,}6$ s. Comme il a été déjà dit, la fréquence d'oscillation du batteur est $f = 5{,}58$ Hz. Le temps 9,1 s correspond à la descente du batteur, à un instant quand la vitesse de la plaque est proche (en valeur absolue) de sa valeur maximale. Par contre le temps $t = 8{,}6$ s correspond à un instant de la descente quand le batteur s'est presque arrêté. Il faut noter que pour ce temps, la vitesse est négative et l'accélération est positive. Dans la figure 4 (b) on observe que les vecteurs de vitesse près du bord vertical du batteur sont dirigés vers le bas, ce qui reflète un détachement de la couche limite. D'autre part, pour les deux cas on observe que la composante horizontale de la vitesse est non nulle. Ce résultat indique la présence d'un écoulement à grande échelle.



(a) (b)

Figure 3. Champ de vitesse qui résulte de la théorie linéaire. (a) $t = 0{,}093$ s et (b) $t = 0{,}91$ s. La déformation de la surface libre et la vitesses sont périodiques et leurs valeurs moyennes sont nulles.

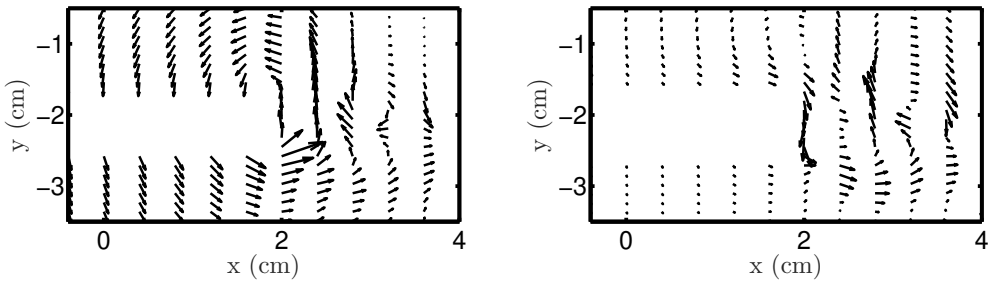


Figure 4. Champ de vitesse qui résulte de résoudre les équations de Navier–Stokes et de continuité avec Gerris. (a) $t = 9{,}1$ s et (b) $t = 8{,}6$ s. Dans la simulation on utilise de l'eau comme liquide et il y a de l'air au-dessus de la surface libre. Le batteur se trouve dans la region où il n'y a pas des vecteurs de vitesse et son bord droit se trouve à $x = 2$ cm. Dans ce cas on obtient que la valeur moyenne de la composante horizontale de la vitesse est non nulle.

6 Conclusions

Nous avons étudié le comportement des ondes de surface produites par une plaques dans deux positions différentes : a) plaque située au fond et b) plaque située au voisinage de la surface libre. On a trouve que la théorie non visqueuse reproduit le comportement des ondes produites par un fond mobile. En revanche, pour les ondes produites par un batteur à la surface il faut prendre en compte la viscosité. Il y a un détachement de la couche limite ce qui garde relation avec la formation d'un écoulement composé de plusieurs cellules de recirculation.

Remerciements. GRC remercie Patrice Le Gal pour les discussions sur le sujet présenté dans cet article. Les auteurs remercient la DGAPA-UNAM pour le soutien dans le contrat PAPIIT IN114218 (*Vorticidad y ondas (internas y de superficie) en dinamica de fluidos*). IJHH remercie la DGAPA-UNAM pour l'attribution d'une bourse post-doctorale.

Références

1. J. L. Hammack, A note on tsunamis: Their generation and propagation in the ocean of uniform depth, *J. Fluid Mech*, **60**, 769–799 (1973).
2. N. Punzmann, H. Francois, H. Xia, G. Falcovich & M. Shats, Generation and reversal of surface flows by propagating waves, *Nat. Phys.*, **10**, 658–663 (2014).
3. G. Ruiz Chavarria, P. Le Gal & M. Le Bars, Geometrical focusing of surface waves, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 094803 (2018).
4. F. Moisy, M. Rabaud & and K. Salsac, A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid surface, *Exp. Fluids*, **46**, 1021–1036 (2009).
5. `http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php`
6. T. Jamin, L. Gordillo, G. Ruiz Chavarria, M. Berhanu & É. Falcon, Experiments on generation of surface waves by an underwater moving motion, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **471**, 20150069 (2015).
7. M. Le Gal, D. Violeau & M. Benoit, Influence of timescales on the generation of seismic tsunamis, *Eur. J. Mech. B*, **65**, 257–273 (2017).

An experimental study of turbulence generation and decay in Taylor–Couette system due to an abrupt stoppage

Harminder Singh, Arnaud Prigent & Innocent Mutabazi

Laboratoire des Ondes et Milieux Complex (LOMC), CNRS-UMR 6294, Université du Havre, 75 Rue Bellot, 76000 Le Havre, France
harminder.singh@univ-lehavre.fr

Résumé. Cette étude présente une approche novatrice de la génération et de la décroissance de la turbulence dans l'écoulement de Taylor–Couette, l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation. À partir d'un écoulement initialement laminaire, les cylindres sont soumis à un arrêt brutal qui génère l'apparition de turbulence transitoire. Deux approches expérimentales complémentaires, les visualisations et les mesures de vitesse par stéréo-PIV, ont été utilisées pour mieux comprendre le phénomène présenté pour plusieurs vitesses initiales de rotation correspondant toujours à un écoulement laminaire. Trois configurations différentes peuvent être distinguées: rotation du cylindre extérieur seulement, co-rotation et contra-rotation. Lorsque seul le cylindre extérieur est en rotation, le seuil d'apparition de la turbulence correspond à un nombre de Reynolds extérieur initial $\mathrm{Re}_o = 606$. En co- ou contra- rotation, ce seuil diminue jusqu'à une valeur minimale de $\mathrm{Re}_o = 433$. Dans tous les cas, le retour à l'écoulement laminaire est plus lent qu'en stoppant le système à partir d'un écoulement turbulent. Contrairement à l'étude de Verschoof *et al.* [1], une décroissance auto-similaire de la turbulence n'a pas été observée.

Abstract. This study presents an innovative approach towards the generation and decay of turbulence in the Taylor–Couette system. The cylinders were brought to an abrupt stoppage that generated turbulence in the system, which was initially in the laminar flow region. Two complementary experimental approaches, namely visualizations and stereo-PIV measurements, were used to better understand the presented phenomenon for three different configurations at multiple rotation rates but always starting in the laminar flow region: only external cylinder, co-rotation and counter-rotation. For only external cylinder rotation, the lowest threshold limit of outer Reynolds number to was found to be $\mathrm{Re}_o = 606$, which could be lowered with co- or counter-rotation to a minimal value of $\mathrm{Re}_o = 433$. Nevertheless, the return to the laminar state is much slower in comparison to an abrupt stoppage from a turbulent state. In contrast to the study of Verschoof *et al.* [1], self-similar decay of turbulence was not observed.

1 Introduction

The interest in decay of turbulence in the scientific community was initiated by Taylor [2] by presenting his theory of decay of turbulence in a windstream. It formed the base for the theoretical studies of homogeneous isotropic turbulence by von Kármán and Howarth [3], Kolmogorov [4] and Batchelor and Townsend [5, 6]. In the early nineties, George [7] presented a general theory for the decay of turbulence which coincided with the earlier theories presented by von Kármán and Howarth, Kolmogorov and Batchelor and Townsend when the respective assumptions were taken into consideration. George [7] demonstrated that the kinetic energy, which decays as a power law w.r.t. time, and the Taylor microscale, which increases as a square root of time, should be used as the scaling parameters to represent all scales of motion. George [7] strongly suggested the importance of initial conditions in determining the decay rate constant which they didn't find to be universal apart from the infinite Reynolds number limit.

However, turbulence in itself represents chaos and is therefore, generally, neither homogenous nor isotropic. Therefore, in recent years, some research has been conducted towards the wall-bounded turbulence decay to observe this chaotic behavior either numerically [8–11] or experimentally [1, 12]. All of these studies have been conducted in different types of geometries: pipe flow [12], two plates [8], 2D structures [9], T-mixer [11], and Taylor–Couette (TC) system [1, 10]. Each geometrical system has their own advantages, but the TC system, in which flow is contained between two concentric cylinders, presents

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

itself as the ideal system because it is a confined and closed system with nonhomogeneous and anisotropic turbulence [13]. The biggest advantage of the TC system over the pipe flow is its modest size which makes it more practical to study decay in a wall-bounded environment both experimentally and numerically.

Verschoof *et al.* studied experimentally using PIV and LDA the decay in turbulence by stopping the inner cylinder, while outer cylinder was at rest, and allowing the turbulence to decay from the ultimate turbulent regime at Reynolds number of 106 [1]. However, they faced a practical problem of stopping the cylinder instantaneously which took 12 s to reach a complete stop and during this time they didn't not measure the decay. Consequently, the group provided a follow-up numerical study in which the inner cylinder was brought to a halt abruptly [10]. As described by Batchelor and Townsend [5, 6], they also observed three distinctly different stages of decay: initial, intermediate and final, but with different characteristics apart from the final decay stage which remains purely viscous [10].

In this manuscript, a slightly different phenomenon is presented. Instead of starting from the a turbulent flow and studying its decay, we started from a laminar flow. The rotation of the cylinders was fixed in order to obtain a laminar flow and after five minutes the cylinders were stopped instantaneously. Generation of turbulence was observed shortly after the stoppage which decayed afterwards due to absence of any further driving force given to the system. As a result, this experimental work differs significantly from the experimental work of Verschoof *et al.* [1] according to the following points: 1) flow was in laminar state before the instantaneous stoppage in comparison to turbulent state; 2) either outer or both cylinders in counter- or co- rotation were stopped instantaneously in comparison to only inner cylinder being stopped gradually; 3) cylinder were stopped instantaneously in comparison to gradual stoppage; and 4) both the turbulence generation and decay are studied in comparison to just turbulence decay. This turbulence generation and decay is studied experimentally using two complementary approaches: visualizations with Kalliroscope and stereo-PIV measurements to capture all the three velocity components.

2 Methodology

The TC system consists of two cylinders with inner and outer radii of $r_i = 0.04$ m and $r_o = 0.05m$, respectively, with a radius ratio, $\eta = r_i/r_o$, of 0.8 and gap width, $d = r_i - r_o$, of 0.01 m. The maximum height of the working fluid, L, is 0.45 m with aspect ratio $\Gamma = L/b = 45$. Degasified water was used as the working fluid at a constant temperature of 20 °C maintained at both the inner and outer cylinder walls using water circulation. The inner cylinder (IC) is made of aluminum having black anodized wall to avoid reflection when working with laser. The outer cylinder is made of Plexiglas to provide optical access over the entire gap width axially. An optical access is also available from the top-plate to capture the r–θ plane for 2D-PIV measurements. The system also contains a bottom ring, attached to the outer cylinder with at a distance of 0.5 mm from the inner cylinder, and a top plate to reduce Ekman pumping. Three different set-ups were used at different rotational velocities: only outer cylinder rotating, co-rotation and counter-rotation. In each case, the flow conditions were laminar before stopping the cylinders abruptly.

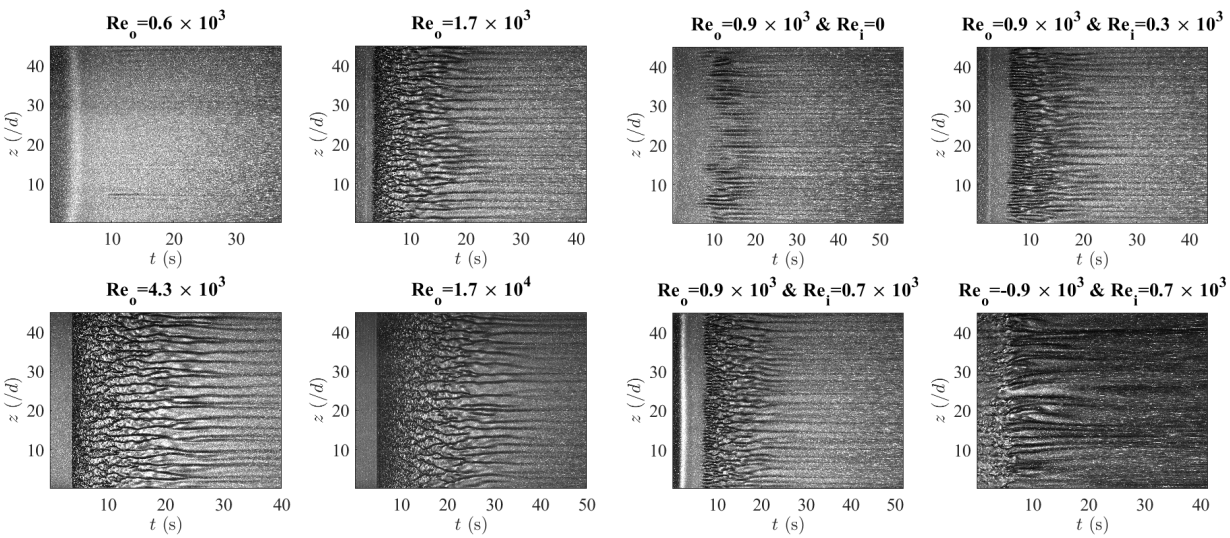
In order to visualize flow structures, the water was initially degasified to get rid of bubbles and then mixed with 1 % Kalliroscope ST-1000. A r–z plane was illuminated with a class 4 Dantec Dyanmics Ray Power 2000 continuous laser with a maximum output of 4 W at 532 nm wavelength. This r–z plane was captured with a M series speed-sense CMOS camera of 4MP resolution and 800 fps speed using a 105 mm objective. The Dantec Dynamics studio version 6.0 was used to capture and export the images which were then treated with Matlab R2018a software to obtain the presented results. A maximum of 2,000 to 10,000 single frame images were captured depending upon the acquisition frequency of 50 and 200 Hz (at higher Reynolds number), respectively.

The Stereo-PIV measurements were also done in the r-z plane through the transparent outer cylinder using two M series speed-sense CMOS camera of 4MP resolution and 800 fps speed using a 105 mm objective. The cameras were synchronized with a Nd:YAG medium Class 4 Dantec Dynamics Litron laser LPY 50-200 having maximum output of 200 mJ, wavelength of 1064 nm, and a maximum frequency of acquisition of 200!Hz. However, in order to capture at least 35 seconds of the process, 50 Hz and 100 Hz (at higher Reynolds numbers) frequency of acquisitions were used to capture around 2,500 and 3,800 double image pairs, respectively. The fluid was seeded with fluorescent Rhodamine particles of average

size between 5–20 µm. The calibration of both cameras was done with the pinhole method of the image modeling fit methodology using a special mire manufactured by the Dantec dynamics for stereo-PIV measurements for this specific TC system. The captured images were analyzed initially with the Dantec Dynamics studio version 6.0 to compute the vector fields using the adaptive PIV method having the maximum interrogation area size of 64×64 grid, minimum interrogation area size of 8×8 grid and grid step size of 4×4. Afterwards, the calibrations of both cameras were selected along with the vector fields of both cameras to create the stereo-PIV vector fields which were imported as `*.txt` files and treated with MATLAB R2018a software to present the results.

3 Results and discussion

First of all, some results of the visualization study with Kalliroscope are presented as space time diagrams at different starting inner and outer Reynolds numbers in Figure 1. In Figure 1 (a), the evolution of generation of turbulence can be seen when inner cylinder was kept at a constant value of zero with increase in the outer Reynolds number; on the other hand, in Figure 1 (b) the outer cylinder rotation is kept at a constant value either in co-current or counter-current while the inner Reynolds number is changed. The minimum $\mathrm{Re}_o = \omega_o d/\nu$ at which turbulence generation and decay was observed is 606 without co- or counter-rotation. With the addition of co- or counter- rotation, the minimum Re_o at which turbulence generation and decay could be observed was found to be 433.



(a) Space-time diagram for increasing outer Reynolds number at zero inner reynolds number.

(b) Space-time diagram for a constant outer Reynolds number and varying inner reynolds number.

Figure 1. Space time diagrams at different inner and outer Reynolds number.

It can be seen that at higher Re_o, the point of stoppage generates turbulence instantly throughout the axial length. Turbulence zone and consequently the decay time increases gradually with each increase in the Reynolds number. It was observed during the visualization experiments that if the initial state before the abrupt stoppage was turbulent, the turbulence decayed in the matter of couple of seconds (the results are not presented herein). Whereas, Verschoof *et al.* [1] through their experimental PIV and LDA study and Ostilla-Mónico *et al.* [10] through their numerical study observed a decay time of 1,000 seconds after their gradual stoppage of inner cylinder from a $\mathrm{Re}_i = 2 \times 10^6$ compared with the highest tested $\mathrm{Re}_i = 2.7 \times 10^4$. It should also be noted that their $\eta = 0.716$ and gap-width $d = 0.079$ m in comparison

to the current configuration of η=0.8 and gap-width $d = 0.01$ m. The geometrical configuration and 100 times higher Re_i could be the leading factors for such a discrepancy.

Figure 2 presents the decay of the azimuthal velocity with time. The azimuthal velocity was averaged axially over 100 mm in the mid-height region, radially over 1.7 mm in the center of gap region and over time for each 1 second. The visualization instantaneous snapshots presented alongside the velocity decay demonstrate the evolution of the generation and decay process. The visualization and PIV velocity estimations were conducted separately and do not necessarily represent the actual time-specific evolution but rather the probability of its observation in that time zone. It is very interesting to note that after the stop, once the decay started it was much faster compared to the gradual decay observed by Verschoof *et al.* [1] and Ostilla-Mónico *et al.* [10]. Once again the geometrical configuration of having practically eight times the current gap-width should be the major reason for having much slower decay in their case or faster in our case due to just 10 mm of gap-width.

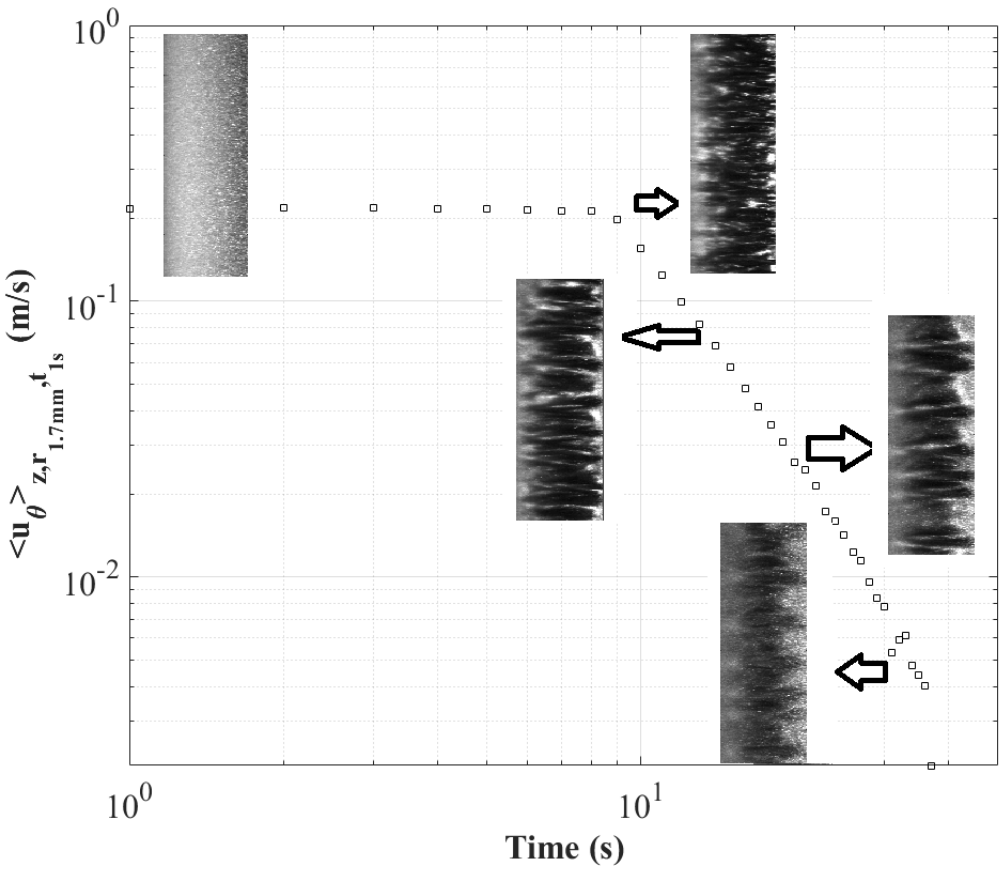


Figure 2. Decay of azimuthal velocity with time. It is averaged axially, radially around the center of gap-width over 1.7 mm and each 1 second. Snapshots of instantaneous visualizations are also presented to show the evolution of the decay of the velocity.

In Figure 3, the decay of azimuthal velocity at different time-steps is shown for different configurations of inner and outer Reynolds number in co- and counter-current situations. The azimuthal velocity is averaged axially and over time for each 1 second, and $R_d = (r - r_i)/d$. A selected few time-steps were chosen to present the decay of the turbulence. In all cases, the stoppage happened within the first

second but not always at the same time; as a result, the laminar mean profile which was present before the stoppage has been influenced due to the stoppage near the outer cylinder region. Nonetheless, the velocity profile for the first second follows very well the analytic laminar profile presented as the dotted line which proves the validity of the stereo-PIV estimations.

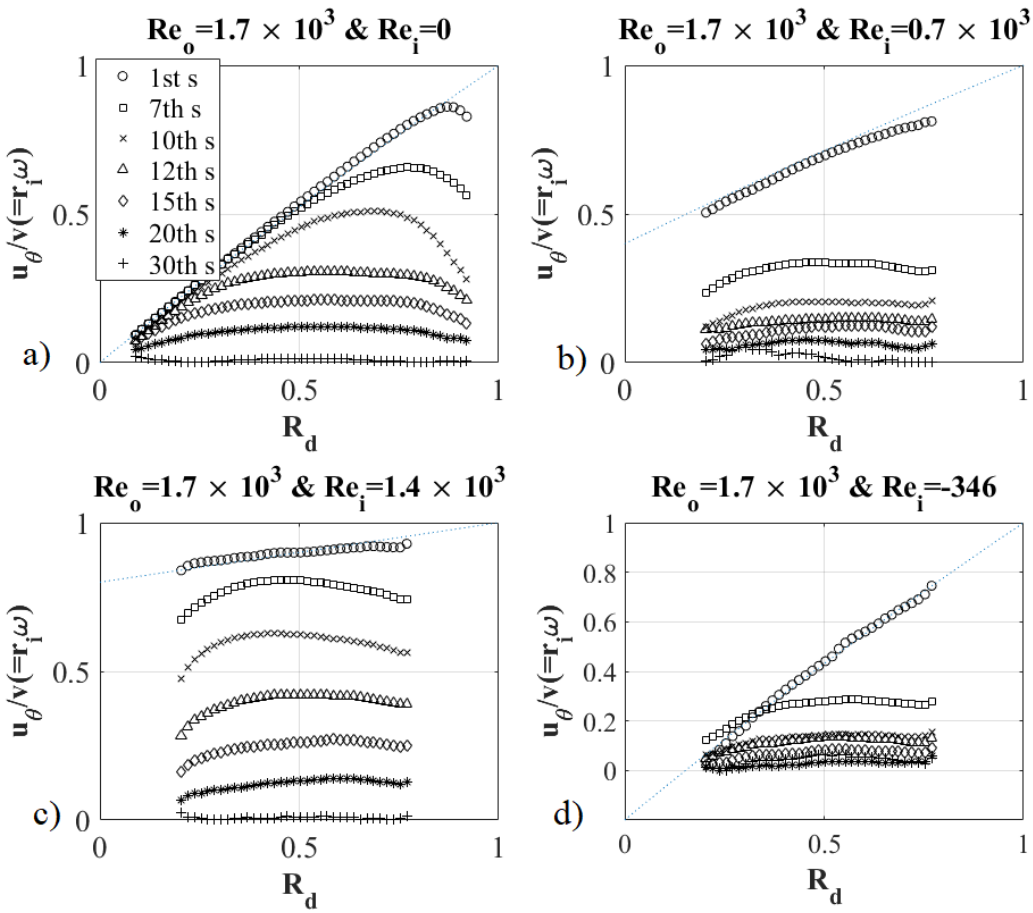


Figure 3. Decay of azimuthal velocity for different co- and counter-current configurations at different time-steps. The legend for the figures in same as that of Figure 3 (a). The dotted line represents the analytic laminar profile.

Another disagreement w.r.t the results of Verschoof *et al.* [1] and Ostilla-Mónico *et al.* [10] is that no self-similarity is observed in all the three phases of the decay: first, intermediate and the final phase. Verschoof *et al.* [1] defined the criteria for self-similarity as that when the velocity profiles are normalized, with the mean azimuthal velocity averaged radially and azimuthally, the profiles overlapped each other. They observed self-similarity in the intermediate state, but we didn't observed self-similarity in any of the three stages though the mean azimuthal velocity was averaged axially and radially (the figure is not presented here).

4 Conclusion

In conclusion, a visualization and stereo-PIV analysis is presented for the instantaneous stoppage of cylinders of TC system which leads to the generation and consequently decay of turbulence due to the absence of any further driving force. The lowest Re_o at which this phenomenon could be observed was

found to be 606, which could be further lowered to 433 with the addition of co- or counter rotation. The primary criterion to observe it was the presence of laminar flow prior to the abrupt stoppage. In case the initial flow was turbulent, the turbulence decayed in the matter of couple of seconds. After the abrupt stoppage, the velocity decayed much faster and no self-similarity was observed which has been one of the primary supposition in the case of homogeneous isotropic turbulence and has been observed by George [7]. Nonetheless, many dissimilarities were observed in regard to the results of Verschoof *et al.* [1] and Ostilla-Mónico *et al.* [10] which are most probably due to vastly different geometrical configurations for the TC system. These are just first few analyses and have generated a scope for much detailed studies, which are currently underway, of this unique phenomenon.

Acknowledgment. We would like to offer our sincere gratitude for financial support from the CPER-FEDER project BIOENGINE.

References

1. R. A. Verschoof, S. G. Huisman, R. C. A. van der Veen, C. Sun & D. Lohse, Self-similar decay of high Reynolds number Taylor–Couette turbulence, *Phys. Rev. Fluids*, **1**, 062402 (2016).
2. G. I. Taylor, Statistical Theory of Turbulence, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **151**, 421–444 (1935).
3. T. von Kármán & L. Howarth, On the statistical theory of isotropic turbulence, *Phys. Lett. A*, **164**, 192–215 (1938).
4. A. N. Kolmogorov, On degeneration (decay) of isotropic turbulence in incompressible viscous liquid, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **31**, 538–540 (1941).
5. G. K. Batchelor, A. Townsend & G. I. Taylor, Decay of isotropic turbulence in the initial period, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **193**, 539–598 (1948).
6. G. K. Batchelor, A. Townsend & G. I. Taylor, Decay of turbulence in the final period, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **194**, 527–543 (1948).
7. W. K. George, The decay of homogeneous isotropic turbulence, *Phys. Fluids A*, **4**, 1492–1509 (1992).
8. H. Touil, J.-P. Bertoglio & L. Shao, The decay of turbulence in a bounded domain, *J. Turbul.*, **3**, N49 (2002).
9. K. Schneider & M. Farge, Final states of decaying 2D turbulence in bounded domains: Influence of the geometry, *Physica D*, **237**, 2228–2233 (2008).
10. R. Ostilla-Mónico, X. Zhu, V. Spandan, R. Verzicco & D. Lohse, Life stages of wall-bounded decay of Taylor–Couette turbulence, *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 114601 (2017).
11. T. Schikarski & M. Avila, T-mixer, a novel system to investigate decaying turbulence in a wall-bounded environment, *16th Eur. Turb. Conf.* (2017).
12. J. Peixinho & T. Mullin, Decay of turbulence in pipe flow, *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 114601 (2017).
13. S. G. Huisman, R. C. A. Van der Veen, C. Sun & D. Lohse, Multiple states in highly turbulent Taylor–Couette flow, *Nat. Commun.*, **5**, 3820 (2014).

Perturbation theory in algebraic setting

Lorenzo Valvo & Michel Vittot

Centre de Physique Théorique (CPT), Aix-Marseille Université
lorenzo.valvo@cpt.univ-mrs.fr

Abstract. We propose a perturbation algorithm which works on any Lie algebra $\mathbb{V}$. We consider a dynamical system on $\mathbb{V}$, which preserves a subalgebra $\mathbb{B}$ of $\mathbb{V}$. In general when we add a perturbing term to the original dynamical system, the subalgebra $\mathbb{B}$ will not be preserved anymore. We show that under suitable hypothesis, there exists a new dynamical system, conjugated to the perturbed one, which preserves $\mathbb{B}$ up to terms quadratics in the perturbation strength. By this result, classical perturbation theory can be extended to noncanonical Poisson systems; for instance, we consider the application of our theorem to a time dependent top. In this case it is possible to iterate the formula and to get a KAM theorem: for a large set of initial data, the algebra $\mathbb{B}$, like the tori of classical mechanics, get deformed into a new algebra preserved by the perturbed flow.

1 Introduction

Let $\mathbb{V}$ be a Lie algebra and $\mathcal{H}, \mathcal{V}$ be maps from $\mathbb{V}$ into itself. Consider the problem of findind the properties of the flow determined by $\mathcal{H} + \mathcal{V}$, once the properties of the flow determined by $\mathcal{H}$ are known, and $\mathcal{V}$ can be considered in some sense smaller than $\mathcal{H}$. The tools to answer this question constitute the vast field of perturbation theory.

Perturbation theory has an efficient, elegant (and convergent) formulation in the context of classical mechanics; it is the celebrated KAM theorem (see for instance [1]). The theorem proves the structural stability of the tori of an integrable hamiltonian: if a "small" perturbation V is added to the Hamiltonian, some of the tori get broken, but "many" others[1] persist, while getting deformed.

In this work we propose a perturbation algorithm, which mimics the methods of KAM theory and which can be applied to any Lie algebra $\mathbb{V}$. The tori are replaced by a subalgebra $\mathbb{B} \subset \mathbb{V}$, which is invariant by the flow determined by $\mathcal{H}$. When we add a perturbation $\mathcal{V}$ to $\mathcal{H}$, in general $\mathbb{B}$ will not be preserved anymore. Thus, the range of applicability of the theorem gets extended to any dynamical system which possesses a Lie algebraic structure; for instance, in this work we give a sketch on how to apply our theorem to a time-dependent rigid body (top). This is an example of non-canonical Poisson system; other examples are ideal fluid dynamics, ideal MHD, Maxwell–Vlasov and Vlasov–Poisson equations. All of these are dynamical systems which possess a Lie algebraic structure [2], but they are beyond the scope of classical mechanics.

2 An algebraic perturbation scheme

A Lie algebra is a vector space $\mathbb{V}$ with an antisymmetric multiplication, i.e. a bilinear operation $\{\cdot,\cdot\}$ for which (here $V, W, Z \in \mathbb{V}$) $\{V, W\} = -\{W, V\}$, and that satisfies the Jacobi identity

$$\{V, \{W, Z\}\} + \{W, \{Z, V\}\} + \{Z, \{V, W\}\} = 0$$

The space of derivations of $\mathbb{V}$ is defined by

$$\operatorname{der} \mathbb{V} := \big\{ \mathcal{D} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^* \text{ s.t. } \forall\, V, W \in \mathbb{V},\ \mathcal{D}\{V, W\} = \{\mathcal{D}V, W\} + \{V, \mathcal{D}W\} \big\},$$

[1] A dense subset of them.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

and it is a Lie algebra on its own with the bracket given by the commutator $[\,,]$. For any element $F \in \mathbb{V}$, we can consider the application "bracket with F", denoted by $\{F\}$, which is a derivation of $\mathbb{V}$ which maps any $G \in \mathbb{V}$ into $\{F, G\} \in \mathbb{V}$. Any derivation built in this way is called an "inner" derivation.

A dynamical system on the algebra is given by

$$\begin{cases} \dot{F} = \mathcal{H}F \\ F(0) = F_0 \end{cases} \tag{1}$$

where $\mathcal{H}$ is a derivation. In the case of classical mechanics, $\mathcal{H} = \{H\}$, where H is called the "Hamiltonian".

We will assume that the Lie algebra $\mathbb{V}$ has a Frechet structure (the case in which $\mathbb{V}$ is a Banach space has already been studied in [3]). So, we assume that there exists a family of seminorms $\{\|\cdot\|_s\}_{s\in\mathbb{I}}$ on $\mathbb{V}$, where $\mathbb{I}$ is a set of indexes (usually positive integer or real numbers), or of multi-indexes. By multi-indexes we mean a set of indexes $s = (s_1, s_2, \ldots)$ partially ordered with respect to the relation

$$s < S \iff s_1 < S_1, s_2 < S_2, \ldots$$

We introduce the notation

$$\mathbb{V}_s = \{f \in \mathbb{V} \quad \text{s.t.} \quad \|v\|_s \leq \infty\}$$

and we assume that

$$W \in \mathbb{V}_{s_1} \implies W \in \mathbb{V}_{s_2}, \forall s_2 < s_1.$$

KAM theory is one way of doing perturbation theory in classical mechanics. In the KAM theorem, one builds a superconvergent algorithm, by which one doesn't require to delete all the perturbation at each step, but only the "strongest" part of it. The proof of the theorem is usually split into two. First one shows that by a canonical transform it is possible to map a Hamiltonian system into a new one where the perturbation has been reduced in strenght. As a second step one shows that it is possible to iterate the procedure, to produce a series of canonical transforms which composition puts the hamiltonian into a so-called "Kolmogorov normal form" [1].

Here we generalize the first step to any Lie algebra. In our approach, the concept of canonical transform is replaced by the more general one of Lie series.

Proposition 1. *Let $\mathbb{B}$ be a Lie sub-algebra of $\mathbb{V}$. Consider $\mathcal{H}$ derivation*[2] *of $\mathbb{V}$ such that*

$$\mathcal{H}\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}.$$

Let $V \in \mathbb{V}$ such that[3] *$\mathcal{V}\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{B}$. where $\mathcal{V} \equiv \{V\}$. Assume to have an operator $R\colon \mathbb{V} \to \mathbb{B}$ and an operator $\Gamma\colon \mathbb{V} \to \operatorname{der}\mathbb{V}$ that satisfy the properties*

$$R^2 = R \tag{2}$$

$$[\mathcal{H}, \Gamma F] = \{NF\}\,,\ N := 1 - R\,, \quad \forall F \in \mathbb{V}. \tag{3}$$

Then

$$\mathrm{e}^{[\Gamma V]}(\mathcal{H} + \mathcal{V}) = \mathcal{H}_* + \mathcal{V}_*, \qquad \mathcal{H}_* := \mathcal{H} + \{RV\}, \tag{4}$$

where V_* is a series in V of order quadratic or higher. Moreover, assume that, $\forall S, d, \delta \in \mathbb{I}, d < \delta, d+\delta < S$ there exists two functions $\alpha(d, \delta)$ and $\check{\alpha}(\delta)$ such that, $\forall W$, $Z \in \mathbb{V}_S$,

$$\|(\Gamma W)Z\|_{S-\delta-d} \leq \alpha(d, \delta)\|W\|_S\|Z\|_{S-\delta}, \tag{5}$$

$$\|NW\|_{S-\delta} < \check{\alpha}(\delta)\|W\|_S, \tag{6}$$

[2] Not necessarily an inner derivation.

[3] The case $\mathcal{V}\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$ is trivial.

Let $s, \mu \in \mathbb{I}$ such that $V \in \mathbb{V}_s$ and $\mu < s$. Define a constant ε by

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} \alpha\big(\tfrac{\mu}{n}, \tfrac{(j-1)\mu}{n}\big) \Big)^{-\frac{1}{n}},$$

whenever the denominator on the right-hand side is positive and bounded. Then, if $\|V\|_s \le \varepsilon$, the operator $\mathrm{e}^{[\Gamma V]}$ is bounded with loss from $\operatorname{der}\mathbb{V}_s$ to $\operatorname{der}\mathbb{V}_{s-\mu}$, and V_* satisfies

$$\|V_*\|_{s-\mu} \le 2(1+\check{\alpha}(\tfrac{\mu}{2}))\varepsilon^2. \tag{7}$$

Proof.

$$\mathrm{e}^{[\Gamma V]}(\mathcal{H}+\mathcal{V}) = \mathcal{H} + [\Gamma V]\mathcal{H} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{[\Gamma V]^l}{l!}\mathcal{H} + \mathcal{V} + (\mathrm{e}^{[\Gamma V]}-1)\mathcal{V}$$

By (3), $[\Gamma V]\mathcal{H} = -[\mathcal{H}, \Gamma V] = -\{NV\}$ so that

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{[\Gamma V]^l}{l!}\mathcal{H} = -\sum_{l=2}^{\infty} \frac{[\Gamma V]^{l-1}}{l!}[\mathcal{H}]\Gamma V = = -\sum_{l=2}^{\infty} \frac{[\Gamma V]^{l-1}}{l!}\{NV\} = -\frac{\mathrm{e}^{[\Gamma V]}-1-[\Gamma V]}{[\Gamma V]}\{NV\}$$

when the latter expression is formal. So we have

$$\mathrm{e}^{[\Gamma V]}(\mathcal{H}+\mathcal{V}) = \mathcal{H} - \{NV\} - \frac{\mathrm{e}^{[\Gamma V]}-1-[\Gamma V]}{[\Gamma V]}\{NV\} + \mathcal{V} + (\mathrm{e}^{[\Gamma V]}-1)\mathcal{V} = \mathcal{H}_* + \mathcal{V}_*,$$

where we defined

$$\mathcal{V}_* = (\mathrm{e}^{[\Gamma V]}-1)\mathcal{V} - \frac{\mathrm{e}^{[\Gamma V]}-1-[\Gamma V]}{[\Gamma V]}\{NV\}.$$

By using[4] $[\Gamma V]\{F\} = \{(\Gamma V)F\}$, one can show that

$$\mathcal{V}_* = \{V_*\}, \quad V_* = (\mathrm{e}^{\Gamma V}-1)V - \frac{\mathrm{e}^{\Gamma V}-1-\Gamma V}{\Gamma V}NV$$

About the convergence problem, it is sufficient to show that $\mathrm{e}^{\Gamma V}$ is bounded with loss from $\mathbb{V}_s$ to $\mathbb{V}_{s-\mu}$. In fact, if that operator exists, then $\mathrm{e}^{[\Gamma V]}$ can be computed by the following relation,

$$\mathrm{e}^{[\mathcal{A}]}\,\mathcal{B} = \mathrm{e}^{\mathcal{A}}\,\mathcal{B}\,\mathrm{e}^{-\mathcal{A}}, \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{der}\mathbb{V}$$

and it is easier to study convergence on an algebra rather than on the space of its derivations. The above relation can be proven by using a series expansion on both sides, and by using the relation

$$[\mathcal{A}]^N\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \mathcal{A}^k\,\mathcal{B}\,(-\mathcal{A})^{N-k},$$

which is easily proven by recurrence.

By the properties of the norm,

$$\big\|\mathrm{e}^{\Gamma V}F\big\|_{s-\mu} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\big\|(\Gamma V)^n F\big\|_{s-\mu}$$

Consider the last term of above, as n varies. For $n=1$ we can apply hypothesis (5) with $\delta = 0$ and $d = \mu$ to get

$$\|(\Gamma V)F\|_{s-\mu} \le \alpha(0,\mu)\,\|V\|_s\,\|F\|_s.$$

[4] which holds because ΓV is a derivation, by definition.

Now let $n \geq 1$ and for any $1 \leq j \leq n$, consider the operator $(\Gamma V)^j : \mathbb{V}_{s-(j-1)\mu/n} \to \mathbb{V}_{s-j\mu/n}$. By applying hypothesis (5) with $d = \mu/n$ and $\delta = (j-1)\mu/n$, we get

$$\|(\Gamma V)^j F\|_{s-\mu} \leq \alpha(\tfrac{\mu}{n}, \tfrac{(j-1)\mu}{n}) \, \|V\|_s \, \|(\Gamma V)^{j-1} F\|_{s-(j-1)\mu/n}.$$

By iterating the above n times, $\big\|(\Gamma V)^n F\big\|_{s-\mu} \leq \prod_{j=1}^n \alpha(\frac{\mu}{n}, \frac{(j-1)\mu}{n}) \|V\|_s{}^n \|F\|_s$. Then we can plug into the general term of the series,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} \alpha(\tfrac{\mu}{n}, \tfrac{(j-1)\mu}{n}) \|V\|_s{}^n \|F\|_s \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\|V\|_s \Big(\frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} \alpha(\tfrac{\mu}{n}, \tfrac{(j-1)\mu}{n}) \Big)^{\frac{1}{n}} \right)^n \|F\|_s.$$

Recalling the definition of ε, one sees that if $\|V\|_s \leq \varepsilon$, then the series in (2) is bounded by 2, and hence the operator $\mathrm{e}^{\Gamma V}$ is bounded. A similar calculation leads to the bound on the norm of V_* (7). ■

The second part of the proof of KAM theorem would work in the following way. Suppose that we were able to iterate the proposition above; that is, to apply formula (4) to $\mathcal{H} + \{RV\}$, with V_* as perturbation. We need three operators R_*, N_*, Γ_* which may be different from the previous ones. Then we have:

$$\mathrm{e}^{[\Gamma_* V_*]}(\mathcal{H} + \{RV\} + \mathcal{V}_*) = \mathcal{H} + \{RV\} + \{R_* V_*\} + \mathcal{V}_{**},$$

where now $\mathcal{V}_{**} = O(V_*^2) = O(V^4)$. By iterating infinitely many times one would eventually get to

$$\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H} + \sum_{i=1}^{\infty} \{R_{\underbrace{*\ldots*}_{i-\text{times}}} V_{\underbrace{*\ldots*}_{i-\text{times}}}\} \qquad \text{so that} \qquad \mathcal{H}_\infty \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}.$$

Let's call $\mathcal{T}$ the map

$$\mathcal{T} \equiv \cdots \circ \mathrm{e}^{\Gamma_{**} V_{**}} \circ \mathrm{e}^{\Gamma_* V_*} \circ \mathrm{e}^{\Gamma V} \implies \mathcal{T}(\mathcal{H} + \mathcal{V})\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{H}_\infty.$$

Then

$$\mathcal{T}^{-1} \mathcal{H}_\infty \mathcal{T} \mathcal{T}^{-1} \mathbb{B} \subseteq \mathcal{T}^{-1} \mathbb{B}.$$

By defining $\tilde{\mathbb{B}} := \mathcal{T}^{-1}\mathbb{B}$ the above equation can be rewritten as $(\mathcal{H} + \mathcal{V})\tilde{\mathbb{B}} \subseteq \tilde{\mathbb{B}}$, where we read that the algebra $\mathbb{B}$ is structurally stable under perturbation, but it gets deformed into $\tilde{\mathbb{B}}$, like the tori of classical mechanics.

3 About the rigid body (or top)

We denote by $\bar{\cdot}$ the canonical Euclidean structure of $\mathbb{R}^3$, and by $[\![\cdot,\cdot]\!]$ the standard cross product. We consider the set

$$\mathbb{V} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{3^*} \to \mathbb{R}) \otimes C^\infty(T \to \mathbb{R}),$$

which elements will be called "observables". We define the operators $\partial_{\bar{M}}, \partial_t$ by

$$\bar{N}\partial_{\bar{M}} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{M} + \varepsilon \bar{N}) - f(\bar{M})}{\varepsilon} \qquad \partial_t f = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}.$$

In particular, $\partial_{\bar{M}}$ takes elements of $\mathbb{V}$ into elements of $\mathbb{R}^3$. This is evident from the definition above: when we act on $\partial_{\bar{M}} f$ with an element $\bar{N} \in \mathbb{R}^{3^*}$, we get a scalar.

The set $\mathbb{V}$ is endowed with the structure of a Lie algebra by the following bracket

$$\{F, G\}(M) = \bar{M}\,[\![\partial_{\bar{M}} F, \partial_{\bar{M}} G]\!], \quad \forall F, G \in \mathbb{V}, \tag{8}$$

which is obviously antisymmetric, and one can check that it satisfies also the Jacobi identity. This is a consequence of the well-known Lie–Poisson theorem.

Now we define a dynamical system by fixing a (static) Hamiltonian of type

$$H = \tfrac{1}{2}\bar{M}\Lambda M, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{9}$$

which corresponds to a rigid body with momenta of inertia $I_1 = \lambda_1^{-1}, I_2 = \lambda_2^{-1}, I_3 = \lambda_3^{-1}$. Our dynamical system is defined by (1) with $\mathcal{H} = \{H\} + \partial_t$.

It is evident that the function $\rho^2 = (M^1)^2 + (M^2)^2 + (M^3)^2$ has null bracket with any other observable: it is called a Casimir element [4]. A function which is a Casimir is constant under the flow determined by any Hamiltonian. The dynamics of the Casimir is trivial, and in the static case we are left with two degrees of freedom: the system is integrable. The trajectories can be visualized as the intersections between the surface level of ρ and that of H (the "energy ellipsoid"). In the time-dependent case, we have an additional degree of freedom, so the property of integrability is broken. In particular, to the Hamiltonian (9), we add a perturbation of type

$$V = \tfrac{1}{2}\bar{M}A(t)M \tag{10}$$

where $A(t)$ is a 3×3 diagonal matrix with time-dependent coefficients. Physically, it represents a top with fluctuating momenta of inertia[5].

By definition a symmetric top is one in which $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda_\perp$. We will also assume $\lambda_3 > \lambda_\perp$. In the symmetric case it is useful to consider the following change of coordinates [5, 6],

$$\{M_1, M_2, M_3\} \longmapsto \{\rho, X, \theta\} : \begin{cases} M_1 = \rho\sqrt{1 - X^2}\cos(\theta), \\ M_2 = \rho\sqrt{1 - X^2}\sin(\theta), \\ M_3 = \rho X, \end{cases}$$

with $X \in (-1, 1)$ and $\theta \in [0, 2\pi)$. The bracket (8) becomes $\{F, G\} = \rho^{-1}(\partial_X F\, \partial_\theta G - \partial_\theta F\, \partial_X G)$ and it contains no derivatives in ρ, which is coherent with it being a Casimir. The Hamiltonian (9) becomes

$$H = \frac{\rho^2}{2}\Big(\lambda_\perp(1 - X^2) + \lambda_3 X^2\Big) \equiv \frac{\rho^2}{2}\Delta\, X^2 + \frac{\rho^2\,\lambda_\perp}{2},$$

where we have set $\Delta = \lambda_3 - \lambda_\perp$. We see that the coordinates X, θ have the property of redressing the bracket and at the same time of diagonalizing the Hamiltonian (in fact, they are action-angle coodinates for the symmetric top). Moreover, by looking at Eq. (9) and Eq. (10) we see that any Hamiltonian and perturbation will be at most quadratic in X. So we have a striking similarity with the usual setting of classical mechanics.

One difference with classical mechanics is that the action–angle coordinates are not defined on the whole phase space, in particular not near the points $X = \pm 1$. Physically, these points correspond to the angular momentum aligned along the third coordinate axis. As we are going to consider a time-dependent top, these points should be avoided anyhow. In fact, because of the time-dependence, energy will fluctuate. Now, the corresponding energy ellipsoid will also fluctuate, but if it is near to the point $M_3 = \rho$, it may become bigger than the sphere, so that the two figures will have no more intersections. Such a situation would be unphysical, that's why these points should be avoided.

By analogy with classical mechanics, we make a localisation in the X variable, that is, we make a further change of coordinates: $X \mapsto x_0 + x$, where $x_0 \in (-1, 1)$ is fixed and x is sufficiently small so that also $x_0 + x \in (-1, 1)$. Functions in $\mathbb{V}$ now admit the representation

$$F(x, \theta, t) = \sum_{l,m\in\mathbb{Z}} F_{l,m}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}lt + \mathrm{i}m\theta}$$

[5] This is the reason why we use the term "top" rather than "rigid body": here the body is not rigid.

Following Section 2, the first step of our algebraic KAM method is to choose a target algebra $\mathbb{B}$. We are led again by analogy with classical mechanics, and we choose

$$\mathbb{B} = \big\{F(\rho, x, \theta, t) \in \mathbb{V} \quad \text{s.t.} \quad F(\rho, 0, \theta, t) = 0,\, \partial_x F(\rho, 0, \theta, t) = 0\big\}.$$

We define the two operators

$$R \coloneqq \oint \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{\geq 2} - K, \quad N \coloneqq \chi \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + K$$

where $\oint \equiv f(x, \theta, t) \mapsto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t f(x, \theta, t) \equiv f_{0,0}(x)$, $\chi \equiv 1 - \oint$ and $\mathcal{P}_k \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_k x^k$. Moreover $K \equiv \rho^2 x_0 \Delta + \{\frac{1}{2} Q x^2\}\, x \mathcal{G}_s \left(\mathcal{P}_0 \partial_x - Qa - Q \partial_\theta \mathcal{G}_s \mathcal{P}_0\right)$, $Q \equiv \partial^2_{xx} H$, $\mathcal{G}_s f = \sum_{l,m \in \mathbb{Z}_0} \frac{-\mathrm{i}\mathcal{P}_{\leq 1} f_{l,m}(x)}{\rho x_0 \Delta m + l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta + \mathrm{i}lt}$ and $a \equiv \left(\oint Q\right)^{-1} \oint \mathcal{P}_0 (\partial_x - Q \partial_\theta \mathcal{G}_s)$. It is easy to see that R takes values in $\mathbb{B}$, and with some effort one can prove that $R^2 = R$ so that hypothesis (2) of Proposition 1 is satisfied.

Next we define an operator $\Gamma \colon \mathbb{V} \to \operatorname{der} \mathbb{V}$ by

$$\Gamma f = \{\mathcal{G} f\} = \{\mathcal{G}_s f\} - \rho^{-1} a f \partial_x - \{x \mathcal{G}_s Q (a + \partial_\theta \mathcal{G}_s \mathcal{P}_0) f\}.$$

One can show that

$$[\mathcal{H}](\Gamma f) \;=\; \{N f\}, \qquad \mathcal{H} = \{\rho \Delta x_0 x \,+\, \tfrac{1}{2} Q x^2\} + \partial_t,$$

so that also hypothesis (3) of Proposition 1 is satisfied: all the algebraic part of the proposition is satisfied by the operators that we built. We may of course go further; in Ref. [7] we also do the followings:

- We build a seminorm on the space $\mathbb{V}$ and prove two quantitative estimates of the type (5) and (6);
- we show how to perform the iteration mechanism described in the end of the previous section to this dynamical system, so as to obtain a KAM theorem for the symmetric top;
- we generalize to the case of a nonsymmetric top, for which $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

References

1. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli & J.-M. Strelcyn, A proof of Kolmogorov's theorem on invariant tori using canonical transformations defined by the Lie method, *Nuovo Cimento B*, **79**, 201–223 (1984).
2. P. J. Morrison, Poisson brackets for fluids and plasmas, in *Mathematical Methods in Hydrodynamics and Integrability in Dynamical Systems*, Proceedings of the Aip Conference No 88, M. Tabor & Y. Treve (Editors), pp. 13–46 (1982).
3. M. Vittot, Perturbation theory and control in classical or quantum mechanics by an inversion formula, *J. Phys. A*, **24** 6337–6357 (2004).
4. J. E. Marsden & T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Springer Science & Business Media (2013).
5. P. Gurfil, A. Elipe, W. Tangren & M. Efroimsky, The Serret–Andoyer formalism in rigid-body dynamics: I. Symmetries and perturbations, *Regul. Chaotic Dyn.*, **12**, 1560–3547 (2007).
6. A. Deprit, Free rotation of a rigid body studied in the phase plane, *Am. J. Phys.*, **35**, 424–428 (1967).
7. L. Valvo, & M. Vittot, Perturbation theory in algebraic setting, unpublished (2019).

Polynomial description of acoustic modes in fluid ellipsoids

Jérémie Vidal[1], Sylvie Su[2] & David Cébron[2]

[1] Department of Applied Mathematics, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK
[2] Université Grenoble Alpes, CNRS, ISTerre, Grenoble, France
j.n.vidal@leeds.ac.uk

Résumé. Les modes acoustiques sont couramment utilisés pour déterminer les propriétés physiques de l'intérieur des planètes et des étoiles. La méthode d'imagerie par vélocimétrie acoustique a été récemment introduite en mécanique des fluides, en complément des méthodes d'imagerie existantes. Elle consiste à reconstruire l'écoulement à partir de la levée de dégénérescence des modes acoustiques, observée expérimentalement (par exemple) en présence d'un profil de rotation. Ainsi, des algorithmes d'inversion sont nécessaires pour reconstruire indirectement l'écoulement en rotation dans des expériences en géométrie quasi-sphérique. Cependant, les objets célestes et les expériences ne sont pas rigoureusement sphériques, mais plutôt ellipsoïdaux (au premier ordre). Les effets topographiques et la rotation doivent alors être pris en compte correctement dans le modèle physique. Les méthodes analytiques et numériques existantes (en géométrie déformée) ne peuvent plus alors être couplées facilement et efficacement aux algorithmes d'inversion. Pour remédier à ce problème, nous avons développé une nouvelle méthode de Galerkin semi-analytique en ellipsoïdes tri-axes. Elle repose sur une décomposition polynomiale explicite, en coordonnées cartésiennes, des écoulements potentiels en ellipsoïdes. Nous illustrons la méthode en considérant les modes acoustiques d'un fluide compressible, uniforme et homentropique, avec une condition de Dirichlet homogène à la paroi (condition isobare). Nous validons nos résultats avec des simulations numériques réalisées avec le logiciel COMSOL. Nous étendrons cette méthode novatrice afin de prendre en compte des effets physiques supplémentaires, afin de décrire plus précisément les conditions expérimentales.

Abstract. Acoustic eigenmodes are often used to passively infer physical properties of the interiors of rotating planets and stars. Acoustic wave imaging has been also introduced in fluid dynamics. The experimental technique consists in observing and analysing the splitting in frequency of the acoustic modes, by solving an inverse problem. For instance, the presence of an (unknown) rotational profile disturbs the acoustic spectrum. Moreover, a topographic splitting is often superimposed on the rotational splitting. Indeed, rotating celestial objects are rather ellipsoidal than spherical at the leading order, as well as laboratory experiments which are weakly non-spherical (due to mechanical deformations). Rotation and topography should be taken into account simultaneously, but the acoustic problem does not admit exact solutions in the presence of rotation. Fully numerical solutions are often computed. However, they cannot be easily combined with inversion schemes to yield robust results. Hence, the usual approach is to consider small perturbations to non-rotating solutions. As an alternative, we present a new description of the compressible modes, relying on the method of weighted residuals. Here, we present a new spectral method to describe potential flows in triaxial ellipsoids. It relies on an explicit Galerkin expansion, made of global polynomials expressed in Cartesian coordinates. We illustrate this method by considering the canonical situation of diffusionless acoustic modes in an homogeneous, compressible and homentropic fluid ellipsoid at rest. The pressure satisfies a Dirichlet condition (sound soft boundary). We validate our results against fully numerical simulations performed with the commercial software COMSOL, showing a perfect quantitative agreement. This new method will be extended to include additional effects and alternative boundary conditions.

1 Introduction

Studying the interior conditions of planets and stars is a fundamental research topic. Several passive imaging techniques have been developed for this purpose. The most commonly used is acoustic wave imaging. For instance, this method has been used in the Sun to reconstruct its internal differential rotation profile [1]. Indeed, the eigenfrequencies of acoustic modes are affected by rotational fluid motions, yielding an observable rotational splitting of the modes [2]. The same approach has been introduced in experimental fluid dynamics [3]. It aims at probing the global dynamics of rotating flows in quasi-spherical resonators. Indeed, conventional fluid velocimetry techniques (e.g. Doppler or Particle Image Velocimetry) give partial information on the flow structure. Moreover, the fluid must be seeded with neutrally buoyant

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

tracer particles to act as scatterers, which is expensive and not always efficient (tracers may float or sink over time).

The method of acoustic mode velocimetry is an inverse problem, formally written as $\boldsymbol{d} = \mathcal{G}(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{\epsilon}$, where $\boldsymbol{d}$ is the data vector (the frequencies of acoustic modes in a container), $\boldsymbol{m}$ contains the parameters of the model, $\mathcal{G}$ is the physical operator of the problem (the wave equation) and $\boldsymbol{\epsilon}$ some uncertainties (in the model and/or the data). The forward problem is the determination of the eigenfrequencies of acoustic modes $\boldsymbol{d}$, given a set of parameters $\boldsymbol{m}$. Because the latter is *a priori* unknown, it is often estimated by using iterative methods. The inverse problem is rather complicated, involving variational principles e.g. in the presence of rotation [4]. Hence, forward models as efficient as possible are desirable to develop versatile and efficient inverse schemes. Acoustic modes do admit analytic solutions in non-rotating spheres. However, rotation and topography should be taken into account. Indeed, rotating celestial bodies and experiments are rather ellipsoidal at the leading order. Several methods have been employed to go beyond the spherical geometry, e.g. relying on perturbation methods [5], transcendental functions in ellipsoidal coordinates [6–8] or numerical simulations [9, 10]. Yet, none of them can easily be coupled with inverse schemes to yield fast and accurate results.

In the following, we focus on the forward problem of acoustic modes. We present a new spectral method to compute acoustic modes in arbitrary triaxial ellipsoids. The paper is divided as follows. In Section 2, we introduce our new method for a simple acoustics test case. Then in Section 3, we present the results obtained with the new method. We also benchmark them against three-dimensional simulations performed with the commercial software COMSOL. Finally, Section 4 ends the paper with a short conclusion and draws some perspectives.

2 Modelling

2.1 Linearized problem

The acoustic wave equation is obtained by expanding the field variables (velocity, density, pressure) as the sum of background quantities and acoustic perturbations. Several forms of the acoustic equation can be deduced from the full Navier–Stokes equations, depending on the background state. We refer the reader to Campos [11] for an exhaustive review. To present the new polynomial expansion, we tackle here the simplest physical situation.

We consider a compressible fluid, enclosed within a full triaxial ellipsoid of semi-axes (a, b, c) and volume $\mathcal{V} = 4\pi abc/3$. The ellipsoid has a boundary $\partial\mathcal{V}$, expressed in Cartesian coordinates (x, y, z) by $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. The fluid is homentropic and characterized by a background density ρ_0 and pressure P_0. They are assumed to be spatially uniform, though the new method can account for arbitrary $[\rho_0, P_0]$. Then, we expand the velocity field from a state of rest as $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}, t)$, where $\Phi(\boldsymbol{r}, t)$ is the velocity potential (irrotational flow). In the absence of any diffusive effect (e.g. viscosity or thermal conduction) and body force, the velocity potential satisfies the wave equation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c_0^2\,\boldsymbol{\nabla}^2\Phi, \tag{1}$$

where $c_0 = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ is the sound speed in the background state (with γ the adiabatic index). We seek modal solutions of equation (1) of the form $\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \widehat{\Phi}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, where $\omega \in \mathbb{R}$ is the angular frequency and $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{r})$ the eigenfunction solution of Helmholtz equation

$$\mathcal{L}(\widehat{\Phi}) = 0, \quad \mathcal{L} = \omega^2 + c_0^2\,\boldsymbol{\nabla}^2. \tag{2}$$

Finally, Equation (2) is supplemented by an appropriate boundary condition on $\widehat{\Phi}$ (see Subsection 2.2).

2.2 The new Galerkin expansion

We solve the above eigenvalue problem by using the method of weighted residuals [12]. To do so, we introduce a new spectral Galerkin expansion in triaxial ellipsoids. We expand the velocity potential onto global polynomial elements $\{\phi_l(\boldsymbol{r})\}_l$ as

$$\widehat{\Phi}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \phi_l(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

where $\{\alpha_l\}_l$ are modal coefficients. The polynomial elements $\{\phi_l(\boldsymbol{r})\}_l$ are made of linear combinations of Cartesian monomials $\{x^i y^j z^k\}_{i+j+k<\infty}$, such that any element $\phi_l(\boldsymbol{r})$ satisfies exactly the boundary condition for $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{r})$. Expansion (3) is similar to expansions used in the finite-element method (FEM). However, compared to the traditional FEM, we emphasize that our basis elements $\{\phi_l\}_l$ are global polynomials, infinitely continuously differentiable in ellipsoids. Therefore, the mathematical completeness of decomposition (3) is ensured by using the Weierstrass approximation theorem [13]. Hence, this is a rigorous spectral decomposition in ellipsoids.

In practice, we arbitrary truncate the series at the polynomial degree $n \geq 2$ (see later). Then, we substitute the truncated series into Helmholtz equation (2), yielding a finite-dimensional, quadratic eigenvalue problem for the state vector $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)^\top$, i.e.

$$\boldsymbol{L\alpha} = 0, \quad L_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \widehat{\Phi}_i \cdot \mathcal{L}(\widehat{\Phi}_j)\, \mathrm{d}\mathcal{V}. \tag{4}$$

In Equation (4), the Galerkin projections are computed analytically by using the three-dimensional integral for any Cartesian monomial $x^i y^j z^k$ within an ellipsoid

$$\int_{\mathcal{V}} x^i y^j z^k \, \mathrm{d}\mathcal{V} = \begin{cases} 0 & \text{if } i,\ j \text{ or } k \text{ is odd,} \\ \dfrac{2a^{i+1}b^{j+1}c^{k+1}}{3+i+j+k}\beta\left(\dfrac{i+j}{2}+1, \dfrac{k+1}{2}\right)\beta\left(\dfrac{i+1}{2}, \dfrac{j+1}{2}\right) & \text{if } i,\ j \text{ and } k \text{ are even,} \end{cases} \tag{5}$$

where $\beta(i,j)$ is the transcendental beta function defined as a function of the Gamma function $\Gamma(i)$ by

$$\beta(i,j) = \frac{\Gamma(i)\Gamma(j)}{\Gamma(i+j)}, \quad \Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2i)!}{2^{2i}i!}\sqrt{\pi}. \tag{6}$$

The explicit form of the polynomial basis depends on the chosen boundary condition. To illustrate the new method, we consider the vanishing Dirichlet boundary condition for the potential (sound soft boundary), i.e. $\widehat{\Phi} = 0$ on $\partial\mathcal{V}$. For this boundary condition, an appropriate polynomial basis of maximum degree n for the velocity field is

$$\widehat{\Phi} = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \phi_l, \quad \phi_l(x,y,z) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) x^i y^j z^k \quad (0 \leq i+j+k \leq n-2). \tag{7}$$

The number of basis elements is $N = n(n+1)(n-1)/6$. Note that the basis functions $\{\widehat{\Phi}\}_l$ can be normalized with respect to the real scalar product based on formula (5).

3 Proof-of-concept

We have implemented this method in Python as a proof-of-concept. For the validation, we have solved Equation (4) in dimensionless form, by considering a as the unit of length and a/c_0 as the unit of time.

Bessel		$n=5$		$n=15$	
(k,l)	$f_{k,l}$	f	Rel. err. (%)	f	Rel. err. (%)
$(1,0)$	0.500	0.5	10^{-2}	0.5	10^{-8}
$(1,1)$	0.715	0.716	10^{-1}	0.715	10^{-8}
$(2,1)$	1.229	1.217	10^{0}	1.229	10^{-8}
$(3,1)$	1.735	$\emptyset$	$\emptyset$	1.7354	10^{-4}

(a) Sphere

COMSOL	$n=5$		$n=15$	
f	f	Rel. err. (%)	f	Rel. err. (%)
0.7340	0.7346	10^{-1}	0.7340	10^{-6}
0.9254	0.9278	10^{-1}	0.9254	10^{-7}
0.9879	0.990	10^{-1}	0.9879	10^{-7}
1.1272	$\emptyset$	$\emptyset$	1.1272	10^{-7}

(b) Triaxial ellipsoid

Table 1. Comparison of acoustic frequencies $f = \omega/(2\pi)$ and relative error (a) in a sphere between theory and the polynomial approach and (b) in a strongly deformed ellipsoid ($a = 1, b = 0.8, c = 0.5$) between the polynomial approach and COMSOL.

3.1 Benchmarks in spheres and ellipsoids

To benchmark our polynomial method, we first consider a sphere ($a = b = c = 1$). Helmholtz equation (2) admits exact solutions in spherical coordinates (r, θ, ϕ). These solutions are $\Phi_{k,l} \propto j_l(r\omega_{k,l})Y_l^m(\theta, \phi)$ where $Y_l^m(\theta, \phi)$ is the spherical harmonics of degree l and order m and $j_l(r\omega_{k,l})$ the associated spherical Bessel function $j_l(r\omega_{k,l})$. For the vanishing Dirichlet condition, the acoustic frequency $f_{k,l} = \omega_{k,l}/(2\pi)$ is the kth root of the associated spherical Bessel function. Because of the spherical symmetry, the modes with different m are degenerated (i.e. have the same frequency). The fundamental frequency is exactly $f_{1,0} = 1/2$, since $j_{k,0}$ is the cardinal sine function (its zeros are multiple of π). The second frequency is approximatively $f_{1,1} = 0.715$ and so on. Note that Bessel functions do not admit explicit expansions involving a finite number of Cartesian polynomials. This clearly shows that our polynomial method is semi-analytical, in contrast with rotational modes [14, 15]. We must truncate the series (3) at a sufficient degree n to have a good convergence for the modes we are interested in. However, even spherical solutions in this canonical case are not entirely explicit, since $\omega_{k,l}$ must be generally computed iteratively (for high order modes) or approximated by using asymptotic expansions [16].

We show in Table 1 (a) the comparison between theoretical (i.e. using Bessel functions) and numerical values for a few modes, by varying the truncation degree n. For $n = 5$, the first modes are already well described by the polynomial expansion.

The mode $(3, 1)$ does not appear in the acoustic spectrum at this degree. Thus, this is necessary to increase the polynomial degree to describe it. Then, this mode is accurately well described at $n = 15$, with extremely small relative departure from the theoretical frequency.

To go beyond the spherical case, exact analytical solutions do exist in ellipsoids by using separation of variables [6–8]. However, they rely on transcendantal ellipsoidal functions, which cannot be easily manipulated. Instead, Mehl [5, 17] obtained approximate solutions by considering perturbations from the spherical geometry, but large ellipsoidal deformations cannot be accurately described. Thus, we validate our results against numerical computations performed with the commercial software COMSOL. The latter code solves Equation (2) with the FEM method (Lagrange elements of order 5). In spheres, COMSOL yields the theoretical eigenfrequencies with a relative tolerance always smaller than 10^{-5} % (depending on the numerical mesh). Similarly, COMSOL will provide fairly accurate benchmarks in deformed ellipsoids. The quantitative comparison on the frequencies is given in Table 1 (b) for an given triaxial configuration. At $n = 5$, only the first modes are qualitatively described (but with a relative tolerance smaller than 1 %). Then, these modes are extremely well described at $n = 15$.

3.2 Topographic splitting

After having quantitatively validated the polynomial method, we investigate the topographic splitting. We show in in Figure 1 the splitting of the first few modes in spheroids. Note that we obtain a perfect quantitative agreement between the polynomial solutions and COMSOL. Then, most of the modes undergo a topographic splitting, e.g. involving higher order azimuthal numbers ($m = \pm 1$, $m = \pm 2$,... in spheroids)

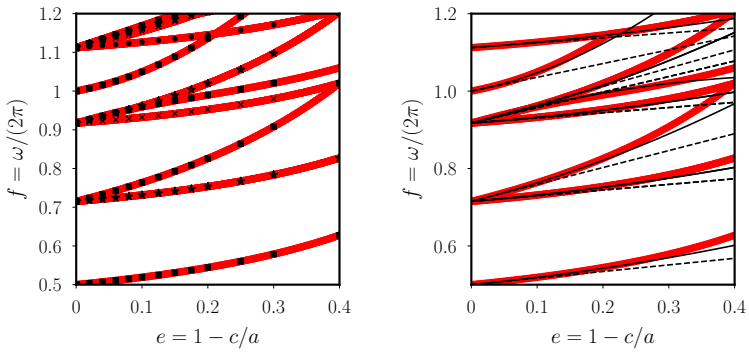


Figure 1. Topographic splitting of the acoustic spectrum in spheroids ($a = b = 1$) as a function of the polar flattening $e = 1 - c/a$. Comparison with COMSOL (left) and with asymptotic scalings (right). Red (thick) curves: polynomial modes ($n = 15$). Black squares: COMSOL ($m = 0$). Black stars: COMSOL ($m = \pm 1$). Black crosses: COMSOL ($m = \pm 2$). Black points: COMSOL ($m = \pm 3$). Dashed curves: linear in e. Solid curves: quadratic in e.

and crossing of several branches. Moreover, we observe that the frequency does not scale linearly with the deformation [5], and even for moderate finite deformations for a few modes. Hence, second-order topographic effects [17] should be considered to reasonably cover a wide range of deformation.

Finally, we illustrate two acoustic modes in a strongly oblate spheroid ($a = b \neq c$) in Figure 2. The spheroid has a flattened vertical axis $c = 0.6$. This value corresponds to the observed flattening of the star Archenar [18]. This is one of the least spherical stars in the Milky Way. Indeed, it spins so rapidly that its shape is a strongly flattened oblate spheroid. The two modes have the same azimuthal number $m = 1$ but different radial complexities, which are well recovered by the polynomial approximation.

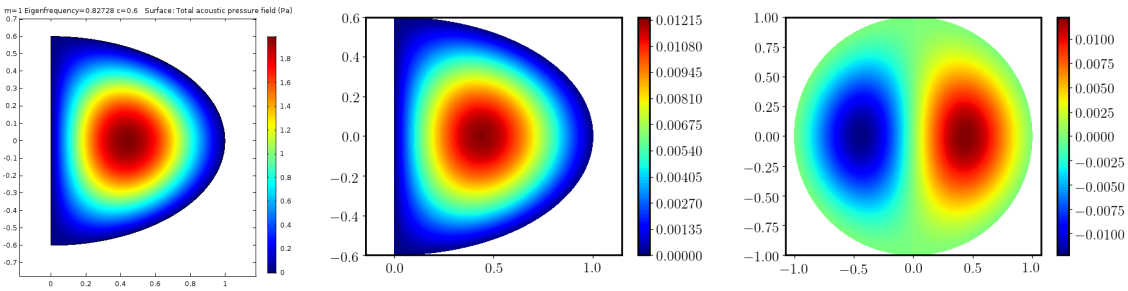
4 Conclusion and perspectives

We have presented a new semi-analytical approach to compute acoustic modes in arbitrary triaxial ellipsoids. This method relies on an analytical Galerkin method, using global Cartesian polynomials of maximum degree n satisfying the appropriate boundary condition. As a proof-of-concept of the method, we have computed the acoustic modes with the vanishing Dirichlet condition (sound soft boundary) in ellipsoids. We have quantitatively benchmarked this method against theoretical and FEM computations, exhibiting a very good quantitative agreement.

Compared to the existing alternative methods, this new technique is worthy of interest. Notably, it has a great numerical potential for modal acoustic velocimetry technique. Indeed, it can be implemented in open-source programming languages (e.g. here Python), that can run on laptops and supercomputers (if memory bound computations at very large n are required). Then, the forward problem can be easily coupled with built-in inverse methods (e.g. in Python [19]). The forward problem of acoustic waves is also easier to solve, because no approximation is made on topographic effects (which avoids the use of perturbation methods). Additionally, the post-processing is made easier by using Cartesian coordinates (rather than ellipsoidal ones). Therefore, we advocate to use this method for future applications of modal acoustic velocimetry. This technique seems to be very promising, in particular for liquid-metal experiments [20] for which direct optical methods are unsuitable and ultrasonic techniques challenging.

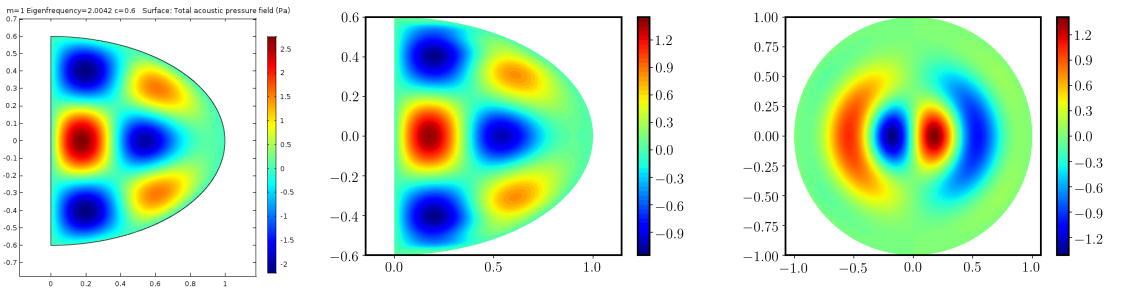
Finally, it turns out that the polynomial method is also useful beyond the idealized acoustic case considered here. Indeed, we have extended the Galerkin polynomial method presented here, notably by considering a vanishing Neumann condition on the pressure (sound hard boundary, i.e. non-penetration condition). This is a more relevant condition for a fluid bounded in a rigid container. Moreover, the Galerkin method can also accommodate additional effects, such as rotation or density variations. Accounting for these effects in the direct problem may also greatly simplify the inverse problem, for future experimental and planetary applications.

(a) Acoustic frequency $f = 0.82728$



Oxz-plane (COMSOL) Oxz-plane (Polynomials) Oxy-plane (Polynomials)

(b) Acoustic frequency $f = 2.2758$



Oxz-plane (COMSOL) Oxz-plane (Polynomials) Oxy-plane (Polynomials)

Figure 2. Potential field $\widehat{\Phi}(\boldsymbol{r})$ for two large-scale acoustic modes in an oblate spheroid, computed with COMSOL and the polynomial method ($n = 20$). Ellipsoidal geometry $a = b = 1$ and $c = 0.65$.

Acknowledgments. JV acknowledges the support of STFC Grant ST/R00059X/1. SS and DC are supported by ANR-13-BS06-0010 (TuDy).

References

1. T. L. Duvall Jr *et al.*, *Nature*, **310**, 22–25 (1984).
2. D. Lynden-Bell & J. P. Ostriker, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **136**, 293–310 (1967).
3. S. A. Triana *et al.*, *New J. Phys.*, **16**, 113005 (2014).
4. C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard & D. W. Kurtz, *Asteroseismology*, Springer (2010).
5. M. R. Moldover *et al.*, *J. Acoust. Soc. Am.*, **79**, 253–272 (1986).
6. C. T. M. Chang, *J. Acoust. Soc. Am.*, **49**, 611–614 (1971).
7. C. T. M. Chang, *J. Acoust. Soc. Am.*, **51**, 1–5 (1972).
8. M. Willatzen & L. C. Lew Yan Voon, *J. Acoust. Soc. Am.*, **116**, 3279–3283 (2004).
9. F. Lignieres, M. Rieutord & D. Reese, *Astron. Astrophys.*, **455**, 607–620 (2006).
10. M. Berggren, A. Bernland & D. Noreland, *J. Comp. Phys.*, **371**, 633–650 (2018).
11. L. M. Campos, *Appl. Mech. Rev.*, **60**, 149–171 (2007).
12. B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, SIAM (2013).
13. R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York (1962).
14. J. Vidal, D. Cébron & N. Schaeffer, *Comptes-Rendus de la 19eRencontre du Non-Linéaire*, 121–126 (2016).
15. J. Vidal & D. Cébron, *J. Fluid Mech.*, **833**, 469–511 (2017).
16. M. Abramowitz & I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications (1972).
17. J. B. Mehl, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, **112**, 163–173 (2007).
18. P. Kervella *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **407**, L47–L50 (2003).
19. A. Patil, D. Huard & C. J. Fonnesbeck, *J. Stat. Softw.*, **35**, 1–81 (2010).
20. S. Cabanes, N. Schaeffer & H.-C. Nataf, *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 184501 (2014).

Instabilité de rides sur des microcapsules en écoulement extensionnel

Kaili Xie[1,2], Clément de Loubens[1], Marc Jaeger[2] & Marc Leonetti[1]

[1] Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LRP, Grenoble, France
[2] Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, Marseille, France
marc.leonetti@univ-grenoble-alpes.fr, clement.de-loubens@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé. Les particules déformables telles que les cellules, les vésicules ou les microcapsules, ont une dynamique spatio-temporelle riche en écoulement. Un exemple marquant concerne les globules rouges qui présentent des oscillations de leur forme ainsi que des rotations dans des écoulements de cisaillement. De plus, d'autres phénomènes non linéaires surgissent tels que le flambement de la membrane, observé sur des globules rouges rigidifiés ou bien encore des capsules dans les années 70 [1, 2]. Inspirés par les globules rouges, nous étudions l'émergence de telles instabilités élastiques sur des microcapsules en écoulement extensionnel.

Des rides très bien définies apparaissent sur la membrane de la capsule en extension lorsque la contrainte hydrodynamique dépasse un seuil. Au-delà de ce seuil, cette instabilité supercritique se développe le long de la capsule jusqu'à ce que la longueur des plis sature. La valeur critique de la contrainte hydrodynamique dépend du module élastique surfacique de cisaillement de la microcapsule mais correspond toujours à une valeur fixée de la déformation.

Abstract. Deformable particles such as cells, vesicles and microcapsules, have rich spatio-temporal dynamics of their shapes under flow. A striking example is the case of red blood cells (RBCs) in shear flow: tumbling, swinging oscillations of the shapes. Except that, other nonlinear phenomena, for example buckling, are observed on the stiffened RBCs or artificial capsules [1, 2]. Inspired by RBCs, we investigate emergence of such elastic instability on biomimetic microcapsules in extensional flow.

Well-defined wrinkles are first observed on the membrane of stretched capsules when the hydrodynamic stress is above a threshold. Above the threshold, this supercritical instability expands along the microcapsule up to saturate. The critical hydrodynamic stress depends on the surfacic shear elastic modulus of the microcapsule membrane, but always corresponds to the same value of the deformation.

1 Introduction

Les dynamiques en écoulement de particules déformables, telles que les globules rouges, les vésicules ou encore les capsules, jouent un rôle important sur la migration transverse de ces objets, mais aussi sur les propriétés rhéologiques de telles suspensions et leur structuration sous écoulement. De nombreuses avancées aussi bien expérimentales, théoriques et numériques ont permis de comprendre les liens entre les propriétés interfaciales de ces particules et leurs dynamiques [3] avec de nombreuses conséquences sur notre compréhénsion des écoulements sanguins sains et pathologiques [4], mais aussi sur le dévelopement de systèmes de séparations microfluidiques de cellules biologiques [5].

La forme de ces particules déformables et leurs dynamiques en écoulement résultent du couplage non linéaire entre l'hydrodynamique et la réponse mécanique de leur membrane [6–8], c'est-à-dire leur rhéologie interfaciale. Cependant, dans le cas d'objets dont la membrane présente une résistance au cisaillement, la membrane peut former des structures de faible amplitude sous écoulement qui résultent d'une instabilité de flambage. Ce phénomène a été observé dans les années 70 aussi bien sur des globules rouges [2] que sur des capsules [1] donnant lieu soit à un flambemement de la membrane avec une longueur d'onde de l'ordre de la taille de l'objet soit à un grand nombre de rides de faible longueur d'onde devant la taille de la particule. L'origine physique de ces instabilités est aujourd'hui comprise et a été identifiée par Secomb en 1986 [9] : l'écoulement génère une élongation globale de la particule dans une direction, ce qui induit une compression de la membrane dans la direction azimuthale. Cette compression, comme dans le cas des

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

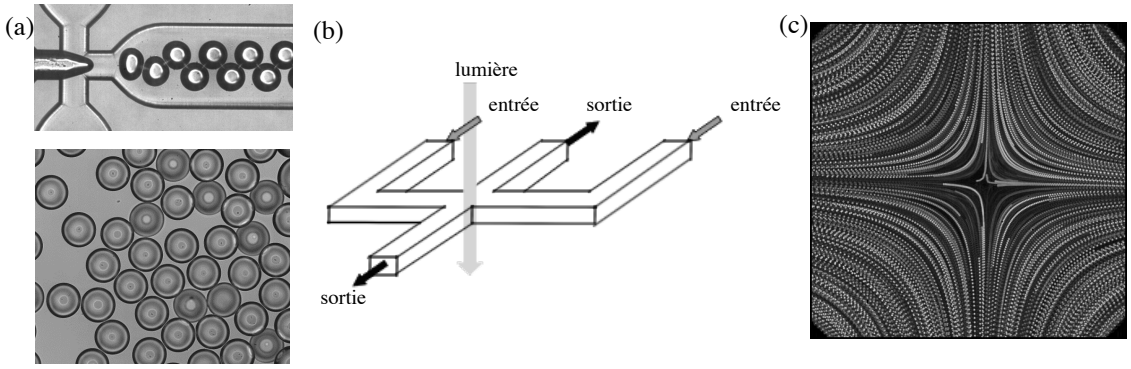


Figure 1. (a) Les microcapsules sont produites dans une puce microfluidique afin de contrôler aussi bien la taille que les propriétés mécaniques des objets. (b) Schéma de la chambre élongationnelle utilisée pour étudier les capsules dans le régime linéaire et au-delà. (c) Visualisation par suivi de particules des lignes de courant caractéristiques d'un écoulement extensionnel dans la chambre d'écoulement.

films élastiques sous traction [10], est responsable de l'émergence de ces rides. Cependant, les paramètres physiques contrôlant cette instabilité sont encore à décrire pour ce type de particules composées d'une coque ultra-fine (quelques dizaines de nanomètres) et élastique [11, 12].

Dans cet article, nous étudions l'apparition des plis avec des microcapsules aux propriétés mécaniques contrôlées. Tout d'abord, nous présentons la méthode de synthèse des microcapsules, ainsi que la chambre d'écoulement utilisée pour étudier l'émergence des rides. Ensuite, nous décrivons le rôle de l'élasticité de la capsule et de la contrainte hydrodynamique sur l'émergence de l'instabilité et la structure formée.

2 Matériel et méthodes

2.1 Synthèse des microcapsules

La membrane des microcapsules est formée par complexation électrostatique de chitosan (CAS 9012-76-4, Sigma-Aldrich) avec de l'acide phosphatidique [13]. Le chitosan, biopolymère cationique est dissous dans de l'eau déminéralisée à pH 3,0 (0,05 à 3,0 g/L). L'acide phosphatidique (AMP 4455, Palsgaard) est un surfactant chargé négativement qui est dissous dans de une huile végétale. Des gouttes de solution de chitosan sont formées dans la phase huile dans une puce microfluidique permettant de générer des capsules de rayon uniforme et variant de 30 à 400 µm (Fig. 1 (a)). La membrane est ensuite formée au repos durant 2 à 30 min. Les capsules sont ensuite lavées avec du cyclohexane (CAS 110-82-7, pureté 99,5 %, Sigma Aldrich) et suspendues dans de l'huile silicone AP1000 (IMCD, viscosité de 1,18 Pa · s à 22 °C). L'épaisseur de la membrane est mesurée par AFM et varie de 20 nm à 1 µm selon les concentrations en chitosan et acide phosphatidique utilisées et du temps laissé pour la formation de la membrane, voir les détails dans Xie *et al.* [14].

2.2 Chambre d'écoulement élongationnel

Les microcapsules sont ensuite étudiées dans une chambre d'écoulement élongationnel. La chambre est formée d'une croix de section 1×1 mm^2 avec deux entrées et deux sorties (Fig. 1 (b)). Le fluide contenant les capsules est amené par un pousse seringue. L'écoulement au centre de la croix est un écoulement élongationnel plan (Fig. 1 (c)) dont le taux d'élongation est constant dans une région proche du centre de la croix [15, 16]. Les capsules sont visualisées avec un microscope à fond clair Olympus IX-70 équipé d'un grossissement 20× et d'une caméra rapide Photron Fastcam SA3 (jusqu'à 5 000 images par seconde). Le module élastique surfacique des microcapsules, noté G_s, est déterminé en appliquant des faibles contraintes hydrodynamiques à la capsule et en mesurant sa déformation $D = (L - S)/(L + S)$,

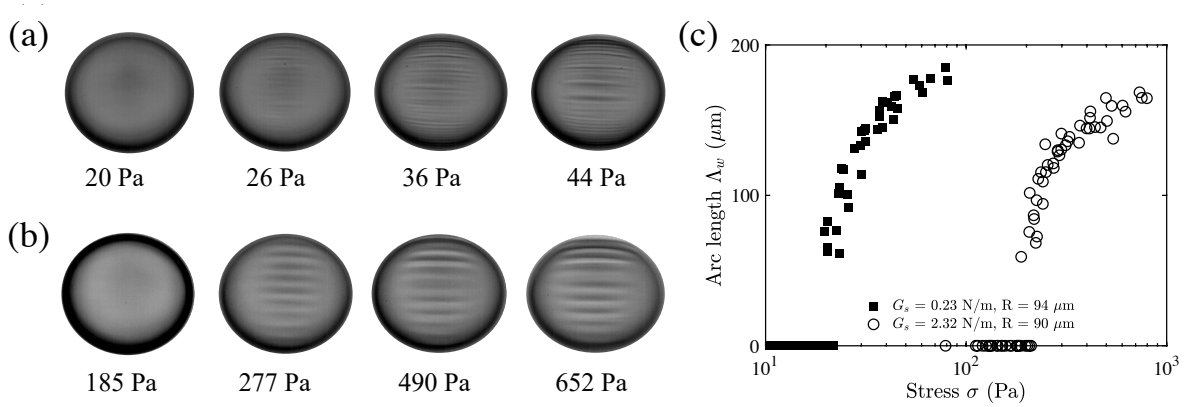


Figure 2. Émergence et évolution des rides avec la contrainte hydrodynamique pour une capsule avec une membrane de (a) 60 ± 8 nm et (b) 650 ± 80 nm. (c) La longueur des plis Λ_w est mesurée pour différentes contraintes hydrodynamiques σ, produit du taux d'élongation et de la viscosité du fluide porteur.

où S est le petit axe de la capsule déformée et L son grand axe (Fig. 2). Nous pouvons définir un nombre capillaire Ca basé sur le module élastique surfacique de la membrane, $\mathrm{Ca} = \sigma R/G_s$, avec σ la contrainte hydrodynamique, le produit du taux d'élongation et de la viscosité. Dans le régime des petites déformations, D est relié au nombre capillaire par $D = (25/6)\,\mathrm{Ca}$ [17].

3 Résultats et discussions

Lorsque les microcapsules sont soumises à un écoulement extensionnel plan, elles se déforment en ellipsoïde. La membrane reste lisse pour de faibles contraintes hydrodynamiques et les rides apparaissent lorsque cette contrainte dépasse un seuil. À ce moment, les rides apparaissent au centre de la capsule et s'étendent de plus en plus vers les pôles de l'ellipsoïde lorsque la contrainte augmente (Fig. 2 (a) et 2 (b)). La longueur d'onde des plis ne varie pas avec la contrainte, mais augmente avec l'épaisseur de la membrane comme dans le cas des films plans soumis à de la traction [10].

Cette instabilité est due au fait qu'il existe une zone de compression dans la région centrale de la capsule, schématisée par la zone en bleu sur la figure 3 (a). En visualisant la déformation de la capsule selon les trois principaux plans de déformation, nous montrons que le périmètre de la capsule augmente dans le plan (x–z) alors qu'il diminue dans le plan orthogonal (y–z) induisant une compression. Cette zone a été mesurée par des études numériques [17] et peut aussi se retrouver simplement en considérant une capsule élastique sphérique dans un écoulement élongationnel. Il faut noter que cette zone de compression existe dès que la capsule est déformée, alors que les rides apparaissent pour une déformation plus élevée.

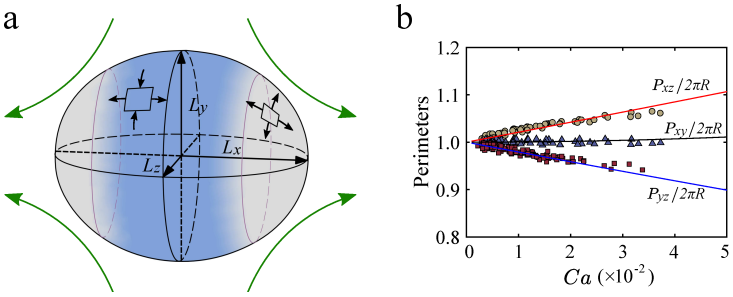


Figure 3. (a) Schéma d'une capsule dans un écoulement élongationnel. La zone de compression est représentée en bleu. On définit les trois principales dimensions de l'elliposoïde par L_x, L_y, L_z. (b) Évolution des périmètres de la capsule dans les trois principaux plans de déformation.

Nous étudions ensuite la nature de cette instabilité de ride. L'évolution de la longueur des rides selon la contrainte hydrodynamique est présentée sur la figure 2 (c). Nous observons donc que la longueur des rides augmente fortement dès que la contrainte hydrodynamique seuil est dépassée. Cette dernière dépend de l'élasticité surfacique de cisaillement G_s de la capsule, ainsi que de son rayon R, mais est indépendante de la déformation de la capsule D. Quel que soit l'épaisseur de la membrane de la capsule (entre 30 et 1 000 µm), la déformation critique est de l'ordre de $D = 0{,}03$. Les plis restent toujours limités spatialement. Cette caractéristique est réminiscente d'études précédentes sur des films ultra-minces posés sur une goutte [18]. Lorsque l'écoulement est arrêté, la capsule retrouve son état initial sans plis.

4 Conclusion

La membrane de particules déformables telles que les capsules peut être le siège d'instabilités élastiques sous écoulement. Elle se caractérise par l'apparition de rides. Cette instabilité est gouvernée par le taux de déformation de l'objet, quelle que soit l'épaisseur de la membrane, tout du moins dans la gamme de paramètres étudiés dans cet article. Cependant, la structuration de la membrane et en particulier la longueur d'onde des rides est une signature de l'épaisseur de la membrane.

Références

1. V. Seshadri, R. M. Hochmuth, P. A. Croce & S. P. Sutera, *Microvasc. Res.*, **2**, 434–442 (1970).
2. T. M. Fischer, C. W. M. Haest, M. Stàhr, D. Kamp & B. Deuticke, *Biochim. Biophys. Acta*, **510**, 270–282 (1978).
3. D. Barthes-Biesel, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **48**, 25–52 (2016).
4. A. Kumar & M. D. Graham, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 108102 (2012).
5. H. Wei Hou, H. Y. Gan, A. A. S. Bhagat, L. D. Li, C. T. Lim & J. Han, *Biomicrofluidics*, **6**, 024115 (2012).
6. T. Omori, Y. Imai, T. Yamaguchi & T. Ishikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 138102 (2012).
7. J. Dupire, M. Socol & A. Viallat, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **109**, 20808–20813 (2012).
8. C. de Loubens, J. Deschamps, F. Edwards-Levy & M. Leonetti, *J. Fluid Mech.*, **789**, 750–767 (2016).
9. T. W. Secomb, R. Skalak, N. Özkaya & J. F. Gross, *J. Fluid Mech.*, **163**, 405–423 (1986).
10. E. Cerda & L. Mahadevan, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 074302 (2003).
11. A. Walter, H. Rehage & H. Leonhard, *Colloids Surf. A*, **183**, 123–132 (2001).
12. R. Finken, U. & Seifert, *J. Phys. Condens. Matter*, **18**, L185 (2006).
13. D. Z. Gunes, M. Pouzot, M. Rouvet, S. Ulrich & R. Mezzenga, *Soft Matter*, **7**, 9206–9215 (2011).
14. K. Xie, C. de Loubens, F. Dubreuil, D. Z. Gunes, M. Jaeger & M. Léonetti, *Soft Matter*, **13**, 6208–6217 (2017).
15. C. de Loubens, J. Deschamps, M. Georgelin, A. Charrier, F. Edwards-Levy & M. Leonetti, *Soft Matter*, **10**, 4561–4568 (2014).
16. C. de Loubens, J. Deschamps, G. Boedec & M. Leonetti, *J. Fluid. Mech.*, **767**, R3 (2015).
17. E. Lac, D. Barthes-Biesel, N. A. Pelekasis & J. Tsamopoulos, *J. Fluid. Mech.*, **516**, 303–334 (2004).
18. H. King, R. D. Schroll, B. Davidovitch & N. Menon, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **109**, 9716–9720 (2012).

Effet de la gravité sur le mûrissement dans un mélange binaire

Raphaël Zanella & Hervé Henry

Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, UMR-CNRS 7643, École Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau cedex
herve.henry@polytechnique.edu

Résumé. Nous proposons une étude numérique de l'influence de la gravité sur le mûrissement hydrodynamique dans un mélange binaire. Le modèle se compose de l'équation de Cahn–Hilliard et des équations de Navier–Stokes sous l'approximation de Boussinesq. Il est résolu par une méthode pseudo-spectrale dans un milieu *infini* (périodique). Le code est d'abord validé sur le régime linéaire de l'instabilité de Rayleigh–Taylor avant d'être appliqué au mûrissement hydrodynamique pour comprendre les effets de la gravité.

Abstract. We propose a numerical study of the influence of the gravity on the hydrodynamic coarsening in a binary mixture. The model is compsoed of the Cahn–Hilliard equation and of the Navier–Stokes equations under the Boussinesq approximation. It is solved by a pseudo-spectral method in an *infinite* (periodic) medium. The code is first validated on the linear regime of the Rayleigh–Taylor instability and then applied to the hydrodynamic coarsening in order to understand the effects of gravity.

1 Introduction

Lorsqu'un mélange binaire est refroidi en dessous d'une température critique, il devient instable thermodynamiquement vis-à-vis de la séparation de phase. Deux phases apparaissent spontanément (l'une riche en une espèce, l'autre en l'autre espèce) et forment une microstructure présentant une taille caractéristique qui est le résultat d'un compromis entre effets énergétiques (minimisation de l'énergie de surface) et cinétiques (efficacité de la diffusion à courte distance) [1,2]. Par la suite, en suivant un principe de minimisation de l'énergie (ici de surface), la microstructure évolue lentement par diffusion puis par écoulement [3], ce qui entraîne une augmentation de la taille caractéristique. En utilisant des simulations numériques, nous cherchons à comprendre les effets de la gravité (les phases ont des densités différentes) sur le mûrissement hydrodynamique.

Notre approche consiste à résoudre par méthode pseudo-spectrale un modèle fortement non linéaire couplant l'équation de Cahn–Hilliard [2], pour le calcul de la composition du mélange, et les équations de Navier–Stokes sous l'approximation de Boussinesq, pour le calcul de la vitesse. Considérer l'équation de Cahn–Hilliard implique de travailler avec un modèle à interface diffuse, qui évite d'avoir à suivre l'interface entre les phases au cours de la simulation. L'équation de Cahn–Hilliard a déjà fait ses preuves dans les écoulements de fluides non miscibles, voir [4, 5] par exemple. Les termes de forçage dans l'équation de la quantité de mouvement sont la divergence d'un tenseur analogue au tenseur de capillarité de Korteweg [6] et la force de flottaison liée à la variation de la densité avec la composition.

Dans une première étape, le code est validé sur le régime linéaire de l'instabilité de Rayleigh–Taylor. Les taux de croissance théoriques de perturbations de différentes longueurs d'ondes sont estimés numériquement avec une erreur très faible. Dans une deuxième étape, le code est appliqué au cas du mûrissement hydrodynamique dans un système *infini* (périodique), avec une distribution initiale aléatoire des phases. L'évolution des champs de composition et de vitesse est étudiée en faisant varier les différences de densité des deux phases. Différents régimes et taux de mûrissement sont observés selon les valeurs de ces paramètres.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

2 Modèle

Nous considérons un domaine fluide infini et biphasique contenant deux espèces 1 et 2. On définit la composition comme la fraction molaire de l'espèce 2 :

$$c = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \tag{1}$$

où n_i est la densité molaire de l'espèce i. La fraction molaire de l'espèce 1 est alors donnée par $1 - c$.

La diffusion est gouvernée par la minimisation de la fonctionnelle d'énergie libre

$$F[c] = \int \left(f_0(c) + \frac{\epsilon}{2} (\boldsymbol{\nabla} c)^2 \right) dV, \tag{2}$$

où f_0 est l'énergie libre par unité de volume d'un système homogène et ϵ est une constante positive. Nous utilisons l'expression

$$f_0(c) = Ac^2(1-c)^2, \tag{3}$$

où A est une constante positive, qui admet une solution analytique en régime stationnaire avec $c = 0$ ou $c = 1$ dans chacune des phases. La tension de surface et l'épaisseur de l'interface en régime stationnaire associées à (2) et (3) sont données par

$$\gamma = \sqrt{\frac{\epsilon A}{18}} \quad \text{et} \quad w_{\text{int}} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{A}}, \tag{4}$$

respectivement [7]. Notons que l'on peut inverser ces égalités et obtenir les relations

$$A = \frac{6\gamma}{w_{\text{int}}} \quad \text{et} \quad \epsilon = 3\, w_{\text{int}} \gamma. \tag{5}$$

Nous considérons l'équation de diffusion de Cahn–Hilliard et les équations de Navier–Stokes sous l'approximation de Boussinesq (considérant que les phases ont des densités proches) :

$$\partial_t c + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} c = M \Delta \mu, \tag{6}$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_1} \boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[2\nu(c) \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{v} \right] - \frac{1}{\rho_1} \left(c - \frac{1}{2} \right) \boldsymbol{\nabla} \mu + c \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \mathbf{g}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{8}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse, M la mobilité, $\mu = \delta F / \delta c$ le potentiel chimique, p la pression, ν la viscosité cinématique, $\boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{v}$ le tenseur des taux de déformation

$$\boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v})^T \right], \tag{9}$$

ρ_i la densité de la phase i et $\mathbf{g}$ la gravité. La viscosité cinématique est donnée par

$$\nu(c) = \frac{c\eta_1 + (1-c)\eta_2}{\rho_1}, \tag{10}$$

où η_i est la viscosité dynamique de la phase i.

Notons que l'on a par définition

$$\mu = f_0'(c) - \epsilon \Delta c \tag{11}$$

et que la force volumique de capillarité peut se réécrire avec

$$-\left(c - \frac{1}{2} \right) \boldsymbol{\nabla} \mu = \boldsymbol{\nabla} \cdot [\mathbf{R}], \tag{12}$$

où $[\mathbf{R}]$ est le tenseur des contraintes réversibles défini par

$$[\mathbf{R}] = \left(f_0(c) - \left(c - \frac{1}{2} \right) f_0'(c) + \epsilon \left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} c)^2 + \left(c - \frac{1}{2} \right) \Delta c \right) \right] [\boldsymbol{\delta}] - \epsilon\, \boldsymbol{\nabla} c \otimes \boldsymbol{\nabla} c, \tag{13}$$

avec $[\boldsymbol{\delta}]$ le tenseur unité.

3 Méthode numérique

Nous supposons que la solution est périodique de périodes $N_x\Delta x = L_x$ dans la direction x, $N_y\Delta x = L_y$ dans la direction y et $N_z\Delta x = L_z$ dans la direction z, avec $(N_x, N_y, N_z) \in (2\mathbb{N})^3$ et $\Delta x > 0$. Soit $\tau > 0$ le pas de temps. L'algorithme consiste à calculer les approximations suivantes pour chaque temps $t_n = n\tau$, $n \in [0, N]$, $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
c(x,y,z,t_n) &\simeq \sum_{I=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{J=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \sum_{K=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}} c^n_{IJK}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\left(\frac{Ix}{L_x}+\frac{Jy}{L_y}+\frac{Kz}{L_z}\right)},\\
v_x(x,y,z,t_n) &\simeq \sum_{I=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{J=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \sum_{K=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}} v^n_{x,IJK}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\left(\frac{Ix}{L_x}+\frac{Jy}{L_y}+\frac{Kz}{L_z}\right)},\\
v_y(x,y,z,t_n) &\simeq \sum_{I=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{J=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \sum_{K=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}} v^n_{y,IJK}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\left(\frac{Ix}{L_x}+\frac{Jy}{L_y}+\frac{Kz}{L_z}\right)},\\
v_z(x,y,z,t_n) &\simeq \sum_{I=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{J=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}} \sum_{K=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}} v^n_{z,IJK}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\left(\frac{Ix}{L_x}+\frac{Jy}{L_y}+\frac{Kz}{L_z}\right)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Après l'initialisation, un schéma d'Euler implicite est utilisé pour mettre à jour les coefficients de Fourier de t^n à t^{n+1}, $\forall n \in [0, N-1]$. Les termes non linéaires sont calculés dans l'espace physique, des transformées de Fourier directes et inverses permettant de passer de l'espace physique à l'espace de Fourier et inversement. Notons que le schéma de la vitesse utilise une méthode de projection non incrémentale.

4 Résultats

4.1 Instabilité de Rayleigh–Taylor

La validation du code est basée sur la relation de dispersion de l'instabilité de Rayleigh–Taylor en deux dimensions (plan (xOz), $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, $g > 0$, fluide 2 au-dessus). Nous vérifions que l'amplitude d'une perturbation initiale de l'interface

$$z = \zeta_0 \cos(kx), \qquad k < k_c = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\gamma}}, \tag{15}$$

évolue en $\mathrm{e}^{\alpha t}$, α étant le taux de croissance défini par

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_1} gk - \frac{\gamma}{2\rho_1} k^3}. \tag{16}$$

Ici, la formule usuelle est adaptée à l'utilisation de l'approximation de Boussinesq.

Dans ce test, nous considérons uniquement les nombres d'onde

$$k_0 = \frac{2I_0\pi}{L}, \qquad 1 \le I_0 \le E\left(\sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\gamma}}\frac{L}{2\pi}\right), \tag{17}$$

où L est la longueur de la portion d'interface considérée. Nous simulons une longueur d'onde de la perturbation : $L_x = \lambda_0 = 2\pi/k_0 = L/I_0$ et $L_z = 2L_x$. Nous estimons le taux de croissance en suivant

l'évolution, en fonction de $n \geq 0$, de l'énergie cinétique par unité de volume portée par chaque mode I_0,

$$E_{k,0}(t^n) \simeq \frac{1}{2}\rho_1 \sum_{K=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}} \left(|v^n_{x,I_0 0K}|^2 + |v^n_{z,I_0 0K}|^2\right), \tag{18}$$

qui doit suivre une courbe en $\mathrm{e}^{2\alpha t}$ en régime linéaire, voir Fig. 1 (a)).

Nous considérons les paramètres réalistes $L = 1$ m, $\rho_1 = 1\,000$ kg $\cdot$ m^{-3}, $\rho_2 = 1\,010$ kg $\cdot$ m^{-3} et $\gamma = 0{,}05$ J $\cdot$ m^{-2}. Le raisonnement menant à (16) étant basé sur une hypothèse de fluides parfaits, nous utilisons des viscosités nulles. La gravité est prise à $g = 9{,}806\,65$ m $\cdot$ s^{-2}. Le paramètre ζ_0 et les temps de simulations sont choisis de façon à rester dans le régime des ondes de faibles amplitude (i.e., en régime linéaire). L'épaisseur d'interface w_{int} est prise suffisamment petite pour approcher une interface nette : $w_{\mathrm{int}} = \lambda_0/128$. La mobilité M est prise suffisamment petite pour que la diffusion soit négligeable devant la convection à grande échelle. Les paramètres N_x et N_z sont pris tels que $\Delta x = L_x/N_x = L_z/N_z = w_{\mathrm{int}}/4$ (calcul 2D : $N_y = 1$) et le pas de temps est pris suffisamment petit pour obtenir la convergence du code.

La figure 1 (b) compare les taux de croissance théoriques et numériques. Le taux de croissance est normalisé par le taux de croissance maximal $\alpha_{\max}$, qui est obtenu pour

$$k_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} k_c. \tag{19}$$

Nous obtenons un très bon accord, qui pourrait encore être amélioré en raffinant en espace et en temps, ou en réduisant w_{int} et M. Par ailleurs, nous allons mesurer la sensibilité du taux de croissance numérique aux effets restabilisants de la diffusion en jouant sur la mobilité. En effet, dans l'optique de l'étude de la stabilité linéaire, considérer une mobilité aussi faible que possible était souhaitable pour s'affranchir des effets restabilisants. Néanmoins, dans le cas d'écoulements établis, plus rapides, il faut que la mobilité soit suffisante pour rétablir le profil d'interface *d'équilibre*. Aussi cette étude permettra de déterminer un compromis entre ces deux contraintes opposées.

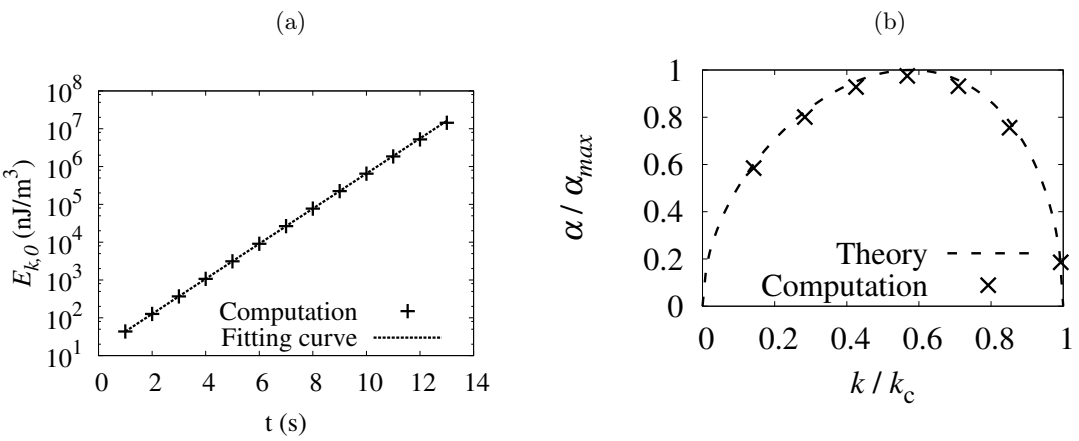


Figure 1. (a) Le taux de croissance est la moitié de la pente de la droite d'ajustement (ici $I_0 = 1$). (b) Taux de croissance théoriques versus numériques.

Le code permet également de simuler le régime non linéaire de l'instabilité, jusqu'à l'apparition de structures en « champignon » comme en Fig. 2 par exemple.

(a) $t = 13$ s (b) $t = 15$ s (c) $t = 17$ s (d) $t = 19$ s

Figure 2. Instabilité de Rayleigh–Taylor en régime non linéaire. Le fluide lourd (clair) pénètre le fluide léger (foncé) et réciproquement.

4.2 Mûrissement hydrodynamique

Nous considérons ici l'évolution d'une microstructure initialement isotrope. La tension de surface tend à la faire évoluer de façon auto-similaire vers une structure présentant une plus grande taille caractéristique, ce qui minimise l'énergie d'interface [3, 7, 8]. Parallèlement, la force de gravité tend à déplacer la phase la plus lourde vers le bas et la plus légère vers le haut. Les résultats des simulations préliminaires effectuées au laboratoire sont présentés Fig. 3. On y voit l'interface entre les deux phases après une simulation longue (la taille caractéristique de la microstructure a été multipliée par environ 3) pour des valeurs croissantes de la différence de densité entre les deux phases. On y voit que la microstructure finale est, à l'œil nu, isotrope dans le cas de faibles différences de densité et anisotrope pour de plus grandes valeurs. On a donc une transition entre des structures tridimensionnelles et des structures qui sont quasi bidimensionnelles (faiblement variables suivant l'axe de $\mathbf{g}$). Ces structures correspondent à des nappes de la phase la plus lourde (resp. légère) s'écoulant suivant (resp. dans le sens opposé à) $\mathbf{g}$. Sur les images on observe une évolution progressive du cas isotrope vers le cas anisotrope.

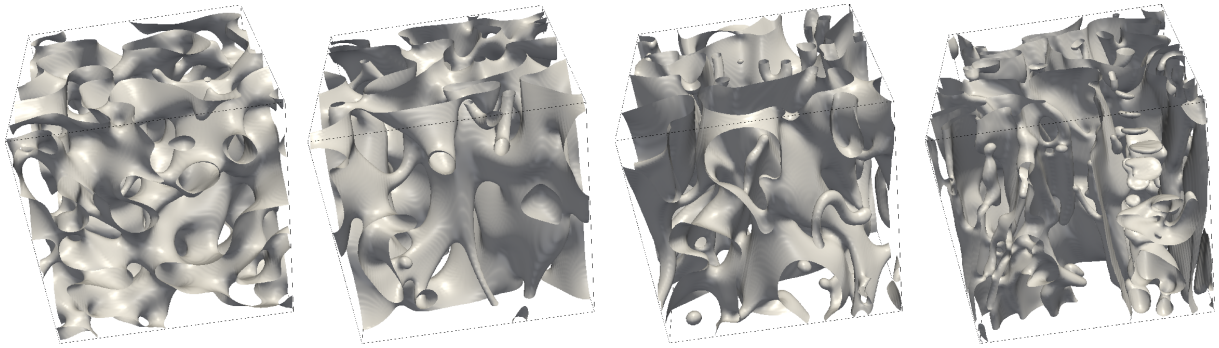


Figure 3. Microstructures finales obtenues lors de simulations pour lesquelles différentes valeurs de différence de densité $\rho_2 - \rho_1$ ont été utilisées (0,2, 0,5, 1 et 2 % par rapport à ρ_1 en allant de gauche à droite). La fraction volumique des deux phases est 0,5. Au cours de la simulation la taille caractéristique de la structure a été multipliée par environ 3 : dans un volume qui comptait 27 ponts capillaires, il en reste 1. C'est donc un réarrangement du réseau très important.

Dans la suite de nos travaux nous allons chercher à mieux caractériser cette transition. En particulier, nous allons chercher à comprendre quels paramètres de l'écoulement la gouvernent. Dans le cas du mûrissement visqueux il est probable que cette transition soit le résultat d'une compétition entre les effets de la tension de surface qui aboutissent à des variations de pressions en γ/ℓ alors que les effets de gravité aboutissent à des surpressions en $(\rho_2 - \rho_1)g\ell$. Aussi nous chercherons à comprendre dans quelle mesure le paramètre $(\rho_2 - \rho_1)g\ell^2/\gamma$ permet de bien caractériser cette transition. Par exemple on cherchera à déterminer si une telle transition existe ou si les différences entre les microstructures observées ne sont pas juste dues à une *vitesse de transition* vers un état bidimensionnel proportionnelle à $(\rho_2 - \rho_1)g$. Pour ce faire nous allons développer des outils de caractérisation de la microstructure qui permettent d'en mesurer quantitativement l'anisotropie.

5 Conclusion

Nous avons étudié les effets d'une différence de densité entre les deux phases dans un fluide biphasique modélisé par un modèle de type Cahn–Hilliard couplé à Navier–Stokes. Nos simulations montrent que le modèle reproduit quantitativement les résultats obtenus dans le cas de l'instabilité de Rayleigh–Taylor (interface abrupte). Nous avons aussi pu mettre en évidence que la différence de densité entre les deux phases peut induire un changement important de leur organisation spatiale. Dans la suite de nos travaux nous allons étudier plus précisément la nature de cette *transition morphologique*.

Références

1. J. W. Cahn & J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy, *J. Chem. Phys.*, **28**, 258–267 (1958).
2. J. W. Cahn, Phase separation by spinodal decomposition in isotropic systems, *J. Chem. Phys.*, **42**, 93–99 (1965).
3. E. D. Siggia, Late stages of spinodal decomposition in binary mixtures, *Phys. Rev. A*, **20**, 595–605 (1965).
4. A. Celani, A. Mazzino, P. Muratore-Ginanneschi & L. Vozella, Phase-field model for the Rayleigh–Taylor instability of immiscible fluids, *J. Fluid Mech.*, **622**, 115–134 (2009).
5. J. Kim, Phase-field models for multi-component fluid flows, *Commun. Comput. Phys.*, **12**, 3, 613–660 (2009).
6. D. M. Anderson, G. B. McFadden & A. A. Wheeler, Diffuse-interface methods in fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 139–165 (1998).
7. V. M. Kendon, M. E. Cates, I. Pagonabarraga, J.-C. Desplat & P. Bladon, Inertial effects in three-dimensional spinodal decomposition of a symmetric binary fluid mixture: A lattice Boltzmann study, *J. Fluid Mech.*, **440**, 147–203 (2001).
8. H. henry & G. Tegze, Self-similarity and coarsening rate of a convecting bicontinuous phase separating mixture: Effect of the viscosity contrast, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 074306 (2018).

Résumés des exposés

Convection in a "centrifuge"

Thierry Alboussière

Laboratoire de Géologie, École normale supérieure de Lyon, France
thierry.alboussiere@ens-lyon.fr

Pressure plays a secondary role in usual laboratory convection experiments and industrial convection processes. This was used by Oberbeck and Boussinesq to simplify the governing equations: they assumed that, in many circumstances, density is nearly constant and that it depends on temperature only when the buoyancy force is considered. This is not the case in geophysical convective flows in the interior of stars and planets. In the Earth's interior for instance pressure is such that the density of iron in the inner core is nearly twice that of iron on the surface. As a consequence of pressure effects, it appears clearly that vigorous convection leads to homogeneous entropy distribution in the interior of convective regions. Hence a nearly hydrostatic pressure gradient is at the origin of a so-called adiabatic temperature gradient, both leading to a uniform entropy. Another consequence is that viscous dissipation is no longer negligible and may be of the same order of magnitude as the heat flux out of the star or planet. We have built an experiment, in the rotor of a centrifuge, where the apparent gravity reaches 8,000 times the usual gravity. We have used xenon gas to maximize compressibility effects, submitted to heating from below and cooling from the top. An adiabatic gradient is indeed observed, at the expected level. However, when apparent gravity is increased, Coriolis forces increase as well. It makes it difficult to distinguish between compressibility and Coriolis effects, but we think it is worth pursuing those kind of studies, since numerical models have very few landmarks they can compare to, in the compressible regime.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamics and fragmentation of small flexible fibers in turbulence

Sofía Allende[1], Christophe Henry[2] & Jérémie Bec[1]

[1] MINES ParisTech, PSL Research University, CNRS, CEMEF
[2] Université Côte d'Azur, INRIA, Team TOSCA, Sophia-Antipolis, France
sofia.allende@mines-paristech.fr

The dynamics of small flexible, inextensible fibers in a turbulent flow is found to follow most of the time that of a stiff rod. Then, they are aligned with the solution to Jeffery's equation [1]. Still, this simple dynamics becomes unstable when the fiber is strongly compressed by the flow [2]. As shown in [3], such events are very rare and intermittent because of the long-term Lagrangian correlations of turbulent velocity gradients. We investigate the consequence of such a dynamics on fiber fragmentation. Two mechanisms are considered: tensile failure, when the fiber breaks because of a too strong local tension and flexural failure, when the fiber breaks because of a too strong curvature. By characterizing the statistics of the extrema of tension and of curvature, we provide estimates for the fragmentation rate. One expects large values of the tension to be attained when the fiber is in a fully straight configuration and experiences a strong stretching from the flow. The simplest fragmentation process is then due to tensile failure, because only depend on the fluctuation of the turbulent flow. Conversely, flexural failure can only occur when the fiber buckles. Fragmentation processes are hence determined by the most excited buckling mode and thus have an intricate dependence on the fiber flexibility.

References

1. A. Tornberg & M. Shelley, Simulating the dynamics and interactions of flexible fibers in Stokes flows, *J. Comput. Phys.*, **196**, 8–4 (2004).
2. L. Becker & M. Shelley, Instability of elastic filaments in shear flow yields first-normal-stress differences, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 198301 (2001).
3. S. Allende, C. Henry & J. Bec, Stretching and buckling of small elastic fibers in turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **121**, 154501 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Ailes battantes à rigidité anisotrope inspirées de l'insecte

Romeo Antier[1], Sophie Ramananarivo[2], Benjamin Thiria[1] & Ramiro Godoy-Diana[1]

[1] PMMH, CNRS, ESPCI Paris–PSL Research University, Sorbonne Université, Université Paris-Diderot, France
[2] LadHyx, CNRS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
romeo.antier@espci.fr

Nous étudions des modèles d'ailes battantes déformables où la rigidité srtucturelle est inhomogène, à l'image de ce qui se produit chez les insectes où la disposition et la taille des veines déterminent l'anisotropie de l'élasticité des ailes. Les ailes de la plupart des insectes ont une disposition veineuse similaire à celle des neuroptères, où une zone renforcée en veines se distingue le long de la diagonale de chaque aile.

En utilisant un modèle expérimental, nous observons avec une caméra à haute vitesse la réponse en déformation d'ailes battantes ayant une anisotropie contrôlée. Les rigidités de flexion et de torsion peuvent être calibrées indépendamment l'une de l'autre pour obtenir des réponses différentes selon le mode étudié et ainsi optimiser le couplage des modes de torsion et de flexion en terme de génération de forces aérodynamiques. Le couplage en quadrature de modes a été identifié comme la configuration optimale pour obtenir de larges amplitudes de déformation.

Par ailleurs, nous utilisons une mesure directe de force sur un assemblage composé d'une paire d'ailes reliée à un capteur de force, pour observer les régimes transitoires et de croisières. Ces modèles d'ailes sont fabriqués à partir de feuilles en plastique homogènes sur lesquelles certaines parties ont été rigidifiées selon des directions privilégiées (typiquement celles de torsion et de flexion). En particulier, nous avons produit des variations de rigidification locales en créant des plis dans le matériau des ailes

Références

1. G. Cousin & O. Béthoux, The steps towards an inconspicuous vein fusion documented in Stenosmylinae forewings (Neuroptera : Osmylidae), *Org. Divers. Evol.*, **16**, 225–532 (2016).
2. D. Faux, O. Thomas, E. Cattan & S. Grondel, Two modes resonant combined motion for insect wings kinematics reproduction and lift generation, *Europhys. Lett.*, **121**, 66001 (2018).
3. D. D. Chin & D. Lentink, Flapping wing aerodynamics: From insects to vertebrates. *J. Exp. Biol.*, **219**, 920–932 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Quel est l'impact des vagues sur la turbulence atmosphérique ?

Alex Ayet[1,2], Bertrand Chapron[1], Jean-Luc Redelsperger[1], Guillaume Lapeyre[2] & Louis Marié[1]

[1] Ifremer, CNRS, IRD, Univ. Brest/ Laboratoire d'Océanographie Physique et Spatiale (LOPS), IUEM, Brest, France
[2] LMD/IPSL, CNRS, École Normale Supérieure, PSL Research University, Paris, France
alex.ayet@ifremer.fr

L'étude du lien de causalité entre vent et vagues est un sujet qui a fait l'objet de nombreuses études, et pourtant les mécanismes couplant les deux systèmes font toujours l'objet de controverses. En présence d'un vent moyen constant au dessus de l'eau, il s'établit au premier ordre un équilibre entre la turbulence proche de la surface et le champ de vagues générées localement. Le flux turbulent de quantité de mouvement qui en résulte est essentiel pour les modèles atmosphériques, servant de condition limite inférieure au domaine d'intégration. Étant donné que la résolution numérique nécessaire pour résoudre les échelles associées aux vagues est hors de portée des modèles atmosphériques actuels, une bonne compréhension de la physique couplant turbulence et vagues est essentielle pour aboutir à des paramétrisations réalistes des flux turbulents.

Les observations in-situ permettent de caractériser quantitativement cet équilibre (i.e. les flux turbulents pour un vent moyen donné). Celui-ci a été reproduit au moyen de modèles conceptuels, par exemple Kudryavtsev *et al.* [1], dans lequel le couplage entre vent et vagues est essentiellement induit par les vagues de vent courtes. Malgré tout, ce type de modèles ne permettent pas d'expliquer la variabilité des flux turbulents pour un vent moyen donné observée dans les mesures. Cela est attribué à la présence de vagues [2], et révèle une méconnaissance des processus physiques à l'interface air-mer.

De façon plus fondamentale, la question posée est de savoir de quelle façon la présence d'une paroi non-rigide et mouvante modifie la structure de la turbulence. C'est ce que nous nous proposons de faire en généralisant une approche proposée par Katul *et al.* [3] pour la turbulence stratifiée proche d'une paroi rigide. Celle-ci nous amène à considérer la déformation des tourbillons les plus énergétiques par les vagues, et de façon plus générale, à réfléchir à l'interaction entre le spectre de la turbulence et le spectre des vagues sous un angle nouveau. Testé dans le modèle de Kudryavtsev *et al.*, le nouveau processus traduit l'impact des vagues de vent longues sur la turbulence atmosphérique, et introduit la variabilité suffisante dans l'équilibre vent-vagues pour expliquer les observations. Ce nouveau paradigme ouvre de nouvelles perspectives autant d'un point de vue théorique que pour l'exploration des données expérimentales.

Références

1. V. Kudryavtsev, B. Chapron & V. Makin, Impact of wind waves on the air-sea fluxes : A coupled model, *J. Geophys. Res. Oceans.*, **46**, 1022–1037 (2014).
2. J. B. Edson, V. Jampana, R. A. Weller, S. P. Bigorre, A. J. Plueddemann, C. W. Fairall, S. D. Miller, L. Mahrt, D. Vickers & H. Hersbach, On the exchange of momentum over the open ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, **43**, 1589–1610 (2013).
3. G. G. Katul, A. G. Konings & A. Porporato, Mean velocity profile in a sheared and thermally stratified atmospheric boundary layer, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 268–502 (2011).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamics of an artificial aquatic blade subjected to von Kármán vortices

Yohann Bachelier[1], Delphine Doppler[1], J. John Soundar Jerome[1] & Nicolas Rivière[2]

[1] Université Claude Bernard Lyon 1
[2] INSA de Lyon
yohann.bachelier@univ-lyon1.fr

Aquatic canopies play a vital role on river bed stabilization, flood control, sedimentation, transport and mixing of nutrients or pollutants whereby, they influence the water quality for the river ecosystem. Often plants in aquatic canopies are long and flexible. Hence, in many cases, the mass transfer and mixing processes are strongly controlled by the fluid–structure interactions between aquatic plants and vortices in the mixing layer that arises from the slow moving flow through the canopy and the fast moving river flow on the canopy top [1,2]. In this context, it is important to better understand dynamics of individual plants in the presence of vortical structures. And so, we propose a model experiment to investigate the motion of a single quasi-2D artificial blade exposed to a transverse water flow and a regular array of transverse vortices. Our experiment consists of a thin flexible polyethylene sheet of length, (l_b = 5–20 cm) that is fixed rigidly to the bottom of a 2 meter long narrow water channel. The blade free-end is then systematically excited by a von Karman vortex street. We control the frequency (f_b) and vortex size via the mean water speed (U) and the diameter of the cylindrical obstacle (d = 1–4 cm). Thereby, we observe two distinct dynamical regimes. (1) Rigid-body oscillations: the blade moves forth and back about a mean deflection and (2) Traveling wave regime: transverse waves originate at the blade anchorage near the channel bottom and move along the blade length towards its free-end. When the blade thickness (e_b) and length (l_b) are kept constant, the measured oscillation amplitude increases linearly with the obstacle-size based Reynolds number ($\mathrm{Re}_d = \rho U d/\mu$) over a relatively wide range (Re_d = 200–3500). The slope of this linear Reynolds number dependence is seen to vary only with the blade rigidity, such as the thickness ratio (l_b/e_b) and the Young's modulus (E). We explain these observations via a scaling law that exploits the necessary balance between the work done by the restoring bending forces and the kinetic energy imparted by the incoming vortices on a blade. When the mean blade deformation is sufficiently large, our measurements show that traveling waves appear on the blades. The celerity of the observed traveling waves seems to be independent of the water velocity (U). In particular, we demonstrate that the transition to traveling wave regime is independent of the obstacle diameter (d) but it depends strongly on a critical Cauchy number ($\mathrm{Ca} = 12\rho U^2 l_b^3/E e_b^3$) which relates the form drag experienced by the blade and the blade rigidity.

References

1. M. Ghisalberti & H. Nepf, Mixing layers and coherent structures in vegetated aquatic flows, *J. Geophys. Res.*, **107**, 3011 (2002).
2. H. Nepf, Flow and transport in regions with aquatic vegetation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **44**, 123–142 (2012).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Effet de viscosité élongationnelle de l'écoulement Streaming généré par un cylindre vibrant

S. Amir Bahrani[1,3], Maxime Costalonga[1], Laurent Royon[2] & Philippe Brunet[1]

[1] Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, UMR 7057 CNRS, Université Paris Diderot, Paris, France
[2] Laboratoire Interdisciplinaire des Énergies de Demain, UMR 8236 CNRS, Université Paris Diderot, Paris
[3] Institut Mines Télécom Lille-Douai, Energy Engineering Department, F-59500 Douai, France
seyed-amir.bahrani@univ-paris-diderot.fr

Les écoulements secondaires (streaming) générés par oscillations d'objets immergés dans un fluide au repos [1] sont similaires au streaming acoustique induit par les ondes sonores dans un fluide. Un tel phénomène est appelé *Rayleigh streaming*, d'après l'étude pionnière de Rayleigh [2], et apparait dans les écoulements incompressibles. Le streaming résulte de la création de vorticité dans une couche limite visqueuse d'épaisseur $\delta = (\frac{2\nu}{\omega})^{1/2}$ (ν : viscosité cinématique, ω : fréquence de l'oscillation) autour du corps oscillant. C'est cet écoulement visqueux incompressible du premier ordre (dont la valeur moyenne est nulle sur une période), qui produit l'écoulement secondaire, le terme inertielle du second ordre en vitesse induisant alors des forces en volume effectives de valeur moyenne non nulle. Lighthill [3] a modélisé ces forces de volume comme résultant du stress de Reynolds au niveau de la couche limite, induites par la quantité de mouvement acoustique non nulle moyenne sur une période. En conséquence, des vortex stationnaires sont générés à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite par continuité des contraintes visqueuses, le signe de la vorticité étant opposé entre couche interne et externe, ainsi que pour les vortex voisins. L'écoulement externe (outer streaming) a une échelle typique égale à celle de l'objet vibré, mais peut aussi être ressenti à des distances bien plus importantes lorsque l'amplitude de vibration est suffisamment élevée. Un tel écoulement a des applications potentielles dans l'homogénéisation et le mélange des fluides, dans l'intensification du transfert de chaleur ainsi dans le tri de particules ou dans le pompage de fluide en microfluidique.

Nous avons étudié expérimentalement l'écoulement généré par un cylindre oscillant harmoniquement ($\omega = 5$ à 100 Hz), perpendiculairement à son axe, dans un fluide de hauteur très supérieure au diamètre du cylindre d et à celle de la couche limite δ. Tandis que la plupart des études ont jusqu'à présent été effectuées avec des fluides Newtoniens [4], notre étude cherche à comprendre l'influence de la viscoélasticité du fluide. En effet, les différentes applications sus-citées nécessitent souvent l'utilisation de fluides complexes. Les expériences ont été menées pour plusieurs fluides viscoélastique (PEO) où on change à la fois la longueur des polymères et leur concentration. Au delà d'une certaine concentration en polymères, nous avons un fort épaississement de la couche limite stationnaire interne qui devient du même ordre que la taille de l'objet. Nous attribuons cet épaississement à la viscosité élongationnelle, que nous avons mesuré avec la méthode du jet liquide étiré. Nous observons aussi des comportements inédits à plus haute fréquence ($\omega > 50$ Hz) : progressivement, l'écoulement à 2 paires de vortex est remplacé par un écoulement plus complexe où 4 paires de vortex sont observées.

Références

1. N. Riley, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **33**, 43–65 (2001).
2. Lord Rayleigh, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **175**, 1–21 (1884).
3. J. Lighthill, *J. Sound Vib.*, **61**, 391–418 (1978).
4. S. A. Bahrani, N. Périnet, M. Costalonga, L. Royon & P. Brunet, *preprint* (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Bifurcations de l'équation de Vlasov

Julien Barré[1], David Métivier[2] & Yoshiyuki Y. Yamaguchi[3]

[1] Institut Denis Poisson, Université d'Orléans, Université de Tours, CNRS, et Institut Universitaire de France
[2] Physics of Condensed Matter and Complex Systems and Center for Non Linear Studies, Los Alamos National Laboratory, Etats-Unis
[3] Graduate School of Informatics, Université de Kyoto, Japon
julien.barre@univ-orleans.fr

L'équation de Vlasov décrit la dynamique de systèmes de particules hamiltoniens, lorsque les forces sont à longue portée et le nombre de particules très grand ; elle apparaît donc dans des situations physiques très diverses : systèmes auto-gravitants, plasmas, mais aussi fluides 2D, lasers à électrons libres, optique non linéaire... Notre objectif à long terme est de comprendre et classifier les bifurcations de l'équation de Vlasov, au voisinage d'un seuil d'instabilité.

L'équation de Vlasov vue comme un système dynamique possède plusieurs caractéristiques qui rendent cette étude délicate : c'est un système hamiltonien de dimension infinie, à la structure non canonique, très dégénérée ; malgré ce caractére hamiltonien, une forme de dissipation est fournie par le mélange de phase, ou l'amortissement Landau ; enfin, les particules peuvent entrer en résonance avec les modes du système.

Lorsque ces résonances sont fortes, ces particularités donnent lieu à une bifurcation originale mais relativement bien connue, décrite par le « Modèle à une onde »(*Single Wave Model*). Elle se caractérise par des effets non linéaires forts induisant une saturation rapide de l'instabilité (« scaling de piégeage »), et une forme normale hamiltonienne de dimension infinie, qui contrôle la dynamique du mode instable, c'est-à-dire l'onde, et celle des particules proches de la résonance.

Nous mettons en évidence ici un nouveau type de bifurcation, lorsque les résonances sont absentes ou faibles. Dans ce cas, il apparaît génériquement au point de bifurcation un bloc de Jordan d'ordre 3, et l'absence de résonance permet d'obtenir une dynamique réduite de dimension 3, sous forme hamiltonienne, non canonique et dégénérée : certaines caractéristiques de l'équation de Vlasov originelle subsistent donc. Dans le cas test du modèle HMF (Heisenberg Mean-Field), les comparaisons de cette dynamique réduite avec des simulations numériques directes de l'équation de Vlasov sont excellentes.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Turbulence lagrangienne, irréversibilité et flots généralisés

Jérémie Bec[1] & Simon Thalabard[2]

[1] MINES ParisTech, PSL Research University, CNRS, CEMEF, Sophia-Antipolis, France
[2] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 22460-320 Rio de Janeiro, Brazil
jeremie.bec@mines-paristech.fr

De nombreuses applications, allant de l'optimisation des moteurs à la circulation atmosphérique, nécessitent de disposer de modèles de turbulence précis et efficaces. Les écoulements développent un état turbulent, instable et chaotique, lorsque la quantité d'énergie cinétique injectée dépasse la dissipation visqueuse. Cet excès, mesuré par le nombre de Reynolds, résulte en un processus de cascade où une large gamme d'échelles fortement liées sont excitées. La perte d'énergie est alors assurée par des structures violentes à petite échelle, conduisant à la persistance d'une dissipation visqueuse finie dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Cette *anomalie dissipative* repose sur la nature fortement singulière et irréversible des écoulements turbulents et constitue la principale source de difficultés pour la modélisation.

Une idée sous-jacente à la plupart des modèles est de décrire les grandes échelles de l'écoulement par les équations d'Euler inviscides. La notion de solution doit alors être affaiblie pour obtenir des champs de vitesse turbulents. Comme conjecturé par Onsager [1], et récemment démontré [2], une dissipation finie nécessite que la vitesse ait un exposant de Hölder inférieur à $1/3$. La construction de telles solutions faibles montre toutefois certaines limites. D'une part, elles ne sont pas uniques [3], suggérant que la contrainte d'une énergie décroissante ne soit pas forcément suffisante pour assurer leur pertinence physique. D'autre part, la régularisation de ces solutions singulières peut dans certains cas conduire à des solutions probabilistes [4], propriété connue sous le nom de *stochasticité spontanée*. Tout cela laisse à penser que la construction de solutions turbulentes des équations d'Euler exige une notion encore plus faible de solutions, comme par exemple les solutions-mesures de DiPerna et Majda [5] où la vitesse n'est pas définie de manière unique, mais plutôt prescrite par une distribution de probabilité locale, à savoir une mesure de Young.

Une conséquence importante d'une vitesse probabiliste est que les trajectoires d'éléments fluides deviennent elles-mêmes probabilistes et que le concept de flot lagrangien s'effondre. La formulation des solutions des équations d'Euler doit alors faire appel au principe lagrangien généralisé de moindre action formulé par Brenier [6], dont nous discutons ici de la pertinence dans un contexte turbulent.

Références

1. L. Onsager, Statistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento*, **6**, 279–287 (1949).
2. P. Isett, A proof of Onsager's conjecture, *Ann. Math.*, **188**, 871–963 (2018).
3. S. Daneri & L. Székelyhidi, Non-uniqueness and h-principle for Hölder-continuous weak solutions of the Euler equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **224**, 471–514 (2017).
4. L. Biferale, G. Boffetta, A. Mailybaev & A. Scagliarini, Rayleigh–Taylor turbulence with singular non-uniform initial conditions, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 092601 (2018).
5. R. DiPerna & A. J. Majda, Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations, *Commun. Math. Phys.*, **108**, 667–689 (1987).
6. Y. Brenier, The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids, *J. Am. Math. Soc.*, **2**, 225–255 (1989).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Cycles limites et quasipériodiques dans une cavité cisaillée

Yacine Bengana & Laurette S. Tuckerman

PMMH, UMR-CNRS 7636, Sorbonne Université, 7 quai Saint Bernard 75005 Paris
b.y.bengana@gmail.com

Nous étudions numériquement l'écoulement bidimensionnel dans une cavité carrée ouverte cisaillé [1]. Deux bifurcations de Hopf successives mènent à deux cycles limites ayant des fréquences différentes, ainsi qu'un nombre différent de structures qui se propagent au-dessus et dans la cavité. Une branche d'états quasipériodiques produites par des bifurcations secondaires transfère la stabilité d'un cycle limite vers l'autre [2]. Nous étudions les comportements spatiaux de ces états par la transformée de Hilbert et leurs comportements temporels par moyen de transformées de Fourier. Nous vérifions que les deux cycles limites ont la propriété RZIF (Real Zero Imaginary Frequency) [3]. Les fréquences des modes successives sont séparées par un intervalle constant, comme l'avait montré Rossiter [4] pour des écoulements compressibles.

Références

1. D. Sipp & A. Lebedev, Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows, *J. Fluid Mech.*, **593**, 333–358 (2007).
2. Y. Bengana, J.-C. Loiseau, J.-C. Robinet & L. S. Tuckerman, Bifurcation analysis and frequency prediction in shear-driven cavity flow, soumis à *J. Fluid Mech.*
3. S. E. Turton, L. S. Tuckerman & D. Barkley, Prediction of frequencies in thermosolutal convection from mean ows, *Phys. Rev. E*, **91**, 043009 (2015).
4. J. E. Rossiter, Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds, *Tech. Rep. Ministry of Aviation ; Royal Aircraft Establishment*, RAE Farnborough (1964).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Forced three-wave interactions of capillary-gravity waves

Michael Berhanu[1], Annette Cazaubiel[1], Florence Haudin & Éric Falcon[1]

MSC, Univ. Paris Diderot, CNRS (UMR 7057), 75013 Paris, France
michael.berhanu@univ-paris-diderot.fr

Waves propagating on a water surface can exchange energy due to the quadratic non-linearity induced by the response of a free-surface. In weakly non-linear regime, Three-Wave resonant interactions [1] for pure capillary waves and gravity-capillary waves close to the crossover frequency are usually used to explain the dynamics of a set of dispersive, random interacting waves using the Wave Turbulence theory [2]. The interaction of two mother waves 1 and 2 produce a daughter wave 3, when the resonant conditions are satisfied. Previously, we demonstrated experimentally [3], the relevance of Three-Wave resonant mechanism for capillary-gravity wave. We have shown that the saturation of the daughter wave is due to the viscous dissipation. Here, we show using the same experimental setup, that in configurations not allowing simultaneously the resonant conditions and the linear dispersion relation, we observe a daughter wave verifying the resonant conditions but not the dispersion relation. By modeling the response of the free surface at the lowest nonlinear order, we explain this observation as a forced interaction. The significant viscous dissipation increases indeed the band-pass of the free-surface. The observation of free-surface excitations not following the linear dispersion relation become then possible. This forced Three-Wave interaction mechanism could have important consequences for Wave Turbulence in experimental or natural systems with non-negligible dissipation.

References

1. A. D. Craik, *Wave Interactions and Fluid Flows*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
2. A. C. Newell, *Wave Turbulence*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43**, 59–78 (2011).
3. F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike, T. Jamin, É. Falcon & M. Berhanu, Experimental study of three-wave interactions among capillary-gravity surface waves, *Phys. Rev. E*, **93**, 043110 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Instabilités et formation de patterns dans les électrons relativistes : observations directes et modélisation

C. Szwaj[1], C. Evain[1], E. Burkard[1,4], E. Roussel[1], M. Le Parquier[1], Serge Bielawski[1], F. Ribeiro[2], M. Labat[2], N. Hubert[2], J.-B. Brubach[2], P. Roy[2], E. Blomley[3], M. Brosi[3], E. Brüdermann[3], S. Funkner[3], N. Hiller[3,5], M. J. Nasse[3], G. Niehues[3], M. Schedler[3], P. Schönfeldt[3,6], J. L. Steinmann[3], S. Walther[3,7] & A.-S. Müller[3]

[1] Univ. Lille, CNRS, UMR 8523 - PhLAM - Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Centre d'Etudes Recherches et Applications (CERLA), F-59000 Lille, France
[2] Synchrotron SOLEIL, Saint Aubin, BP 34, 91192 Gif-sur-Yvette, France
[3] Karlsruhe Institute of Technology (KIT), D-76131 Karlsruhe, Germany
[4] Present address Fraunhofer Institute of Optronics, System Technologies and Image Exploitation (IOSB), D-76275 Ettlingen, Germany
[5] Present address Paul Scherrer Institute (PSI), 5232 Villigen, Switzerland.
[6] Present address DLR (Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt) Institute of Networked Energy Systems, Carl-von-Ossietzky-Str. 15, D-26129 Oldenburg, Germany
[7] Present address DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron), Notkestr. 85, D-22607 Hamburg, Germany
`serge.bielawski@univ-lille.fr`

Les électrons relativistes sont des sources particulièrement efficaces pour la génération de lumière à des longueurs d'ondes variées, en particulier dans les domaines terahertz, ultra-violet et X. C'est pourquoi des sources de rayonnement synchrotron comme SOLEIL en France, et des nouvelles générations de lasers à électrons libres se développent actuellement dans de nombreux pays. L'efficacité de ces sources est cependant forterment liée à la compréhension des phénomènes d'instabilités dynamiques affectant les électrons relativistes (dus en particulier à l'interaction entre électrons). Nous présentons ici un ensemble de résultats expérimentaux, numériques et de problèmes ouverts concernant les centres de rayonnement synchrotron. Ces résultats sont obtenus dans le cadre de collaborations entre le PhLAM, le centre de rayonnement synchrotron SOLEIL (France), et le KArlsruhe Research Accelerator KARA (Allemagne). En particulier nous présenterons les méthodes de mesures ultra-rapides qui ont permis récemment d'engistrer en temps réel a formation spontanée de *patterns* dans les électrons relativistes circulant dans ces accélérateurs [1, 2]. Nous présenterons également les études numériques de la dynamique des paquets d'électrons, et qui sont basées sur l'équation de Vlasov–Fokker–Planck.

Références

1. C. Evain, E. Roussel, M. Le Parquier, C. Szwaj, M.-A. Tordeux, J.-B. Brubach, L. Manceron, P. Roy & S. Bielawski, Direct observation of spatiotemporal dynamics of short electron bunches in storage rings, *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 054801 (2017).
2. S. Bielawski, E. Blomley, M. Brosi, E. Bründermann, E. Burkard, C. Evain, S. Funkner, N. Hiller, M. J. Nasse, G. Niehues, E. Roussel, M. Schedler, P. Schönfeldt, J. L. Steinmann, C. Szwaj, S. Walther & A.-S. Müller, From self-organization in relativistic electron bunches to coherent synchrotron light: Observation using a photonic time-stretch digitizer, `https://arxiv.org/abs/1902.06157` (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Spatio-temporal dynamics of semiconductor microlasers with chaotic ray dynamics

Stephan Bittner[1,2], Stefano Guazzotti[3], Yongquan Zeng[4], Kyungduk Kim[1], Qi Jie Wang[4], Ortwin Hess[3] & Hui Cao[1]

[1] Department of Applied Physics, Yale University, New Haven, CT, USA
[2] Chaire Photonique, LMOPS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, Metz, France
[3] Department of Physics, Imperial College, London, United Kingdom
[4] School of Electrical and Electronical Engineering, Nanyang Technological University, Singapore
stefan.bittner@centralesupelec.fr

Broad-area semiconductor lasers (BALs) are highly nonlinear systems. Effects such as spatial hole burning, carrier-induced index changes and carrier diffusion with different spatial and temporal scales result in a very complex dynamics. BALs can thus exhibit spatio-temporal instabilities like filamentation and pulsations on a sub-nanosecond time scale [1]. These instabilities are detrimental for applications in material processing, imaging and laser surgery. Methods such as injection or delayed feedback have been used to stabilize the dynamics with, however, only limited success.

Complexity can, however, also arise from the cavity geometry. While conventional semiconductor lasers use Fabry-Perot (FP) cavities, microlasers with asymmetric cavities that can exhibit chaotic ray dynamics have been studied in the context of wave-dynamical chaos [2]. A wealth of different geometries like stadia, deformed circles or polygons have been investigated to understand how the classical ray dynamics manifests in the passive cavity mode properties, e.g., the spectra or near- and far-field distributions [2]. However, very little is known about the dynamics of asymmetric microcavity lasers. We investigate semiconductor microlasers which have the form of a circle from which a section is cut off $R/2$ away from the center, so-called D-cavities, as an example with completely chaotic ray dynamics.

We experimentally studied the spatio-temporal dynamics of conventional FP broad-area lasers as well as of D-cavity lasers [3]. The edge-emitting GaAs quantum well microlasers are pumped electrically with microsecond pulses. The FP-cavities exhibit severe spatio-temporal instabilities as expected. In contrast, the emission of the D-shaped microlasers is inherently stable without filaments or fast pulsations. It is surprising to see that adding more complexity to the system by using a geometry with chaotic ray dynamics leads to a stabilization of the dynamics. While both FP-cavity and D-cavity lasers feature the same nonlinearities due to the active medium, their consequences for the spatio-temporal dynamics strongly depend on the structure of the field distributions of the lasing modes.

In a FP cavity, the optical field propagates along the cavity axis and features a transverse wavelength of several micron. Intensity variations on this length scale create a lensing effect and result in a self-focusing instability due to carrier-induced index changes. The field distributions of the D-cavity, in contrast, consist of a superposition of plane waves in all possible directions and feature the same wavelength-scale structure size in all directions due to the chaotic ray dynamics. Hence, no lensing effect can appear and the formation of filaments is suppressed due to complex wave interference.

Furthermore, stabilization of chaotic dynamics was observed in simulations of one-dimensional semiconductor lasers with random variations of the refractive index profile [3] compared to the case of a homogeneous cavity. This demonstrates the general usefulness of complex wave interference induced by the cavity environment for suppressing spatio-temporal instabilities, and we believe that this principle will also find applications in other fields such as nonlinear optics or turbulent fluid dynamics.

References

1. I. Fischer *et al.*, *Europhys. Lett.*, **35**, 579 (1996).
2. H. Cao & J. Wiersig, *Rev. Mod. Phys.*, **87**, 61 (2015).
3. S. Bittner *et al.*, *Science*, **361**, 1225 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Observation de la modulation non-linéaire contra-propagative des bords d'un train d'onde de gravité à la surface d'un fluide

Félicien Bonnefoy[1], Pierre Suret[2], Alexey Tikan[2], Francois Copie[2], Gaurav Prabhudesai[3], Guillaume Michel[3], Annette Cazaubiel[4], Éric Falcon[4], Gennady El[5] & Stéphane Randoux[2]

[1] Ecole Centrale de Nantes, LHEEA, UMR 6598 CNRS, F-44 321 Nantes, France
[2] Univ. Lille, CNRS, UMR 8523 - PhLAM - Physique des Lasers Atomes et Molécules, F-59000 Lille, France
[3] LPS, ENS, CNRS, Univ. Pierre et Marie Curie, Univ. Paris Diderot, F-75 005 Paris, France
[4] Univ. Paris Diderot, Univ. de Paris, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France
[5] Department of Mathematics, Physics and Electrical Engineering, Northumbria University, Newcastle upon Tyne, NE1 8ST, United Kingdom
felicien.bonnefoy@ec-nantes.fr

Nous étudions expérimentalement la propagation d'un train d'onde sinusoïdal, d'extension finie dans le temps, au sein d'un bassin de houle de grande longueur (150 m) devant la longueur d'onde (1 m). Un batteur engendre, à une extrémité du bassin, un train de vagues monochromatique d'amplitude finie, constante, et de grande durée devant la période. Nous observons alors que les deux bords de ce train d'onde se modulent au cours de la propagation.

Le cadre de cette expérience est celui de l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante en lien avec le problème du *dambreak* [1, 2]. A grande distance du batteur, le champ de vague est décrit théoriquement par un régime faiblement dispersif où les effets non linéaires dominent et sont responsables de la modulation non linéaire se propageant depuis les bords du paquet. La solution théorique correspond dans ce cas en une solution périodique lentement modulée en temps.

En comparant les mesures obtenues dans le bassin et la solution théorique, notre expérience révèle que le train d'onde non linéaire n'est pas déstabilisé par l'instabilité de Benjamin-Feir mais développe une modulation non linéaire se propageant à vitesse finie sous la forme de deux trains d'onde contra-propagatifs (dits de *dambreak* dispersifs) en bon accord avec le scénario théorique attendu [3]. Ces observations corroborent celles qui ont été faites en optique [4, 5].

Références

1. G. A. El, E. G. Khamis & A. Tovbis, Dam break problem for the focusing nonlinear Schrödinger equation and the generation of rogue waves, *Nonlinearity*, **29**, 2798 (2016).
2. R. Jenkins & K. D. McLaughlin, Semiclassical limit of focusing NLS for a family of square barrier initial data, *Comm. Pure Appl. Math.*, **67**, 246 (2014).
3. F. Bonnefoy, P. Suret, A. Tikan, F. Copie, G. Prabhudesai, G. Michel, A. Cazaubiel, E. Falcon, G. El & S. Randoux, From Benjamin-Feir instability to focusing dam breaks in water waves, *in preparation*, (2019).
4. F. Audo, B. Kibler, J. Fatome & C. Finot, Experimental observation of the emergence of Peregrine-like events in focusing dam break flows, *Optics Lett.*, **43**, 12 (2018).
5. A. E. Kraych, P. Suret, G. El & S. Randoux, Nonlinear evolution of the locally induced Modulational Instability in fiber optics, *Phys. Rev. Lett.*, **122**, (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment

Vincent Bouillaut, Simon Lepot, Sébastien Aumaître & Basile Gallet

Service de Physique de l'Etat Condensé, CNRS UMR 3680, Université Paris-Saclay, CEA Saclay, France
basile.gallet@cea.fr

I will report on the transition between two regimes of heat transport in a radiatively driven convection experiment, where a fluid gets heated up within a tunable heating length ℓ in the vicinity of the bottom of the tank. The first regime is similar to the one observed in standard Rayleigh-Bénard experiments, the Nusselt number Nu being related to the Rayleigh number Ra through the power-law $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Ra}^{1/3}$ [1]. The second regime corresponds to the "ultimate" or mixing-length scaling regime of thermal convection [2, 3], where Nu varies as the square-root of Ra. Evidence for these two scaling regimes have been reported in Lepot *et al.* [4], and I will present a detailed study of the transition from one regime to the other. I will introduce a simple model describing radiatively driven convection in the mixing-length regime, which leads to the scaling relation $\mathrm{Nu} \sim \frac{\ell}{H}\mathrm{Pr}^{1/2}\mathrm{Ra}^{1/2}$, where H is the height of the cell and Pr the Prandtl number. From this model, one can deduce the values of Ra and Nu at which the system transitions from one regime to the other. These predictions are confirmed by the experimental data gathered at various Ra and ℓ [5].

Références

1. W. V. R. Malkus, The heat transport and spectrum of thermal turbulence, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **225**, 196–212 (1954).
2. E. A. Spiegel, A generalization of the mixing-length theory of thermal convection, *ApJ* **138**, 216 (1963).
3. R. H. Kraichnan, Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number, *Phys. Fluids* **5**, 1374 (1962).
4. S. Lepot, S. Aumaître & B. Gallet, Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **115**, 36 (2018).
5. V. Bouillaut, S. Lepot, S. Aumaître & B. Gallet, Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment, *J. Fluid Mech.*, **861**, R5 (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

3D inertial wave attractors

Samuel Boury[1], Thierry Dauxois[1], Evgeny Ermanyuk[2], Sylvain Joubaud[1], Philippe Odier[1] & Ilias Sibgatullin[3]

[1] Univ Lyon, ENS de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France
[2] Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, Russia
[3] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
samuel.boury@ens-lyon.fr

For a few decades now, numerous studies have been devoted to the intriguing properties of inertia-gravity wave reflection [1]. Since the angle of propagation of these waves is set by the ratio of their frequency to the buoyancy or rotation frequency, the reflection on a wall does not follow the usual Snell-Descartes law. In particular, in a confined trapezoidal geometry, when one of the walls is neither horizontal nor vertical, the wave beam experiences a focusing effect and eventually, whatever the initial source of the waves, ends on a definite trajectory called *attractor*.

Experimental and numerical studies have shown evidence of this structure for internal gravity waves [2] and for internal inertial waves [3] in 2D geometry . Due to the local energy focusing, non-linear triadic cascades occur in the branches of the attractor, leading to energy transfer between scales, which has been observed experimentally [4, 5].

More recently, geometric and 3D aspects of internal wave attractors have been explored using numerical simulations with inertial waves. Direct numerical simulations pictured an axisymmetric inertial wave attractor, in a trapezoidal cylindrical domain, in which focusing and defocusing effects are caused by the reflection on the inclined wall, as well as by the radially expanding geometry itself. Wave instability occurs while forcing the attractor, leading to a destabilised flow and a symmetry breakdown. Using an experimental apparatus that has shown relevance for axisymmetric wave generation [6], we produce an inertial wave attractor in a cylindrical domain and we explore its properties.

References

1. T. Dauxois & W. R. Young, Near-critical reflection of internal waves, *J. Fluid Mech.*, **390**, 271–295 (1999).
2. C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, H. Scolan, E. V. Ermanyuk & T. Dauxois, Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations, *J. Fluid Mech.*, **793**, 109–131 (2016).
3. A. M. M. Manders & L. R. M. Maas, Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary, *J. Fluid Mech.*, **493**, 59–88 (2003).
4. C. Brouzet, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud, I. N. Sibgatullin & T. Dauxois, Energy cascade in internal wave attractors, *Europhys. Lett.*, **113**, 44001 (2016).
5. M. Brunet, T. Dauxois & P.-P. Cortet, Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor, *Phys. Rev. Fluids*, in press (2019).
6. S. Boury, T. Peacock & P. Odier, Excitation and resonant enhancement of axisymmetric internal wave modes, *Phys. Rev. Fluids*, in press (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Instabilités oscillatoires en milieu poreux d'un fluide en équilibre diphasique

Alexis Bres, François Pétrélis & Stéphan Fauve

Laboratoire de Physique de l'École normale supérieure
alexis.bres@ens.fr

L'étude de l'instabilité d'un milieu poreux saturé d'une couche de fluide chauffée par le bas et refroidie par le haut remonte au milieu de siècle précédent [1]. Peu après, l'intérêt s'est porté sur ce système lorsque la température du bas dépasse le point d'ébullition. Pour des milieux de faible perméabilité, il se développe alors en-dessous de la zone liquide une zone mixte diphasique où le fluide est présent sous formes gazeuse et liquide. La dynamique convective de ce système a été étudiée en détail par la suite. L'analyse numérique de [2] montre l'existence de quatre états : fluide présent sous une ou deux phases, avec un régime de transfert thermique conductif ou convectif. L'état du système est alors caractérisé par deux nombres sans dimension, le nombre de Rayleigh et le flux thermique adimensionné.

Une instabilité secondaire de ce système, observée initialement par [3], est ici étudiée expérimentalement. Lors de la présence d'une zone liquide surplombant une zone diphasique, le front séparant ces deux zones peut se mettre spontanément à osciller. Ce mouvement est accompagné d'une oscillation du champ de température en zone liquide, ainsi que d'une expulsion/admission périodique de fluide (la paroi supérieure étant perméable). Les motivations d'étude d'un tel phénomène sont multiples. En premier lieu, il s'agit d'un système modèle en géophysique, permettant la description de certains complexes hydrothermaux [4] (lac en zone volcanique). Mais il s'agit également d'un problème d'une grande richesse physique, mêlant thermodynamique, mécanique des fluides et dynamique non linéaire. Le couplage entre cette instabilité secondaire et l'amélioration du transfert thermique présente alors un intérêt majeur pour le physicien.

Deux dispositifs complémentaires sont utilisés dans cette étude : une cellule d'expérimentation en polymère opaque isolée sous vide où les mesures sont réalisées à l'aide de thermistances espacées le long du milieu poreux ; et une cellule d'expérimentation en verre permettant la visualisation à l'aide d'une caméra thermique du champ de température pariétal. Dans les deux cas, le niveau de liquide au niveau de la paroi supérieure est suivi à l'aide d'un capteur capacitif.

Sur le plan théorique comme expérimental, on s'intéresse à la dynamique linéaire et non linéaire de cette instabilité : quel régime de paramètres amène à son déclenchement ? Quelles lois d'échelles suivent son amplitude et sa fréquence d'oscillation ? Ce système présente-t-il de l'hystérésis ? Comment évolue le nombre de Nusselt dans l'espace des paramètres ?

Références

1. E. R. Lapwood, Convection of a fluid in a porous medium, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **44**, 508–521, (1948).
2. P. S. Ramesh & K. E. Torrance, Stability of boiling in porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 1895–1908 (1990).
3. H. H. Bau & K. E. Torrance, Boiling in Low-permeability Porous Materials, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **25**, 45–55 (1982).
4. J. Vandemeulebrouck, D. Stemmelen, T. Hurst & J. Grangeon, Analogue modeling of instabilities in crater lake hydrothermal systems, *J. Geophys. Res.*, **110**, B02212 (2005).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Attracteur d'ondes d'inertie en régime linéaire et non linéaire

Maxime Brunet[1], Thierry Dauxois[2] & Pierre-Philippe Cortet[1]

[1] Laboratoire FAST, Université Paris-Sud
[2] Laboratoire de Physique, ENS de Lyon
maxime.brunet@u-psud.fr

Les fluides soumis à une rotation d'ensemble sont le support d'une classe d'ondes, appelées ondes d'inertie, fruit de l'action de rappel de la force de Coriolis. Dans les domaines fermés, dont les parois ne sont pas systématiquement verticales ou horizontales, peuvent se développer des modes ondulatoires appelés attracteurs d'ondes dans lesquels toute l'énergie à une fréquence donnée tend à se concentrer sur un cycle limite. Ces attracteurs apparaissent en conséquence des lois anormales de réflexion des ondes d'inertie dont la relation de dispersion contraint la direction de propagation.

Nous présentons une étude expérimentale des régimes linéaires et non-linéaires d'un attracteur d'ondes dans une cavité trapézoïdale en rotation. Nous mettons en évidence que l'attracteur est sujet à une instabilité par résonance triadique qui alimente en énergie des ondes sous-harmoniques. Ce mécanisme non-linéaire a pour conséquence de réduire l'amplitude de l'attracteur et de faire croître sa longueur d'onde en accord avec des résultats récents dans des simulations numériques et des expériences en fluide stratifié. En variant le taux de rotation ainsi que l'amplitude et la longueur d'ondes du forçage, nous avons identifié les lois d'échelles suivies par l'amplitude et la longueur d'onde de l'attracteur dans les régimes linéaire et non-linéaire. Nous avons montré que le régime non-linéaire de l'attracteur peut être décrit quantitativement en remplaçant dans le modèle linéaire, aujourd'hui bien établi, la viscosité du fluide par une viscosité turbulente, prenant en compte de manière effective la dissipation que constitue l'instabilité triadique pour l'attracteur. Ce dernier résultat pourrait notamment être utile pour extrapoler la théorie des attracteurs aux situations géo et astrophysiques où de forts effets non-linéaires sont évidemment attendus et où la présence d'attracteurs a déjà été montré numériquement.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Croissance d'arbre soumis à des règles d'allocation de ressource

Olivier Bui & Xavier Leoncini

Aix Marseille Univ, Université de Toulon, CNRS, CPT, Marseille, France
olivi.bui@gmail.com

Les réseaux de transportation apparaissent fréquemment en physique, en ingénierie et en biologie qu'il s'agisse du transport d'eau, d'électricité, d'oxygène ou d'automobiles, etc. Une façon de formaliser ce genre de système consiste à le transformer en un problème de flot dans un réseau entre des sources et des puits dans lequel des règles peuvent être implémentées pour modéliser, par exemple, les frictions ou d'autres propriétés. De là, une approche typique pour étudier ces systèmes est d'essayer de faire de l'optimisation [1, 2]. Toutefois, il est possible que pour comprendre l'évolution dans le temps de certains réseaux les approches d'optimisation ne sont pas suffisants mais qu'il soit nécessaire de prendre en compte la dynamique sous-jacente derrière la croissance du réseau. Cela peut être particulièrement vrai dans le cas où la substance transportée par le réseau est en fait la ressource utilisée qu'il utilise pour se développer et croître (des exemples en économie peuvent venir à l'esprit). Nous essayons de développer une approche qui pourrait tenir compte de cet aspect. On conçoit un modèle inspiré des arbres et du transport d'une de leur ressource vitale (des sucres). On modélise ces arbres comme des graphes sans boucle transportant un flux (flux de sève) dans lesquels nous définissons des lois d'évolution de sorte que le système consomme le flux pour se développer : notre réseau de transport sera un réseau qui peut croître mais la croissance dépend de la consommation de la ressource qu'il transporte. Chaque noeud du réseau peut consommer le flux de ressource qui le traverse ou échanger ce flux de ressource avec ses voisins.

Références

1. M. Durand, Architecture of optimal transport networks, *Phys. Rev. E*, **73**, 016116 (2006).
2. F. Corson, Fluctuations and redundancy in optimal transport networks, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 048703 (2010).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Écoulement gaz–liquide dans un milieu poreux confiné : caractérisation par analyse d'images

Thomas Busser[1], Barbara Pascal[1], Nelly Pustelnik[1], Patrice Abry[1], Marion Serres[1,2,3], Régis Philippe[2] & Valérie Vidal[1]

[1] Univ. Lyon, ENS de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France
[2] Laboratoire de Génie des Procédés Catalytiques, CNRS UMR 5285, CPE Lyon, UCBL, Univ. Lyon 43 bd du 11 novembre 1918, 69616 Villeurbanne, France
[3] IFPEN - IFP Energies nouvelles Rond-point de l'échangeur de Solaize, 69360 Solaize, France
thomas.busser@ens-lyon.fr

Les écoulements multiphasiques dans des milieux poreux sont très largement répandus, allant des processus naturels (liquéfaction des sols, fracture hydraulique, éruptions volcaniques) aux processus industriels (réacteurs catalytiques, extraction assistée de pétrole). Les enjeux de leur compréhension sont donc multiples et pluridisciplinaires : génie des procédés (optimisation de procédés catalytiques, procédés de filtrations) [1], géophysique [2] par exemple. Dans toutes ces applications, les interfaces de contact entre les différentes phases jouent un rôle crucial sur l'écoulement et les réactions chimiques possiblement associées. Leur position et leur dynamique restent cependant très difficiles à quantifier. Dans ce contexte, les expériences de laboratoire peuvent apporter des éléments fondamentaux pour comprendre et prédire l'hydrodynamique de ces écoulements complexes [3].

Cette étude porte sur la caractérisation d'un écoulement gaz-liquide conjoint à travers un milieu de grande porosité (96%), une mousse solide métallique (NiCrFeAl) à cellules ouvertes. L'expérience est réalisée dans une cellule de Hele-Shaw (milieu confiné quasi-bidimensionnel). Nous comparons une analyse d'images classique (outils morphologiques tels que binarisation, érosion, dilatation...) à deux méthodes de segmentation de texture combinant des outils d'optimisation convexe et d'invariance d'échelle. Ces méthodes, très performantes sur des images de taille réduite, ont été développées et optimisées au laboratoire pour être applicables sur des séries d'images à haute résolution [4]. Nous déterminons pour chacune de ces méthodes d'une part, la répartition entre les phases liquide et gaz dans le système et d'autre part, les interfaces et leur mouvement. Une étude détaillée des propriétés statistiques des bulles (périmètre, aire, diamètre équivalent...) permettra de discuter l'efficacité de chaque méthode pour une application à l'étude des écoulements multiphasiques.

Références

1. J.-N. Tourvieille, R. Philippe & C. De Bellefon, Milli-channel with metal foams under an applied gas–liquid periodic flow: External mass transfer performance and pressure drop, *Chem. Eng. J.*, **267**, 332–346 (2015).
2. K. R. Newman *et al.*, Active methane venting observed at giant pockmarks along the U.S. mid-Atlantic shelf break, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **267** 341–352 (2008).
3. G. Varas, G. Ramos, J.-C. Géminard & V. Vidal, Flow and fracture in water-saturated, unconstrained granular beds, *Front. Phys.*, **3**, 44 (2015).
4. B. Pascal, N. Pustelnik, P. Abry, M. Serres & V. Vidal, Joint estimation of local variance and local regularity for texture segmentation, application to multiphase flow characterization, in *25th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Calgary, Canada, pp. 2092–2096 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Generalized dimensions and local indicators of dynamical systems

Théophile Caby[1,2], Davide Faranda[3,4], Giorgio Matnica[5,6], Sandro Vaienti[2] & Pascal Yiou[3]

[1] Aix Marseille Université, Université de Toulon, CNRS, CPT, 13 009 Marseille, France
[2] Center for Nonlinear and Complex Systems, Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia, Università degli Studi dell' Insubria, Como, Italy
[3] Laboratoire des Sciences du Climat et de l'Environnement, UMR 82 12 CEA-CNRS-UVSQ, IPSL and Université Paris-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, Fran ce
[4] London Mathematical Laboratory, 8 Margravine Gardens, London, W6 8RH, UK
[5] INFN sezione di Milano, Italy
[6] Indam, Gruppo Nazionale di Fisica Matematica, Italy
caby.theo@gmail.com

Generalized dimensions of multifractal measures are usually seen as static objects, related to the scaling properties of suitable partition functions, or moments of measures of cells. When these measures are invariant for the flow of a chaotic dynamical system, generalized dimensions take on a dynamical meaning, as they provide the rate function for the large deviations of the 1rst hitting time, which is the (average) time required to connect any two different regions in phase space. We prove this result rigorously under a set of stringent assumptions. As a consequence, the statistics of hitting times provides new algorithms for the computation of the spectrum of generalized dimensions. Numerical examples, presented along with the theory, suggest that the validity of this technique reaches far beyond the range covered by the theorem.

We state our result within the framework of extreme value theory. This approach reveals that hitting times are also linked to dynamical indicators such as stability of the motion and local dimensions of the invariant measure. This suggests that one can use local dynamical indicators from finite time series to gather information on the multifractal spectrum of generalized dimension. We show an application of this technique to experimental data from climate dynamics.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Turbulence d'ondes en hypergravité

Annette Cazaubiel[1], S. Mawet[2], A. Darras[2], G. Grojean[2], J. W. A. van Loon[3,4], S. Dorbolo[2] & É. Falcon[1]

[1] Université de Paris, Université Paris Diderot, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France
[2] GRASP, Département de Physique B5, Université de Liège - B-4000 Liège, Belgium
[3] Gravity Simulation Laboratory, ESTEC, ESA, Noordwijk, The Netherlands
[4] ACTA, University of Amsterdam, The Netherlands
annette.cazaubiel@univ-paris-diderot.fr

La turbulence d'ondes concerne l'étude des propriétés dynamiques et statistiques d'un ensemble d'ondes aléatoires en interaction non linéaire. Ce phénomène, omniprésent dans la Nature, se rencontre dans de nombreuses situations : ondes de surface en océanographie, ondes internes en géophysique, ondes d'Alfvén dans les plasmas astrophysiques, ondes optiques ou ondes de spins dans les solides [1].

Nous étudions ici la turbulence d'ondes gravito-capillaires à la surface d'un fluide en hypergravité. En utilisant la centrifugeuse de grand diamètre de l'Agence Spatiale Européenne (ESA), l'accélération effective de la gravité peut être contrôlée et atteindre jusqu'à 20 fois la gravité terrestre. La fréquence de transition entre les régimes de turbulence d'ondes de gravité et de capillarité est alors augmentée d'une décade. Une telle extension de la zone inertielle nous permet ainsi de mieux étudier en laboratoire le régime de turbulence d'ondes de gravité, encore mal compris. Le spectre de l'amplitude des ondes montre alors, dans chaque régime, une loi de puissance de l'échelle, dont l'exposant est trouvé indépendant du niveau de gravité et de la cambrure des ondes. Comme attendu par la théorie de turbulence faible, nous observons expérimentalement une séparation entre les temps caractéristiques de propagation linéaire, des interactions non linéaires et de dissipation. Cependant, les temps non linéaire et dissipatif sont trouvés être indépendants du niveau de gravité et de l'échelle considérée. Nous montrons alors qu'il est nécessaire de prendre en compte le rôle des modes propres grandes échelles du bassin (permettant un transfert d'énergie cumulatif à travers les échelles en plus du transfert usuel par interactions non linéaires entre ondes) afin de mieux décrire les expériences de laboratoire de turbulence d'ondes de gravité.

Ces expériences sont complémentaires de celles réalisées lors de campagnes de vols paraboliques au sein de l'Airbus Zéro-g [2] ou à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS) [3] pour observer la turbulence d'ondes purement capillaires sans l'influence de la gravité.

Nous remercions l'ESA pour l'accès au LDC (Large-Diameter Centrifuge) à travers l'offre CORA-GBF-2018. Nous remercions M. Mélard pour son support technique sur le dispositif expérimental. Ce travail a été en partie soutenu par l'ANR DYSTURB (project No. ANR-17-CE30-0004) et par le FNRS.

Références

1. S. Nazarenko, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics vol. 825, Springer, Berlin (2010).
2. C. Falcón, E. Falcon, U. Bortolozzo & S. Fauve, Capillary wave turbulence on a spherical fluid surface in zero gravity, *Europhys. Lett.*, **86**, 14002 (2009).
3. M. Berhanu, E. Falcon & S. Fauve, Wave turbulence in microgravity, in *Report to COSPAR (World Committee for Space Research)*, CNES Ed., pp. 66–67 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Multi-stable liquid funnel-like interfaces induced by optical radiation pressure

Hugo Chesneau[1], Julien Petit, Nicolas Bertin, Hamza Chraïbi[1], Étienne Brasselet[1], Régis Wunenburger[2] & Jean-Pierre Delville[1]

[1] Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine, 351 cours de la libération, Talence, 33400
[2] Institut Jean le Rond d'Alembert, Place Jussieu, Paris, 75252
hugo.chesneau@u-bordeaux.fr

We present a numerical study about non linear deformation and metastability of soft liquid-liquid interfaces actuated by optical radiation pressure (RP). We perform Ab Initio simulations based on boundary element method which solves simultaneously Stokes and Hemlholtz equations to investigate the coupling between wave propagation and interface deformation. We also compare with experimental results obtained by focusing a continuous wave laser beam on a soft ($\sigma \approx 10^{-6}$ N $\cdot$ m^{-1}) liquid–liquid interface. At first, we show that above a threshold power, reflections of the wave within the deformation and then total internal reflection modify drastically the shape of the interface. The induced liquid structure becomes then guiding and form liquid-core liquid-cladding waveguides with a funnel-like shape [1,2]. In a second part, we point out and discuss the stability of these liquid waveguides which seem to present hysteretic behavior [3] and we compare them to numerically induced morphologies. Our numerical tool allow us to unravel the guiding properties of these liquid objects responsible of their stability. In fact, the RP exerted by the wave propagating into the deformation, counter-balance the Laplace pressure and stabilizes the liquid object formed. It keeps its shape when the power is continuously decreased until a second lower threshold is reached. Finally we demonstrate that this statement is true for multiple states of the funnel-like structure, showing the multi-stability of our liquid waveguides.

Références

1. É. Brasselet & J.-P. Delville, Liquid-core liquid-cladding optical fibers sustained by light radiation pressure: Electromagnetic model and geometrical analog, *Phys. Rev. A*, **78**, 013835 (2008).
2. É. Brasselet, R. Wunenburger & J.-P. Delville, Liquid optical fibers with a multistable core actuated by light radiation pressure, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 014501, (2008).
3. R. Wunenburger, A. Casner & J.-P. Delville, Light-induced deformation and instability of a liquid interface. II. Dynamics., *Phys. Rev. E*, **73**, 036315 (2006).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Turbulence in edge tokamak plasma and interaction with magnetic X-point configuration in 3D fluid simulations

Guido Ciraolo[1] & Davide Galassi[2]

[1] CEA, IRFM, St Paul lez Durance, 13108, France
[2] École Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015, Lausanne, Switzerland
guido.ciraolo@cea.fr

Turbulence in the edge plasma of a tokamak fusion device is a key actor in the determination of the confinement properties. The physics of the transition from Low to High confinement mode is not fully understood, but seems to be linked to the plasma shape. The 3D fluid turbulence code TOKAM3X is used here to evaluate the effect of a diverted configuration on turbulence in the edge plasma, in a isothermal framework. The presence of the X-point is found, locally, to affect both the shape of turbulent structures and the amplitude of the fluctuations, in qualitative agreement with recent experimental observations. In particular, fluctuations are strongly damped in the vicinity of the X-point, both in open and closed flux surfaces. Globally, a mild transport barrier spontaneously forms near the separatrix, differently from simulations in limiter configuration. The effect of turbulence-driven Reynolds stress on the formation of the barrier is found to be weak by dedicated simulations, while turbulence damping around the X-point seems to globally reduce turbulent transport on the whole flux surface. Although the L-H transition dynamics is not retrieved, the magnetic shear around the X-point could be a crucial element in the formation of the edge transport barriers

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Interaction onde–écoulement moyen en hydrodynamique dispersive

Thibault Congy[1], Gennady El[1] & Mark Hoefer[2]

[1] Department of Mathematics, Physics and Electrical Engineering, Northumbria University, Newcastle upon Tyne, UK
[2] Department of Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0526, USA
thibault.congy@northumbria.ac.uk

L'interaction entre une onde et un écoulement moyen, ou *wave-mean flow interaction*, constitue un problème fondamental de la mécanique des fluides. Une des clés pour étudier une telle interaction est la séparation des échelles de variation spatiale et temporelle, beaucoup plus petites pour les ondes que pour l'écoulement moyen. L'interaction onde-écoulement moyen a été largement étudiée pour des situations où le courant est prescrit de façon externe sous la forme d'un courant stationnaire ou dépendant du temps.

Durant cette présentation, je décrirai une nouvelle réalisation de cette interaction où un projectile correspondant à une onde de petite échelle : un paquet d'onde linéaire ou un soliton, interagit avec un état hydrodynamique en expansion : une onde de raréfaction ou une onde de choc dispersive (par ex. un mascaret). Le couplage entre l'onde et le courant moyen de l'état hydrodynamique est décrit par des équations de modulation. Ces équations admettent une classe particulière de solutions décrivant la transmission (*tunnelling*) ou le piégeage de l'onde incidente par l'état hydrodynamique non-stationnaire. Dans les deux cas, deux invariants adiabatiques de la modulation sont identifiés et déterminent les conditions de transmission et de piégeage du projectile. Je montrerai notamment que ces conditions sont indépendantes de la nature de l'état hydrodynamique, propriété dénommée réciprocité hydrodynamique, confirmée récemment expérimentalement. La théorie développée est générale et peut être appliquée à des équations d'onde non-linéaires, intégrables ou non-intégrables, dans divers contextes physiques comprenant la mécanique des fluides, l'optique non-linéaire ou les gaz quantiques. L'équation de Korteweg-de Vries sera considérée comme exemple concret. Cette présentation est basée sur deux travaux récents [1, 2].

Références

1. M. D. Maiden, D. V. Anderson, N. A. Franco, G. A. El & M. A. Hoefer, Solitonic dispersive hydrodynamics: Theory and observation, *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 144101 (2018).
2. T. Congy, G. A. El & M. A. Hoefer, Interaction of linear modulated waves with unsteady dispersive hydrodynamic states, arXiv:1812.06593.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Intermittence et multi-stabilité d'un tube mou parcouru par un écoulement d'air

Anne Cros[1], Arturo Orozco Estrada[1], Ricardo Morales Hernández[1] & Ricardo Lima[2]

[1] Universidad de Guadalajara, Mexique
[2] Dream and Science Factory, Marseille
anne.cros@academicos.udg.mx

Lorsqu'un tube flexible est parcouru par un écoulement d'air, il est sujet à l'instabilité aeroélastique qui provoque des oscillations périodiques [1]. Le tube de notre expérience a des parois si fines que, lorsqu'il fluctue, le tube se plie et se déplie sur sa longueur qui est alors constituée de portions curvilignes séparées par des angles pour lesquels les dérivées spatiales ne sont plus définies [2].

Lorsque le tube est suspendu et sous certaines conditions de la vitesse de l'air, le tube présente un régime intermittent, pour lequel les phases turbulentes correspondent aux fluctuations chaotiques du tube alors que les phases laminaires durent tant qu'un profil en zig-zag se maintient statique. Le signal de pression est enregistré à la base du tube pour différentes puissances électriques de la pompe. Les distributions statistiques des durées sont de type exponentiel pour les régions turbulentes et algébriques pour les phases laminaires.

Nos signaux sont analysés dans le cadre d'un système probabiliste [3], où une variable d'état x varie aléatoirement au cours du temps. Une seconde variable aléatoire y joue le rôle du seuil et le système reste dans la même phase tant que $x \leq y$ et change de phase lorsque $x > y$. Les deux lois statistiques sont retrouvées lorsque le seuil varie avec la même cadence que la variable d'état (loi exponentielle) ou bien lorsqu'il est congelé (loi algébrique).

Après avoir proposé une signification physique pour x et y, il est possible de relier les exposants des distributions des durées aux moments flecteurs nécessaires pour générer des plis dans le tube.

Références

1. M. P. Païdoussis, Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid, *J. Mech. Eng. Sci.*, **12**, 85–103 (1970).
2. F. Castillo Flores & A. Cros, Transition to chaos of a vertical collapsible tube conveying air flow, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **166**, 012017 (2009).
3. E. Floriani, D. Volchenkov & R. Lima, A system close to a threshold of instability, *J. Phys. A*, **36**, 4771–4783 (2003).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Convective patterns in viscous planetary interiors

Anne Davaille

Laboratoire FAST (CNRS/Univ. Paris-Sud/Univ. Paris-Saclay), Bât. 502, rue André Rivière, 91405 ORSAY, FRANCE
davaille@fast.u-psud.fr

The cooling and evolution of a planet strongly depends on the convective regime prevailing in its mantle (e.g. the 2900 km-thick enveloppe of solid rocks under our feet on Earth). Geophysical data show that the planets and rocky satellites of our solar system undergo very different evolutions and present-day dynamics. But the conditions necessary for convection to generate plate tectonics and quasi-continuous resurfacing on Earth, episodic resurfacing on Venus, heat pipes on Io, or no resurfacing on Mars, remain strongly debated. The difficulty comes from the complexity of rocks rheology : viscous at high temperature and on long time-scale, brittle at low temperature and short time-scale. This "soft matter" behaviour can be recovered in the laboratory using aqueous colloidal dispersions, whose rheology varies from viscous to elasto-visco-plastic to brittle when their temperature, and/or their water or ionic content, vary. We therefore have investigated the characteristics of thermal and solutal convection in those systems. They show a diversity of convective regimes, including the ones encountered in rocky mantles. Their physical understanding provides insights on the dynamics of planetary interiors.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamique de sédimentation de particules

David De Souza[1], Romain Monchaux[1] & Anne Dejoan[2]

[1] Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles (IMSIA), ENSTA-ParisTech/CNRS/CEA/EDF/Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, France
[2] Unidad de Modelización y Simulación de Procesos, Centro de Investigaciónes Energéticas Medioambientales y Tecnológicas (CIEMAT), Madrid, Spain
david.de-souza@ensta-paristech.fr

Les écoulements transportant des particules ont un large champ d'applications, technologiques et naturelles. Ces écoulements sont en général décrits par : le nombre de Reynolds (intensité de la turbulence), le nombre de Stokes (inertie des particules), le nombre de Rouse et le nombre de Froude (effets de la gravité). L'équation régissant le mouvement d'une particule dans un écoulement turbulent étant complexe [1, 2], la plupart des modèles reposent sur de fortes simplifications. Des études expérimentales sont donc toujours nécessaires. Certains phénomènes relatifs à ces écoulements sont bien documentés, comme la concentration préférentielle et la modification de la vitesse de sédimentation des particules. Ces deux phénomènes semblent de plus être liés, comme suggéré dans les travaux expérimentaux menés par Aliseda [3]. Il avance notamment que les amas de particules se comporteraient comme des méta-particules, responsables de la modification de la vitesse de sédimentation. Ceci est soutenu par des travaux expérimentaux plus récents [4] et par des simulations numériques prenant en compte une rétroaction des particules sur le fluide (simulation *two-way*) [5].

Nous avons conçu un dispositif dans lequel des particules solides tombent dans un écoulement turbulent engendré par des grilles oscillantes. Nos objectifs sont les suivants : (i) démêler les effets des différents paramètres de contrôle et (ii) poursuivre l'étude du lien entre vitesse de glissement locale particule/fluide et modification de la vitesse de sédimentation. En contrôlant nos populations de particules en densité (particules en verre, céramique, acier et carbure de tungstène, pour des rapports de densité avec l'eau de 2,5, 4, 7 et 14) et en taille (10 à 200 µm affinés par des tamis) nous pourrons paver l'espace des paramètres afin d'évaluer l'effet de chacun d'entre eux. En utilisant un dispositif de double mesure en velocimétrie par images de particules (PIV) et en suivi de particule (PTV), nous aurons accès simultanément aux vitesses des deux phases. Cette étude expérimentale est complétée par de nouvelles simulations two-way.

Dans la littérature, la vitesse de référence choisie pour l'étude de la modification de la vitesse de sédimentation est souvent celle d'une particule soumise à une trainée linéaire de type Stokes. Comme des effets collectifs peuvent apparaitre même sans turbulence amont, un tel choix peut nuire à l'étude de l'effet de la turbulence sur la vitesse de sédimentation, en particulier dans le cas d'une diminution de cette vitesse. Nous sommes donc actuellement en train d'effectuer des mesures de référence sans turbulence avec des fractions volumiques en particules permettant que des effets collectifs soient observés (10^{-5} à 10^{-4}). Ces résultats sont comparés aux vitesses de sédimentations obtenues selon différents modèles de trainée (Stokes, Schiller–Naumann, Newtonien).

Références

1. R. Gatignol, The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non uniform Stokes flow, *J. Mec. Theor. Appl.*, **1**, 143–150 (1983).
2. M. R. Maxey & J. J. Riley, Equation of motion for a small rigid sphere in a non uniform flow, *Phys. Fluids*, **26**, 883–889 (1983).
3. A. Aliseda *et al.*, Effect of preferential concentration on the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **468**, 77–105 (2002).
4. P. D. Huck *et al.*, The role of collective effects on settling velocity enhancement for inertial particles in turbulence, *J. Fluid Mech.*, **846**, 1059–1075 (2018).
5. R. Monchaux & A. Dejoan, Settling velocity and preferential concentration of heavy particles under two-way coupling effects in homogeneous turbulence, *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 104302 (2017).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Topology of quasi-singularities in an experimental turbulent swirling flow

Paul Debue[1], Valentina Valori[1], Yasar Ostovan[2], Christophe Cuvier[2], Jean-Philippe Laval[2], Jean-Marc Foucaut[2], Bérengère Dubrulle[1] & François Daviaud[1]

[1] SPEC, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, CEA Saclay, Gif-sur-Yvette, France
[2] LMFL, Université de Lille, Lille, France
paul.debue@cea.fr

Even though they are more than 150 years old, the incompressible 3D Navier-Stokes equations remain an open mathematical problem [1]: the existence of a solution was proven by Leray [2] but it is still unknown whether such a solution is unique and regular. The quest for singularities in Navier-Stokes equations is of fundamental interest but may also have more applied consequences, regarding the relevance of numerical simulation and small scale modelling for instance.

In this work we aim at providing insight on what such singularities may resemble and how they may form by studying the distribution and topology of extreme events of energy transfer in a real turbulent flow. Indeed, a singularity is characterized by a refinement of scales and may result in a non-zero or diverging inter-scale transfer with decreasing scale, as suggested by Duchon and Robert [3].

Local inter-scale energy transfer terms are computed from 3D-3C velocity fields, experimentally obtained by tomographic particle image velocimetry (TPIV) implemented in a compact set-up involving 5 cameras. Extreme events are detected following the methodology described in a previous work of the group [4], with the improvement that we are now able to measure the gradients in the three directions and compute the full transfer terms. This also allows to study the topology of such events following the classification provided in [5] and based on the velocity gradient tensor invariants.

Références

1. https://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation [Online; accessed 11-December-2018]
2. J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math. J.*, **63**, 193–248 (1934).
3. J. & R. Robert, Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations, *Nonlinearity*, **13**, 249–255 (2000).
4. E.-W. Saw, D. Kuzzay, D. Faranda, A. Guittonneau, F. Daviaud, C. Wiertel-Gasquet, V. Padilla & B. Dubrulle, Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow, *Nat. Commun.*, **7**, 12466 (2016).
5. M. S. Chong, A. E. Perry & B.J. Cantwell, A general classification of three-dimensional flow fields, *Phys. Fluids A*, **2**, 765 (1990).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Mathematical models of self-organization

Pierre Degond

Imperial College, London
p.degond@imperial.ac.uk

Self-organization happens when agents interacting through local rules generate large-scale coherent structures. It occurs across all living and social systems and through a formidable variety of mechanisms. However, common features among the different systems suggest that some "universal" models may provide valuable insight. In this talk, I will discuss models of aligment dynamics of self-propelled particles and highlight the challenges that they pose.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Comportement asymptotique de populations hétérogènes avec interactions

Antonin Della Noce[1], Amélie Mathieu[2] & Paul-Henry Cournède[1]

[1] Laboratoire MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, 9 rue Joliot-Curie, 91190, Gif-sur-Yvette
[2] UMR ÉcoSys, INRA AgroParisTech, Route de la ferme, 78850 Thiverval-Grignon
antonin.della-noce@centralesupelec.fr

Le formalisme de limite de champ moyen a été historiquement appliqué à des systèmes étudiés en physique statistique pour décrire leurs comportements macroscopiques à partir de modèles d'interaction à l'échelle microscopique. Il s'est développé à partir d'équations décrivant des gaz et des fluides. Cette limite peut être interprétée comme une approximation du milieu continu : elle permet le passage d'un système différentiel décrivant la dynamique d'une population finie de particules à une équation de transport non-locale donnant l'évolution de la densité de probabilité représentant le système comme un continuum. Ce formalisme a récemment été généralisé à des populations d'organismes vivants, notamment aux essaims d'oiseaux et aux bancs de poissons [1], ou encore aux réseaux de neurones naturels [2]. Pour des populations d'individus vivants, il peut être pertinent de supposer que les individus ne sont pas identiques, ont des caractéristiques propres. Introduire de la diversité dans la population rompt la symétrie et a des conséquences notables sur la dynamique. Dans des populations dont la taille est bien en deçà de l'Avogadro, il est aussi intéressant d'identifier la taille critique de la population au delà de laquelle les trajectoires microscopiques sont proches de la trajectoire donnée par la limite de champ moyen pour une précision donnée.

Nous nous intéressons donc à une population d'individus décrits par $((X_i, \theta_i))_{1 \leq i \leq N}$ où $X \in \mathcal{X}$ est l'état de l'individu (e.g. sa position, sa vitesse,...) et $\theta \in \Theta$ est un vecteur de paramètres regroupant les caractéristiques propres de l'individu qui sont supposées fixées dans le modèle considéré (e.g. sa masse, sa couleur,...). La limite de champs moyen obtenu en appliquant une méthodologie similaire à [3] a pour flot caractéristique

$$\forall X, \theta \in \mathcal{X} \times \Theta, \quad \begin{cases} \mathbf{X}(0, X, \theta) = X \\ \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, X, \theta) = \displaystyle\int_{\mathcal{X} \times \Theta} g\left(\mathbf{X}(t, X, \theta), \theta, \mathbf{X}(t, X', \theta'), \theta'\right) \mu_0(\mathrm{d}X', \mathrm{d}\theta') \end{cases}$$

Dans l'équation ci-dessus, g est une fonction d'interaction et μ_0 est une mesure de probabilité représentant la configuration initiale de la population. Le flot caractéristique $t \mapsto \mathbf{X}(t, X, \theta)$ représente la trajectoire d'une particule intéragissant avec un continuum d'autres individus, eux-mêmes mus par une dynamique identique. Nous proposons un schéma numérique pour approcher $t \mapsto \mathbf{X}(t, X, \theta)$ sur l'ensemble $\mathcal{X} \times \Theta$. Le schéma n'utilise qu'une discrétisation en temps, car discrétiser l'espace $\mathcal{X} \times \Theta$ est prohibitif numériquement même pour des modèles simples. À chaque pas de temps de la discrétisation, $(X, \theta) \mapsto \mathbf{X}(t, X, \theta)$ est approchée en utilisant une régression par processus gaussiens, dont le noyau de corrélation k_t est calculée à partir de la fonction de transition g. La simulation du flot caractéristique permet entre autre de valider l'hypothèse de l'approximation de champ moyen et ouvre des perspectives pour l'inférence statistique sur de grandes populations avec interactions, notament l'inférence par méthode bayésienne variationnelle.

Références

1. P. Degond, A. Frouvelle & S. Merino-Aceituno, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **27**, 1005–1049 (2017)
2. B. Perthame, D. Salort & G. Wainrib, *Physica D*, **353–354**, 20–30 (2017)
3. F. Golse, On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit, in *Macroscopic and Large Scale Phenomena: Coarse Graining, Mean Field Limits and Ergodicity*, A. Muntean, J. Rademacher & A. Zagaris (éditeurs), Springer, pp. 1–144 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamiques transitoires de sillage dans le « pinball fluidique »

Nan Deng[1,2], Luc R. Pastur[1], Bernd R. Noack[2,3,4], Guy Cornejo-Maceda[2], François Lusseyran[2], Jean-Christophe Loiseau[5] & Marek Morzyński[6]

[1] IMSIA – UMR9219 , ENSTA ParisTech, Palaiseau, France
[2] LIMSI – CNRS, Université Paris Saclay, Orsay, France
[3] Harbin Institute of Technology, China
[4] Tecnische Universität Berlin, Allemagne
[5] Laboratoire DynFluid, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, France
[6] Pozńan University of Technology, Pologne
nan.deng@ensta-paristech.fr

La configuration d'écoulement dite du « pinball fluidique », ou « flipper fluidique », a été récemment introduite avec l'objectif de proposer un système à la fois simple et rapide à simuler numériquement pour expérimenter différentes techniques de contrôle en mécanique des fluides, et suffisamment riche pour adresser les problèmes liés aux entrées et sorties multiples dans ces systèmes, dont la dynamique est intrinsèquement non-linéaire et la dimension de l'espace des états virtuellement infinie (équations Navier-Stokes). Il s'agit de trois cylindres disposés sur les sommets d'un triangle équilatéral en écoulement transverse, dont les actionneurs sont les cylindres eux-mêmes, susceptibles de tourner sur leur axe propre, tandis que les capteurs sont des sondes de vitesse ou de pression placées dans le sillage ou à la surface des cylindres, respectivement [1, 2]. La dynamique *naturelle*, non forcée, de cette configuration d'écoulement s'est révélée étonnamment riche [3,4]. C'est ce que nous souhaitons mettre en évidence dans cette contribution, où les dynamiques transitoires du système dynamique sous-jacent, étudiées du point de vue des coefficients de portance et de trainée du système fluide, sont instructives quant aux mécanismes à l'œuvre dans cet écoulement, en particulier vis-à-vis des deux bifurcations, Hopf puis fourche supercritiques, subies par le système, à nombre de Reynolds croissant, sur sa route vers le chaos [5, 6].

Références

1. B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzyński, G. Tadmor & F. Thiele, A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake, *J. Fluid Mech.*, **497**, 335–363 (2003).
2. B. R. Noack & M. Morzyński, *The Fluidic Pinball: A Toolkit for Multiple-Input Multiple-Output Flow Control (version 1.0)*, Tech. Rep. 02/2017. Chair of Virtual Engineering, Poznan University of Technology, Poland (2017).
3. N. Deng, B. R. Noack, M. Morzyński & L. R. Pastur, Low-order model for successive bifurcations of the fluidic pinball, `arXiv preprint arXiv:1812.08529` (2018).
4. J. C. Loiseau, N. Deng, L. R. Pastur, M. Morzyński, B. R. Noack & S. L. Brunton, Sparse reduced-order modeling of the fluidic pinball, in *Journées du GDR Contrôle des Décollements* (2017).
5. N. Deng, L. R. Pastur, M. Morzyński & B. R. Noack, Reduced-order modeling of the pinball fluidique, in *International Conference on Chaotic Modeling, Simulation and Applications* (2018).
6. N. Deng, L. R. Pastur, M. Morzyński & B. R. Noack, Route to chaos in the fluidic pinball, in *ASME 2018 5th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting* (p. V001T01A005), American Society of Mechanical Engineers (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Solutal convection induced by dissolution

Julien Philippi[1], Michael Berhanu[2], Sylvain Courrech du Pont[2] & Julien Derr[2]

[1] TIPs, Université Libre de Bruxelles, C.P. 165/67, Avenue F. D. Roosevelt 50, 1050 Bruxelles, Belgium
[2] Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS UMR 7057, 10 Rue Alice Domont et Léonie Ducquet, 75205 Paris Cedex 13, France
julien.derr@univ-paris-diderot.fr

The dissolution of minerals into water which erodes and shapes exposed solid surfaces made of soluble rocks becomes significant in geomorphology, when the erosion rate is controlled by the hydrodynamics transport of the solute [1–3]. This situation can occurs even in absence of an external flow, when the dissolution induces itself a convection flow due to the action the gravity (see our experimental work [4]). Here we perform a study of the physics of solutal convection by the means of numerical simulations of the hydrodynamics and of the solute transport in 2D geometry, corresponding to the case, where a soluble body is suddenly plunged and suspended in water. The convection flow starts after an onset time, which is characterized. Then, after a time of few onset times, a quasi-stationary regime is reached corresponding to a constant global erosion rate, controlled by the structure of the concentration boundary layer at the dissolving interface. Assuming that the destabilization of this boundary layer occurs at a specific value of the solutal Rayleigh number, we derive scaling laws both for fast and slow dissolution kinetics. These laws are then successively validated by the simulations. As a consistency test, a common value of the Rayleigh number is found *a posteriori* during the quasi-stationary regime, showing that the structure of the boundary layer is well controlled by the hydrodynamics. Finally, by applying the scaling laws previously established to the case of real dissolving minerals, we can predict the typical dissolution rate in presence of solutal convection. Our results suggest that the solutal convection could occur in more natural situations than expected even for minerals with a quite low saturation concentration, leading to an increased erosion rate as the dissolution is controlled by the hydrodynamics.

References

1. P. Meakin & B. Jamtveit, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **466**, 659 (2010).
2. J. Colombani & J. Bert, *Geochim. Cosmochim. Acta*, **71**, 1913 (2007).
3. S. Brantley, *Kinetics of Water-Rock Interaction*, Springer (2008).
4. C. Cohen, M. Berhanu, J. Derr & S. Courrech du Pont, *Phys. Rev. Fluids*, **1**, 050508 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Rivers in the lab

Olivier Devauchelle[1], Anaïs Abramian[2], Éric Lajeunesse[1], Pauline Delorme[3], François Métivier[1] & Laurie Barrier[1]

[1] Institut de Physique du Globe de Paris, 1 rue Jussieu, Paris, France
[2] Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge
[3] Department of Geography and Environment, University of Southampton
devauchelle@ipgp.fr

Alluvial rivers transport sediment, and build their own bed out of it. The flow entrains sediment grains and deposit them downstream, thus deforming the channel that confines it. This fluid-structure coupling generate ripples, dunes, bars and meanders through various instabilities. More fundamentally, it also selects the size and the slope of a river. Indeed, to entrain a sediment grain, the flow-induced shear stress must overcome its weight. This threshold, typical of granular materials, sets the characteristic size of alluvial rivers [1–4]. Beyond this threshold, however, gravity pulls the traveling grains toward the center of the stream. To maintain its banks, a river thus needs to balance this transverse flux of sediment [5].

Creating small rivers in laboratory experiments is an old idea, but only now can we track thousands of individual grains as they travel downstream, to reveal the statistics of sediment transport [6]. In a small laboratory flume, we track plastic grains entrained by a laminar flow. Their trajectories show that the roughness of the underlying sediment layer causes the particles to disperse across the bed's surface as they travel downstream. This random walk induces a Fickian flux which tends to homogenize the sediment flux across the stream [7]. Meanwhile, the bed assumes a convex shape which gathers the traveling grains near its center. As a result, the sediment flux distributes itself in this self-organized potential well according to Boltzmann statistics.

The same mechanism allows laboratory rivers to adjust their cross-section and their width to the sediment discharge: they widen and shallow to accommodate a larger input. Beyond a critical sediment discharge, however, a river destabilizes into a braid of intertwined channels. We suggest that a new instability, driven by bedload diffusion, might explain this transition [8].

Finally, we investigate how these dynamics express themselves in large sedimentary structures deposited by rivers: alluvial fans [9].

References

1. R. E. Glover & Q. L. Florey, *Stable Channel Profiles*, Technical report, U.S. Bur. Reclamation (1951).
2. F. M. Henderson, Stability of alluvial channels, *J. Hydraul. Div.*, **87**, 109–138 (1961).
3. F. Métivier, E. Lajeunesse & O. Devauchelle, Laboratory rivers: Lacey's law, threshold theory, and channel stability, *Earth Surface Dynamics*, **5**, 187–198 (2017).
4. G. Seizilles, O. Devauchelle, E. Lajeunesse & F. Métivier, Width of laminar laboratory rivers, *Phys. Rev. E*, **87**, 052204 (2013).
5. G. Parker, Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 2. The gravel river, *J. Fluid Mech.*, **89**, 127–146 (1978).
6. J. C. Roseberry, M. W. Schmeeckle & D. J. Furbish, A probabilistic description of the bed load sediment flux: 2. Particle activity and motions, *J. Geophys. Res.*, **117**, F03032 (2012).
7. G. Seizilles, E. Lajeunesse, O. Devauchelle & M. Bak, Cross-stream diffusion in bedload transport, *Phys. Fluids*, **26**, 013302 (2014).
8. A. Abramian, O. Devauchelle & E. Lajeunesse, Streamwise streaks induced by bedload diffusion, *J. Fluid Mech.*, **863**, 601–619 (2019).
9. P. Delorme, O. Devauchelle, L. Barrier & F. Métivier, Growth and shape of a laboratory alluvial fan, *Phys. Rev. E*, **98**, 012907 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Vers une standardisation des ultrasons non linéaires pour le contrôle non destructif du futur

Serge Dos Santos[1], Ali Masood[1,2], Martin Lints[1,3], Denis Arruga[1] & Giuseppe Nardoni[4]

[1] INSA Centre Val de Loire, UMR 1253, iBrain, Université de Tours, Inserm, Academia NDT International
3 rue de la Chocolaterie, CS 23410 F-41034 Blois Cedex, France
[2] Institute of Cybernetics, Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia
[3] Thomas Johann Seebeck Department of Electronics, Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia
[4] IT Nardoni Via D.C. Pontevia n21, 25010 – Folzano - Brescia – Italy
serge.dossantos@insa-cvl.fr

L'acoustique non linéaire permet d'expliquer la propagation non linéaires d'ondes mécaniques dans les solides, les liquides et les milieux complexes à bulles ou composites, par exemple. Les ultrasons non linéaires sont ainsi rentrés progressivement dans le quotidien des métrologues du fait de l'amplitude de leur signature proche du niveau de bruit mesuré au cours d'expérimentations conduites dans le domaine du Contrôle Non Destructif (CND) ou de l'échographie médicale [1]. C'est ainsi que l'imagerie harmonique, exploitant la signature non linéaire du second ordre, a pu profiter de la réponse acoustique non linéaire plus importante dans les fluides que dans les solides, milieux d'exploration du CND au sein desquels la réponse est nettement plus faible et donc peu émergente du niveau de bruit de mesure. De plus, grace aux nouvelles méthodes de traitement du signal, l'extraction, l'identification et la localisation de sources acoustiques non linéaires ont pu être conduite ces dernières années au sein de la communauté de l'acoustique non linéaire. Après une vingtaine d'années de modélisations, de simulations et d'expérimentations, la communauté internationale de CND reconnait l'émergence et le potentiel des ultrasons non linéaire pour faire rentrer le CND dans la transition numérique de l'industrie du futur, sous réserves de lui faire bénéficier de toutes les nouvelles technologies numérique comme l'IoT, le big data ou l'intelligence artificielle [2].

Lors de cet exposé, nous proposons de présenter quelques résultats expérimentaux obtenus depuis les vingt dernières années dans le contexte du CND de structures complexes. Afin d'illustrer ces résultats, nous proposons de présenter les développements récents dans le domaine du CND permettant de localiser temporellement une source acoustique de nonlinéarité. En imagerie harmonique non destructive, c'est par l'utilisation d'une symbiose du processus de retournement temporel (TR) et de la spectroscopie d'ondes élastiques non linéaires (NEWS) qui permettent, *via* l'utilisation d'un processus de codage d'excitation [3], de proposer à la communauté l'instrumentation TR-NEWS confirmant le concept de "Retournement Temporel Non Linéaire" comme un formidable potentiel pour la localisation des nonlinéarités physiques d'un système complexe [4]. Nous présenterons le dispositif expérimental TR-NEWS appliqué à l'étude de la propagation acoustique non linéaire dans une cale d'étalonnage V3 en cours de standardisation.

Références

1. S. Dos Santos *et al.*, Application de l'acoustique non linéaire dans le contrôle non destructif : mesure du paramètre non linéaire de la silice par une méthode de modulation de phase, in *Comptes-Rendus de la 6e Rencontre du Non-Linéaire*, Institut H. Poincaré, Paris, pp. 107–112 (2003).
2. S. Dos Santos, M. Lints, D. Arruga, A. Masood & A. Salupere, Standards for acousto-mechanical evaluation of multiscale hysteretic properties of complex material with nonlinear time reversal imaging, *Proceedings of the 14th International Conference of the Slovenian Society for Non-Destructive Testing*, pp. 49–57 (2017).
3. M. Lints, Andrus Salupere & S. Dos Santos, Simulation of detecting contact nonlinearity in carbon fibre polymer using ultrasonic nonlinear delayed time reversal, *Acta Acustica united Ac.*, **103**, 978–986 (2017), Open access paper https://doi.org/10.3813/AAA.919127
4. M. Frazier, B. Taddese, T. Antonsen & S. M. Anlage, Nonlinear time reversal in a wave chaotic system, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 063902 (2013).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamique non-linéaire du centre guide d'un électron soumis à un champ laser de forte intensité

Jonathan Dubois[1], Simon A. Berman[1,2], Cristel Chandre[1] & Turgay Uzer[2]

[1] Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France
[2] School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332-0430, USA
jonathan.dubois@univ-amu.fr

Le but ultime de la physique à champs forts et ultra courts est de capturer des images instantanées de biomolécules en mouvement [1]. Outre des difficultés techniques évidentes, il y a toujours eu un obstacle fondamental à l'interprétation de ces images : le mouvement d'un électron dans un champ laser et un champ de Coulomb est un problème irrésolu. Le hamiltonien décrivant la dynamique de l'électron actif — ou électron de valence — dépendant du temps est principalement composé d'un terme d'interaction avec le laser et d'un terme d'interaction avec son ion parent. Nous utilisons un changement de coordonnées pour décrire la dynamique de l'électron à l'aide de la dynamique de son centre guide [2,3]. Nous dérivons une hiérarchie de modèles réduits, sous certaines hypothèses, basée sur la moyennisation du mouvement de l'électron en utilisant les transformées canoniques de Lie. Le hamiltonien résultant qui gouverne la dynamique non linéaire du centre guide ne dépend plus du temps, et peut être utilisé pour interpréter et prédire la dynamique de l'électron.

Références

1. C. I. Blaga *et al.*, Imaging ultrafast molecular dynamics with laser-induced electron diffraction, *Nature*, **483**, 194 (2012).
2. J. Dubois *et al.*, Capturing photoelectron motion with guiding centers, *Phys. Rev. Lett.*, **121**, 113202 (2018).
3. J. Dubois *et al.*, Guiding-center motion for electrons in strong laser fields , *Phys. Rev. E*, **98**, 052219 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Du tout simple au très compliqué : itinéraire dans la non-linéarité des plasmas

Dominique Escande

PIIM, Aix-Marseille Université
dominique.escande@univ-amu.fr

La non-linéarité des plasmas est un sujet extrêmement vaste. Cet exposé de 40 minutes donne un coup de projecteur sur quelques-uns de ses aspects que l'orateur connaît bien et qui sont présentables de façon imagée à un public de non spécialistes. Les plasmas considérés dans l'exposé sont classiques, faiblement couplés et faiblement collisionnels. L'aspect « tout simple » correspond à un plasma de « manuel », de densité uniforme et non magnétisé avec des électrons vivant sur un fond ionique neutralisant uniforme. Les non-linéarités considérées agissent au niveau cinétique. Aux échelles spatiales inférieures à la longueur de Debye, les collisions produisent une auto-organisation du plasma qui se traduit par l'écrantage de Debye [1]. Aux échelles spatiales supérieures à la longueur de Debye, les ondes de Langmuir signent le comportement collectif du plasma. Une onde peut piéger des particules avec un portrait de phase identique à celui du pendule non linéaire [2]. Deux ondes créent du chaos plus ou moins étendu dans l'espace des phases. Une approche de type « groupe de renormalisation » régit le comportement des barrières de transport dans cet espace (tores de Kolmogorov–Arnold–Moser) [2, 3]. L'aspect « très compliqué » correspond au plasma d'une configuration toroïdale de confinement magnétique pour la fusion thermonucléaire contrôlée appelée *Reversed Field Pinch.* La non-linéarité s'y manifeste de trois façons : (i) par un auto-renversement du champ magnétique toroïdal impliquant un effet dynamo et une déformation hélicoïdale du plasma [4] ; (ii) par une bifurcation menant d'un renflement hélicoïdal du plasma à une déformation hélicoïdale régulière, et menant parallèlement d'un chaos à un ordre magnétiques [5–7] ; (iii) par une seconde bifurcation menant d'une topologie de surfaces magnétiques avec une séparatrice à une topologie unique de surfaces magnétiques sans séparatrice [8], et menant parallèlement à la constitution d'une barrière de transport renfermant un plasma très chaud [9].

Références

1. D. F. Escande, Y. Elskens & F. Doveil, Direct path from microscopic mechanics to Debye shielding, Landau damping and wave-particle interaction, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **57**, 025017 (2015).
2. D. F. Escande, From thermonuclear fusion to Hamiltonian chaos, *Eur. Phys. J. H*, **43**, 397–420 (2018).
3. D. F. Escande & F. Doveil, Renormalization method for the onset of stochasticity in a Hamiltonian system, *Phys. Lett. A*, **83**, 307–310 (1981)
4. D. F. Escande *et al.*, Single helicity: A new paradigm for the reversed field pinch, Plasma Phys. Contr. Fusion, **42**, B243 (2000).
5. S. Cappello & R. Paccagnella, Nonlinear plasma evolution and sustainment in the reversed field pinch, *Phys. Fluids B*, **4**, 611 (1992).
6. S. Cappello & D. F. Escande, Bifurcation in viscoresistive MHD: The Hartmann number and the reversed field pinch, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3838 (2000).
7. D. F. Escande *et al.*, Quasi-single-helicity reversed-field-pinch plasmas, Phys. Rev. Lett. 85, 1662 (2000)
8. D. F. Escande *et al.*, Chaos healing by separatrix disappearance and quasisingle helicity states of the reversed field pinch, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3169 (2000).
9. R. Lorenzini *et al.*, Self-organized helical equilibria as a new paradigm for ohmically heated fusion plasmas, *Nat. Phys.*, **5**, 570 (2009).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Contrôle d'une instabilité spatio-temporelle affectant les électrons relativistes dans les centres de rayonnement synchrotron

Clément Evain[1], C. Szwaj[1], E. Roussel[1], M. Le parquier[1], M.-A. Tordeux[2], M. Labat[2], F. Ribeiro[2], N. Hubert[2], J.-B. Brubach[2], P. Roy[2], S. Bielawski[1]

[1] Univ. Lille, CNRS, UMR 8523 - PhLAM - Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Centre d'Étude Recherches et Applications (CERLA), F-59000 Lille, France
[2] Synchrotron SOLEIL, Saint Aubin, BP 34, 91192 Gif-sur-Yvette, France
clement.evain@univ-lille.fr

Les paquets d'électrons relativistes, utilisés pour produire de la lumière dans les centres de rayonnement synchrotron, sont des milieux complexes en interaction constante avec leur environnement extérieur et avec eux mêmes. Un phénomène « universel » dans ces centres est l'apparition, lorsque le nombre d'électrons dans le paquet dépasse une valeur seuil, d'une instabilité qui vient modifier la dynamique longitudinale des électrons. Cette instabilité, appelée *microbunching instability*, est caractérisée par l'apparition spontannée de micro-structures dans le profil longitudinal du paquet (à l'échelle du millimètre, associée à des fréquences téraHertz). Ces micro-structures permettent l'émission d'un rayonnement cohérent très intense ; cependant leur utilisation en tant que source THz est limitée car ces micro-structures apparaissent très généralement sous la forme de bouffées irrégulières.

En utilisant des techniques inspirées des méthodes de contrôle du chaos (type OGY), nous avons réussi à stabiliser un état périodique régulier (mais instable sans l'utilisation d'une boucle de rétro-action), permettant une émission stable du rayonnemnt THz [1]. Les résultats d'études numériques (basée sur l'équation de Vlasov-Fokker-Planck) et expérimentales (effectué aux synchrotron SOLEIL) seront présentés.

Références

1. C. Evain, C. Szwaj, E. Roussel, J. Rodriguez, M. Le Parquier, M.-A. Tordeux, F. Ribeiro, M. Labat, N. Hubert, J.-B. Brubach, P. Roy & S. Bielawski, Coherent Terahertz synchrotron radiation mastered by controlling the irregular dynamics of relativistic electron bunches, https://arxiv.org/abs/1810.11805

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Analyse d'échelles dans un écoulement de von Kármán numérique

Hugues Faller[1,2], Caroline Nore[1], Bérengère Dubrulle[2], Loïc Cappanera[3] & Jean-Luc Guermond[4]

[1] Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, CNRS, Orsay, France
[2] Service Physique de l'État Condensé, UMR CEA/CNRS, Gif sur Yvette, France
[3] Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, USA
[4] Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, USA
hugues.faller@normalesup.org

Les écoulements turbulents sont caractérisés par la coexistence de multiples échelles entre l'échelle d'injection et l'échelle de dissipation d'énergie. Le transfert local d'énergie entre échelles jusqu'à l'échelle de Kolmogorov a été étudié expérimentalement par Saw *et al.* [2] en utilisant l'outil développé par J. Duchon et R. Robert [1]. Ils ont constaté que le transfert d'énergie local a une distribution très large et atteint des valeurs extrêmes aux endroits où le champ de vitesse a une topologie en front ou en spirale. Je propose de faire une analyse similaire dans une simulation numérique directe à haute résolution de l'écoulement expérimental de von Kármán étudié dans [2]. Le code numérique (SFEMaNS) utilise une discrétisation spatiale hybride combinant éléments spectraux et éléments finis. L'approximation dans l'espace se fait en utilisant une décomposition de Fourier dans l'espace azimutale et les éléments continus Hood–Taylor Lagrange pour les champs de pression et de vitesse dans la section méridienne. Le schéma temporel utilise une méthode de prédiction-correction décrite dans [4]. La prise en compte des pales en mouvement à est assurée par une technique de pseudo-pénalité décrit dans [5].

Dans cet exposé, nous discutons du problème du calcul du transfert entre échelles sur un maillage d'éléments finis, souvent utilisé pour simuler des écoulements turbulents réels. Nous montrons la distribution du terme de transfert inter-échelle et la structure des champs de vitesse autour de grandes valeures du transfert d'énergie locale et discutons de la comparaison avec les résultats expérimentaux.

Références

1. J. Duchon & R. Robert, Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations, *Nonlinearity*, **13**, 249–255 (2000).
2. E.-W. Saw, D. Kuzzay, D. Faranda, A. Guittonneau, F. Daviaud, C. Wiertel-Gasquet, V. Padilla & B. Dubrulle, Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow, *Nat. Commun.*, **7**, 12466 (2016).
3. C. Nore, D. Castanon Quiroz, L. Cappanera & J.-L. Guermond, Numerical simulation of the von Karman sodium dynamo experiment, *J. Fluid Mech.*, **854**, 164–195 (2018).
4. J.-L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat & C. Nore, Nonlinear magnetohydrodynamics in axisymmetric heterogeneous domains using a Fourier/finite element technique and an interior penalty method, *J. Comput. Phys.*, **228**, 2739–2757 (2009).
5. R. Pasquetti, R. Bwemba & L. Cousin, A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows, *Appl. Numer. Math.*, **58**, 946–954 (2008).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Condensation sous-critique en convection de Rayleigh–Bénard en rotation

Benjamin Favier[1], Céline Guervilly[2] & Edgar Knobloch[3]

[1] Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille, France
[2] School of Mathematics, Statistics and Physics, Newcastle University, UK
[3] Department of Physics, University of California, Berkeley, CA 94720, USA
favier@irphe.univ-mrs.fr

La possibilité d'un régime sous-critique de cascade inverse en turbulence géostrophique est explorée. En particulier, on s'intéresse numériquement au cas de la convection de Rayleigh-Bénard en rotation rapide. Il existe un régime où des transferts d'énergie non-locaux, qui condensent l'énergie aux grandes échelles spatiales, entrent en compétition avec la cascade directe, plus traditionnelle [1–3]. Nous montrons qu'une transition sous-critique vers un vortex condensé à grande échelle peut exister, et ce pour des paramètres de contrôle pour lesquels aucune cascade inverse n'avait été observée jusqu'à maintenant [4]. Cette transition est déclenchée en initialisant le système avec une circulation tourbillonnaire à grande échelle d'amplitude arbitraire. Ce nouvel et rare exemple de bi-stabilité entre deux états turbulents, qui n'est sans doute pas spécifique à la convection en rotation, ouvre des perspectives nouvelles pour l'étude des transferts d'énergie dans les écoulements turbulents anisotropes comme les circulations atmosphériques et océaniques.

Références

[1] B. Favier, L. J. Silvers & M. R. E. Proctor, Inverse cascade and symmetry breaking in rapidly rotating Boussinesq convection, *Phys. Fluids*, **26**, 096605 (2014).
[2] C. Guervilly, D. W. Hughes & C. A. Jones, Large-scale vortices in rapidly rotating Rayleigh–Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **758**, 407–435 (2014).
[3] A. Alexakis & L. Biferale, Cascades and transitions in turbulent flows, *Phys. Rep.*, **767–769**, 1–101 (2018).
[4] B. Favier, C. Guervilly & E. Knobloch, *J. Fluid Mech. Rapids*, sous presse (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

La bataille d'Actium et le Mythe de l'échénéis-remora.

Johann Fourdrinoy[1], Clément Caplier[1], Yann Devaux[1], Areti Gianni[2], Ierotheos Zacharias[2], Isabelle Jouteur[3], Paul Martin[4], Julien Dambrine[5], Madalina Petcu[5], Morgan Pierre[5] & Germain Rousseaux[1]

[1] CNRS – Université de Poitiers – ISAE-ENSMA - Institut Pprime, France
[2] University of Patras, Greece
[3] Université de Poitiers, Forellis France
[4] Université de Montpellier, France
[5] Université de Poitiers, Laboratoire de Mathématiques et Applications, France
johan.fourdrinoy@univ-poitiers.fr

La bataille d'Actium fut déterminante dans l'avènement de l'empire romain avec la victoire d'Octave contre Marc-Antoine et Cléopâtre. Depuis vingt siècles, historiens et scientifiques ont essayé de comprendre les raisons de la défaite Antonienne. En effet, la flotte de Marc-Antoine, composée de navires imposants, aurait dû vaincre les plus petits navires d'Octave. L'amiral et le naturaliste Pline l'Ancien invoqua une légende pour expliquer les difficultés d'avancement rencontrées par Marc-Antoine, et le résultat de la bataille qui en découla : Neptune aurait défavorisé Marc-Antoine via un poisson, l'echeneis-remora accroché aux bateaux de sa flotte. Avec une approche pluridisciplinaire, nous cherchons à expliquer les pics de résistance à l'avancement, et à réinterpréter le mythe via des nouvelles connaissances. Sur la base de nouvelles données océanographiques, nous calculons la résistance à l'avancement des galères représentatives des deux armadas et recréons les conditions de bataille dans un bassin de traction. Nous observons différents motifs de sillage et suggérons que la résistance rencontrée par les galères Antoniennes possède une signature visuelle, définie par le rapport entre le tirant d'eau et la profondeur du navire. Ce sillage particulier se compose à la fois d'un sillage de poupe et d'un sillage de proue. À l'arrière du navire, un système supplémentaire d'ondes quasi-parallèles de type divergentes se superpose au sillage classique de Kelvin (eau profonde) pour crée un motif plus complexe. À l'avant, un système de double vagues se forme et suit une évolution de type cône de Mach. Lors de l'arrêt du navire, une des deux vagues de proue est éjectée à la manière d'un soliton à la Scott Russell.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Fluidisation d'un empilement granulaire bidimensionnel par le fond mobile d'un plan incliné

Nathalie Fraysse & Cyrille Claudet

Université Côte d'Azur, CNRS, UMR 7010, Institut de Physique de Nice, France
nathalie.fraysse@inphyni.cnrs.fr

Étudier la dynamique d'un empilement granulaire nécessite une injection continue d'énergie, le moyen le plus utilisé pour y parvenir étant de soumettre le milieu granulaire à des vibrations. Nous proposons de considérer un type d'excitation original, appliqué ici à un empilement bidimensionnel : le fond mobile d'un plan incliné entraîne les particules en s'opposant à l'écoulement gravitaire. L'apport d'énergie au milieu granulaire est alors continu et réparti uniformément, contrairement à ce qui peut être obtenu par vibrations.

Notre travail porte sur le comportement d'une monocouche de billes millimétriques non-cohésives et monodisperses en taille. Un cadre métallique délimite les bords du canal et présente également des parois aval et amont qui définissent une zone rectangulaire accessible aux particules. Au repos, du fait de l'inclinaison du canal, le système cristallise spontanément en un empilement bidimensionnel hexagonal compact avec défauts. La mise en mouvement conduit à une décompaction de l'empilement suivant la direction de l'entraînement et détruit partiellement ou totalement l'ordre cristallin.

Une caractérisation systématique de l'état de fluidisation du milieu granulaire 2D est en cours. L'analyse d'images avec suivi de particules donne la distribution instantanée des billes et le champ des déplacements entre deux images successives, d'où l'on peut déduire des quantités telles que le profil de densité (nombre de grains par unité de longueur perpendiculaire à l'entraînement), la fonction de distribution radiale des particules et des gradients de distribution des vitesses.

À inclinaison fixée, nous observons pour une vitesse d'entraînement croissante une transition remarquable dans la structure de l'empilement, qui rappelle des phénomènes de fusion d'un solide. Nous rechercherons de possibles analogies entre ce système expérimental macroscopique très simple et les phénomènes microscopiques de transition de phase.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Ondes de relief et sillage émis par un courant géostrophique

Cruz Garcia-Molina, Chantal Staquet, Joël Sommeria, Bruno Voisin & Adekunle Ajayi

LEGI - Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels 1209-1211 rue de la piscine - Domaine Universitaire 38400 Saint Martin d'Hères
cruz.garcia-molina@univ-grenoble-alpes.fr

Des récentes campagnes à la mer ont montré une intense activité des ondes internes de gravité dans l'océan austral profond [1]. Le déferlement des ondes internes dans l'océan austral profond est supposé être responsable des taux de dissipation d'énergie anormalement élevés [2–4]. Les estimations de [5] suggèrent que la quantité de mouvement et l'énergie transportées dans la colonne d'eau par la propagation de ces ondes contribuent significativement au transfert d'énergie et au mélange dans l'océan austral.

Quand un écoulement géostrophique s'écoule vers une topographie dans un environnement stratifié, tout ou partie de l'écoulement peut s'écouler autour de la topographie, aucun champ d'ondes n'étant émis dans le premier cas. À l'arrière de la topographie se forme un sillage turbulent, qui peut aussi induire un mélange local. Les rôles respectifs des ondes et du sillage turbulent dans le transport de quantité de mouvement issue du courant et le mélange induit ont été très peu étudiés. Les études sur ce sujet sont le plus souvent en deux dimensions dans un plan vertical. En trois dimensions, l'effet de la rotation généralement est ignoré ou l'attention est portée sur le sillage [6]. Seule une équipe au plan international a considéré le cas tridimensionnel avec rotation, dans le contexte de l'océan austral [7].

Basée sur des simulations numériques, [8] a montré que des oscillations inertielles sont générées au sein du champ d'ondes par interactions résonantes. Dans le but d'étudier le transport de quantité de mouvement par les ondes internes et le sillage turbulent des expériences de laboratoire ont été faites [9]. Dans le présent travail, les contributions relatives au profil vertical du mélange dues au sillage turbulent et au déferlement des ondes, en combinant les expériences de laboratoire et des simulations numériques tridimensionnelles utilisant le modèle NHM (Non-Hydrostatic Model) développé par [10], sont montrés.

Références

1. A. Garabato *et al.*, Widespread intense turbulent mixing in the Southern Ocean, *Science*, **303**, 210–213 (2004).
2. K. J. Heywood *et al.*, High mixing rates in the abyssal Southern Ocean, *Nature*, **415**, 1011–1014 (2002).
3. A. C. Naveira Garabato *et al.*, Short-circuiting of the overturning circulation in the Antarctic Circumpolar Current, *Nature*, **447**, 194–197 (2007).
4. K. L. Sheen *et al.*, Modification of turbulent dissipation rates by a deep Southern Ocean eddy, *Geophys. Res. Lett.*, **42**, 3450–3457 (2015).
5. M. Nikurashin & R. Ferrari, Global energy conversion rate from geostrophic flows into internal lee waves in the deep ocean, *Geophys. Res. Lett.*, **38**, L08610 (2011).
6. D. Etling, Mesoscale vortex shedding from large islands: A comparison with laboratory experiments of rotating stratified flows, *Meteorol. Atmos. Phys.*, **43**, 145–151 (1990).
7. M. Nikurashin *et al.*, The impact of finite-amplitude bottom topography on internal wave generation in the Southern Ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, **44**, 2938–2950 (2014).
8. M. Nikurashin & R. Ferrari, Radiation and dissipation of internal waves generated by geostrophic motions impinging on small-scale topography: Application to the Southern Ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, **40**, 2025–2042 (2010).
9. J. Sommeria *et al.*, Laboratory modelling of momentum transport by internal gravity waves and eddies in the Antarctic circumpolar current, in *VIIIth International Symposium on Stratified Flows (ISSF)* (2016).
10. H. Aiki & T. Yamagata, A numerical study on the successive formation of Meddy-like lenses, *J. Geophys. Res. Oceans*, **109**, C6 (2004).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

L'adhésion élastocapillaire permet aux coléoptères de marcher la tête en bas

Tristan Gilet[1], Sophie Marie Gernay[1,2] & Pierre Lambert[2]

[1] Microfluidics Lab, Dept. Aerospace & Mech. Eng., ULiège (Belgium)
[2] TIPS, Université Libre de Bruxelles (Belgium)
Tristan.Gilet@uliege.be

Les forces capillaires sont capables de déformer significativement des structures suffisamment flexibles et élancées. Ces forces dépendent néanmoins de la configuration géométrique des interfaces liquides et de leur raccord avec la structure déformée. Ce couplage entre forces capillaires et déformation des structures porte le nom d'élastocapillarité. Celle-ci façonne le monde microscopique, et permet notamment aux coléoptères de se déplacer avec aisance sur n'importe quelle surface solide, y compris tête en bas [1]. Les coléoptères possèdent sur leurs tarses des coussinets adhésifs velus, chacun formé de centaines de soies. Ces dernières sont des microstructures élancées, encastrées sur le coussinet, et dont le diamètre est de l'ordre du micromètre. L'extrémité libre de ces soies est très flexible, et elle est seule à toucher la surface. Un liquide sécrété par le coussinet forme un pont capillaire entre le substrat et l'extrémité de chaque soie [2], et force ainsi cette dernière à épouser au mieux les aspérités microscopiques de la surface pour obtenir un maximum d'adhésion [3]. Ensuite, en une fraction de seconde, l'insecte peut annuler cette adhésion et détacher son tarse, simplement en l'inclinant. L'élastocapillarité procure donc aux coléoptères un mécanisme d'adhésion apparemment réversible, robuste et contrôlable.

Dans la présente étude expérimentale et théorique, nous proposons un modèle physique de l'adhésion élastocapillaire des soies, composé d'une poutre encastrée à une extrémité et dont l'autre est approchée d'un substrat plan solide sous-jacent. L'encastrement est faiblement incliné par rapport au substrat. Nous étudions la déformation de cette poutre lorsqu'un pont liquide est formé entre l'extrémité libre et le substrat. Nous identifions trois régimes, obtenus successivement lorsque la poutre s'approche : (1) la poutre ne touche pas le substrat, (2) l'arête de l'extrémité libre de la poutre touche le substrat avec un angle fini, et (3) l'extrémité de la poutre épouse le substrat et forme une zone de contact apparent d'aire finie. Ces trois régimes ont été observés dans d'autres configurations similaires (par exemple, [4,5]). Nous mesurons également la force de réaction exercée par la poutre sur son encastrement dans la direction normale au substrat. Cette force correspond à l'adhésion potentielle que l'insecte peut attendre de chacune de ses soies. Sa variation avec la distance au substrat n'est pas monotone. Le régime 2 est faiblement adhésif (voire même répulsif dans certaines conditions), et il présente une hystérèse directionnelle. Dans le régime 3, la force d'adhésion augmente fortement lorsque la poutre s'approche du substrat. Nous proposons un modèle bidimensionnel de poutre pour expliquer ces mesures. Les équations correspondantes présentent plusieurs non-linéarités induites par les contraintes géométriques. Le modèle reproduit qualitativement et quantitativement les courbes de force-déplacement, sous deux conditions : les forces de friction sont prises en compte dans le régime 2, et la force de réaction est distribuée sur la surface de contact dans le régime 3. Cette dernière hypothèse est en contradiction avec la plupart des modèles proposés pour rendre compte des configurations élastocapillaires similaires.

Références

1. S. M. Gernay *et al.*, Multi-scale tarsal adhesion kinematics of freely-walking dock beetles, *J. R. Soc. Interface*, **14**, 20170493 (2017).
2. S. M. Gernay *et al.*, Elasto-capillarity in insect fibrillar adhesion, *J. R. Soc. Interface*, **13**, 20160371 (2016).
3. T. Gilet *et al.*, Liquid secretion and setal compliance: The beetle's winning combination for a robust and reversible adhesion, *Curr. Opin. Insect Sci.* , **30**, 19–25 (2018).
4. H.-M. Kwon *et al.*, Equilibrium of an elastically confined liquid drop, *J. Appl. Phys.*, **103**, 093519 (2008).
5. J. M. Aristoff *et al.*, Elastocapillary imbibition, *Int. J. Non-linear Mech.*, **46**, 648–656 (2011).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Keplerian turbulence in astrophysical accretion discs

Christophe Gissinger

Laboratoire de Physique, École normale supérieure, Paris
christophe.gissinger@lps.ens.fr

Accretion discs, one of the most studied problem in astrophysical fluid dynamics, are structures in which diffused material is in rotation around a central massive body. These objects are a ubiquitous phenomenon in astrophysics: active galactic nuclei, proto-stars or even quasars all involve turbulent accretion of gas and matter towards the center of the disc. Because of the balance between centrifugal and gravitational forces, these discs involve Keplerian rotation profiles.

Interestingly, the exact mechanisms by which angular momentum is transported in these discs remain mostly unknown: indeed, there is no purely hydrodynamical linear process able to explain the transition to turbulence in Keplerian discs. To circumvent this mystery, different mechanisms have been proposed, such as subcritical (non-linear) transition to turbulence or turbulent viscosity. But the most accepted scenario is the so-called magnetorotational instability (MRI), which explains how a conducting fluid in differential rotation can be destabilized by the presence of magnetic field and become turbulent. However, the impossibility of generating a stable Keplerian flow in usual (boundary-driven) laboratory experiments makes MRI experiments still out of reach.

In this seminar, I will describe a new laboratory experiment aiming to study this problem by generating a fully developed turbulent flow in Keplerian rotation and subject to a strong magnetic field. The aim of the present experiment, quite different from previous MRI experimental attempts, is to directly generates a turbulent Keplerian flow, and to discuss different aspects of magnetized turbulence: what type of energy cascade is obtained? What controls the angular momentum transport in the disc? How turbulence in Keplerian flow is affected by magnetic field.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Le tenseur complexe de Faraday pour comprendre la non validité de la théorie de Born–Infeld

Michel Gondran[1], Abdel Kenoufi[1] & Alexandre Gondran[2]

[1] Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, Paris, France
[2] Ecole Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France
michel.gondran@polytechnique.org

Pour construire une électrodynamique non linéaire covariante, Born et Infeld [1] ont proposé une densité lagrangienne construite sur les deux invariants de Lorentz $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Cependant les expériences n'ont jamais exhibé les effets non linéaires attendus. Cette théorie connait depuis 1985 une renaissance en théorie des membranes et des cordes comme étant une partie de l'action effective.

Nous reconsidérons ici l'approche de Born–Infeld en faisant l'hypothèse que le tenseur de Faraday $\mathcal{F}$ et son dual $\mathcal{F}^*$ doivent être remplacés [2] dans les densités lagrangiennes par le tenseur complexe $\mathcal{F}_\mathcal{C} = \mathcal{F} + \mathrm{i} \cdot \mathcal{F}^*$ qui correspond à l'invariant de Lorentz $(\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B})^2$. Nous montrons d'abord que, par une extension du principe de moindre action aux densités lagrangiennes à valeur complexe et grâce à un nouvel outil de calcul variationnel complexe [3–5], on retrouve les équations de Maxwell à partir de ce tenseur complexe de Faraday. Nous montrons ensuite que l'on obtient directement les équations de Maxwell par le simple remplacement de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ dans une des formulations de la densité lagrangienne de Born–Infeld [6]. Cela permet d'expliquer pourquoi les expériences n'ont jamais mis en évidence les effets non linéaires prédits par la théorie de Born–Infeld.

Finalement, si le tenseur complexe de Faraday $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ peut être considéré comme le tenseur électrodynamique pertinent, cela suggère que c'est lui qui doit être utilisé dans la recherche du lien entre relativité générale et électrodynamique.

Références

1. M. Born & L. Infeld, Foundations of the new field theory, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **144**, 425–451 (1934).
2. L. Silberstein, Nachtrag zur Abhandlung über Electromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung, *Ann. Phys. Leipzig*, **24**, 783–784 (1907).
3. M. Gondran, Analyse MinPlus complexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **333**, 592–598 (2001).
4. M. Gondran, Calcul des variations complexes et solutions explicites d'équations d'Hamilton–Jacobi complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **332**, 677–680 (2001).
5. M. Gondran & R. Hoblos, Complex calculus of variations, *Kybernetika*, **39**, 249–263 (2003).
6. M. Gondran, A. Kenoufi & A. Gondran, Complex variational calculus with mean of (min,+)-analysis, *Tema*, **18** 385–403 (2017).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Flambage d'une tige dans un milieu granulaire

Antoine Seguin & Philippe Gondret

Laboratoire FAST, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405, Orsay, France
antoine.seguin@u-psud.fr, philippe.gondret@u-psud.fr

Les milieux granulaires ont des comportements complexes provenant notamment des non-linéarités et de la dissipation au niveau des contacts entre les grains. Le mouvement d'objets à travers les milieux granulaires est important à comprendre dans plusieurs domaines : la géophysique s'intéresse par exemple aux cratères d'impacts sur les planètes et astéroïdes [1–3], tandis que la biophysique se préoccupe de la locomotion animale sur ou dans le sable ou encore du développement racinaire dans le sol [4, 5]. Après avoir étudié le mouvement d'objets isotropes, tels des sphères ou des disques, à travers des empilements de grains [6–10], nous nous intéressons maintenant au mouvement d'une structure mince et de la possibilité de son flambement. Lorsqu'une tige pénètre verticalement dans un empilement granulaire, elle peut flamber à une certaine profondeur d'enfoncement à condition que l'étreinte ne soit pas suffisante pour empêcher ce phénomène [11]. La profondeur critique atteinte par la tige au moment du flambement évolue en fonction de la longueur L de la tige, avec deux régimes possible en $1/L$ ou $1/L^2$. Ces deux régimes résultent des deux termes de force qui interviennent sur la tige en pénétration : une force de pression en bout de tige qui augmente linéairement avec la profondeur, et une force frictionnelle sur son pourtour qui augmente quadratiquement avec la profondeur. Nous proposons une limite d'apparition du flambage dans un diagramme de deux paramètres sans dimensions, le rapport d'aspect de la tige et le rapport de rigidité de la tige par rapport à l'empilement granulaire.

Références

1. A. Seguin, Y. Bertho & P. Gondret, Influence of confinement on granular penetration by impact, *Phys. Rev. E*, **78**, 010301 (2008).
2. A. Seguin, Y. Bertho, P. Gondret & J. Crassous, Sphere penetration by impact in a granular medium: A collisional process, *Europhys. Lett.*, **88**, 44002 (2009).
3. S. Deboeuf, P. Gondret & M. Rabaud, Dynamics of grain ejection by sphere impact on a granular bed, *Phys. Rev. E*, **79**, 041306 (2009).
4. E. Kolb, C. Hartmann & P. Genet, Radial force development during root growth measured by photoelasticity, *Plant Soil*, **360**, 19 (2012).
5. N. Algarra, P. G. Karagiannopoulos, A. Lazarus, D. Vandembroucq & E. Kolb, Bending transition in the penetration of a flexible intruder in a two-dimensional dense granular medium, *Phys. Rev. E*, **97**, 022901 (2018).
6. A. Seguin, Y. Bertho, P. Gondret & J. Crassous, Dense granular flow around a penetrating object: Experiment and hydrodynamic model, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 048001 (2011)
7. A. Seguin, F. Martinez, Y. Bertho, J. Crassous & P. Gondret, Experimental velocity fields and forces for a cylinder penetrating into a granular medium, *Phys. Rev. E*, **87**, 012201 (2013).
8. A. Seguin, C. Coulais, F. Martinez, Y. Bertho, & P. Gondret, Local rheological measurements in the granular flow around an intruder, *Phys. Rev. E*, **93**, 012904 (2016).
9. A. Seguin, A. Lefebvre-Lepot, S. Faure & P. Gondret, Clustering and flow around a sphere moving into a grain cloud, *Eur. Phys. J. E*, **39**, 63 (2016).
10. A. Seguin & P. Gondret, Drag force in a cold or hot granular medium, *Phys. Rev. E*, **96**, 032905 (2017).
11. A. Seguin & P. Gondret, Buckling of a rod penetrating into granular media, *Phys. Rev. E*, **98**, 012906 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Mélange et démélange induits par des particules actives de camphre.

Clément Gouiller[1], Laurent Maquet[1], Florence Raynal[2], Mickael Bourgoin[3], Romain Volk[3], Cécile Cottin-Bizonne[1] & Christophe Ybert[1]

[1] Institut Lumière Matière / CNRS -10 Rue Ada Byron, 69100 Villeurbanne
[2] Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique / CNRS - 6 Avenue Guy de Collongue, 69130 Écully
[3] Laboratoire de Physique - ENS de Lyon / CNRS - 46, allée d'Italie, 69007 Lyon
clement.gouiller@univ-lyon1.fr

Le mélange et la dispersion de particules fines sont des processus fondamentaux intervenant dans d'innombrables systèmes depuis les nuages de poussières interstellaires jusqu'aux poudres dans les mélangeurs industriels, en passant par les polluants atmosphériques et océaniques. La plupart des études existantes ont abordé le problème sous l'angle du couplage dit d'advection/diffusion, où la mobilité microscopique des particules transportées se limite, pour le mélange, aux seuls effets de diffusivité moléculaire [1, 2]. L'originalité du problème étudié ici provient de l'utilisation de sources chimiques mobiles, provoquant un écoulement (de l'advection) induisant le mélange des particules.

Les résultats présentés ici concernent l'étude d'une interface air/eau, sur laquelle sont déposés deux types d'objets : des nageurs interfaciaux ainsi que des bulles de verre. Les nageurs interfaciaux sont des disques d'agarose imprégnés de camphre, selon un protocole proche de celui décrit par Soh *et al.* [3]. Le camphre présent à l'intérieur du disque se dissout continûment. Cela engendre des hétérogénéités chimiques ainsi que des écoulements Marangoni en raison de la faible tension de surface du camphre conduisant à une auto-propulsion du nageur. Sur la même interface sont déposées des bulles de verre, particules micrométriques flottantes en raison de leur faible densité. C'est leur mélange par les nageurs interfaciaux que nous étudions.

Expérimentalement, la détermination du champ de concentration en bulles de verre nous permet d'étudier l'évolution temporelle du mélange. L'étude de l'écart-type du champ de concentration nous a permis de mettre en évidence l'existence d'un état stationnaire de mélange imparfait. Pour l'expliquer, nous avons calculé le champ de concentration moyen autour d'un nageur interfacial, ce qui fait apparaître une zone de déplétion en bulles de verre au voisinage du nageur, puis une zone d'accumulation à sa frontière. Cela met en évidence qu'un nageur interfacial démélange dans son voisinage, d'où le fait que l'état stationnaire ne corresponde pas à un état où le champ de concentration est homogène. Des expériences complémentaires ont permis de prouver que l'existence de ces zones de déplétion est due aux effets chimiques et non pas à des effets de Reynolds finis.

Enfin, le spectre moyen du champ de concentration en régime stationnaire fait apparaître une loi d'échelle d'exposant $-5/3$ sur une décade, motivant une analogie entre notre système et le mélange d'un scalaire dans un environnement turbulent, en dépit du Reynolds bien plus faible dans notre cas (environ 50).

Références

1. M. A. Celia, T. F. Russell, I. Herrera & R. E. Ewing, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Adv. Water Resour.*, **13**, 187–206 (1990).
2. W. Hundsdorfer & J. G. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*, Springer Series in Computational Mathematics vol. 33, Springer (2013).
3. S. Soh, M. Branicki & B. A. Grzybowski, Swarming in shallow waters, *J. Phys. Chem. Lett.*, **2**, 770–774 (2011).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Érosion par dissolution : ruissellement sur plan incliné

Adrien Guérin, Julien Derr, Sylvain Courrech du Pont & Michael Berhanu

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université Paris-Diderot, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris
adrien.guerin@univ-paris-diderot.fr

L'érosion par dissolution est un processus important dans la morphogenèse des paysages et donne lieu à une grande variété de formes [1]. En particulier, des motifs caractéristiques d'érosion connus sous le nom de *Rillenkarren* (ou cannelures) peuvent être observés à la surface de roches solubles comme le gypse, le sel ou le calcaire. Ces motifs d'érosion apparaissent lorsque la surface de la roche est inclinée et soumise à l'action d'un ruissellement. Des sillons régulièrement espacés et orientés dans le sens de l'écoulement se forment alors à la surface de la roche. Ces motifs d'érosion sont courants, cependant les conditions de leur formation ne sont pas tout-à-fait comprises [2]. Lors de cette présentation, nous étudions dans une expérience de laboratoire les motifs d'érosion qui apparaissent à la surface de deux matériaux solubles (blocs de sel et de plâtre).

Des blocs de sel rectangulaires (10×20 cm et 3 cm d'épaisseur) sont inclinés suivant un angle contrôlé. Un écoulement de ruissellement est alimenté par un débit constant d'eau fraîche. L'eau s'écoule le long de la pente, formant un film d'eau uniforme et peu profond. La surface supérieure de ce film est une surface libre : la profondeur du film et la vitesse de l'écoulement s'adaptent naturellement aux deux paramètres de contrôle de l'expérience (le débit et l'angle de la pente).

Nous observons que le taux d'érosion d'un bloc de sel est proportionnel à la racine carrée de la vitesse moyenne de l'écoulement. Un modèle simple de transport de soluté (advection-diffusion) permet d'expliquer cette loi d'échelle, qui se vérifie également sur un deuxième jeu d'expériences réalisées avec du plâtre. Deuxièmement, nous observons que la surface initialement plane des blocs de sels (respectivement de plâtre) s'érode en creusant spontanément des motifs d'érosion caractéristiques. Des sillons espacés régulièrement, orientés dans le sens de l'écoulement et de longueur d'onde ~ 1 mm se forment en moins d'une minute (respectivement en ~ 30 min). L'interaction entre l'écoulement et la surface de la roche induit un champ de vitesse hétérogène, qui entraîne à son tour une distribution hétérogène du champ de concentration en solutés, et donc de la vitesse de dissolution. Cet effet hydrodynamique explique la formation des sillons.

Références

1. P. Meakin & B. Jamtveit, Geological pattern formation by growth and dissolution in aqueous systems, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **466**, 659–694 (2010).
2. M. Perne & F. Gabrovšek, The problem of rillenkarren development: A modelling perspective, *Carsologica*, **9**, 55–61 (2009).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Le ludion dans un fluide stratifié : une dualité onde corpuscule ?

Benjamin Castillo Morales[1], Sergio Hernández Zapata[1], Gerardo Ruiz Chavarria[1] & Patrice Le Gal[2]

[1] Departamento de Fisica, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Ciudad Universitaria, 04510, Mexico
[2] Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, 49 rue F. Joliot-Curie, F-13384, Marseille, France

legal@irphe.univ-mrs.fr;shernandezzapata@yahoo.com.mx;gruiz@unam.mx

Il est quelquefois appelé « plongeur de Descartes » mais la première description du ludion est due à Raffaello Magiotti dans son ouvrage de 1648 intitulé : *Renitenza certissima dell'acqua alla compressione* [1]. Le ludion est un petit objet plus dense que l'eau dans laquelle il est plongé, mais qui enferme une poche d'air. En diminuant la pression de l'eau, cette poche d'air peut être dilatée et peut donc faire accroître la force d'Archimède qui s'oppose au poids du ludion. Au contraire, si la pression est augmentée, l'air se comprime et la force d'Archimède diminue. Ainsi, en modifiant la pression de l'eau, il est possible de piloter la position verticale du ludion. Une position d'équilibre existe mais celle-ci n'est pas stable : un mouvement vers le bas (respectivement vers le haut) du ludion, augmente (diminue) la pression hydrostatique et donc le pousse à poursuivre sa descente (montée).

Contrairement au ludion dans un fluide pur, le ludion placé dans une couche de fluide stratifié possède un point d'équilibre stable. Inspirés par les gouttes rebondissantes de Couder [2], nous proposons ici nos premiers résultats expérimentaux sur la dynamique d'un ludion oscillant dans une couche d'eau stablement stratifiée en sel. En faisant osciller un piston dans une chambre communiquant avec une enceinte close contenant une couche d'eau stratifiée, il est aisé de faire varier périodiquement la pression hydrostatique du fluide. Un ludion de forme cylindrique, positionné à son altitude d'équilibre, mais libre de tout mouvement horizontal, peut osciller verticalement tout en émettant des ondes de gravité internes sous la forme très reconnaissable de croix de saint André. Nos résultats expérimentaux décrivent la résonance du mouvement du ludion quand celui-ci est excité à différentes fréquences. Des mesures par PIV permettent également d'observer l'émission des ondes internes quand la fréquence d'oscillation du ludion est inférieure à la fréquence de Brunt–Väisälä du milieu ambiant. Dans certains cas, nous avons observé que le ludion se déplaçait dans la direction horizontale. Si ces excursions horizontales étaient confirmées, nous aurions alors à faire à un véritable nageur constitué tout comme les gouttes marcheuses de Couder, de l'association d'une particule (le ludion lui-même) et d'une onde interne de gravité. Plusieurs effets permettent aujourd'hui d'interpréter ces excursions horizontales : interaction entre ondes internes et ludion ou encore existence d'un écoulement secondaire à grande échelle généré par les interactions non linéaires entre ondes. Notons pour terminer qu'il est aussi possible de munir notre ludion d'une palme ou d'un flagelle qui lui permettrait très certainement de nager efficacement.

Références

1. R. Magiotti, *Renitenza certissima dell'acqua alla compressione*, Roma (1648). https://archive.org/details/Magiotti1648
2. Y. Couder, S. Protière, E. Fort & A. Boudaoud, Walking and orbiting droplets, *Nature*, **437**, 208 (2005).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamics of a reactive spherical particle falling in a linearly stratified layer

Ludovic Huguet & Michael Le Bars

CNRS, Aix Marseille Univ, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille (France)
huguet@irphe.univ-mrs.fr

Rocky planets such as Earth, Mercury or Ganymede have a liquid iron core which may be totally or partly stably stratified [1, 2]. The sedimentation of iron particles crystallizing due to the secular cooling of the planet [3] or the precipitation of oxides [4] implies complex dynamic features involving a turbulent wake, the generation of internal waves, collective behaviour of the solid crystals, etc. It also involves reactive solid particles which may crystallize/melt.

Beyond the geophysical application, this problem is, therefore, related to several current problems in fluid dynamics, which we address with the help of a laboratory-scale experiment. The behaviour of a particle falling in a stratified layer has already been studied for different regimes of small Reynolds or Froude numbers [5, 6]. However, the influence of a reactive particle on a stratified medium has been unexplored, especially for regimes of interest for geophysical applications (large Reynolds and Froude numbers). In a stratified environment, the fall velocity is reduced due to the higher drag coefficient. During its fall, a particle drags a less dense liquid mixed with the product of the melting/dissolution. Then, the drag coefficient depends on the mixing in the wake, and on the melting/dissolution rate.

I am conducting experiments in a large water tank with salinity stratification where an icy, salty sphere is released from the top. I use two cameras and particle image velocimetry (PIV) to track the fall of the particle and the dynamics of the surrounding environment. I examine the velocity and the rate of dissolution of the spherical particle in comparison to a theoretical model. I also characterize the influence on its surrounding environment — generation of internal waves, the quantity of energy dissipated, and the mixing of the stratified layer. All these quantities are nonlinearly coupled, leading to complex and interesting dynamics.

References

1. H. Gomi, K. Ohta, K. Hirose, S. Labrosse, R. Caracas, M. J. Verstraete & J. W. Hernlund, The high conductivity of iron and thermal evolution of the Earth's core, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **224**, 88–103 (2013).
2. T. Rückriemen, D. Breuer & T. Spohn, The Fe snow regime in Ganymede's core: A deep-seated dynamo below a stable snow zone, *J. Geophys. Res.*, **120**, 1095–1118 (2015).
3. S. A. Hauck, J. M. Aurnou & A. J. Dombard, Sulfur's impact on core evolution and magnetic field generation on Ganymede, *J. Geophys. Res.*, **111**, 2156–2202 (2006).
4. J. Badro, J. Siebert & F. Nimmo, An early geodynamo driven by exsolution of mantle components from Earth's core, *Nature*, **536**, 326–328 (2016).
5. R. Mehaddi, F. Candelier & B. Mehlig Inertial drag on a sphere settling in a stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, **855**, 1074–1087 (2016).
6. K. Y. Yick, C. R. Torres, T. Peacock & R. Stocker, Enhanced drag of a sphere settling in a stratified fluid at small Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, **632**, 46–68 (2009).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Long-time evolution of optical pulses in a nonlinear medium

Mathieu Isoard[1], Anatoly M. Kamchatnov[2,3] & Nicolas Pavloff[1]

[1] LPTMS, UMR 8626, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France
[2] Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840, Russia
[3] Moscow Institute of Physics and Technology, Institutsky lane 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia
mathieu.isoard@u-psud.fr

Nous décrivons de façon théorique la propagation transverse d'un signal lumineux quasi-1D dans un milieu optique non-linéaire et en présence d'un fond d'intensité lumineuse constante. Dans un premier temps, le signal initial se divise en deux signaux qui se propagent dans des directions opposées. Ce phénomène peut être décrit théoriquement à l'aide d'une approche non dispersive en combinant la méthode de Riemann et celle de Ludford [1].

Pour des temps de propagation plus longs, une onde de choc dispersive commence à se former en aval de chacun des deux signaux, tandis qu'une onde de raréfaction apparaît en amont. Il est possible de décrire la forme de l'onde de choc et ses caractéristiques grâce à la théorie de modulation de Whitham [2]. Les résultats théoriques sont en très bon accord avec les simulations numériques. Notre approche fournit également des expressions analytiques simples pour décrire le comportement asymptotique des paramètres de l'onde de choc.

Références

1. G. S. S. Ludford, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 499–510 (1952).
2. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Interscience, New York (1974).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Fluid-particle suspension by gas release from a granular bed

Valérie Vidal[1], Tess Homan[1], Clément Picard[1] & Sylvain Joubaud[1]

Univ Lyon, ENS de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique,F-69342 Lyon, France
sylvain.joubaud@ens-lyon.fr

Gas release at the ocean floor is a widespread phenomenon which can have drastic consequences on the environment or the industry [1, 2]. Striking examples include natural seep areas [3], possible links between giant methane release and climate change [4], gas blowout and subsequent bubble plumes during offshore drilling [2]. A key question that may be addressed is how particles are entrained by the gas and then mixed into the ambient fluid. Polluting particles from Canadian oil sands have for example drastic consequences on the environment [5] .

This process is studied experimentally by injecting gas in water-saturated sands in a vertical Hele-Shaw cell. We focus on the short and long-term dynamics of gas rising at a constant flow rate through the sediment layer, as well as bubble rise, sediment transport and particle suspension in the above liquid layer. The existence of a stationary state, resulting from the competition between particle entrainment and sedimentation is observed. A phenomenological model based on the balance between particle lift by bubbles at the center of the cell and their settling on its sides demonstrates that most of the particle entrained come from the fluid recirculation.

When inclining the cell, the existence of a stationary state depends on the tilt angle and the gas release rate. Indeed, a puzzling behavior is observed with an alternance between a slow growth of the settled particle layer and violent particle resuspension events.

References

1. A. Woods, Turbulent plumes in nature, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **42**, 391–412 (2010).
2. J. E. Olsen & P. Skjetne, Current understanding of subsea gas release: A review, *Can. J. Chem. Eng.*, **94**, 209–219 (2016).
3. A. Gay & S. Migeon, Geological fluid flow in sedimentary basins, *BSGF - Earth Sciences Bulletin*, **188**, E3 (2017).
4. S. S. S. Cardoso & J. H. E. Cartwright, Increased methane emissions from deep osmotic and buoyant convection beneath submarine seeps as climate warms, *Nat. Commun.*, **7**, 13266 (2016).
5. G. A. Lawrence, E. W. Tedford & R. Pieters, Suspended solids in an end pit lake: Potential mixing mechanisms, *Can. J. Civil Eng.*, **43**, 211–217 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Rare transitions to a thin-layer turbulent condensate

Adrian van Kan[1], Takahiro Nemoto[2], Alexandros Alexakis[1]

[1] Laboratoire de Physique de l'École normale supérieure, ENS, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université Paris-Diderot, Sorbonne Paris Cité, Paris, France
[2] Philippe Meyer Institute for Theoretical Physics, Physics Department, École Normale Supérieure & PSL Research University, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
avankan@ens.fr

A turbulent flow in a thin layer spontaneously develops an inverse cascade of energy and a spectral condensate of energy when the layer height is smaller than a threshold, [1] & [2]. Recently, evidence for bistability was found in this system close to the critical height: for the same value of the parameters and depending on the initial conditions the flow is either in a condensate state with most of the energy in the two-dimensional large scale modes or it is in a three-dimensional turbulent state with most of the energy in the small scale modes [3]. Bistable behaviour has been identified in a number of turbulent flows, such as fast rotating convection [4] and von Kármán flows [5]. The presence of noise induces random transitions between the two locally stable states whose statistics characterise the bistable regime.

Here, we report our results on the statistical properties of the thin-layer flow in this bistable regime for both stochastic and deterministic forcing inferred from a large number of direct numerical simulations and measuring the decay time τ_d of the condensate to a three-dimensional and the build-up time τ_b of the condensate. It is shown that both of these times τ_d, τ_b display an exponential distribution with their mean value increasing (and possibly diverging) close to the threshold.

We further show that the dynamics of large-scale kinetic energy E_2 may be approximated by solving a Langevin equation with multiplicative noise,

$$\partial_t E_2 = -\frac{\partial U(E_2)}{\partial E_2} + \sqrt{2D(E_2)}E_2.$$

A transition through a bistable regime as a function of layer height is clearly identified via a transition of $U(E_2)$ from a single minimum to two minima back to one minimum. Small memory effects are identified via non-Gaussian tails of the conditional transition probability.

References

1. L. M. Smith, J. R. Chasnov & F. Waleffe, Crossover from two-to three-dimensional turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 2467 (1996).
2. A. Celani, S. Musacchio & D. Vincenzi, Turbulence in more than two and less than three dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 184506 (2010).
3. A. van Kan & A. Alexakis, Condensates in thin-layer turbulence, *J. Fluid Mech.*, **864**, 490–518 (2019).
4. B. Favier, C. Guervilly & E. Knobloch, Subcritical turbulent condensate in rapidly rotating Rayleigh–Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **864**, 490–518 (2019).
5. F. Ravelet *et al.*, Multistability and memory effect in a highly turbulent flow: Experimental evidence for a global bifurcation, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 164501 (2004).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Multiples attracteurs climatiques dans une planète-océan couplée

Maura Brunetti[1], Jérôme Kasparian[1] & Christian Vérard[2]

[1] Institut des Sciences de l'Environnement et Groupe de physique appliquée, Université de Genève, 66 bd Carl-Vogt, 1211 Genève 4, Suisse
[2] Section des Sciences de la Terre et de l'Environnement, Université de Genève, 13 rue des Maraîchers, 1211 Genève 4, Suisse
jerome.kasparian@unige.ch

Le climat terrestre est un système dynamique qui évolue, sous l'effet de la distribution inhomogène de l'irradiance solaire, vers un état de quasi-équilibre. Même en négligeant d'éventuels forçages dépendants du temps (par exemple d'origine anthropique), les interactions non linéaires entre l'atmosphère, l'océan, la cryosphère et la biosphère rendent son étude extrêmement complexe. Cette complexité a été historiquement appréhendée par une hiérarchie de modèles de plus en plus complets, depuis les modèles de bilan d'énergie jusqu'aux modèles de circulation générale (GCM). Nous utilisons le GCM du MIT (MITgcm) [1, 2] pour étudier numériquement une planète-océan couplée, c'est-à-dire un système où le couplage entre l'atmosphère, l'océan et la banquise est pris en compte, mais leurs mouvements est simplifié par l'absence de continents.

Sous l'effet d'un forçage externe constant, et pour des conditions initiales fixées, les solutions d'un système dynamique sont attirées vers des bassins d'attraction, ou attracteurs, qui représentent le squelette de leur dynamique non perturbée. Aux frontières des attracteurs, la dynamique est fortement non linéaire et de petites perturbations peuvent causer des modifications abruptes et potentiellement irréversibles correspondant au passage d'un bassin à l'autre. De telles crises endogènes sont généralement nommées points de bascule dans la dynamique climatique, ou transitions critiques en physique statistiques. Le climat actuel présente de tels points de bascule, tels que la circulation des courants dans l'océan Atlantique, le relargage de méthane par la fonte du permafrost, ou la disparition de la forêt amazonienne [3].

Dans une planète-océan, seulement trois attracteurs avaient été identifiés [4], Nous avons mis en évidence jusqu'à cinq bassins d'attraction distincts pour le même forçage radiatif [5]. De plus, la structure globale du squelette du système non perturbé dépend du détail de la description physique implémenté dans les simulations, et notamment de la prise en compte de la réinjection sous forme thermique de l'énergie cinétique dissipée ainsi que la dépendance en altitude de l'albédo des nuages. Une planète-océan couplée est donc un système suffisamment riche pour produire une structure dynamique complexe.

Chaque attracteur correspond à un climat différent, depuis un océan totalement englacé jusqu'à un océan complètement libre de glace. Nous avons déterminer les rétroactions qui conditionnent chaque attracteur en décrivant pour chacun la circulation océanique, le transport de chaleur, la couverture nuageuse et la distribution de température de surface. L'analyse s'appuie notamment sur la dimension instantanée, la persistance, l'entropie d'échantillon, et l'analyse en composantes principales.

Références

1. J. Marshall, A. Adcroft, C. Hill, L. Perelman & C. Heisey, *J. Geophys. Res.*, **102**, 5753 (1997).
2. J. Marshall, C. Hill, L. Perelman & A. Adcroft, *J. Geophys. Res.* **102**, 5733 (1997).
3. T. M. Lenton, H. Held, E. Kriegler, J. W. Hall, W. Lucht, S. Rahmstorf & H. J. Schellnhuber, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **105**, 1786 (2008).
4. D. Ferreira, J. Marshall & B. Rose, *J. Climate*, **24**, 992 (2011).
5. M. Brunetti, J. Kasparian & C. Vérard, Co-existing attractors in coupled aquaplanet, soumis à *Climate Dyn.* (2019)

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Instabilité modulationelle d'une onde plane en présence de perturbations bruyantes et localisées : expérience dans les fibres optiques

Adrien Kraych[1], Dmitry Agafontsev[2], Pierre Suret[1], Gennady El[3] & Stéphane Randoux[1]

[1] Université de Lille, CNRS, UMR 8523 - Physique des Lasers Atomes et Molécules (PhLAM), Lille, France
[2] P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Moscow, Russia
[3] Department of Mathematics, Physics and Electrical Engineering, Northumbria University, Newcastle upon Tyne, NE1 8ST, United Kingdom
adrien.kraych@univ-lille.fr

L'instabilité modulationnelle (aussi appelée instabilité de Benjamin-Feir en hydrodynamique) découverte en 1967, est un phénomène bien connu en physique non linéaire. L'instabilité modulationelle (modulation instability, MI) est un processus d'amplification de faibles perturbations de fréquences $\Omega \pm \omega$ en interaction avec une onde plane de fréquence Ω [1]. En régime d'amplification dit linéaire, les perturbations croissent de façon exponentielle. Ce n'est plus le cas lorsque l'amplitude des perturbations devient comparable à celle de l'onde plane, on parle alors du stade non linéaire de l'instabilité modulationnelle.

Dans le régime non linéaire, on observe des dynamiques spatio-temporelles riches qui ont été, jusqu'à récemment, la source de vifs intérêts dans plusieurs domaines de la physique expérimentale et théorique [2, 3]. Nous rapportons ici, la première observation expérimentale de la dynamique spatio-temporelle d'une onde plane perturbée localement [4]. Nous utilisons une boucle fibrée dans laquelle, l'onde plane perturbée se propage sur quelques centaines de kilomètres avec des pertes très faibles car compensées par amplification Raman. On observe notamment l'expansion de structures non linéaires oscillantes, conjointement à l'amplification du bruit optique de l'onde plane présent à l'état initial. Les comportements expérimentaux observés sont en accord avec les simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire (1D-NLSE) avec un terme d'amortissement. Ils démontrent la robustesse au bruit et à la dissipation du scénario théorique considéré dans la référence [3].

Par ailleurs nous reportons également la première observation expérimentale de la dynamique spatio-temporelle d'une onde plane bruitée sujette au processus d'instabilité modulationelle dans les fibres optiques. Notre dispositif permet de mesurer le moment d'ordre deux des fluctuations d'intensité. Nous observons que celui-ci est caractérisé par une évolution quasi-périodique amortie en fonction de la longueur de propagation. Ces résultats sont en accord avec les simulations numériques décrites dans la référence [5].

Références

1. V. E. Zakharov & L. A. Ostrovsky, Modulation instability: The beginning, *Physica D*, **238**, 540 (2009).
2. M. Erkintalo, K. Hammani, B. Kibler, C. Finot, N. Akhmediev, J. M. Dudley & G. Genty, Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 253901 (2011).
3. G. Biondini & D. Mantzavinos, Universal nature of the nonlinear stage of modulational instability, *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 043902 (2016).
4. A. E. Kraych, P. Suret, G. El & S. Randoux, Nonlinear evolution of the locally induced modulational instability in fiber optics, *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 054101 (2019).
5. D. S. Agafontsev & V. E. Zakharov, Integrable turbulence and formation of rogue waves, *Nonlinearity*, **28**, 2791 (2015).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Agrégation de radeaux granulaires à une interface

Antoine Lagarde & Suzie Protière

Sorbonne Université, Centre National de la Recherche Scientifique, UMR 7190, Institut Jean Le Rond ∂'Alembert, F-75005 Paris, France
antoine.lagarde@dalembert.upmc.fr

Placez deux objets à une interface liquide, et vous assisterez à un phénomène étonnant bien que quotidien : les deux objets interagiront pour générer une force attractive ou répulsive. Les célèbres céréales toroïdales cheerios qui s'agglutinent à la surface du lait ont d'ailleurs donné leur nom à ce phénomène [1]. Mais loin de se limiter au monde du petit déjeuner, cet effet se retrouve dans nombres d'applications industrielles. C'est ainsi qu'en jouant avec la forme et l'état de surface de "briques" microscopiques, il est aujourd'hui possible d'assembler de complexes structures tout en contrôlant finement leur microstructure.

Comme bien souvent, de nombreux systèmes naturels n'ont pas attendu que l'homme mette en équation un phénomène physique pour en tirer parti. C'est notamment le cas des fourmis rouges, capables de s'associer en radeau pour flotter à la surface de l'eau et survivre aux inondations, ou de certains insectes qui en déformant l'interface autour d'eux parviennent à se propulser [2].

Un objet de taille micrométrique doit compter sur les imperfections géométriques et chimiques de sa surface pour déformer l'interface autour de lui, alors qu'une bille millimétrique n'use que de son poids pour courber la surface liquide qui l'entoure. C'est ce dernier cas uniquement qui nous intéressera par la suite. L'attraction mutuelle d'un couple de billes sphériques est aujourd'hui relativement bien comprise, mais les effets collectifs qu'un système à n particules identiques peut engendrer comportent encore de nombreuses zones d'ombre. C'est dans ce cadre que nous nous positionnons.

Ici, nous proposons une étude expérimentale des forces capillaires exercées entre deux assemblages de particules millimétriques à une interface eau-huile. Un tel objet, que nous appellerons radeau granulaire de par son aspect, est constitué d'une mono-couche de billes agglomérées à l'interface. Parce que la déformation qu'un tel radeau impose surpasse de plus d'un ordre de grandeur la déformation d'une particule unique, les forces capillaires engendrées sont anormalement grandes, et dépendent fortement du nombre de particules composant le radeau. Parallèlement, avec l'ajout de nouvelles particules, le radeau croît en taille, ce qui conduit à une forte augmentation du frottement visqueux. En jouant expérimentalement avec le nombre de billes, nous parvenons à quantifier son influence tant sur la force capillaire que sur le frottement. Une étude numérique nous permet par ailleurs de décrire le lien qui relie la morphologie d'un radeau au nombre de ses constituants.

À partir de cette compréhension fine de l'interaction entre deux radeaux granulaires de taille donnée, nous généralisons à un système à n radeaux, chacun étant constitué d'un nombre aléatoire de particules. Nous caractérisons la statistique d'agrégation d'un tel système.

Références

1. D. Vella & L. Mahadevan, The Cheerios effect, *Am. J. Phys.*, **73**, 817 (2005).
2. D. L. Hu & J. W. M. Bush, Meniscus-climbing insects, *Nature*, **437**, 733–736 (2005).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Oceanic vortices in a jar: Laboratory experiments in stratified rotating flows

Patrice Le Gal

IRPHE, Aix-Marseille Université, France
legal@irphe.univ-mrs.fr

Oceanic meso-scale lenticular vortices play an important role in the redistribution of heat, salt and momentum in oceans and thus contribute to the climate equilibrium on Earth. Moreover, because of their internal recirculations and of the upwelling they induce, they also isolate, mix, transport, nutriments and phytoplanktons and in consequence participate to the general ecological diversity of the oceans. These vortices are governed by geostrophic and hydrostatic balances between pressure gradients, Coriolis and buoyancy forces from where they get their shape and aspect ratio. We will first derive a relationship for the vortex aspect ratio (vertical half-thickness over horizontal length scale) for steady and slowly evolving vortices in rotating stratified fluids, as a function of the Brunt–Väisälä frequencies within the vortex and in the background fluid outside the vortex, the Coriolis parameter and the Rossby number of the vortex [1]. Our law significantly differs from the generally admitted conjecture derived from quasi-geostrophy. It is however verified by means of stratified flow experiments performed on a rotating table [2], but also with observations of Atlantic meddies and oceanic floatting lenses [3] described in the oceanographic literature. Our study also explains the exceptional longivity of these vortices in the oceans [4]. Finally, motivated by the understanding of the way energy escapes from the mesoscopic oceanic turbulence to feed the smallest oceanic scales where dissipation and mixing occurs, we will describe our ongoing experiments [5] on the unbalanced dynamics of the merging of two lenticular anticyclones where gravity waves emission and vorticity filamentation are expected [6–8].

References

1. P. Hassanzadeh, P. S. Marcus & P. Le Gal, The universal aspect ratio of vortices in rotating stratified flows: Theory and simulation, *J. Fluid Mech.*, **706**, 46–57 (2012).
2. O. Aubert, M. Le Bars, P. Le Gal & P. S. Marcus, The universal aspect ratio of vortices in rotating stratified flows: Experiments and observations, *J. Fluid Mech.*, **706**, 34–45 (2012).
3. H. M. de la Rosa Zambrano, A. Cros, R. Cruz Gomez, M. Le Bars & P. Le Gal, A laboratory study of floating lenticular anticyclones, *Eur. J. Mech. B*, **61**, 1–8 (2017).
4. G. Facchini & M. Le Bars, On the lifetime of a pancake anticyclone in a rotating stratified flow, *J. Fluid Mech.*, **804**, 688–711, (2016).
5. P. Le Gal, R. Cruz Gomez & A Cros, On the coalescence of anticyclones in stratified rotating flows, *Geophys. Res. Abstr.*, **20**, EGU2018-10718 (2018).
6. D. G. Dritschel, Vortex merger in rotating stratified flows, *J. Fluid Mech.*, **455**, 83–101 (2002).
7. Á. Viúudez, Spiral patterns of inertia-gravity waves in geophysical flows, *J. Fluid Mech.*, **562**, 73–82 (2006).
8. J. N. Reinaud & D. Dritschel, The merger of geophysical vortices at finite Rossby and Froude number, *J. Fluid Mech.*, **848**, 388–410 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Ondes internes de gravité générées par convection turbulente

Pierre Léard, Patrice Le Gal & Michael Le Bars

CNRS, Aix Marseille Université, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille (France)
leard@irphe.univ-mrs.fr

Le couplage entre une couche convective et une couche stratifiée est exploré. On trouve cette configuration en deux couches dans l'atmosphère terrestre, dans le coeur de la Terre et dans les étoiles. La dynamique de la couche stratifiée a longtemps été négligée. Cependant, la convection génère des ondes internes de gravité. Ces ondes se propagent dans la couche stratifiée, transportent énergie et quantité de mouvement et peuvent, par interactions non linéaires, donner naissance à un écoulement grande échelle (par exemple le phénomène de Quasi Biennial Oscillation dans l'atmosphère [1]). L'étude du couplage entre ces deux couches est donc primordiale.

Pour étudier ce couplage expérimentalement, on utilise une propriété peu commune de l'eau : son maximum de densité est à 4 °C. Ainsi, en refroidissant une cuve à 0 °C par en dessous et en chauffant le haut de la cuve, la configuration voulue en deux couches apparait spontanément, avec la couche convective située en dessous de la couche stratifiée.

Je présenterai les resultats des expériences PIV menées : caractéristiques spectrales de la convection et des ondes générées, et je discuterai de la présence d'un écoulement grande échelle ainsi que d'une couche intermédiaire située entre la couche convective et la couche stratifiée. Des calculs numériques approfondissant le modèle 1D de Plumb [2] seront aussi présentés.

Références

1. M. P. Balwin, The quasi-biennial oscillation, *Rev. Geophys.*, **39**, 179–229 (2001).
2. R. A. Plumb, The interaction of two internal waves with the mean flow : Implications for the theory of the quasi-biennial oscillation, *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1847–1858 (1977)

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Mesure complète et ultra-rapide de structures non linéaires générées par l'instabilité modulationnelle en optique

Alexandre Lebel[1], Alexey Tikan[1], Stéphane Randoux[1], Pierre Suret[1] & François Copie[1]

Université de Lille, CNRS, UMR 8523 - Physique des Lasers Atomes et Molécules (PhLAM), Lille, France
alexandre.lebel@univ-lille.fr

Le développement de techniques de mesures en temps réel pour des signaux optiques ultra-rapides a suscité une attention considérable ces dernières années, et a contribué à d'impressionnants progrès en recherche tant appliquée que fondamentale. Par exemple, le développement de systèmes appelés lentille temporelle (time-lens) a permis l'observation en intensité d'événements uniques, ultra-courts (ps) typiques de l'instabilité modulationnelle démarrant du bruit autour d'une onde monochromatique [1].

Dans nos travaux, une étape supplémentaire est franchie, grâce à l'enregistrement instantané du champ complexe résolu dans le temps à la sortie d'une fibre optique. Ceci est rendu possible grâce à notre dispositif de lentille temporelle amélioré donnant accès à la phase du champ électrique en plus de son intensité [2]. Il nous est alors possible de réaliser des acquisitions sur une large fenêtre temporelle de 200 ps avec une résolution de l'ordre de la picoseconde, couvrant ainsi un nombre sans précédent de structures non linéaires adjacentes. L'accès à la phase est rendu possible en créant un battement entre le signal à analyser et un signal de référence.

Nous étudions ici le cas d'une onde monochromatique déstabilisée par le bruit (un des scénarios les plus courant de l'instabilité modulationnelle), se propageant dans 500 m de fibre optique. Dans ce système, l'apparition d'une grande variété de solutions exactes de l'équation de Schrödinger non linéaire (1D-NLSE) a été théoriquement prédit, notamment les solitons de Peregrine, les solitons de Kuznetsov–Ma ou les breathers d'Akhmediev [3]. Dans notre cas, nous avons mis à profit la grande fenêtre temporelle d'acquisition de notre système pour observer des structures similaires à ces derniers [4].

Pour ce faire, nous avons ajusté la puissance à l'entrée de la fibre afin que la probabilité d'apparition de structures proches des breathers d'Akhmediev soit maximale en sortie de fibre. Après traitement des données, nous observons effectivement que des trains quasi périodiques d'impulsions apparaissent et notamment que chaque impulsion s'accompagne d'un saut de phase de π comme attendu par la théorie.

Ce dispositif expérimental peut s'appliquer à d'autres régimes d'instabilité et peut être utilisé pour étudier l'impact de différents paramètres, tel que le niveau de bruit qui est susceptible de jouer un rôle crucial pour la dynamique et les propriétés statistiques du système [5].

Références

1. M. Närhi, B. Wetzel, C. Billet, S. Toenger, T. Sylvestre, J. M. Merolla, R. Morandotti, F. Dias, G. Genty & J. M. Dudley, Real-time measurements of spontaneous breathers and rogue wave events in optical fibre modulation instability, *Nat. Commun.*, **7**, 13675 (2016).
2. A. Tikan, S. Bielawski, C. Szwaj, S. Randoux & P. Suret, Single-shot measurement of phase and amplitude by using a heterodyne time-lens system and ultrafast digital time-holography, *Nat. Photon.*, **12**, 228–234 (2018).
3. S. Toenger, T. Godin, F. Dias, M. Erkintalo, G. Genty & J. M. Dudley, Emergent rogue wave structures and statistics in spontaneous modulation instability, *Sci. Rep.*, **5**, 10380 (2015).
4. S. Randoux, P. Suret & G. El, Inverse scattering transform analysis of rogue waves using local periodization procedure, *Sci. Rep.*, **6**, 29238 (2016).
5. D. Agafontsev & V. Zakharov, Integrable turbulence and formation of rogue waves, *Nonlinearity*, **28**, 2791–2821 (2015).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Turbulence d'ondes inertielles générée par instabilité elliptique

Thomas Le Reun, Benjamin Favier & Michael Le Bars

Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Marseille, France
lereun@irphe.univ-mrs.fr

L'interaction gravitationnelle exercée par un objet astrophysique sur une planète produit une déformation de marée et, entre autres, conduit à des oscillations de son taux de rotation appelées « librations ». La combinaison de ces deux effets provoque l'excitation d'ondes intertielles dans le noyau de la planète, ondes qui existent du fait de la force de Coriolis. Ces ondes, dont la fréquence est la moitié de celle des librations, croissent exponentiellement via un mécanisme de résonance paramétrique subharmonique, appelé « instabilité elliptique », pour finalement s'effondrer en turbulence. Cet état turbulent est particulièrement important puisqu'il peut conduire à un effet dynamo et à l'amplification d'un champ magnétique protégeant la planète. L'instabilité elliptique est donc une alternative intéressante aux dynamos convectives qui n'expliquent pas les champs magnétiques des petits astres comme Ganymède. La saturation turbulente de cette instabilité reste cependant mal caractérisée. Elle diffère par ailleurs grandement des écoulements turbulents en rotation étudiés usuellement par forçage stochastique car l'énergie est ici injectée par l'instabilité seulement à travers des ondes inertielles à une fréquence spécifique.

Pour étudier cette saturation turbulente de l'instabilité elliptique, nous avons mis en place une expérience visant à reproduire les effets des marées dans un intérieur planétaire. Un ellipsoïde est monté sur une table tournante imposant un taux de rotation moyen et les oscillations de librations sont imposées par un moteur secondaire embarqué. La taille de l'ellipsoïde et la vitesse de rotation nous permettent d'atteindre des régimes de faibles forçages et faibles taux de dissipation qui sont hors d'atteinte des précédentes expériences et simulations.

Nous observons des résonances d'ondes inertielles dont nous caractérisons la saturation turbulente par des mesures de vélocimétrie par images de particules (PIV). L'analyse temporelle des écoulements ainsi obtenus indique qu'aux faibles amplitudes de libration, la turbulence excitée par l'instabilité elliptique est dominée par la présence d'ondes inertielles à des fréquences diverses et qui ne sont pas résonantes avec le forçage. Celles-ci sont excitées par les ondes instables primaires via une interaction non-linéaire résonante appelée « résonance triadique ». En augmentant l'amplitude des librations, cet état s'efface au profit d'un écoulement dominé par un vortex géostrophique dont l'émergence est due à une instabilité secondaire que nous caractérisons.

Finalement, nous discutons la pertinence des ces deux régimes dans les noyaux planétaires, dans lesquels à la fois les forçages de librations et la dissipation sont très faibles. Nous montrons que dans cette limite, la saturation turbulente de l'instabilité elliptique conduit à une turbulence d'ondes, i.e. un état où un grand nombre d'ondes inertielles interagissent entre elles de manière non-linéaire et résonante. L'existence et les propriétés de la dynamo et du champ magnétique produit par un tel état restent à explorer.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Transition to turbulence in Couette-Poiseuille flow

Tao Liu[1], Lukasz Klotz[2], Benoît Semin[1], Ramiro Godoy-Diana[1] & José Eduardo Wesfreid[1]

[1] Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (PMMH), UMR 7636 CNRS, ESPCI, Paris, France
[2] Institute of Science and Technology Austria (IST Austria)
tao.liu@espci.fr

The transition to turbulence in confined shear flow, like plane Couette flow and circular Poiseuille flow, is sub-critical. It is characterized by the coexistence of laminar and turbulent regions. The flow is organised in the form of turbulent spots in the transition regime. In order to study this scenario, an experimental setup has recently been constructed by combining plane Couette and plane Poiseuille flow to generate a zero mean flux flow in the channel [1]. The turbulent spots are advected with a velocity close to the mean velocity which is near zero in this setup. This allows us to measure the evolution of the spots for a long time with one single camera.

By using Particle Image Velocimetry (PIV), we characterize the flow inside turbulent spots, where streamwise streaks and rolls can be observed. We obtain experimental evidence of transient growth of turbulent spots introduced by external forcing localized in time and space. Experimental results for the maximal gain and the time when it occurs are compared to theoretical prediction [2]. At moderate Reynolds number, we observe large scale flows and oblique turbulent bands with an angle around 44° which is close to the numerical prediction in plane Poiseuille flow at $\mathrm{Re} = 700$ [3].

We are currently employing a stereo-PIV system to measure 3D velocity fields and investigate quantitatively the traveling waves that have been observed in plane Poiseuille flow experiments [4].

References

1. L. Klotz & J. E. Wesfreid, *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 043904 (2017).
2. L. Klotz *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **829**, R4 (2017).
3. X. Xiangming *et al.*, *Phys. Fluids*, **27**, 041702 (2015).
4. G. Lemoult *et al.*, *Eur. Phys. J. E*, **37**, 25 (2014).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Un modèle fractionnaire de trafic

Erick Javier López-Sánchez[1] & Patricia Eugenia Olivera-Martínez[2]

[1] Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Coyoacan CDMX 04510, México
[2] Seminario Estudios Urbanos Críticos, Depto. Geografía, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Coyoacan CDMX 04510, México
lsej@ciencias.unam.mx

La croissance démographique mondiale a entraîné une augmentation de la demande de biens et de services au sein de la population. Cela implique qu'il devient nécessaire de transporter de la nourriture, des vêtements, du carburant, de l'eau, des personnes, etc. pour répondre aux besoins humains. La circulation des automobiles dans les villes grandes et moyennes est devenue un problème de mobilité urbain important, en particulier dans les pays où la planification urbaine est mauvaise ou inexistante. La vitesse moyenne de déplacement a tendance à diminuer, ce qui entraîne une augmentation du temps de parcours. Dans la zone métropolitaine de la vallée du Mexico, le trajet dure en moyenne 90 minutes. Parmi les nombreux modèles trouvés dans la littérature, le modèle de trafic de Greenberg [1] a été développé comme une analogie de la dynamique d'un écoulement compressible. Dans ce travail, une étude sur le comportement des solutions du modèle macroscopique fractionnaire modifié de Greenberg est développée. Les résultats sont comparés aux solutions du modèle d'origine. Nous montrons que le modèle fractionnaire réduit la vitesse par rapport au modèle non fractionnel.

Références

1. H. Greenberg, An analysis of traffic flow, *Oper. Res.*, **7**, 79–85 (1959).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dynamics of single rising bubble in suspension

Madec Christopher[1], J. John Soundar Jerome[2] & Joubaud Sylvain[1]

[1] Univ. Lyon, ENS de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France
[2] Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS-UMR 5509, Boulevard 11 novembre, 69622 Villeurbanne CEDEX, Lyon, France
christopher.madec@ens-lyon.fr

Suspensions (i.e. particle-laden fluids) are prevalent in a wide range of industrial [1] and natural processes [2]. Mixing and instabilities occurring during gas release in such multiphase flows [3] may be crucial, for example, in oil recovery, gas sequestration, deep-sea mining. In this context, the present work studies the motion of a single bubble using a simple table-top experiment which consist of a neutrally buoyant non-Brownian suspension inside a Hele-Shaw cell. By carefully controlling the volume fraction of grains in the suspending Newtonian fluid (water/UCON^{TM}mixture), the bubble rise velocity is measured for various bubble diameters. The evolution of the bubble rising velocity with its diameter is similar to that the one it would have in a classical Newtonian fluid [4]. As expected, when the packing fraction is increased and therefore, the suspension effective viscosity [5], the rise velocity drops. Nonetheless, the bubble can present a deformed shape and may fragment at large packing fraction.

References

1. L.-S. Fan, *Gas–Liquid–Solid Fluidization Engineering*, Butterworths, Stoneham, MA, USA (1989).
2. H. Svensen*et al.*, Release of methane from a volcanic basin as a mechanism for initial Eocene global warming, *Nature*, **429**, 542–545 (2004).
3. A. Woods, Turbulent plumes in nature, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **42**, 391–412 (2010).
4. T. Maxworthy, Bubble formation, motion and interaction in a Hele-shaw, *J. Fluid Mech.*, **173**, 95–114 (1986).
5. E. Guazzelli & O. Pouliquen, Rheology of dense granular suspensions, *J. Fluid Mech*, **852**, P1 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Subcritical transition to turbulence in wall-bounded flows: The case of plane Poiseuille flow

Paul Manneville[1] & Masaki Shimizu[2]

[1] Hydrodynamics Laboratory, CNRS-UMR7646, École Polytechnique, Palaiseau, 91128 France
[2] Graduate School of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka, 560-0043 Japan
paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

In wall-bounded flows the transition to turbulence is sub-critical and develops all along a transitional range marked by the spatial coexistence of laminar and nontrivial flow at intermediate values of the Reynolds number R [1]. Pomeau's early conjecture [2] that this transition is governed by directed percolation (DP) has recently received some support from experiments in a quasi-one-dimensional (1D) cylindrical Couette flow configuration [3] and by numerical simulations of a model of shear flow without walls in a quasi-two-dimensional (2D) geometry [4], among a few other cases. Pressure-driven flow through a wide rectangular duct, usually called *channel flow* or plane Poiseuille flow, is one such case for which agreement has been found with 2D-DP universality in a decay experiment from uniform turbulence [5]. This result is however contradicted by the observation of oblique localized turbulent bands (LTBs) in numerical [6] or laboratory experiments [7]. Our numerical study reveals how these two contradictory results can be reconciled by identifying a transition that preempts the DP scenario slightly above its critical point. When the turbulent fraction is small enough, at decreasing R, LTBs develop from an intermittent loose continuous laminar-turbulent network. Within the LTB regime, a threshold is found separating an upper range where LTBs obliquely propagate symmetrically with respect to the stream-wise direction, hence genuinely 2D turbulence invasion, from a lower range where all the LTBs move essentially in one of the two in-plane directions allowed by the flow symmetries. A simple differential model is developed for this symmetry breaking, supporting the super-critical pitch-fork character of the bifurcation at decreasing R. The DP process however keeps some relevance since, above that threshold and within the laminar-turbulent network regime, the turbulent fraction is seen to grow as $(1 - R_{\mathrm{DP}}/R)^{\beta}$ where R_{DP} is the extrapolated DP critical point and $\beta \approx 0.58$ is close to the standard value for DP in 2D. We conclude that the development of LTBs is impeded when the particular protocol described in [5] is followed, while the DP critical point becomes unreachable in more typical circumstances. On general grounds, we observe that abstract considerations legitimating an expectation for universality may be smashed by the existence of specific processes developing in the system of interest.

References

1. P. Manneville, *Mech. Eng. Rev.*, **3**, 15 (2016).
2. Y. Pomeau, *Physica D*, **23**, 3 (1986).
3. G. Lemoult *et al.*, *Nat. Phys.*, **12**, 254 (2016).
4. M. Chantry *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **824**, R1 (2017).
5. M. Sano & K. Tamai, *Nat. Phys.*, **12**, 249 (2016).
6. J. Tao *et al.*, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 011902 (2018).
7. C. S. Paranjape *et al.*, http://www.delegia.com/app/data/8684/Abstract/29766/ETC16_Paranjape.pdf

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Description N-corps de l'interaction onde–particule dans une structure périodique

Damien F. G. Minenna[1,2,3], Yves Elskens[2], Frédéric André[3], Fabrice Doveil[2] & Alexandre Poyé[2]

[1] Centre National d'Études Spatiales, FR-31401 Toulouse cedex 9, France
[2] Aix-Marseille Université, CNRS, PIIM, UMR 7345, FR-13397 Marseille, France
[3] Thales, FR-78140 Vélizy, France
damien.minenna@univ-amu.fr

En électrodynamique classique et en physique microscopique des plasmas, la description N-corps de l'interaction onde-particule a longtemps été jugée impraticable. Suivant [1, 2], nous montrons que cette description est une alternative viable à la traditionnelle approche vlasovienne (cinétique), notamment pour la modélisation temporelle des turbulences et instabilités engendrées par la dynamique non-linéaire des particules (piégeage, chaos, couplages à trois ou quatre ondes).

Le principal problème avec la dynamique N-corps est le nombre, a priori faramineux, de degrés de liberté, plus important que pour les descriptions cinétiques. Dans les structures périodiques (tubes à ondes progressives, lasers à électrons libres ou accélérateurs de particules), nous contournons cette difficulté grâce à un modèle de réduction [3] des champs en domaine temporel. Cette réduction nous a permis de construire un modèle hamiltonien auto-cohérent N-corps [4] reposant sur l'échange de quantité de mouvement près de la résonance (lorsque la vitesse de phase de l'onde est proche de la vitesse des particules).

Dans notre exposé, nous présentons notre approche théorique et nos résultats numériques. Notre cas d'étude est la modélisation des tubes à ondes progressives qui, en plus d'être des amplificateurs d'ondes, constituent un outil indispensable pour étudier l'amortissement Landau [5] et plus généralement la turbulence plasma [6, 7]. Grâce au modèle hamiltonien, nous avons construit [8] un algorithme symplectique [9] permettant une caractérisation détaillée des instabilités de l'interaction. Les performances de notre algorithme sont comparées avec des approches cinétiques (*particle-in-cell PIC*) et démontrent bien la viabilité de la description N-corps.

Références

1. Y. Elskens & D. F. Escande, *Microscopic dynamics of plasmas and chaos*, IoP publishing, Bristol (2003).
2. D. F. Escande, D. Bénisti, Y. Elskens, D. Zarzoso & F. Doveil, Basic microscopic plasma physics form N-body mechanics, A tribute to Pierre-Simon de Laplace, *Rev. Mod. Plasma Phys.*, **2**, 9–76 (2018).
3. F. André, P. Bernardi, N. M. Ryskin, F. Doveil & Y. Elskens, Hamiltonian description of self-consistent wave-particle dynamics in a periodic structure, *Europhys. Lett.*, **103**, 28004 (2013).
4. D. F. G. Minenna, Y. Elskens, F. André & F. Doveil, Electromagnetic power and momentum in N-body Hamiltonian approach to wave-particle dynamics in a periodic structure, *Europhys. Lett.*, **122**, 44002 (2018).
5. F. Doveil, D. F. Escande & A. Macor, Experimental observation of nonlinear synchronization due to a single Wave, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 085003 (2005).
6. A. Macor, F. Doveil & Y. Elskens, Electron climbing a "devil's staircase" in wave–particle interaction, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 264102 (2005).
7. F. Doveil, Y. Elskens & D. F. G. Minenna, Wave-particle interaction studied in a traveling wave tube, in *20th International Congress on Plasma Physics ICPP 2018, Vancouver*, conférence invitée (2018).
8. D. F. G. Minenna *et al.*, DIMOHA: Traveling-wave tube simulations including band edge and multitone operations, in *20th International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2019), Busan*, soumis (2019).
9. E. Hairer, C. Lubich & G. Wanner, *Geometric numerical integration*, Springer, New York (2010).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Morphogenesis and morphodynamics of sandy beaches

Eduardo Monsalve[1], S. Courrech du Pont[1] & B. Thiria[2]

[1] Lab. MSC, Universite Paris Diderot, UMR 7057 CNRS, Paris, France
[2] Lab. PMMH, ESPCI-Paris, UMR 7636 CNRS, Paris, France
eduardo.monsalvegutierrez@univ-paris-diderot.fr

In this experimental project, we study the development of a granular cross-shore beach profile under water wave forcing. We generate waves in a narrow flume 3 m long and 8 cm wide, which contains light plastic particles. Waves propagate through a deep water region ($h_0 \approx 10$ cm) before attaining an erodible beach. The shear stress exerted by the waves on the granular bottom produces transport and modifies the beach profile until an equilibrium is reached. Using a homogeneous lighting from the side, we measure by contrast the incident wave amplitude and reflection coefficient in the deep region, as well as the wave asymmetry and wave height in the breaking zone. Thus far two parameters are controlled: incident wavenumber k_0 and wave amplitude a_0. By keeping constant the deep water depth, we change the initial beach slope, showing that this initial condition does not influence the final profile in the zone after breaking (swash zone).

By using wave energy conservation and wave breaking criteria, we predict and measure experimentally the breaking depth h_b and the length of the swash zone, where the breaking point is indicated by the maximum wave height H_b and the minimum mean water level. Our experiments follow the relation $h_b = (\tanh k_0 h_0 / (\gamma k_0))^{1/5} H_0^{4/5}$ [1], where k_0, h_0 and H_0 correspond to the incident wavenumber, depth and wave height, respectively; and $\gamma = H_b/h_b$ is the breaking ratio ($\gamma \approx 0.8$, given by the literature in ocean waves, agrees very well with our experiments).

The beach length, slope and curvature are determined by the several contributions, among which stand out the grain density and size, the shear stress and the wave dissipation [2]. By measuring the surface displacement in the swash zone and using mass conservation, we estimate the fluid velocity near the bottom and consequently the critical shear stress. In addition, we measured experimentally the viscous fall velocity of the grains u_∞. These variables, together with the reflection coefficient which sets the net mass transport, permit us to model and verify experimentally the beach cross-shore profile. Particular attention is given to the beach step [3, 4] generated by a backwash vortex [5] under certain physical conditions.

In the following, our goal is to obtain quantitative results describing the dynamic of the phenomenon and contributing to the physical understanding of the beach morphology.

References

1. A. Saleh Salem, A. Jarno-Druaux & F.Marin, *J. Coastal Res.*, **57**, 139–143 (2011).
2. L. D. Wright & A. D Short, *Mar. Geol.*, **56**, 93–118 (1984).
3. B. O. Bauer & J. R. Allen. *Mar. Geol.*, **123**, 143–166, 1995.
4. M. Larson & T. Sunamura, *J. Sediment. Res.*, **63**, 495–500 (1993).
5. N. Matsunaga & H. Honji, *J. Fluid Mech.*, **99**, 813–815 (1980).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

États transitoires dans l'écoulement de Couette plan

Romain Monchaux & David De Souza

IMSIA, ENSTA ParisTech, CNRS, CEA, EDF, Institut Polytechnique de Paris, 828 Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France
monchaux@ensta.fr

Les écoulements cisaillés de paroi sont le siège d'une transition à la turbulence complexe du fait de son caractère sous-critique [1, 2]. Cette transition constitue l'un des plus vieux problèmes ouverts de la mécanique et la comprendre davantage ouvrirait la voie à des stratégies de contrôle. Dans le voisinage du seuil de transition, la dynamique des zones turbulentes met en jeu un grand nombre d'échelles temporelles et spatiales. Comme ces structures turbulentes sont advectées à la vitesse débitante moyenne, la plupart des dispositifs expérimentaux ne permettent pas de les étudier sur des temps longs.

Nous utilisons un dispositif de Couette plan à deux parois mobiles pour lequel la vitesse débitante est nulle [4] et nous pouvons donc analyser les structures turbulentes sur des temps arbitrairement longs. Les mesures sont réalisées à l'aide de vélocimétrie par Imagerie de particules à haute résolution spatiale qui nous permettent d'avoir accès à toutes les échelles temporelles et spatiales de l'écoulement considéré. Notre étude se concentre sur le régime transitionnel pour lequel zones laminaires et turbulentes coexistent dans l'espace physique. Nous cherchons à caractériser les états stationnaires (s'ils existent) dans ce régime transitionnel. Pour ce faire, nous préparons l'écoulement dans un état uniformément turbulent à un nombre de Reynolds initial $R_i = 480$ puis nous abaissons le nombre de Reynolds à un rythme donné $\Delta R/s$ jusqu'à un nombre de Reynolds final R_f. La fraction de l'espace physique qui est dans l'état turbulent (la fraction turbulente) est mesurée en fonction du temps pour permettre un suivi global de la dynamique complexe sur plusieurs milliers de temps d'advection. Nous posons les questions suivantes : (i) le système relaxe-t-il sur des états asymptotiques donnés, et si oui, de quoi dépendent les états observés (R_F, $\Delta R/s$,...) ? (ii) indépendamment de ces éventuels états asymptotiques, quelles sont les caractéristiques de la dynamique y conduisant ?

Nous avons fait varier les deux paramètres de contrôle de notre système dans une large gamme : R_f entre 300 et 410 (pour $R > 300$ la turbulence ne se maintient jamais, pour $R > 410$, l'écoulement est uniformément turbulent) ; $\Delta R/s$ entre 0,3 et 1000. Nous montrons qu'un état asymptotique semble toujours être atteint par le système et que cet état ne semble dépendre que de R_f, du moins en ce qui concerne sa fraction turbulente. La dynamique de retrait de la turbulence dépend elle en revanche fortement de $\Delta R/s$. En particulier, nous montrons que dans environ la moitié de nos expériences la dynamique de retrait ralentit sur des états transitoires pour lesquels la fraction turbulente reste statistiquement stationnaire. Ces états sont associés à des valeurs quantifiées de la fraction turbulente (typiquement 5%, 10%, 30% et 50%) autour desquelles le système fluctue pendant un temps arbitrairement long avant de relaxer vers l'état asymptotique ou vers un autre état stationnaire de fraction turbulente éventuellement plus élevée. Si ces états transitoires avaient déjà été mentionné brièvement dans la littérature [3], nous en proposons ici une caractérisation complète et nous soulevons des questions concernant leur nature et particulièrement leur lien avec la topologie de l'espace des phases.

Références

1. F. Daviaud, J. Hegseth & P. Berge, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2511–2514 (1992).
2. N. Tillmark & P. H. Alfredsson, *J. Fluid Mech.*, **235**, 89–102 (1992).
3. A. Prigent & O. Dauchot, in *IUATM Symposium on laminar-turbulent transition and finite amplitude solutions*, T. Mullin & R. Kerswell (éditeurs), pp. 195–219 (2005).
4. M. Couliou & R. Monchaux, *Phys. Rev. E*, **93**, 013108 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Encodage d'une information sinusoïdale dans un circuit neuronal et résonances induites par une perturbation

Savério Morfu, Maxime Bordet & Mathieu Rossé

ImVia EA 7535, Univ Bourgogne Franche-Comté, Aile des sciences de l'ingénieur BP 47870, 21078 Dijon Cedex
smorfu@u-bourgogne.fr

Comprendre comment les systèmes neuronaux encodent l'information est toujours une question ouverte qui continue de faire l'objet de bon nombre de travaux de recherche. En effet, l'efficacité des systèmes neuronaux à traiter l'information a permis le développement d'une grande variété de traitements bio-inspirés. Plus particulièrement, les réseaux cellulaires non linéaires (CNN) peuvent être vus comme des circuits électroniques qui s'inspirent du comportement des neurones pour réaliser des tâches de traitement du signal et des images [1, 2]. En effet, ces circuits neuronaux sont décrits par les mêmes équations différentielles non linéaires que les modèles neuronaux dont ils s'inspirent ; ce qui leur permet de tirer profit des propriétés des systèmes non linéaires. Parmi les propriétés des systèmes non linéaires se trouvent les phénomènes de résonances induits par des perturbations, telles que la résonance stochastique et la résonance vibrationnelle [3–8]. Ces phénomènes consistent à améliorer la réponse d'un système non linéaire à une excitation d'entrée par une quantité appropriée d'une perturbation.

Dans ce contexte de circuits bio-inspirés, il est crucial de caractériser, dans un premier temps, la réponse d'un seul neurone, ou circuit neuronal, à différents type de stimulation. Par exemple, il a pu être montré qu'un stimulus sinusoïdal pouvait donner naissance à différents types de mode dépendant de l'amplitude et de la fréquence du stimulus [9]. Ces modes correspondent à la production d'un certains nombres de potentiels d'action durant une période de l'excitation sinusoïdale et permettent d'établir le diagramme d'encodage de cette excitation.

Cependant, il convient de prendre en compte les perturbations qui peuvent entrer en jeu lors du processus d'encodage de l'excitation [10, 11]. En ce sens, il a pu être montré qu'un neurone pouvait utiliser une perturbation haute fréquence pour améliorer la détection d'un stimulus basse fréquence via les phénomènes de résonance vibrationnelle. En effet, si on analyse l'amplitude du spectre du signal en sortie du système, il peut présenter des résonances multiples en fonction de la fréquence de la perturbation. La prédiction de ces résonances s'avère donc crucial pour en tirer bénéfice. C'est l'objet de cette communication. Après avoir brièvement présenté le circuit neuronal et précisé son régime de fonctionnement, nous établissons un diagramme d'encodage du stimulus sinusoïdal. Nous étudions ensuite l'impact d'une pertubation haute fréquence sur la détection de ce stimulus basse fréquence. En particulier, nous interprêtons les résonances qui ont lieu à l'aide du diagramme d'encodage précédemment établi.

Références

1. L.O. Chua & T. Roska, Cellular Neural Networks and Visual Computing : Foundation and Application, *Cambridge University Press* (2002).
2. S. Morfu, B. Nofiele & P. Marquié, *Phys. Lett. A*, **367**, 192–198 (2007).
3. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung & F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223–287 (1998).
4. P. Balenzuela, H. Braun & D. R. Chialvo, *Contemp. Phys.*, **53**, 17–38 (2011).
5. P. S. Landa & P. V. E. McClintock, *J. Phys. A*, **33**, L433–L438 (2000).
6. E. Ullner, A. Zaikin, J. García-Ojalvo, R. Báscones & J. Kurths, *Phys. Lett. A*, **312**, 348 (2003).
7. M. Bordet & S. Morfu, *Electron. Lett.*, **48**, 903–905 (2012).
8. M. Bordet, S. Morfu & P. Marquié, *Chaos Soliton. Fract.* **78**, 205–214 (2015).
9. Y.-Q. Che, J. Wang, W. Jie Si & X. Y. Fei, *Chaos Soliton. Fract.*, **39**, 454 (2009).
10. L. Yang, W. Liu, M. Yi, C. Wang, Q. Zhu, X. Zhan & Y. Jia, *Phys. Rev. E*, **86**, 016209 (2012).
11. S. Morfu & M. Bordet, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **55**, 277–286 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

États stationnaires des plasmas de tokamak en MHD visco-résistive

Hanen Oueslati[1,2], Marie-Christine Firpo[1] & Aziz Salhi[2]

[1] Laboratoire de Physique des Plasmas (LPP), Ecole polytechnique, Palaiseau, France
[2] Laboratoire Matériaux Organisations et Propriétés (LMOP), Université de Tunis el Manar, Tunisie
hanen.oueslati@lpp.polytechnique.fr

La détermination classique des états d'équilibre des plasmas de tokamaks repose sur la résolution de l'équation de Grad-Shafranov. On y suppose que le plasma, vu comme un fluide conducteur, a une vitesse nulle. Experimentalement, il existe de nombreuses observations d'une rotation spontanée dans les tokamaks notamment dans la direction toroidale. Cette rotation du plasma s'avère avoir des effets très importants sur l'amélioration du confinement et le passage dans le mode H de confinement amélioré.

Pour éclaircir ces observations expérimentales, nous nous proposons de déterminer numériquement les états stationnaires axisymmétriques des équations non-linéaires de la magnétohydrodynamique visco-resistive obtenues en réintroduisant le terme convectif. Cette étude doit prendre en compte le forçage dû à la présence d'un champ électrique extérieur dans la direction toroïdale servant à créer le courant toroïdal nécessaire dans un tokamak à la création de la composante poloïdale du champ magnétique.

Nous présenterons des résultats numériques préliminaires obtenus en utilisant le code open source FreeFem++ dans les géométries des tokamaks JET et ITER. Nous avons considéré des valeurs réalistes de la résistivité η et nous avons fait varier la viscosité ν , dont l'ordre de grandeur réaliste est mal connu. Un résultat intéressant est que l'ordre de grandeur de la vitesse toroidale pour des grandes valeurs du nombre de Hartmann $\mathrm{Ha} = (\eta\nu)^{-1/2}$ est comparable à celui donné par les mesures expérimentales dans JET. De plus, toutes choses égales par ailleurs, la vitesse toroidale maximale est une fonction croissante de la température du plasma et est plus grande en géometrie ITER que dans JET.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Caractérisation et modélisation de la morphogenèse urbaine

Romain Pousse & Stéphane Douady

Laboratoire Matière et Systèmes Complexes - UMR CNRS - Université Paris Diderot , 10 rue Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13
romain.pousse@univ-paris-diderot.fr

La ville est un système composé de multiples structures, d'activités, d'espaces ou de réseaux en perpétuelle évolution. Au vu de sa complexité, elle devient un objet d'étude difficile à appréhender dans sa globalité. Par contre, s'intéresser à une de ses composantes a été à l'origine de nombreuses études scientifiques de tout horizons et de tout domaines. C'est cette démarche que nous avons entrepris en s'intéressant au réseau viaire. A partir de cet élément, nous n'essayons pas de comprendre le développement de la ville dans son ensemble mais d'en déduire le maximum d'information en lien avec la morphogenèse urbaine. Nous faisons l'hypothèse que ce réseau est un indicateur sensible au développement urbain. En effet, ce réseau est d'une forte stabilité temporelle comme on peut le constater encore actuellement dans de nombreuses villes où des rues datent de plusieurs siècles malgré diverses catastrophes naturelles ou humaines qui ont pu les frapper. Il n'en reste pas moins une structure complexe n'ayant pas forcément la même utilité ou la même architecture. C'est pourquoi le pari qui a été fait est d'étudier, non pas toutes les caractéristiques de ce réseau, mais simplement son squelette, sa trace spatiale. L'intérêt est de développer des outils de compréhension de cette structure et de trouver des mécanismes analogues dans la nature ou par l'intermédiaire de modèles artificiels. Une collaboration transversale entre « modélisateurs » et spécialistes de Sciences Humaines et Sociales devient alors essentielle afin que les principes méthodologiques de ces premiers soient validé par les seconds. Nous montrerons les premières tentatives de modèles artificiels de création de réseaux de voies effectuées depuis le début de ma thèse, qui essaient de reproduire la distribution des longueurs, distribution en loi log-normale dont nous avons pu constater son caractère universel dans de nombreuses villes (de Paris à San Francisco jusqu'à l'île de Manhattan) ainsi que différents essais méthodologiques pour caractériser les formes de réseaux observées.

Références

1. T. Courtat, C. Gloaguen & S. Douady, Mathematics and morphogenesis of cities: A geometrical approach, *Phys. Rev. E*, **83**, 036106 (2011).
2. T. Courtat, *Walk on City Maps-Mathematical and Physical phenomenology of the City, a Geometrical approach*, PhD Thesis, Université Paris-Diderot-Paris (2012). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00714310
3. C.-N. Douady et l'équipe Morphocity, *De la trace à la trame. La voie, lecture du développement urbain*, L'Harmattan (2014).
4. E. Katifori & M. O. Magnasco, Quantifying loopy network architectures, *PLoS ONE*, **7**, e37994 (2012).
5. C. Lagesse, P. Bordin, S. Douady, A spatial multi-scale object to analyze road networks, *Network Sci.*, **3**, 156–181 (2015).
6. C. Lagesse, *Lire les lignes de la ville. Méthodologie de caractérisation des graphes spatiaux*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot-Sorbonne-Paris Cité (2015).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Étude de la turbulence à très hauts Re et Gr dans le grand Taylor–Couette thermique

Harminder Singh, Arnaud Prigent, Hugues Besnard, Antoine Bonnesoeur, Olivier Crumeyrolle & Innocent Mutabazi

LOMC, 53 rue de Prony, CS 80 540, 76058 Le Havre - France
arnaud.prigent@univ-lehavre.fr

Ces dernières années, la turbulence ultime, quand même les couches limites deviennent turbulentes, a fait l'objet de plusieurs études dans le système de Taylor–Couette où la rotation de l'un ou des deux cylindres était à son origine [1–5]. Dans le système de Rayleigh–Bénard, où l'écoulement et donc la turbulence sont induits par un gradient de température, le régime de turbulence ultime a aussi été l'objet de plusieurs travaux ces derniers temps [6–9]. Nous présentons ici le grand Taylor–Couette thermique (GTCT), un nouveau système expérimental de Taylor–Couette de grande dimension dédié à l'étude de la turbulence développée générée par l'action simultanée de l'instabilité centrifuge liée à la rotation du cylindre intérieur et de la convection induite par un gradient radial de température. Le système est constitué de trois cylindres concentriques. Les rayons de ses cylindres intérieur et extérieur mesurent 132,5 et 152,5 mm produisant un entrefer de 20 mm et un rapport des rayons $\eta = 0{,}869$. La hauteur de 960 mm confère au système un rapport d'aspect $\Gamma = 43$. Le cylindre extérieur est fixe et la vitesse de rotation maximale du cylindre intérieur permet d'atteindre un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_i = 0{,}5 \times 10^6$. Les températures des cylindres sont contrôlées indépendamment à $\pm 1\,\%$. Le cylindre intérieur peut être chauffé à 40 °C par le rayonnement de résistances contrôlées à l'aide de pyromètres et le cylindre extérieur peut être refroidi à 10 °C par une circulation d'eau entre lui et le cylindre d'isolation. Nous pouvons obtenir ainsi une différence de température de 30 °C et un nombre de Grashof $\mathrm{Gr} \simeq 10^6$. Le fond et le cylindre extérieur et le cylindre d'isolation sont en verre transparent et permettent un accès optique complet depuis le côté ou le bas dont nous profité pour réaliser des mesures de vitesse par PIV et des mesures de température à l'aide de cristaux liquides thermochromiques (CLT) et par LIF dans les plans $(r\text{–}\theta)$ ou $(r\text{–}z)$. Le système est également équipé d'un couplemètre dont nous présentons les mesures.

Références

1. B. Eckhardt, S. Grossmann & D. Lohse, Torque scaling in turbulent Taylor–Couette flow between independently rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, **581**, 221–250 (2007).
2. S. Grossmann, D. Lohse & C. Sun, High–Reynolds number Taylor–Couette turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **48**, 53–80 (2016).
3. S. G. Huisman, D. P. M. Van Gils, S. Grossmann, C. Sun & D. Lohse, Ultimate turbulent Taylor–Couette flow, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 024501 (2012).
4. S. G. Huisman, S. Scharnowski, C. Cierpka, C. J. Kähler, D. Lohse & C. Sun, Logarithmic boundary layers in strong Taylor–Couette turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 264501 (2013).
5. R. Ostilla-Mónico, E. P. van der Poel, R. Verzicco, S. Grossmann & D. Lohse, Boundary layer dynamics at the transition between the classical and the ultimate regime of Taylor–Couette flow, *Phys. Fluids*, **26**, 015114 (2014).
6. S. Grossmann & D. Lohse, Multiple scaling in the ultimate regime of thermal convection, *Phys. Fluids*, **23**, 045108 (2011).
7. S. Grossmann & D. Lohse, Logarithmic temperature profiles in the ultimate regime of thermal convection, *Phys. Fluids*, **24**, 125103 (2012).
8. F. Chillà, M. Rastello, S. Chaumat & B. Castaing, Ultimate regime in Rayleigh–Bénard convection: The role of plates, *Phys. Fluids*, **16**, 2452–2456 (2004).
9. G. Ahlers, E. Bodenschatz & X. He, Ultimate-state transition of turbulent Rayleigh–Bénard convection, *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 054603 (2017).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Forces on capillary floaters

Giuseppe Pucci[1,2], Ian Ho[1] & David M. Harris[1]

[1] Brown University, School of Engineering, 184 Hope St., Providence (RI), United States
[2] Current affiliation: Univ Rennes, CNRS, IPR (Institut de Physique de Rennes) UMR 6251, F35000 Rennes, France
giuseppe.pucci@univ-rennes1.fr

A body can be supported at the water–air interface by virtue of the equilibrium among its weight, surface tension and hydrostatic forces. Quantifying the forces these bodies experience is of critical importance for understanding the motion of living organisms at the water-air interface [1] and can inform the design of aerial-aquatic microrobots for environmental exploration and monitoring [2]. Here we measure and rationalize two forces experienced by *centimetric bodies* at the water-air interface: capillary attraction force and sliding friction.

It is well known that two particles trapped at a fluid interface may interact due to the deformation they induce on the free surface [3]. This capillary force has been previously measured for bodies at the sub-millimetric scale [4]. We present direct measurements of the force between centimetric disks resting at air-water interface. Using a novel experimental setup, we characterize how the attraction force depends on the disk mass, diameter, and relative spacing, and compare our measurements with theoretical predictions.

Second, we experimentally show that the motion of centimetric "sliders" is dominated by skin friction due to the boundary layer that forms in the fluid beneath the body, which results in a friction force $F_D \propto v^{3/2}$ [5]. We develop a simple model that considers the boundary layer as quasi-steady, and is able to capture the experimental behaviour for a range of body sizes, masses, shapes and fluid viscosities. We define a dimensionless *sliding number* as the ratio between the fluid inertia and the body inertia, which allows us to assess the regime of validity of our model. Furthermore, we demonstrate that friction can be reduced by modification of the body's shape or bottom topography.

References

1. J. W. M. Bush & D. L. Hu, Walking on water: Biolocomotion at the interface, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **38**, 339–369 (2006).
2. Y. Chen *et al.*, Controllable water surface to underwater transition through electrowetting in a hybrid terrestrial-aquatic microrobot, *Nat. Commun.*, **9**, 2495 (2018).
3. D. Vella & L. Mahadevan, The "Cheerios effect", *Am. J. Phys.*, **73**, 817–825 (2005).
4. C. D. Dushkin *et al.*, Lateral capillary forces measured by torsion microbalance, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3454–3457 (1995).
5. G. Pucci, I. Ho & D. M. Harris, Friction on water sliders, under review in *Sci. Rep.* (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Bi-stabilité diffusive-convective en présence d'un changement de phase

Jhaswantsing Purseed, Benjamin Favier & Laurent Duchemin

Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille, France
purseed.j@gmail.com

L'évolution d'un front de changement de phase solide-liquide (le milieu étant supposé pur et incompressible) est étudiée numériquement en présence d'un gradient de température instable dans la phase liquide. Ce problème peut être vu comme un un système classique de Rayleigh-Bénard où l'une des parois solides peut fondre ou se solidifier [1]. Ce système présente des états d'équilibre lorsque les flux thermiques à travers le solide et dans le liquide sont égaux. L'équilibre conductif a pour caractéristiques une inferace plane, pas de mouvement du liquide et des flux diffusifs dans chacune des phases. L'équilibre convectif présente une interface déformée, des rouleaux de convection dans la phase liquide avec un flux convectif associé. En supposant que la convection dans le liquide se comporte comme la convection classique de Rayleigh-Bénard [2, 3], il est possible de prédire la hauteur à l'équilibre.

La transition entre un équilibre conductif ou un équilibre convectif se déduit de la stabilité de l'équilibre diffusif. Cette dernière dépend du nombre de Rayleigh, $\mathrm{Ra}\,(h_e)$ basé sur la hauteur moyenne de la couche liquide à l'équilibre diffusif. Dans notre configuration, le nombre de Rayleigh critique, au-delà, duquel on observe l'instabilité, décroît lorsque l'épaisseur de la couche solide augmente [4].

Finalement, lorsqu'on se place proche du seuil critique et que l'on fait varier la hauteur initiale de l'interface, on observe une dépendance aux conditions initiales sous la forme d'une bi-stabilité entre deux états, diffusif et convectif. La nature sous-critique de cette transition est confirmée par une étude de perturbation à amplitude finie d'un équilibre diffusif proche du seuil.

Références

1. G. M. Vasil & M. R. E. Proctor, Dynamic bifurcations and pattern formation in melting-boundary convection, *J. Fluid Mech.*, **686**, 77–108 (2011).
2. B. Favier, J. Purseed & L. Duchemin, Rayleigh–Bénard convection interacting with a melting boundary, *J. Fluid Mech.*, **858**, 437–473 (2019).
3. B. R. Esfahani, S. C. Hirata, S. Berti & E. Calzavarini, Basal melting driven by turbulent thermal convection, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 053501 (2018).
4. S. H. Davis, U. Müller & C . Dietsche, Pattern selection in single-component systems coupling Bénard convection and solidification, *J. Fluid Mech.*, **144**, 133–151 (1984).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Drosophilia during early gastrulation is not only a living being

Julien Fierling[1], Alexandre Torzynski[1], Catherine Quilliet[1], Jocelyn Etienne[1], Philippe Marmottant[1], Guy Blanchard[2], Claire Lye[2] & Benedicte Sanson[2]

[1] LIPhy, Grenoble
[2] PDN, Cambridge
Catherine.Quilliet@univ-grenoble-alpes.fr

We propose a mechanical approach of the beginning of the first morphogenetic event of the development of Drosophilia, namely the gastrulation. This event is known to happen concommittantly with the recruitment of apical myosin in a ventral region (the mesoderm). Against the grain, that usually invokes local changes in an hypothetical spontaneous curvature of the mesoderm, we suggest that the pulling of myosin in this area (ventral + apical) is sufficient to induce the formation of the longitudinal ventral furrow that initiates the gastrulation. To test this assumption, we performed finite-elements simulations of a purely mechanical model, were the initial shape of the embryo was reproduced. These numerical experiments showed sequences of shapes observed in-vivo, and due to dedicated experimental measurements on developing Drosophila, a quantitative correspondence between successive simulations and the developmental time was set up. This allowed to quantitatively retrieve experimental features such as the deplacement of cells around the ventral midline (along which the ventral furrow develops), area changes according to the distance to the ventral furrow, the evolution of the furrow depth and the signature of a buckling. These results show the importance of myosin location in the mesoderm, and the crucial role of the three-dimensional geometry, in the folding of the epithelium during the early gastrulation in Drosophilia.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Contrôle de vitesse de flamme par un forçage paramétrique

Basile Radisson, Bruno Denet & Christophe Almarcha

Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHÉ, UMR 7342, 13384 Marseille, France
radisson@irphe.univ-mrs.fr

Sous l'effet de l'instabilité inhérente à la propagation d'un front de flamme de prémélange [1], l'interface réactive se plisse et évolue selon une dynamique complexe. Ces fluctuations de la surface de flamme entraînent une variation de la vitesse de consommation du mélange. La maîtrise de la forme de l'interface permet donc un contrôle direct de la puissance dégagée par la réaction de combustion. Dans cette étude, on montre au travers d'une expérience de laboratoire, qu'un tel contrôle est possible en profitant d'interactions vibroacoustiques entre la flamme et la structure du brûleur. Dans notre expérience, une flamme de prémélange se propage dans une chambre confinée entre deux vitres espacées de 5 mm [2]. En forçant un mode propre de l'une des deux vitres, on génère un écoulement oscillant dans la cavité qui agit sur l'interface comme un forçage paramétrique [3, 4]. En ajustant l'intensité du forçage on obtient la restabilisation de la flamme et/ou sa déstabilisation secondaire. Dans notre dispositif simplifié, on obtient ainsi un contrôle « à la demande » de la vitesse de propagation de la flamme.

Références

1. G. Darrieus, oeuvre présentée à la technique moderne (1938).
2. E. Al Sarraf, C. Almarcha, J. Quinard, B. Radisson & B. Denet, Quantitative analysis of flame instabilities in a Hele-Shaw burner, *Flow Turbul. Combust.*, **101**, 851–868 (2018).
3. G. H Markstein, Interaction of flow pulsations and flame propagation, *J. Aeronaut. Sci.*, **18**, 428–429 (1951).
4. G. Searby & D. Rochwerger, A parametric acoustic instability in premixed flames, *J. Fluid Mech.*, **231**, 529–543 (1991).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Zonostrophic beta-plumes, zonal jets and particle diffusivity in locally-forced shallow water experiments

Peter Read[1], Boris Galperin[2], Stefania Espa[3], Enrico Ferrero[4], Simon Cabanes[3], Federica Ive[4], Massimiliano Manfrin[4], Hélène Scolan[1] & Roland Young[1]

[1] Department of Physics, University of Oxford, UK
[2] College of Marine Science, University of South Florida, St Petersburg, USA
[3] DICEA, Sapienza University of Rome, Italy
[4] Department of Physics, University of Torino, Italy
peter.read@physics.ox.ac.uk

Eddy-driven zonal jets and Rossby waves are common features of planetary atmospheres and oceans, organising the large-scale flow and influencing the dispersion and transport of material tracers and constituents. In the presence of relatively weak friction and forcing, zonal jets form a dominant component of the flow in a regime known as "zonostrophic", characterized by strongly anisotropic energy spectra and the formation of slowly evolving systems of alternating zonal jets [1, 2]. This regime is characterized by two scales, $L_\beta \sim (\epsilon/\beta^3)^{1/5}$ and $L_R \sim (U_{\rm rms}/\beta)^{1/2}$, where ϵ is the transfer rate of the inverse energy cascade and β is the radial gradient of the Coriolis parameter, and their ratio, known as the zonostrophy index, $R_\beta = L_R/L_\beta$ [2]. In unaveraged flows, zonal jets become discernible at $R_\beta \sim 2$ while much stronger jets are found for $R_\beta \gg 1$. Achieving such high values of R_β in a laboratory is a non-trivial task. The zonally-banded atmospheres of the gas giant planets are probably well inside such a regime with $R_\beta \sim 5$ [3], though the Earth's atmosphere and oceans are in a more friction-dominated state where $R_\beta \sim 1.5$–1.8 [1, 2]. In this study we have investigated the flow obtained in a rapidly rotating fluid on a topographic beta-plane in a cylindrical tank, subject to localised periodic mechanical forcing along a radius. The experiments were carried out in the 5 m diameter rotating tank at the Turlab facility in Turin, Italy under the European High-Performance Infrastructures in Turbulence (EUHiT) programme [4]. Horizontal velocity measurements were obtained using PIV in a horizontal plane a short distance below the free surface, while discrete particles floating on the surface were tracked to obtained their Lagrangian trajectories. The flow exhibited the spontaneous formation of persistent zonal jets, topographic Rossby waves and intense vortical eddies close to the forcing. The large-scale flow was found to lie within the zonostrophic regime with a zonostrophic index $R_\beta \gtrsim 2.0$ in at least some cases. This contribution will present the first results from the analysis of these experiments, focusing on characterising the potential vorticity dynamics of the large-scale flow and its particle transport properties.

References

1. B. Galperin, S. Sukoriansky & N. Dikovskaya, Geophysical flows with anisotropic turbulence and dispersive waves: flows with a β-effect, *Ocean Dyn.*, **60** 427–441 (2010)
2. B. Galperin, S. Sukoriansky, R. M. B. Young, R. Chemke, Y. Kaspi, P. L. Read & N. Dikovskaya, Barotropic and Zonostrophic Turbulence, in *Zonal Jets: Phenomenology, Genesis, Physics*, B. Galperin & P. L. Read (Editors), Cambridge University Press, Chap. 13 (2019).
3. B. Galperin, R. M. B. Young, S. Sukoriansky, N. Dikovskaya, P. L. Read, A. J. Lancaster & D. Armstrong, Cassini observations reveal a regime of zonostrophic macroturbulence on Jupiter, *Icarus*, **229**, 295–320 (2014).
4. Waves, turbulence and diffusion in beta plumes, β-WTD, European High-Performance Infrastructures in Turbulence funded project.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Unraveling nonlinearities in elastic knots

Pedro Reis

EPFL, Suisse
pedro.reis@epfl.ch

Even though most of us tie our shoelaces wrongly (i.e., not with the most mechanically performant configuration), knots in ropes and filaments have been used for millennia as functional structural mechanisms. Applications include mooring ships to docks, ensuring the safety of a falling climber, wrapping presents or fastening surgical suture threads. Despite their importance, our knowledge on tight physical knots is mostly empirical and there is a striking lack of predictive models that quantitatively capture their mechanical behavior. For tight knots, highly nonlinear and coupled behavior arise from intricate three-dimensional geometries, large deformations at the material level, (self)contact and friction between rod strands. Furthermore, tight knots do not exhibit separation of the relevant length scales, thereby precluding usage of thin rod models (e.g., 'à la' Kirchhoff). We have approached the problem by performing precision model experiments that comprise X-ray computed tomography (to probe the underlying complex geometry) and mechanical testing (to quantify the interplay of bending curvature, elasticity, and friction). These experimental data are contrasted to both Finite Element (FE) simulations and to formal results for geometrically rigid strings (that exclude elasticity), finding that the latter tends to act as an underlying 'backbone' for the full elastic solution. Through the combination of X-ray tomography and FE modeling, we gained quantitative access to the regions of self-contact where friction is activated to confer functional performance, e.g., holding strength. Our results are starting to yield invaluable insight that we hope will help unravel the highly nonlinear but fascinating behavior of knotted structures.

This work was done in collaboration with Paul Grandgeorge, Paul Johanns, Tomohiko Sano, Changyeob Baek, Alastair Flynn, and John Maddocks.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Un modèle de lithosphère en couche mince pseudo-plastique

Guillaume Richard[1] & François James[2]

[1] Institut des Sciences de la Terre d'Orléans, Obs. Sciences de l'Univers en région Centre, Université d'Orléans
[2] Institut Denis Poisson, Université d'Orléans, Université de Tours, CNRS
guillaume.richard@univ-orleans.fr

La convection du manteau des planètes telluriques produit une couche limite thermique nommée lithosphère. Cette coquille a une rhéologie complexe qui influence la convection sous-jacente et peut générer différents types de tectonique (déformation de la lithosphère). Pour l'étudier numériquement, on peut utiliser des modéles à géométrie sphérique. Pour construire la grande majorité de ceux-ci, leurs auteurs ont utilisé une approximation rhéologique non-linéaire : la pseudo-plasticité [1] (également nommée viscoplasticité [2]).

Afin de mieux contraindre les limites et les avantages de cette approximation, nous avons restreint le modèle à la seule lithosphère et nous l'avons traitée comme une couche mince [3]. Notre formalisme décrit une lithosphère de très haute viscosité se déformant sous la contrainte d'un manteau convectant et pouvant atteindre un seuil pseudo-plastique. L'isostasie de la lithosphère est également assurée.

La simplicité du modèle permet d'explorer facilement la grande variété des conditions aux limites possibles pour une lithosphère. On l'utilisera pour simuler la tectonique de plaques observée sur Terre ou celle sans plaques des autres planètes telluriques. Dans un premier temps, il nous permet de proposer un mode de formation des Coronae, ces objets géologiques endémiques à Vénus [4].

Références

1. P. J. Tackley, Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection simulations, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **1**, 1021 (2000).
2. D. Bercovici, P. J. Tackley & Y. Ricard, 7.07 - The generation of plate tectonics from mantle dynamics, *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, G. Schubert (Editor), Elsevier, pp. 271–318 (2015).
3. P. England & D. McKenzie, A thin viscous sheet model for continental deformation, *Geophys. J. Intl.*, **70**, 295–321 (1982).
4. E. Stofan, S. Smrekar, S. Tapper, J. Guest & P. Grindrod, Preliminary analysis of an expanded corona database for Venus, *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 4267–4270 (2001).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Effet de confinement lors de l'étalement de suspensions non-browniennes

Menghua Zhao, Alice Pelosse, Laurent Limat, Élisabeth Guazzelli & Matthieu Roché

Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot et CNRS UMR 7057, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris
matthieu.roche@univ-paris-diderot.fr

Français : Les suspensions non-browniennes sont omniprésentes dans notre environnement. Cependant la compréhension de leur écoulement, en particulier dans les régimes de concentration élevée en particules, n'est que récente, et beaucoup reste à faire. Nous montrons ici comment ces liquides complexes se comportent durant leur étalement sur une surface solide, avec un intérêt pour les propriétés de cet écoulement au voisinage de la ligne de contact triple. Nous montrons que la viscosité apparente de la suspension durant l'étalement dépend à la fois de la fraction volumique en particules et de la taille de ces dernières. Nous proposons un modèle simple prenant en compte le confinement des particules au voisinage de la ligne de contact et qui décrit des données expérimentales de façon satisfaisante. Nous évoquerons quelques implications de nos observations.

English: Non-Brownian suspensions are ubiquitous in our environment. Their flow, in particular in the high-particle-concentration regime, has been understood only recently, and there is still ample room for investigation. Here we show how these complex liquids spread on a solid substrate, with a focus on the region around the triple-phase contact line. We bring evidence that the apparent viscosity of suspensions during spreading is dependent on both the particle volume fraction and the particle size, in contrast to the particle-size-independent bulk viscosity. We propose a simple model that accounts for particle confinement in the vicinity of the contact line and that captures the experimental data well. We will discuss the implications of our findings.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Méthodes d'événements rares pour l'effondrement et le développement de la turbulence de Couette plan

Joran Rolland

Laboratoire de Physique de l'ens de Lyon
joran.rolland@ens-lyon.fr

L'écoulement de Couette plan est l'écoulement d'un fluide newtonnien entre deux parois planes parallèles séparées de $2h$ en mouvement à vitesse $\pm U$. Cet écoulement est intéressant car c'est un prototype de beaucoup d'écoulements de paroi (conduites, artères pulsées à géométrie variable, couches limites aérodynamiques et planétaires stables, etc.) en ce qui concerne le mode de transition vers la turbulence. La transition est contrôlée par le nombre de Reynolds $R = Uh/\nu$ avec ν la viscosité cinématique du fluide. L'écoulement de base est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds. Cependant, la turbulence peut exister dès que le nombre de Reynolds est plus grand que quelques centaines $R \gtrsim 325$. Ce comportement sous critique va de paire avec la posssibilité de faire coexister en espace écoulement laminaire et turbulent (de manière quasipermanente si $325 \lesssim R \lesssim 400$), et l'existence de « points cols » dans l'espace des phases entre écoulement laminaire et écoulement turbulent. Ce dernier point implique qu'il faut soit des perturbations d'amplitude finie pour déclancher la turbulence, soit imposer un forçage à l'écoulement laminaire et suivre sa réponse entièrement non-linéaire. D'autre part, la turbulence peut avoir un temps de vie fini (mais très grand devant le temps de retournement) si le domaine de l'écoulement a une taille finie.

Tous ces ingrédients font que l'on peut étudier la turbulence de paroi transitionnelle sous la forme d'un problème de multistabilité. Pour capturer clairement toutes les étapes du développement de la turbulence lorsque l'écoulement laminaire est forcé, il est nécessaire de réduire la variance dudit forçage. Cela rend les transitions très rares. De manière similaire, le temps de vie de la turbulence augmente au moins exponentiellement en Reynolds et en taille de domaine : les relaminarisations sont elles aussi extrémement rares. Dans cette communication, je présente l'utilisation d'une méthode d'étude d'événements rares, l'Adaptive Multilevel Splitting [1], adaptée sur l'écoulement de Couette plan pour étudier la physique du développement de la turbulence sous forçage et son effondrement sous l'effet de ses propres fluctuations. La méthodologie et les quantités physiques suivies sont guidées par une étude numérique et théorique de ces événements dans des systèmes modèles des écoulements de paroi [2].

Ainsi, je montrerai que la trajectoire allant de l'écoulement laminaire vers la turbulence prend la forme d'un instanton lorsque la variance du forçage tend vers zéro : le système se dirige vers un point col puis relaxe de manière déterminste vers la turbulence. Le point col choisi (qui a des propriétés d'*edge state* [3]), et la trajectoire suivie une fois qu'il est franchi, ne dépendent pas de la forme du forçage : le seul paramètre de contrôle est le taux d'injection d'énergie. Je montrerai ensuite comment adapter les méthodes d'études d'événements rares à la question de la relaminarisation [4]. Je montrerai les premières déterminations du « point de sortie » et de la dépendance du nombre du temps de vie de la turbulence en nombre de Reynolds et taille de domaine.

Références

1. F. Cérou & A. Guyader, *Stoch. Anal. Appl.*, **25**, 417–443 (2007).
2. J. Rolland, *Phys. Rev. E*, **97**, 023109 (2018).
3. T. Schneider, B. Eckhardt & J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 034502 (2007).
4. T. Lestang, F. Ragone, C.-E. Bréhier, C. Herbert & F. Bouchet, *J. Stat. Mech.*, **2018**, 043213 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Application de l'effet d'*echo* pour la génération d'harmonique d'ordre élevé dans des paquets d'électrons relativistes

Éléonore Roussel

Univ. Lille, CNRS, UMR 8523 - PhLAM, Physique des Lasers, Atomes et Molécules, F-59000 Lille, France
eleonore.roussel@univ-lille.fr

Le principe de fonctionnement des lasers à électrons libres (LELs), tout comme celui des lasers traditionnels, est basé sur l'amplification de la lumière au sein d'un milieu amplificateur. Dans le cas des LELs, ce milieu se trouve être un paquet d'électrons relativistes généré à partir d'un accélérateur. Les LELs sont actuellement les sources aux courtes longueurs d'onde (ultraviolet extrême EUV et rayons X) les plus performantes mais leur cohérence longitudinale est encore marginalement maîtrisée. Des techniques telles que l'injection par une source cohérente externe (*seeding*) associée à un processus de conversion d'harmonique, permettent de pallier le manque de cohérence [1]. Cependant, les mécanismes de ce processus de conversion non-linéaire limitent la génération de lumière aux harmoniques d'ordre inférieur à 10–15 et ne permettent pas d'atteindre le domaine des X.

Ces dernières années, une nouvelle stratégie de conversion d'harmonique dans les LELs a vu le jour. Le principe, appelé *Echo-Enabled Harmonic Generation* (EEHG) [2], est basé sur le phénomène d'echo, effet dynamique connu depuis les années 60 [3], et qui peut être interprété comme un effet de mémoire à long terme. Dans un premier temps, une première modulation permet d'imprimer une modulation dans l'espace des phases mais sans conséquences visibles (par exemple un feuilletage). L'existence de cette structure est ensuite révélée lorsqu'une seconde modulation est appliquée au système.

Cet effet a été observé dans des domaines variés comme les plasmas [4], l'hydrodynamique [5], l'équation de Kuramoto [6], les gaz classiques [7], les atomes froids [8]. Ici, la manipulation d'électrons relativistes à l'aide de deux lasers externes permet de générer du rayonnement X cohérent via le phénomène d'echo. L'EEHG est actuellement considéré comme une technique révolutionnaire pour la génération de rayonnement laser dans les domaines EUV et les rayons X.

Nous développons ici le principe de fonctionnement du feuilletage de l'espace des phases de paquets d'électrons relativistes et montrons des résultats numériques démontrant la possibilité de générer du rayonnement X cohérent. Ensuite, nous présentons la première démonstration expérimentale de l'utilisation de ce principe d'echo pour la génération de rayonnement X cohérent sur le LEL italien FERMI [9].

Références

1. L. H. Yu, Generation of intense UV radiation by subharmonically seeded single-pass free-electron lasers, *Phys. Rev. A*, **44**, 5178–5193 (1991).
2. G. Stupakov, Using the beam-echo effect for generation of short-wavelength radiation, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 074801 (2009).
3. R. W. Gould, Plasma wave echo, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 219 (1967).
4. J. H. Malmberg, C. B. Wharton, R. W. Gould & T. M. O'Neil, Observation of plasma wave echoes, *Phys. Fluids*, **11**, 1147 (1968).
5. J. Vanneste, P. J. Morrison & T. Warn, Strong echo effect and nonlinear transient growth in shear flows, *Phys. Fluids*, **10**, 1398 (1998).
6. E. Ott, J. H. Platig, T. M. Antonsen & M. Girvan , Echo phenomena in large systems of coupled oscillators, *Chaos*, **18**, 037115 (2008).
7. T. W. Mossberg, R. Kachru, E. Whittaker & S. R. Hartmann, Temporally recurrent spatial ordering of atomic population in gases: Grating echoes, *Phys. Rev. Lett*, **43**, 851 (1979).
8. D. V. Strekalov, Andrey Turlapov, A. Kumarakrishnan & Tycho Sleator, Periodic structures generated in a cloud of cold atoms, *Phys. Rev. A*, **66**, 023601 (2002).
9. E. Allaria*et al.*, Two-stage seeded soft-X-ray free-electron laser, *Nat. Photonics*, **7**, 913–918 (2013)

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Ondes de surface produites par le déplacement d'un objet solide

Jose Antonio Trejo Gutierrez[1], Ivonne Judith Hernandez Hernandez[1] & Gerardo Ruiz Chavarria[1]

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico. Ciudad Universitaria, 04510 Ciudad de Mexico, Mexique
gruiz@unam.mx

Nous présentons dans cette contribution une étude sur la production des ondes de surface par le déplacement d'une plaque. On considèré deux cas : a) production des ondes de surface par un batteur partialement immergé [1] et b) production des ondes de surface par le déplacement d'une plaque située au fond [2]. D'abord on présente les solutions de la théorie linéaire non visqueuse. Dans les deux cas le déplacement de la plaque produit un écoulement de volume mais ègalement une onde de surface liée elle-même à un champ de vitesse. Ensuite nous présentons des résultats expérimentaux et numériques dans lesquelles la viscosité et les effets non-linéaires sont pris en compte. Dans les expériences, nous avons reconstruit la forme de la surface libre avec la méthode de Schlieren synthétique [3] tandis que pour les simulations numériques nous avons utilisé Gerris [4], un outil numérique pour ressoudre les équations de Navier–Stokes et continuité. Pour le cas du déplacement de la plaque situé au fond il y a un bon accord entre la théorie linéaire et les données expérimentales, sauf quand la vitesse de déformation du fond est comparable ou supérieure à la vitesse de phase [5]. En revanche pour le cas des vagues produites par l'oscillation vertical d'un batteur, il apparaît un champ de vitesse dont la grandeur croît avec l'amplitude de l'oscillation de la plaque. Nos résultats nous indiquent que cet écoulement est lié au détachement de la couche limite qui se forme sur les parois verticales du batteur. Ce détachement apparait quand la vitesse et l'accélération de la plaque ont des signes opposés. Ces résultats pourraient expliquer la formation des cellules de recirculations qui ont été rapportés par Ruiz Chavarria *et al.* [1] et par Punzmann *et al.* [6].

Remerciements : Les auteurs remercient la DGAPA-UNAM pour le soutien dans le contrat PAPIIT IN114218 (Vorticidad y ondas (internas y de superficie) en dinamica de fluidos). Ivonne Judith Hernandez Hernandez remercie la DGAPA-UNAM pour l'attribution d'une bourse posdoctorale.

Références

1. G. Ruiz Chavarria, P. Le Gal & M. Le Bars, Geometrical focusing of surface waves, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 094803 (2018).
2. T. Jamin, L. Gordillo, G. Ruiz Chavarria, M. Berhanu & É. Falcon, Experiments on generation of surface waves by an underwater moving motion, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **471**, 20150069 (2015).
3. F. Moisy, M. Rabaud & K. Salsac, A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid surface, *Exp. Fluids*, **46**, 1021–1036 (2009).
4. http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php
5. M. Le Gal, D. Violeau & M. Benoit, Influence of timescales on the generation of seismic tsunamis, *Eur. J. Mech. B*, **65**, 257–273 (2017).
6. N. Punzmann, H. Francois, H. Xia, G. Falcovich & M. Shats, Generation and reversal of surface flows by propagating waves, *Nat. Phys.*, **10**, 658–663 (2014).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Un modèle simplifié de locomotion aquatique

Jesus Sanchez-Rodriguez, Christophe Raufaste & Médéric Argentina

UCA, CNRS, INPHYNI UMR7010, Nice, France
jesus.sanchez@inphyni.cnrs.fr

Nous avons développé un modèle simplifié de locomotion aquatique. En utilisant la théorie des fonctions complexes nous avons estimé les forces hydrodynamiques agissant sur une plaque infiniment fine, suivant le travail fondamental de Theodorsen [1].

En considérant les différents mouvements possibles du nageur nous calculons le potentiel de vitesse pour dériver la pression via la relation généralisée de Bernoulli ; nous montrons que l'effet de la non stationarité de l'écoulement est le mécanisme principal pour la locomotion [2].

Nous imposons une rotation périodique de la nageoire afin d'approximer le mouvement ondulatoire du nageur. Nous montrons la dépendance linéaire de la vitesse longitudinale par rapport à la fréquence angulaire predite par Gazzola *et al.* [3]. Nous prédisons aussi que le mouvement transverse présente la même fréquence que le forçage tandis que le comportement du mouvement longitudinal est une fonction linéaire du temps plus un terme périodique avec fréquence double que celle de la rotation de la nageoire.

Un analyse des différents termes produisant la poussée a été réalisée. Une équation fonctionnelle pour l'oscillation de la plaque a été dérivée avec le termes dominants : sa résolution confirme notre forçage simple et linéaire.

Références

1. T. Theodorsen, *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Tech. Rep. No. 496 (1934).
2. I. E. Garrick, *Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil*, NACA Tech. Rep. No. 567 (1936).
3. M. Gazzola, M. Argentina & L. Mahadevan, Scaling macroscopic aquatic locomotion, *Nat. Phys.*, **10**, 758–761 (2014).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Modèle mathématique de la dynamique de transmission de l'infection par Taenia-cysticercose

Norma Yanet Sánchez-Torres & Marco V. José

Instituto de Investigaciones Biomédicas, UNAM. Circuito Exterior S/N Ciudad Universitaria. 04510 CDMX, Mexique
nyst@ciencias.unam.mx

Un modèle mathématique de la dynamique de transmission de l'infection par *Taenia solium* est formulé. Le modèle consiste en un système de couples d'équations différentielles non linéaires que décrive le cycle de vie du parasite. Le modèle peut reproduire les tendances épidémiologiques observées de la téniase humaine, de la cysticercose du porc et de la cysticercose humaine. Les variables sont la charge moyenne parasite et la prévalence de l'infection. La dynamique comprend les équilibres multiples, les régions stables et instables, les points de rupture et le seuil connu sous le nom de nombre de reproductions de base, R_0. Cette dynamique est présentée dans les espaces de phase. Une simulation numérique est réalisée pour comparer les résultats obtenus en utilisant certaines variations des paramètres trouvés.

Références

1. M. V. José, J. R. Bobadilla, N. Y. Sánchez-Torres & J. P. Laclette, Mathematical model of the life cycle of taenia-cysticercosis: Transmission dynamics and chemotherapy (Part 1), *Theor. Biol. Med. Model.*, **15**, 18 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Ségrégation granulaire dans les astéroïdes

Jérémy Sautel, Charles-Édouard Lecomte & Nicolas Taberlet

Laboratoire de Physique à l'ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 LYON
jeremy.sautel@ens-lyon.fr

Notre étude porte sur le problème de la ségrégation granulaire (en taille des grains), abordé dans des conditions et sous une géométrie originales. Celles-ci sont directement inspirées des astéroïdes granulaires, non monolithiques. Bien que le problème de l'effet « Noix du Brésil » ait déjà été au cœur de nombreuses études, la ségrégation dans un agrégat auto-gravitant demeure inexplorée. La motivation de cette étude s'ancre dans les observations récentes de la surface des astéroïdes granulaires (principalement dues aux missions Hayabusa et Hayabusa 2), qui révèle la concentration des plus gros composants à la surface. On peut cependant remarquer que cette concentration n'est pas uniforme, et que certaines parties de la surface sont recouvertes de composants beaucoup plus petits, allant jusqu'à de fines poussières. L'explication de ce phénomène est d'un intérêt majeur pour la compréhension de la géologie des astéroïdes, mais également dans l'optique de faire des prédictions quant à la composition des couches situées immédiatement sous la surface des astéroïdes granulaires. En effet, aucune mesure concernant ces couches plus profondes n'a pu être réalisée au cours des dernières missions.

À l'aide de simulations numériques, nous avons pu étudier la ségrégation granulaire dans un agrégat à 2 dimensions périodiquement perturbé. Cela nous a permis de montrer que la ségrégation dans les astéroïdes n'est pas un phénomène surfacique, mais qu'elle résulte bien de mouvements impliquant l'ensemble de l'agrégat. De plus, faire varier les paramètres pertinents des simulations nous a permis de bien comprendre ces mouvements. En particulier, l'importance des forces de frottement entre les grains, et leur influence sur les grandeurs caractéristiques du phénomène de ségrégation sont expliquées en détail.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

An experimental study of turbulence generation and decay in Taylor–Couette system due to an abrupt stoppage

Harminder Singh, Arnaud Prigent & Innocent Mutabazi

Laboratoire des Ondes et Milieux Complex (LOMC) CNRS UMR 6294, Université Le Havre, 75 Rue Bellot, Le Havre 76600, France
harminder.singh@univ-lehavre.fr

Cette étude présente une approche novatrice de la génération et de la décroissance de la turbulence dans l'écoulement de Taylor–Couette, l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation. À partir d'un écoulement initialement laminaire, les cylindres sont soumis à un arrêt brutal qui génère l'apparition de turbulence transitoire. Deux approches expérimentales différentes, les visualisations et les mesures stéréo-PIV, ont été utilisées pour mieux comprendre le phénomène présenté pour plusieurs vitesses initiales de rotation correspondant toujours à un écoulement laminaire. Trois configurations différentes peuvent être distinguées rotation du cylindre extérieur seulement, co-rotation et contra-rotation. Lorsque seul le cylindre extérieur est en rotation, le seuil d'apparition de la turbulence correspond à nombre de Reynolds extérieur $\mathrm{Re}_o = 606$. En co- ou contra- rotation, ce seuil diminue jusqu'à une valeur minimale de $\mathrm{Re}_o = 433$. D'autre part, si l'état initial avant l'arrêt brusque est turbulent, la turbulence s'estompe en quelques secondes. Contrairement à l'étude de Verschoof *et al.* [1], une décroissance auto-similaire de la turbulence n'a pas été observée.

Références

1. R. A. Verschoof, S. G. Huisman, R. C. A. van der Veen, C. Sun & D. Lohse, Self-similar decay of high Reynolds number Taylor–Couette turbulence, *Phys. Rev. Fluids*, **1**, 062402 (2016).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Experimental acoustic eigenmodes measurements: from sphere to spheroid

Sylvie Su, Philippe Cardin, David Cébron & Henri-Claude Nataf

ISTerre, Univ. Grenoble Alpes, Univ. Savoie Mont Blanc, CNRS, IRD, IFSTTAR, 38000 Grenoble, France
sylvie.su@univ-grenoble-alpes.fr

Acoustic eigenmodes have been widely used in asteroseismology to retrieve physical properties of stars, e.g. internal flows [1]. Application of this method in experimental fluid dynamics has been recently investigated to measure the velocity of rotating flows enclosed in spherical shells [2]. In spheres, acoustic modes are degenerate in the azimuthal direction but this degeneracy can be lifted, e.g. in the presence of rotation. This is responsible for modal splittings, that can be inverted to access information on the flow velocity. However, full azimuthal degeneracy leads to crowded spectral regions after splitting, which can make mode identification difficult. A way to circumvent this difficulty is to partially lift the degeneracy at rest, through the geometry of the resonator. To keep the spherical formalism, for which perturbation methods and variational principles have been widely employed to describe the geometrical splitting [3], we consider a spheroidal geometry that departs slightly from a sphere.

We build two different apparatus, a sphere and an oblate spheroid with a polar flattening of 0.05 aligned with the rotation axis of the apparatus. Both apparatus have the same equatorial radius and same instrumentation. We confront acoustic spectra from both apparatus to analytical calculations [4] and numerical simulations from the finite-element commercial code COMSOL.

References

1. C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard & D. W. Kurtz, *Asteroseismology*, Springer Science & Business Media (2010).
2. S. A. Triana *et al.*, Helioseismology in a bottle: Modal acoustic velocimetry, *New J. Phys.*, **16**, 113005 (2014).
3. J. B. Mehl, Acoustic resonance frequencies of deformed spherical resonators, *J. Acoust. Soc. Am.*, **71**, 1109–1113 (1982).
4. F. A. Dahlen, The normal modes of a rotating, elliptical earth, *Geophys. J. Int.*, **16**, 329–367 (1968).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Integrable turbulence in optical fibers and 1D water tank experiments

Pierre Suret

PhLAM, Université de Lille
pierre.suret@univ-lille1.fr

Exactly integrable partial differential equations (PDEs) such as the Korteweg–de-Vries (KdV) or the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation (1DNLSE) can be studied in the framework of the Inverse Scattering Transform (IST) also called nonlinear Fourier transform. Integrable PDEs exhibit an infinite hierarchy of invariants that prevent the development of "standard" Wave Turbulence and energy cascade. Despite the existence of the IST technique, there is no general theory describing of the propagation of random waves in integrable systems such as 1DNLSE. For this reason, Integrable Turbulence, which deals with random fields, has been recently introduced as a completely "new chapter of turbulence theory" by V. E. Zakharov, one of the creators both of the wave turbulence theory and of the IST. Optical fibers and 1D water tank are very favourable experimental platforms for the investigation of integrable turbulence. One of the striking phenomena is the emergence of strongly non Gaussian statistics associated to the local emergence of coherent structures (rogue waves) identified for example as fundamental solitons or Peregrine solitons. In this talk, recent experiments both in optical fibres and 1D water tank will be reviewed.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Nonlinear transport by gravity waves inside the ocean

Bruce R. Sutherland[1,2], Houssam Yassin[1] & Ton S. van den Bremer[3]

[1] Department of Physics, University of Alberta, Canada
[2] Department of Earth & Atmospheric Sciences, University of Alberta, Canada
[3] Department of Civil Engineering, Oxford University, United Kingdom
bruce.sutherland@ualberta.ca

Because the ocean is stratified, meaning that its density increases with depth due changing temperature and salinity, waves can propagate below the surface being driven by buoyancy forces. These provide an important mechanism through which energy is transported from boundaries into the ocean interior where they drive mixing. Recently oceanographers have come to realize that momentum and mass transport by internal waves may also be important, not just for climatology but also for predicting the motion and redistribution of inert biological or other floating particles such as microplastics. In this work we use perturbation theory for quasi-monochromatic wave packets consisting of vertically bounded, horizontally propagating internal modes in order to predict the vertical variations of their horizontal transport composed of the Stokes drift and the Eulerian induced flow which, combined, result in the net Lagrangian transport of fluid. The magnitude of both flows vary as the squared amplitude of the waves. However, their vertical structure can change significantly depending upon the background density variations and the horizontal wavelength of the modes. In particular, if the stratification is vertically symmetric, then mode-1 waves induce a Stokes drift and Eulerian flows with a mode-2 structure. However, with even small departures from vertical symmetry, the Eulerian flow is dominantly mode-1 and, as well as having finite wavenumber singularies, it also exhibits an "infrared catastrophe" in which the Eulerian induced flows can be larger than the flows due to the waves themselves.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Morphogenèse glaciaire induite par ablation différentielle

Nicolas Taberlet & Nicolas Plihon

Université de Lyon, UCBL, ENS Lyon, CNRS, Laboratoire de Physique à l'ENS de Lyon
nicolas.taberlet@ens-lyon.fr

Les processus d'ablation de la glace sont multiples, la sublimation et la fonte étant dépendantes des conditions climatiques (ensoleillement, température, humidité, précipitations, vent...). Nous avons étudié la morphogenèse des « Zen Stones » qui se forment essentiellement sur le lac Baïkal au cours de la saison hivernale [1]. Ces structures consistent en un piédestal de glace qui se forme sous une pierre posée à la surface gelée du lac. À travers des analyses de terrain, des expériences à l'échelle du laboratoire et des simulations numériques, nous montrons que le processus est dû à la sublimation différentielle de la glace. Nous montrons également que le rayonnement infrarouge des pierres est responsable de la cavité observée autour des pieds.

Références

1. pbs.twimg.com/media/C-1xxxsXgAEeWYL.jpg

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Là où l'imprédictabilité s'estompe : étude comparée de l'effet tunnel chez les marcheurs et en mécanique quantique

Loïc Tadrist[1], Tristan Gilet[1], Peter Schlagheck[2] & John W. M. Bush[3]

[1] Laboratoire de Microfluidique, Université de Liège, allée de la Découverte 9, 4000 Liège, Belgique
[2] IPNAS, CESAM research unit, Université de Liège, Allée du 6 Août 15, Université de Liège, 4000 Liège, Belgique
[3] Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, USA
loic.tadrist@uliege.be

La mécanique classique offre une vue assez simple du franchissement d'une barrière de potentiel. Si la particule a une énergie cinétique E_c plus élevée que celle de la barrière de potentiel E_p, alors elle traverse cette dernière à coup sûr. Au contraire si son énergie est plus faible, elle sera toujours réfléchie par la barrière. En mécanique quantique, le franchissement d'une barrière de potentiel n'est pas aussi manichéen : une particule ayant une énergie cinétique initiale plus faible que l'énergie de la barrière, $E_c < E_p$, possède une probabilité non nulle de la traverser, c'est ce que l'on appelle l'effet tunnel. Réciproquement, une particule plus énergétique a, elle aussi, une probabilité non nulle d'être réfléchie. L'effet tunnel est emblématique des anomalies au paradigme classique qui ont abouti au fondement de la mécanique quantique.

Le caractère imprédictible du franchissement d'une barrière répulsive par un objet macroscopique a été décrit par A. Eddi en 2009 [1]. Ces objets, des marcheurs, sont de petites gouttelettes d'huile rebondissant sur un bain vibré verticalement. Les rebonds successifs créent des ondes à la surface du bain qui guident en retour la gouttelette, garantissant leur caractère dual onde–particule [2–4]. Lorsqu'une gouttelette est envoyée vers la barrière répulsive, elle peut la franchir ou bien être réfléchie de manière *apparemment aléatoire*.

Nous revisitons ici ce phénomène en l'analysant finement dans le but de comprendre où et comment naît le caractère imprédictible du franchissement de la barrière. Nous montrons que le franchissement de la barrière n'est pas uniquement lié à l'énergie cinétique du marcheur, mais qu'une variation de la dynamique rapide (rebonds verticaux) lors de l'interaction avec la barrière est responsable du caractère imprédictible du franchissement [5].

Ces résultats expérimentaux sont comparés à ceux d'une simulation d'un effet tunnel quantique. Nous déterminons la trajectoire de la particule quantique lancée vers une barrière de potentiel par des mesures fortes de la position et de l'impulsion, à intervalle régulier. Nous montrons que dans le cas quantique, la levée de l'imprédictabilité a lieu, elle aussi, au pied de la barrière de potentiel. Les convergences et les différences majeures entre les deux phénomènes sont discutées à la lumière des informations recueillies par la simulation et l'expérience.

Références

1. A. Eddi, E. Fort, F. Moisy & Y. Couder, Unpredictable tunneling of a classical wave–particle association, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 240401 (2009).
2. Y. Couder, S. Protière, E. Fort & A. Boudaoud, Dynamical phenomena: Walking and orbiting droplets, *Nature*, 437, 208 (2005).
3. J. W. M. Bush, Pilot-wave hydrodynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **47**, 269–292 (2015).
4. L. Tadrist, J. B. Shim, T. Gilet & P. Schlagheck, Faraday instability and subthreshold Faraday waves: Surface waves emitted by walkers, *J. Fluid Mech.*, **848**, 906–945 (2018).
5. L. Tadrist, N. Sampara, P. Schlagheck & T. Gilet, Interaction of two walkers: Perturbed vertical dynamics as a source of chaos, *Chaos*, **28**, 096113 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Numerical modelling of edge tokamak plasma: Impact of collisionality on turbulence properties

Raffaele Tatali, H. Bufferand, T. Cartier-Michaud, G. Ciraolo, D. Galassi, Ph. Ghendrih, F. Nespoli, E. Serre & P. Tamain[2]

[1] M2P2, UMR7340 Centrale Marseille Plot 6, 38 rue Joliot-Curie 13451 Marseille, France
[2] IRFM CEA Cadarache, F-13108 St. Paul-lez-Durance, France
raffaele.tatali@univ-amu.fr

Turbulence developing in the edge plasma of tokamaks is nowadays accepted to play a major role in determining the transport of particles and energy from the hot centre towards the peripheral region. This transport eventually affects the characteristic gradients appearing in the system. Hence, the consequences of turbulent transport are two-fold. First of all, a reduction of turbulent transport would lead to steeper pressure gradients and a better global confinement of plasma, with beneficial consequences on the fusion reaction rates. Turbulence is also involved both in the formation of transport barriers in the closed flux surfaces region, and in the transition from Low to High confinement mode.The latter key feature affected by turbulence in edge plasma is the high heat load exhausted in the region where magnetic field-lines hits on solid components. For ITER, this is an issue of major concern, and the power deposited on the divertor tungsten mono-blocks will have to be maintained below a certain threshold, in order not to compromise the integrity of the material.

The understanding of turbulence and of the related transport is still full of open questions. The aim of turbulence numerical modelling is to fill the gaps in the current understanding of turbulence and experiments, and ultimately reach the ability to be predictive on edge plasma dynamics. In this framework, the TOKAM3X 3D fluid turbulence code that has been developed through a long-term collaboration between the IRFM/CEA institute and the M2P2 laboratory of Marseille as well as the PIIM laboratory [1].

In this contribution, we focus on the impact of collisionality on edge turbulence properties. Among many parameters that can modify the behavior of turbulent transport, the collisionality plays a key role, as shown both from a theoretical [2] and experimental [3] point of view. An initial linear study has been done on a 2D model which has shown that a decreasing resistivity should lead to a shrink of the filamentary structures characteristic of turbulent transport in the border region of the device. This trend has been partially recovered in the 3D fully turbulent simulations showing how the non-linear terms can be mainly responsible to determine the behaviour of the system.Furthermore the main property of plasma turbulence have been recovered related to the change of resistivity and heat conducvity which both depend on collisionality.

References

1. P. Tamain *et al.*, The TOKAM3X code for edge turbulence fluid simulations of tokamak plasmas in versatile magnetic geometries, *J. Comput. Phys.*, **321**, 606–623 (2016).
2. S. I. Krasheninnikov, D. A. D'Ippolito, J. R. Myra, Recent theoretical progress in understanding coherent structures in edge and SOL turbulence, *J. Plasma*, **74**, 679–171 (2008).
3. D. Carralero *et al.*, Experimental validation of a filament transport model in turbulent magnetized plasmas, *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 215002 (2015).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Wave propagation modelling in shallow water with an entire family of shallow water wave equations

Aurélien Serge Tchakoutio Nguetcho[1,2], Jean-Marie Bilbault[2], Serge Dos Santos[3] & Michel Aillerie[4]

[1] Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences et Sciences Appliquées du Sahel (LISSAS), Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Maroua, BP: 814 Maroua - Cameroun
[2] Laboratoire LE2I, Arts et Métiers, Univiversité de Bourgogne Franche-Comté, Aile de l'Ingénieur - BP 47870, 21078 DIJON Cedex
[3] INSA Centre Val de Loire 3, Rue de la Chocolaterie CS 23410, F-41034 BLOIS Inserm U1253, Université de Tours
[4] Laboratoire Matériaux Optiques, Photonique et Systèmes (LMOPS) - EA 4423, Université de Lorraine and CentraleSupélec, 2 Rue E.Belin, F-57070 Metz Cedex

serge.nguetcho@u-bourgogne.fr

An entire family of shallow water wave equations is obtained by a perturbative asymptotic expansion for unidirectional shallow water waves. According to the parameters of the system, this family can lead to different sets of known equations such as Camassa–Holm, Korteweg–de Vries, Degasperis–Procesi and several other dispersive equations of the third order. Using the theory of bifurcation, we provide and find a variety of exotic solutions corresponding to the phase trajectories under different parameter conditions or different parametric situations. We give various sufficient conditions leading to the existence of propagating wave solutions or rupture threshold. The dynamics of singular nonlinear travelling system is completely determined for each of the above-mentioned equations. Moreover, we define sufficient conditions leading to the existence of propagating wave solutions and demonstrate how and why travelling waves lose their smoothness and develop into solutions with compact support or breaking waves.

References

1. H. R. Dullin, G. Gottwald G & D. D. Holm, An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 4501 (2001).
2. A. Constantin & D. Lannes, The hydrodynamical relevance of the Camassa–Holm and Degasperis–Procesi equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **192**, 165 (2009).
3. A. S. Tchakoutio Nguetcho, Jibin Li & J. M. Bilbault, Global dynamical behaviors in a physical shallow water system, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **36**, 285 (2016).
4. A. S. Tchakoutio Nguetcho, G. M. Nkeumaleu & J. M. Bilbault, Behavior of gap solitons in anharmonic lattices, *Phys. Rev. E*, **96**, 022207 (2017).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Dispersion relation for unidirectional surface gravity waves

Alexey Tikan[1], Félicien Bonnefoy[2], Guillaume Michel[3], Prabhudesai Gaurav[3], Annette Cazaubiel[4], Francois Copie[1], Éric Falcon[4], Stéphane Randoux[1] & Pierre Suret[1]

[1] Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molecules, UMR-CNRS 8523, Université de Lille, France
Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA), 59655 Villeneuve d'Ascq, France
[2] Ecole Centrale de Nantes, LHEEA, UMR 6598 CNRS, F-44 321 Nantes, France
[3] Ecole Normale Supérieure, LPS, UMR 8550 CNRS, F-75 205 Paris, France
[4] Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France
alexey.tikan@univ-lille.fr

1-D focusing Nonlinear Schrödinger (NLS) equation is often considered as a leading order model that governs dynamics of unidirectional surface gravity waves. Studies of the wind-generated ocean waves revealed that the surface elevation has Gaussian distribution which is a result of the superposition of a large number of harmonics with random phases [1,2]. Such random wave (or partially-coherent wave) can be considered as an initial condition for a nonlinear problem governed by 1-D NLS. Together random initial conditions and integrable equation bring us to the field known as Integrable Turbulence [3].

In the present work, we introduce a novel point of view on Integrable Turbulence describing the random wave at the stationary state by corresponding dispersion relation. We write 1-D focusing NLS in the following way:

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + k_0^3|A|^2 A, \tag{1}$$

where g is the acceleration of gravity, k_0 is a wave number. Complex envelope A is related to the surface elevation η as $\eta(z,t) = \frac{1}{2}\left(A(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c.\right)$, where $\omega_0 = 2\pi\nu$, with ν the central frequency. Therefore the dispersion relation in the case of partially-coherent waves can be written as:

$$\tilde{k}(\omega,\epsilon) = \omega^2/g - 2\omega_0^2\epsilon^2/g \tag{2}$$

The first term on the right-hand side is the linear dispersion relation, while the second one is nonlinear correction where $\epsilon = k_0\sqrt{\langle|A|^2\rangle}$ is the steepness.

We provide a numerical investigation of the dynamics of the partially-coherent waves solving the Eq. (1) with a standard pseudo-spectral method. In the weakly nonlinear regime, when dynamics is dominated by dispersive waves, the dispersion relation is simply represented by a parabola with a coefficient $1/g$. Increasing nonlinearity, we found that the shift in k is, indeed, linearly proportional to ϵ^2 until a certain value of nonlinearity ($BFI = \epsilon/(\Delta\omega/\omega_0) > 0.34$). For the higher values of BFI we observe the appearance of straight lines in $k(w)$ curve. The lines have a certain distribution in angles and positions. We show that each line corresponds to a fundamental soliton. The slope is related to the group velocity and displacement in k to its amplitude. For a large number of BFI, solitonic content dominates and dispersive waves are no longer represented in the $k(\omega)$ curve. However, we discovered that the growth of the position of the center of mass remains linear with respect to the ϵ^2, but with another coefficient of proportionality.

We verify these results by providing water tank experiments. The investigated zone of parameters varies from steepness 0.06 to 0.14 with the carrying wave frequency 1.15 Hz and the spectral width is 0.2 Hz. Surface elevation measurements were provided in 20 equidistant points separated by 6 m. Experimental results are in a good agreement with simulations of focusing 1-D NLS equation up to the steepness 0.1. In the case of more nonlinear waves, we observe significant asymmetry which signifies that the higher order terms have to be included in the model.

References

1. R. El Koussaifi *et al.*, *Phys. Rev. E*, **97**, 012208 (2018).
2. A. Cazaubiel *et al.*, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 114802 (2018).
3. V. E. Zakharov, *Stud. Appl. Math.*, **122**, 219–234 (2009).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

How to simulate kinetic nonlinear effects in fusion plasmas

Natalia Tronko[1,2], Alberto Bottino[1], Cristel Chandre[3], Dominique Escande[4] & Eric Sonnendruecker[1,2]

[1] Max Planck Institute for Plasma physics, Boltzmannstrasse 2, 85748 Garching,Germany
[2] Technical University of Munich, Department of Mathematics, Boltzmannstrasse 3, 85478, Garching, Germany
[3] Aix Marseille University, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France
[4] Aix-Marseille University, UMR 7345, Laboratory PIIM, avenue Escadrille Normandie-Niémen, 13397 Marseille
nataliat@ipp.mpg.de

Nonlinear phenomena are ubiquitous in fusion plasmas. They are especially important for understanding the transition towards the high confinement regime, which takes place in the outer *edge* region of the fusion device. In this region due to the strong nonlinearity, a transport barrier is created leading to confinement improvement. This nonlinearity is caused by the interactions between small and large scales requiring nonlinear kinetic turbulence simulations. Perhaps the direct simulations of the Maxwell-Vlasov equations would be a perfect tool for plasma behaviour prediction; they still are unaffordable for nowadays supercomputers [1]. Therefore, the derivation and simulations of reduced kinetic models are required.

When the magnetic field is strong, it is natural to replace particles by their instantaneous centres of rotation around the magnetic field lines and therefore remove the fastest scale of rotation from the description of dynamics. It grounds the idea of the reduced kinetic (*gyrokinetic*) formalism. A multi-scaled Hamiltonian reduction procedure lies behind the construction of gyrokinetic dynamical reduction [2, 3].

It has been proved that the gyrokinetic models accurately predict violent, turbulent transport in the core region of a tokamak [4, 5]. However, understanding of processes in the *edge* of fusion devices, still be lacking. Several groups undertake the gyrokinetic simulations of the edge region across the world, i.e. [6–8]. However, the ordering used for the derivation of the core gyrokinetic models cannot be used for accurate modelling of the edge region. Indeed, concerning the core region, the simulations for the edge should include electromagnetic effects and be fully non-linear. There exist no gyrokinetic code nowadays, which possesses a model with these properties.

This talk will provide a pedagogical presentation of the principles of a unified theoretical framework for gyrokinetic models derivation suitable for code implementation. A historical introduction will show how mechanics made progress since Newton introducing more and more geometry.

References

1. N. Tronko, Noether method for magnetized plasmas, talk at Mathematical Sciences Research Institut, Berkeley (2018).
   https://www.msri.org/workshops/871/schedules/24664
2. N. Tronko & C. Chandre, Second order gyrokinetic theory: From the particle to the gyrocenter, *J. Plasma Phys.*, **84**, 925840301 (2018).
3. A. J. Brizard & T. S. Hahm, Foundations of nonlinear gyrokinetic theory, *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 421 (2007).
4. A. Bottino & E. Sonnendrücker, Monte Carlo Particle-In-Cell methods for the simulation of the Vlasov-Maxwell gyrokinetic equations, *J. Plasma Phys.*, **81**, 435810501 (2015).
5. X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard & T. H. Watanabe, Gyrokinetic simulations of turbulent transport, *Nucl. Fusion*, **50**, 043002 (2010).
6. D. R. Hatch *et al.*, A gyrokinetic perspective on the JET-ILW pedestal, *Nucl. Fusion*, **57**, 036020 (2017).
7. Q. Pan, D. Told & F. Jenko, Fully nonlinear delta-f gyrokinetics for scrape-off layer parallel transport, *Phys. Plasmas*, **23**, 102302 (2016).
8. L. Villard *et al.*, Global and local turbulence features near and far from marginality and nonlocal pedestal-core interactions, to appear in *PPCF* (2019).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Cycles hétéroclines en Taylor–Couette contra-rotatif

Laurette S. Tuckerman & Yacine Bengana

PMMH - CNRS UMR 7636, Sorbonne Université, 7 quai Saint Bernard 75005 Paris
laurette@pmmh.espci.fr

Lorsque deux cylindres tournent dans des directions opposées, la couche de fluide contenue entre eux subit une instabilité qui mène à des tourbillons qui prennent la forme de spirales tournant autour du cylindre intérieur. Deux spirales de directions opposés peuvent aussi se superposer pour former un état nommé rubans [1]. Nous utilisons un un code pseudospectral [2] pour effectuer des simulations près des paramètres où ces rubans sont observés. Nous avons découvert que la branche de rubans perd sa stabilité vers un cycle hétérocline, pendant lequel l'écoulement passe d'un état axisymétrique à un autre (tous les deux des écoulements de vortex de Taylor classiques) par des états intermédiaires qui ressemblent à des rubans. Puis ce cycle est remplacé par un deuxième cycle hétérocline contenant que des états axisymétriques qui suit le scénario [3] de l'interaction 1:2. Ceci est la première observation de ces cycles hétéroclines. Par ailleurs, l'existence de deux cycles hétéroclines en concurrence est une propriété singulière. Nous expliquons les plages d'existence et de stabilité de ces cycles par moyen des valeurs propres associées aux vortex de Taylor classiques qui sert pour les ancrer [4].

Références

1. A. Pinter, M. Lücke & C. Hoffmann, Competition between traveling fluid waves of left and right spiral vortices and their different amplitude combinations, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 044506 (2006).
2. T. Dessup, L. S. Tuckerman, J. E. Wesfreid, D. Barkley & A.P. Willis, The self-sustaining process in Taylor–Couette flow, *Phys. Rev. Fluids*, **3**, 123902 (2018).
3. C. Nore, L. S Tuckerman, O. Daube & S. Xin, The 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow, *J. Fluid Mech.*, **477**, 51–88 (2003)
4. Y. Bengana & L. S. Tuckerman, Spirals and ribbons: Frequencies from mean flows and heteroclinic orbits, à paraître dans *Phys. Rev. Fluids.*

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Perturbation theory in algebraic setting

Lorenzo Valvo & Michel Vittot

Centre de Physique Theorique, Campus de Luminy, 13288 Marseille
valvo@cpt.univ-mrs.fr

We propose a perturbation algorithm which works on any Lie algebra $\mathbb{V}$. We consider a dynamical system on $\mathbb{V}$, which preserves a subalgebra $\mathbb{B}$ of $\mathbb{V}$. In general when we add a perturbing term to the original dynamical system, the subalgebra $\mathbb{B}$ won't be preserved anymore. We show that under suitable hypothesis, there exists a new dynamical system, conjugated to the perturbed one, which preserves $\mathbb{B}$ up to terms quadratic in the perturbation. By this formula, classical perturbation theory can be extended to noncanonical Poisson system: for instance, the Euler-Poinsot equations for a rigid body, ideal MHD, the Maxwell-Vlasov and Vlasov-Poisson systems. In particular, we show that, for a time dependent top, it is possible to iterate the formula and to get a KAM theorem: for a large set of initial data, the algebra $\mathbb{B}$, like the tori of classical mechanics, get deformed into a new algebra preserved by the perturbed flow.

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Polynomial expansion of compressible modes in rotating rigid ellipsoids

Jérémie Vidal[1], Sylvie Su[2] & David Cébron[2]

Department of Applied Mathematics, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, LS2 9JT, UK
Université Grenoble Alpes, CNRS, ISTerre, Grenoble, France
j.n.vidal@leeds.ac.uk

Fluid eigenmodes are often used to passively infer physical properties of the interiors of rotating planets and stars [1]. A similar method has been also introduced in fluid dynamics [2]. The experimental technique consists in observing and analysing the splitting in frequency of the acoustic modes, by solving an inverse problem. For instance, the presence of an (unknown) rotational profile disturbs the acoustic spectrum. Moreover, a topographic splitting is often superimposed on the rotational splitting. Indeed, rotating celestial objects are rather ellipsoidal than spherical at the leading order [3], as well as laboratory experiments which are weakly non-spherical (due to mechanical deformations). Rotation and topography should be taken into account simultaneously, but the acoustic problem does not admit exact solutions in the presence of rotation. Fully numerical solutions are often computed [8, 9]. However, they cannot be easily combined with inversion schemes to yield robust results. Hence, the usual approach is to consider small perturbations [4] to non-rotating solutions [5–7]. As an alternative, we present a new description of the compressible modes, relying on the method of weighted residuals [10]. We introduce an exact spectral Galerkin decomposition of compressible flows, satisfying the vanishing Neumann condition (non-penetration) in triaxial ellipsoids. This decomposition relies on an explicit and global polynomial decomposition in Cartesian coordinates. Within this new framework, we can consistently take into account the global rotation (e.g. the Coriolis force), the compressibility and the ellipsoidal topography. We validate our results against fully numerical simulations performed with the commercial software COMSOL, showing an excellent agreement. Finally, we investigate how the full spectrum of the modes is affected by background density profiles, to consider more realistic models of planetary and stellar interiors.

References

1. T. L. Duvall Jr, W. A. Dziembowski, P. R. Goode, D. O. Gough, J. W. Harvey & J. W. Leibacher, *Nature*, **310**, 22–25 (1984).
2. S. A. Triana, D. S. Zimmerman, H.-C. Nataf, A. Thorette, V. Lekic & D. P. Lathrop, *New J. Phys.*, **16**, 113005 (2014).
3. S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Dover Publications (1969).
4. M. R. Moldover, J. B. Mehl & M. Greenspan, *J. Acoust. Soc. Am.*, **79**, 253–272 (1986).
5. C. T. M. Chang, *J. Acous. Soc. Am.*, **49**, 611–614 (1971).
6. C. T. M. Chang, *J. Acous. Soc. Am.*, **51**, 1–5 (1972).
7. M. Willatzen & L. C. Lew Yan Voon, *J. Acous. Soc. Am.*, **116**, 3279–3283 (2004).
8. F. Lignieres, M. Rieutord & D. Reese, *Astron. Astrophys.*, **455**, 607–620 (2006).
9. M. Berggren, A. Bernland & D. Noreland, *J. Comput. Phys.*, **371**, 633–650 (2018).
10. B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, SIAM (2013).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Interactions non linéaires d'ondes basse fréquence dans une colonne de plasma magnétisée

Simon Vincent, Victor Désangles, Nicolas Plihon & Vincent Dolique

Laboratoire de Physique à l'ENS de Lyon, Lyon, France
simon.vincent@ens-lyon.fr

La turbulence d'ondes basses fréquence dans un plasma de fusion est l'un des principaux obstacles à la maîtrise de la fusion par confinement magnétique : responsable d'un tranport radial très important sur les bords du plasma, elle empêche un confinement efficace [1]. Nous présentons ici l'analyse par imagerie rapide d'ondes basses fréquences dans une colonne de plasma magnétisée, ainsi que l'impact sur le developpement de ces ondes d'une cathode émissive placée au centre du plasma.

Notre installation expérimentale est consituée d'une chambre cylindrique contenant un plasma d'Argon à basse pression (~ 1 mTorr) de 10 cm de diamètre et de taux d'ionisation de 20 %, généré par une source à induction électromagnétique de 1 kW. La colonne de plasma est confinée par un champ magnétique allant de 0,01 T à 0,15 T [2].

Une caméra ultra-rapide filme les fluctuations d'émission spontanée de lumière dans un plan transverse à la colonne de plasma, à une fréquence de 200 kHz, révélant la présence d'ondes azimutales ayant une fréquence de rotation de l'ordre du kHz. Ces images sont analysées par POD (Proper Orthogonal Decomposition, [3]) puis par transformée de Fourier 2D axisymétrique. Les résultats de l'analyse POD montrent des modes m (de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta-\omega t)}$) très proches des modes extraits par transformée de Fourier 2D. Ces deux outils complémentaires permettent de suivre l'évolution temporelle des modes m ainsi que leurs intéractions. Nous présentons enfin la modification par une cathode émissive placée au centre de la colonne de plasma du développement de ces modes m et de leurs intéractions.

Références

1. W. Horton, *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 735 (1999).
2. N. Plihon *et al.*, *J. Plasma Phys.*, **81**, 345810102 (2015).
3. G. Berkooz *et al.*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**, 539–75 (1993).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Concentration préférentielle de chaînes élastiques en turbulence

Jason R. Picardo[1], Dario Vincenzi[2], Nairita Pal[3] & Samriddhi Sankar Ray[1]

[1] International Centre for Theoretical Sciences, Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore, India
[2] Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD, Nice, France
[3] Center for Nonlinear Studies, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, USA
dario.vincenzi@unice.fr

Une particule ponctuelle et de même densité que celle du fluide qui la transporte se comporte comme un traceur et explore l'écoulement de façon uniforme. Il est bien connu [1,2] que des propriétés telles que l'inertie ou la motilité d'une particule peuvent conduire à un phénomène de concentration préférentielle, c'est-à-dire la particule sélectionne certaines régions de l'écoulement plutôt que d'autres.

Nous proposons un nouveau mécanisme de concentration préférentielle dans les écoulements turbulents engendrée par l'élasticité. Nous considérons une chaîne de billes identiques et avec inertie négligeable. Chaque bille est connectée par des ressorts élastiques non-linéaires aux billes voisines. De plus, la longueur maximum de la chaîne est plus grande que l'échelle du forçage qui maintient l'écoulement turbulent. Une telle chaîne élastique est une généralisation du modèle de polymère de Rouse [3] au cas où la taille du polymère dépasse l'échelle de dissipation visqueuse. L'écoulement turbulent est obtenu par une simulation numérique des équations de Navier–Stokes bidimensionnelles sur un carré périodique. La déformation d'une chaîne est déterminée par le nombre de Weissenberg, défini comme le rapport entre le temps de relaxation de la chaîne vers sa configuration d'équilibre et le temps de retournement de l'écoulement.

Nous montrons que le centre de masse d'une chaîne élastique transportée par un écoulement turbulent sélectionne les régions tourbillonnaires de l'écoulement [4]. Le degré de concentration préférentielle et sa dépendance du nombre de Weissenberg sont quantifiés en analysant la statistique du paramètre d'Okubo-Weiss. Nous examinons également l'effet de la déformabilité de la chaîne, définie comme le rapport entre la longueur maximum de chacun des liens élastiques et la longueur maximum de la chaîne. Le phénomène de concentration préférentielle s'affaiblie au fur et à mesure que la déformabilité de la chaîne diminue et une chaîne suffisamment rigide explore à nouveau l'écoulement de façon uniforme.

Des résultats préliminaires confirment l'existence du phénomène en turbulence tridimensionnelle.

Références

1. J. Bec, *Phys. Fluids*, **15**, L81 (2003).
2. K. Gustavsson & B. Mehlig, *Adv. Phys.*, **65**, 1 (2016).
3. M. Doi & S. F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, Oxford University Press, Oxford (1986).
4. J. R. Picardo, D. Vincenzi, N. Pal & S. S. Ray, *Phys. Rev. Lett.*, **121**, 244501 (2018).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Quadrupolar circulation in plane Couette flow

Zhe Wang[1], Yohann Duguet[2] & Romain Monchaux[3]

[1] Eri@n, Interdisciplinary Graduate School, Nanyang Technological University, 639798 Singapore
[2] LIMSI-CNRS, Université Paris Saclay, F-91403 Orsay, France
[3] IMSIA,ENSTA-ParisTech/CNRS/CEA/EDF, Institut Polytechnique de Paris, F-91762 Palaiseau, France
zhe.wang@ntu.edu.sg

The transition to turbulence in plane Couette flow is subcritical, characterised by a spatial coexistence of laminar and turbulent domains over a finite range of Reynolds numbers, the transitional flow regime. At the lowest Reynolds number, the coexistence takes the form of localised turbulent spots interspersed amidst otherwise linearly stable laminar base flow. Stimulated by the pioneer direct numerical simulation of Lundbladh and Johansson [1], the modification of plane Couette flow by turbulent spots has been studied both experimentally [2] and numerically [3]. It is found that (i) the wall-normal velocity comprises irregular small-scale fluctuations which decay rapidly away from the spot; while (ii) large-scale in-plane velocities are slowly varying and direct inward along the streamwise direction whereas outward along the spanwise direction, giving a quadrupolar shape. Moreover, quadrupolar flows have been observed in direct numerical simulations for a model of plane Couette flow with no-slip boundary conditions [4] and for parallel flows with sinusoidal laminar profile and free-slip boundary conditions [5, 6], as well as in experiments for plane Poiseuille flow driven by pressure gradient with no-slip boundary conditions [7], indicative that their emergence is generic.

Despite accumulating experimental and numerical observations, the origin of quadrupolar flows is poorly understood and a link between their presence and the Navier–Stokes equation is missing. Using scale analysis, a set of reduced Navier–Stokes equations characterising the spatial scaling of large-scale flows is derived and solved analytically. It is found that the wall-normal velocity is exponentially localised; while the wall-normal averaged in-plane velocities take the form of a quadruple and show an exponentially truncated algebraic decay. It is noteworthy that the algebraically decaying velocity component is harmonic, i.e. curl-free and divergence-free, and according to the Hodge decomposition theorem, it is unique per Poincaré index of the localised turbulent spot. If there is only one turbulent spot in the flow system, the index of the spot is also unique and solely determined by the Euler characteristic of the flow system, depicting a topological origin of the quadrupolar flow. Consequently, for quasi-two-dimensional parallel flows, i.e. with two spatially extended directions and one highly confined by the walls, we expect that the large-scale flow surrounding a localised turbulent spot is always quadrupolar. Our solution is in good agreement with previous experimental and numerical results.

References

1. A. Lundbladh & A. V. Johansson, Direct simulation of turbulent spots in plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **229**, 499–516 (1991).
2. M. Couliou & R. Monchaux, Large-scale flows in transitional plane Couette flow: A key ingredient of the spot growth mechanism, *Phys. Rev. E*, **27**, 034101 (2015).
3. Y. Duguet & P. Schlatter, Oblique laminar-turbulent interfaces in plane shear flows, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 034502 (2013).
4. M. Lagha & P. Manneville, Modeling of plane Couette flow. I. Large scale flow around turbulent spots, *Phys. Fluids*, **19**, 094105 (2007).
5. J. Schumacher & B. Eckhardt, Evolution of turbulent spots in a parallel shear flow, *Phys. Rev. E*, **63**, 046307 (2001).
6. M. Chantry *et al.*, Turbulent-laminar patterns in shear flows without walls, *J. Fluid Mech.*, **791**, R8 (2016).
7. G. Lemoult *et al.*, Turbulent spots in a channel: Large-scale flow and self-sustainability, *J. Fluid Mech.*, **731**, R1 (2013).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Wrinkling and folding on soft microcapsules

Kaili Xie[1,2], Clément de Loubens[1], Marc Jaeger[2] & Marc Leonetti[1]

[1] Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LRP UMR 5520, Grenoble, France
[2] Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, Marseille, France
marc.leonetti@univ-grenoble-alpes.fr, clement.de-loubens@univ-grenoble-alpes.fr

Deformable particles such as cells, vesicles and microcapsules, have rich spatiotemporal dynamics of their shapes under flow. A striking example is the red blood cells (RBCs) in the shear flow: tumbling, swinging oscillations of the shapes.

Other non-linear phenomena, for example buckling, are observed on the stiffened RBCs [1,2]. Inspired by RBCs, we investigate emergence of such elastic instability on biomimetic microcapsules [3]. We found wrinkles and folds on deformed capsules under extensional flow.

Well-defined wrinkles are first observed on the membrane of stretched capsules when the deformation is above a critical deformation. However, further stretching, strongly non-linear phenomenon appears by localizing undulations, which is called folding. The origin and development of membrane instability were directly visualized by two views in our experiment. By combining the contribution of flow constraint and membrane elasticity, a phase diagram is thus obtained to predict the pattern formation on capsules [4]. In the near-threshold region, wavelength of wrinkles is found $\lambda_w \sim h^{1/2}$, where h is the thickness of membrane, in agreement with a theoretical prediction on thin sheets [5].

References

1. T. M. Fischer *et al.*, The stress-free shape of the red blood cell membrane, *Biophy. J.* , **34**, 409–422 (1981).
2. J. Mauer *et al.*, Flow-induced transitions of red blood cell shapes under shear, *Phys. Rev. Lett.*, **121**, 118103 (2018).
3. K. Xie *et al.*, Interfacial rheological properties of self-assembling biopolymer microcapsules, *Soft Matter*, **13**, 6208–6217 (2017).
4. K. Xie *et al.*, Wrinkling instability on soft biomimetic cells, *submitted* (2019).
5. E. Cerda *et al.*, Geometry and physics of wrinkling, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 074302 (2003).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Effet de la gravité sur le mûrissement dans un mélange binaire

Raphaël Zanella & Hervé Henry

Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, UMR-CNRS 7643, École Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau cedex
herve.henry@polytechnique.edu

Lorsqu'un mélange binaire est refroidi en dessous d'une température critique, il devient instable thermodynamiquement vis-à-vis de la séparation de phase. Deux phases apparaissent spontanément (l'une riche en une espèce, l'autre en l'autre espèce) et forment une microstructure présentant une taille caractéristique qui est le résultat d'un compromis entre effets énergétiques (minimisation de l'énergie de surface) et cinétiques (efficacité de la diffusion à courte distance) [1,2]. Par la suite, en suivant un principe de minimisation de l'énergie (ici de surface), la microstructure évolue lentement par diffusion puis par écoulement [3], ce qui entraîne une augmentation de la taille caractéristique. En utilisant des simulations numériques, nous cherchons à comprendre les effets de la gravité (les phases ont des densités différentes) sur le mûrissement hydrodynamique.

Notre approche consiste à résoudre par méthode pseudo-spectrale un modèle fortement non linéaire couplant l'équation de Cahn–Hilliard [2], pour le calcul de la composition du mélange, et les équations de Navier–Stokes sous l'approximation de Boussinesq, pour le calcul de la vitesse. Considérer l'équation de Cahn–Hilliard implique de travailler avec un modèle à interface diffuse, qui évite d'avoir à suivre l'interface entre les phases au cours de la simulation. L'équation de Cahn–Hilliard a déjà fait ses preuves dans les écoulements de fluides non miscibles, voir les références [4,5] par exemple. Les termes de forçage dans l'équation de la quantité de mouvement sont la divergence d'un tenseur analogue au tenseur de capillarité de Korteweg [6] et la force de flottaison liée à la variation de la densité avec la composition.

Dans une première étape, le code est validé sur le régime linéaire de l'instabilité de Rayleigh–Taylor. Les taux de croissance théoriques de perturbations de différentes longueurs d'ondes sont estimés numériquement avec une erreur très faible. Dans une deuxième étape, le code est appliqué au cas du mûrissement hydrodynamique dans un système infini (périodique), avec une distribution initiale aléatoire des phases. L'évolution des champs de composition et de vitesse est étudiée en faisant varier les différences de densité des deux phases. Différents régimes et taux de mûrissement sont observés selon les valeurs de ces paramètres.

Références

1. J. W. Cahn & J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy, *J. Chem. Phys.*, **28**, 258–267 (1958).
2. J. W. Cahn, Phase separation by spinodal decomposition in isotropic systems, *J. Chem. Phys.*, **42**, 93–99 (1965).
3. E. D. Siggia, Late stages of spinodal decomposition in binary mixtures, *Phys. Rev. A*, **20**, 595–605 (1965).
4. A. Celani, A. Mazzino, P. Muratore-Ginanneschi & L. Vozella, Phase-field model for the Rayleigh–Taylor instability of immiscible fluids, *J. Fluid Mech.*, **622**, 115–134 (2009).
5. J. Kim, Phase-field models for multi-component fluid flows, *Commun. Comput. Phys.*, **12**, 613–660 (2009).
6. D. M. Anderson, G. B. McFadden & A. A. Wheeler, Diffuse-interface methods in fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 139–165 (1998).

© **Non Linéaire Publications**, Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Annexes

Index des auteurs

Programme du mini-colloque

Programme de la 22e rencontre

Index des auteurs

Abramian Anaïs, 125
Abry Patrice, 3, 111
Agafontsev Dmitry, 147
Aillerie Michel, 185
Ajayi Adekunle, 134
Alboussière Thierry, 93
Alexakis Alexandros, 145
Allende Sofía, 94
Almarcha Christophe, 167
André Frédéric, 45, 157
Antier Romeo, 95
Argentina Médéric, 175
Arruga Denis, 126
Aumaître Sébastien, 106
Ayet Alex, 96

Bachelier Yohann, 97
Bahrani S. Amir, 98
Barker Adrian John, 152
Barré Julien, 99
Barrier Laurie, 125
Bec Jérémie, 94, 100
Bengana Yacine, 101, 188
Berhanu Michael, 102, 124, 140
Berman Simon, 127
Bertin Nicolas, 114
Besnard Hugues, 163
Bielawski Serge, 103, 129
Bilbault Jean-Marie, 185
Bittner Stefan, 104
Blanchard Guy, 166
Bonnefoy Félicien, 105, 186
Bonnesoeur Antoine, 163
Bordet Maxime, 51, 160
Bottino Alberto, 187
Bouillaut Vincent, 106
Bourgoin Mickael, 27, 139
Boury Samuel, 107
Brasselet Étienne, 114
van den Bremer Ton S., 181
Bres Alexis, 108
Brubach Jean-Blaise, 129
Brunet Maxime, 109
Brunet Philippe, 98
Brunetti Maura, 146
Bui Olivier, 110
Bush John W. M., 183
Busser Thomas, 3, 111

Cébron David, 75, 179, 190
Cabanes Simon, 168
Caby Théophile, 112
Cao Hui, 104
Cappanera Loïc, 130
Cardin Philippe, 179
Cazaubiel Annette, 102, 105, 113, 186
Chandre Cristel, 127, 187
Chapron Bertrand, 96
Chesneau Hugo, 114
Chraïbi Hanza, 114
Ciraolo Guido, 115
Claudet Cyrille, 133
Congy Thibault, 116
Copie François, 105, 151
Copie Francois, 186
Cornejo-Maceda Guy, 15, 123
Cortet Pierre-Philippe, 109
Costalonga Maxime, 98
Cottin-Bizonne Cécile, 27, 139
Cournède Paul-Henry, 9, 122
Courrech du Pont Sylvain, 124, 140, 158
Cros Anne, 117
Crumeyrolle Olivier, 163
Cuvier Christophe, 120

Dauxois Thierry, 107, 109
Davaille Anne, 118
Daviaud François, 120
De Souza David, 119, 159
Debue Paul, 120
Degond Pierre, 121
Dejoan Anne, 119
Della Noce Antonin, 9, 122
Delorme Pauline, 125
Delville Jean-Pierre, 114
Denet Bruno, 167
Deng Nan, 15, 123
Derr Julien, 124, 140
Devauchelle Olivier, 125
Doppler Delphine, 97
Dorbolo Stéphane, 113
Dos Santos Serge, 126, 185

Douady Stéphane, 162
Doveil Fabrice, 45, 157
Dubois Jonathan, 127
Dubrulle Bérengère, 120, 130
Duguet Yohann, 193

El Gennady, 105, 116, 147
Elskens Yves, 45, 157
Ermanyuk Evgeny, 107
Escande Dominique, 128, 187
Espa Stefania, 168
Etienne Jocelyn, 166
Evain Clément, 129
Evain Clément, 103

Falcon Éric, 102, 105, 113, 186
Faller Hugues, 130
Faranda Davide, 112
Fauve Stéphan, 108
Favier Benjamin, 131, 152, 165
Ferrero Enrico, 168
Fierling Julien, 166
Firpo Marie-Christine, 161
Foucaut Jean-Marc, 120
Fourdrinoy Johan, 132
Fraysse Nathalie, 133

Galassi Davide, 115
Gallet Basile, 106
Galperin, Boris, 168
Garcia-Molina Cruz, 134
Gaurav Prabhudesai, 186
Gernay Sophie Marie, 135
Gilet Tristan, 135, 183
Gissinger Christophe, 136
Godoy-Diana Ramiro, 95, 153
Gondran Alexandre, 21, 137
Gondran Michel, 21, 137
Gondret Philippe, 138
Gouiller Clément, 27, 139
Guérin Adrien, 140
Guazzelli Élisabeth, 171
Guazzotti Stefano, 104
Guermond Jean-Luc, 130
Guervilly Céline, 131

Harris David M., 164
Haudin Florence, 102
Henry Christophe, 94
Henry Hervé, 85, 195
Hernández Zapata Sergio, 141
Hernandez Hernandez Ivonne Judith, 57, 174
Hess Ortwin, 104
Ho Ian, 164
Hoefer Mark, 116
Homan Tess, 144
Hubert Nicolas, 129
Huguet Ludovic, 142

Isoard Mathieu, 33, 143
Ive Federica, 168

Jaeger Marc, 81, 194
James François, 170
Jerome J. John Soundar, 97, 155
José Marco V., 176
Joubaud Sylvain, 107, 144, 155

Kamchatnov Anatoly, 33, 143
van Kan Adrian, 145
Kasparian Jérôme, 146
Kenoufi Abdel, 21, 137
Kim Kyungduk, 104
Klotz Lukasz, 153
Knobloch Edgar, 131
Kraych Adrien, 147

Labat Marie, 129
Lagarde Antoine, 148
Lajeunesse Éric, 125
Lambert Pierre, 135
Lapeyre Guillaume, 96
Laurent Duchemin, 165
Laval Jean-Philippe, 120
Léard Pierre, 150
Le Bars Michael, 142, 150, 152
Lebel Alexandre, 151
Lecomte Charles-Édouard, 177
Le Gal Patrice, 141, 149, 150
Leoncini Xavier, 110
Leonetti Marc, 81, 194
Le Parquier Marc, 129
Lepot Simon, 106
Le Reun Thomas, 152
Lima Ricardo, 117
Limat Laurent, 171
Lints Martin, 126
Liu Tao, 153
Loiseau Jean-Christophe, 15, 123
López-Sánchez Erick, 154
de Loubens Clément, 81, 194
Lusseyran François, 15, 123
Lye Claire, 166

Métivier David, 99
Métivier François, 125
Madec Christopher, 155
Manfrin Massimialiano, 168
Manneville Paul, 39, 156
Maquet Laurent, 27, 139
Marié Louis, 96
Marmottant Philippe, 166
Masood Ali, 126
Mathieu Amélie, 9, 122

Matnica Giorgio, 112
Michel Guillaume, 105, 186
Minenna Damien F. G., 45, 157
Monchaux Romain, 119, 159, 193
Monsalve Eduardo, 158
Morales Hernández Ricardo, 117
Morfu Savério, 51, 160
Morzyński Marek, 15, 123
Mutabazi Innocent, 63, 163, 178

Nataf Henri-Claude, 179
Nemoto Takahiro, 145
Nicolas Rivière, 97
Noack Bernd R., 15, 123
Nore Caroline, 130

Odier Philippe, 107
Olivera-Martínez Patricia Eugenia, 154
Orozco Estrada Arturo, 117
Ostovan Yasar, 120
Oueslati Hanen, 161

Pétrélis François, 108
Pal Nairita, 192
Pascal Barabara, 111
Pascal Barbara, 3
Pastur Luc R., 15, 123
Pavloff Nicolas, 33, 143
Pelosse Alice, 171
Petit Julien, 114
Philippe Régis, 3, 111
Philippi Julien, 124
Picard Clément, 144
Picardo Jason R., 192
Plihon Nicolas, 182
Pousse Romain, 162
Poyé Alexandre, 45, 157
Prabhudesai Gaurav, 105
Prigent Arnaud, 63, 163, 178
Protière Suzie, 148
Pucci Giuseppe, 164
Purseed Jhaswantsing, 165
Pustelnik Nelly, 3, 111

Quilliet Catherine, 166

Radisson Basile, 167
Ramananarivo Sophie, 95
Randoux Stéphane, 105, 147, 151, 186
Raufaste Christophe, 175
Ray Samriddhi Sankar, 192
Raynal Florence, 27, 139
Read Peter, 168
Redelsperger Jean-Luc, 96
Reis Pedro, 169
Ribeiro Fernand, 129
Richard Guillaume, 170
Roché Matthieu, 171
Rolland Joran, 172
Rossé Matthieu, 51, 160
Roussel Éléonore, 103, 129, 173
Roy Pascale, 129
Royon Laurent, 98
Ruiz Chavarria Gerardo, 57, 141, 174

Salhi Aziz, 161
Sanchez-Rodriguez Jesus, 175
Sánchez-Torres Norma Yanet, 176
Sanson Bénédicte, 166
Sautel Jérémy, 177
Schlagheck Peter, 183
Scolan Hélène, 168
Seguin Antoine, 138
Semin Benoît, 153
Serres Marion, 3, 111
Shimizu Masaki, 39, 156
Sibgatullin Ilias, 107
Singh Harminder, 63, 178
Sommeria Joël, 134
Sonnendruecker Eric, 187
Staquet Chantal, 134
Su Sylvie, 75, 179, 190
Suret Pierre, 105, 147, 151, 180, 186
Sutherland Bruce, 181
Szwaj Christophe, 129

Taberlet Nicolas, 177, 182
Tadrist Loïc, 183
Tatali Raffaele, 184
Tchakoutio Nguetcho Aurélien Serge, 185
Thalabard Simon, 100
Thiria Benjamin, 95, 158
Tikan Alexey, 105, 151, 186
Tordeux Marie-Agnès, 129
Torzynski Alexandre, 166
Trejo Gutierrez Jose Antonio, 57, 174
Tronko Natalia, 187
Tuckerman Laurette S., 101, 188

Uzer Turgay, 127

Vérard Christian, 146
Vaienti Sandro, 112
Valori Valentina, 120
Valvo Lorenzo, 69, 189
Vidal Jérémie, 75, 190
Vidal Valérie, 3, 111, 144
Vincent Simon, 191
Vincenzi Dario, 192
Vittot Michel, 69, 189
Voisin Bruno, 134
Volk Romain, 27, 139

Wang Qi Jie, 104

Wang Zhe, 193
Wesfreid José Eduardo, 153
Wunenburger Régis, 114

Xie Kaili, 81, 194

Yamaguchi Yoshiyuki Y., 99
Yassin Houssam, 181
Ybert Christophe, 27, 139
Yiou Pascal, 112
Young Roland, 168

Zanella Raphaël, 85, 195
Zeng Yongquan, 104
Zhao Menghua, 171

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics in the Lab

Université Paris Diderot, **26 mars 2019**
Amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13e

L'objectif de ce mini-colloque est de réunir des chercheurs travaillant sur différents aspects des fluides géo et astrophysiques, en se focalisant sur les travaux expérimentaux. Les objets d'étude s'étendent des rivières et océans à la surface de la Terre jusqu'aux disques d'accrétions, en passant par le manteau et le noyau des planètes telluriques. Dans tous ces objets ainsi que dans leurs modélisations au laboratoire, des phénomènes non-linéaires variés sont à l'œuvre à différentes échelles, notamment via les instabilités hydrodynamiques et la turbulence.

09h25 – 09h30 : Introduction

09h30 – 10h10 : Thierry ALBOUSSIÈRE (Laboratoire de Géologie, ENS Lyon)
Convection in a centrifuge

10h15 – 10h55 : Anne DAVAILLE (FAST, Université Paris-Sud)
Convective patterns in viscous planetary interiors

11h00 – 11h30 : Pause café

11h30 – 12h10 : Olivier DEVAUCHELLE (IPGP, Paris)
Rivers in the lab

12h15 – 14h00 : Pause déjeuner

14h00 – 14h40 : Patrice LE GAL (IRPHE, Aix-Marseille Université)
Oceanic vortices in a jar: laboratory experiments in stratified rotating flows

14h45 – 15h25 : Bruce SUTHERLAND (Dpt. Physics, Earth & Atmospheric Sciences, Univ. of Alberta)
Nonlinear transport by gravity waves inside the ocean

15h30 – 16h00 : Pause café

16h00 – 16h40 : Peter READ (University of Oxford)
Zonostrophic beta-plumes, zonal jets and particle diffusivity in locally-forced shallow water experiments

16h45 – 17h25 : Christophe GISSINGER (LPS, ENS)
Keplerian turbulence in astrophysical accretion discs

17h30 : Clôture

Le mini-colloque satellite de la RNL 2019 est organisé cette année par Michaël Le Bars (IRPHE), Stéphan Fauve (ENS), Claude Jaupart (IPGP) et François Pétrélis (ENS).

22e Rencontre du Non-Linéaire

Université Paris Diderot, 26 – 28 mars 2019

Bienvenue à la 22e Rencontre du Non-Linéaire 2019 qui aura lieu à l'Université Paris Diderot, amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13e.

Nous aurons 96 contributions se répartissant en 4 conférences invitées, 12 communications longues et 80 communications courtes.

Mercredi 27 mars 2019

09h10 : **Introduction**
09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 1 (40 + 5 min.)**
10h00 - 10h30 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes
10h30 - 11h15 : **Pause café Posters** (45 min.)
11h15 - 11h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 11 communications courtes
11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues
14h45 - 15h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 24 communications courtes
15h45 - 17h00 : **Pause café Posters** (1h15)
17h00 - 17h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues
17h45 - 18h30 : **Conférence invitée 2 (40 + 5 min.)**
18h30 - 20h30 : Cocktail

Jeudi 28 mars 2019

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 3 (40 + 5 min.)**
10h00 - 10h50 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 20 communications courtes
10h50 - 11h45 : **Pause café Posters** (55 min)
11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues
14h45 - 15h20 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 13 communications courtes
15h20 - 16h30 : **Pause café Posters** (1h10)
16h30 - 17h15 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues
17h15 - 18h00 : **Conférence invitée 4 (40 + 5 min.)**

*Nous remercions **l'Université Paris Diderot** de mettre à notre disposition les locaux de la Rencontre. Nous remercions également le **CNRS (INSIS)**, l'**Institut Universitaire de France,** le **Département de Physique de l'ENS**, le **Département MEP de l'Université Paris Saclay**, le laboratoire **MSC,** le laboratoire **de Physique de ENS Lyon,** de subvenir aux frais de la Rencontre, ce qui la rend entièrement gratuite pour tous les participants. Cette année, nous sommes 145 inscrits au 12 mars 2019.*

Le Comité d'Organisation de la RNL 2019 :
E. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham

Mercredi 27 mars 2019

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Pedro REIS (40 + 5 min.)
Unraveling nonlinearities in elastic knots

10h00 - 10h30 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes

Morphogenesis and morphodynamics of sandy beaches
E. Monsalve, S. Courrech du Pont, B. Thiria, présenté par Eduardo Monsalve

Ségrégation granulaire dans les astéroïdes
J. Sautel, C.-E. Lecomte, N. Taberlet, présenté par Jérémy Sautel

Fluidisation d'un empilement granulaire bidimensionnel par le fond mobile d'un plan incliné
N. Fraysse, C. Claudet, présenté par Nathalie Fraysse

Forced three-wave interactions of capillary-gravity waves
M. Berhanu, A. Cazaubiel, F. Haudin, E. Falcon, présenté par Michaël Berhanu

Turbulence d'ondes inertielles générée par instabilité elliptique
T. Le Reun, B. Favier, M. Le Bars, présenté par Thomas Le Reun

Interactions non linéaires d'ondes basse fréquence dans une colonne de plasma magnétisée
S. Vincent, V. Désangles, N. Plihon, V. Dolique, présenté par Simon Vincent

Description N-corps de l'interaction onde-particule dans une structure périodique
D. F. G. Minenna, Y. Elskens, F. André, F. Doveil, A. Poyé, présenté par Damien Minenna

Long-time evolution of optical pulses in a nonlinear medium
M. Isoard, A. M. Kamchatnov, N. Pavloff, présenté par Mathieu Isoard

Mesure complète et ultra-rapide de structures non-linéaires générées par l'instabilité modulationnelle en optique
A. Lebel, A. Tikan, S. Randoux, P. Suret, F. Copie, présenté par Alexandre Lebel

Instabilité modulationelle d'une onde plane en présence de perturbations bruyantes et localisées
A. Kraych, D. Agafontsev, P. Suret, G. El, S. Randoux, présenté par Adrien Kraych

Croissance d'arbre soumis à des règles d'allocation de ressource
O. Bui, X. Leoncini, présenté par Olivier Bui

Caractérisation et modélisation de la morphogenèse urbaine
R. Pousse, S. Douady, présenté par Romain Pousse

10h30 - 11h15 : Pause café Posters (45 min.)

11h15 - 11h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 11 communications courtes

Analyse d'échelles dans un écoulement de Von Kármán numérique
H. Faller, C. Nore, B. Dubrulle, L. Cappanera, J.-L. Guermond, présenté par Hugues Faller

Topology of quasi-singularities in an experimental turbulent swirling flow
P. Debue, V. Valori, Y. Ostovan, C. Cuvier, J.-P. Laval, J.-M. Foucaut, B. Dubrulle, F. Daviaud, présenté par Paul Debue

Un modèle de lithosphère en couche mince pseudo-plastique
G. Richard, F. James, présenté par Guillaume Richard

Instabilités oscillatoires en milieu poreux d'un fluide en équilibre diphasique
A. Bres, F. Pétrélis, S. Fauve, présenté par Alexis Bres

Dynamics of a reactive spherical particle falling in a linearly stratified layer
L. Huguet, M. Le Bars, présenté par Ludovic Huguet

Effet de viscosité élongationnelle de l'écoulement Streaming généré par un cylindre vibrant
S. Amir Bahrani, M. Costalonga, L. Royon, Philippe Brunet, présenté par Seyed Amir Bahrani

Multi-stable liquid funnel-like interfaces induced by optical radiation pressure

H. Chesneau, J. Petit, N. Bertin, H. Chraïbi, E. Brasselet, R. Wunenburger, J.-P. Delville, présenté par Hugo Chesneau

Vers une standardisation des ultrasons non linéaires pour le contrôle non destructif du futur
S. Dos Santos, A. Masood, M. Lints, D. Arruga, G. Nardoni, présenté par Serge Dos Santos

Modèle mathématique de la dynamique de transmission de l'infection par Taenia-cysticercose
N. Y. Sánchez-Torres, M. V. José, présenté par Norma Yanet Sanchez-Torres

Encodage d'une information sinusoïdale dans un circuit neuronal et résonances induites par une perturbation
S. Morfu, M. Bordet, M. Rossé, présenté par Saverio Morfu

Contrôle de vitesse de flamme par un forçage paramétrique
B. Radisson, B. Denet, C. Almarcha, présenté par Basile Radisson

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Multiples attracteurs climatiques dans une planète-océan couplée
M. Brunetti, J. Kasparian, C. Vérard, présenté par Jérôme Kasparian

Turbulence d'ondes en hypergravité
A. Cazaubiel, S. Mawet, A. Darras, G. Grosjean, J. W. A. van Loon, S. Dorbolo, E. Falcon, présenté par Annette Cazaubiel

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Agrégation de radeaux granulaires à une interface
A. Lagarde, S. Protière, présenté par Antoine Lagarde

Interaction onde-écoulement moyen en hydrodynamique dispersive
T. Congy, G. El, M. Hoefer, présenté par Thibault Congy

14h45 - 15h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) – 24 communications courtes

Attracteur d'ondes d'inertie en régime linéaire et non-linéaire
M. Brunet, T. Dauxois, P.-P. Cortet présenté par Maxime Brunet

3D Inertial Wave Attractors
S. Boury, T. Dauxois, E. Ermanyuk, S. Joubaud, P. Odier, I. Sibgatullin, présenté par Samuel Boury

Ondes internes de gravité générées par convection turbulente
P. Léard, P. Le Gal, M. Le Bars, présenté par Pierre Léard

Ondes de relief et sillage émis par un courant géostrophique
C. Garcia-Molina, C. Staquet, J. Sommeria, B. Voisin, A. Ajayi, présenté par Cruz Garcia

Concentration préférentielle de chaînes élastiques en turbulence
J. R. Picardo, D. Vincenzi, N. Pal, S. S. Ray, présenté par Dario Vincenzi

Intermittence et multi-stabilité d'un tube mou parcouru par un écoulement d'air
A. Cros, A. Orozco Estrada, R. Morales Hernández, R. Lima, présenté par Anne Cros

Ailes battantes à rigidité anisotrope inspirées de l'insecte
R. Antier, S. Ramananarivo, B. Thiria, R. Godoy-Diana, présenté par Roméo Antier

Méthodes d'évènements rares pour l'effondrement et le développement de la turbulence de Couette plan
J. Rolland, présenté par Joran Rolland

Quadrupolar circulation in plane Couette flow
Z. Wang, Y. Duguet, R. Monchaux, présenté par Zhe Wang

États transitoires dans l'écoulement de Couette plan
R. Monchaux, D. De Souza, présenté par Romain Monchaux

Turbulence lagrangienne, irréversibilité et flots généralisés
J. Bec, S. Thalabard, présenté par Jérémie Bec

Solutal convection induced by dissolution
J. Philippi, M. Berhanu, S. Courrech du Pont, J. Derr, présenté par Julien Derr

Bi-stabilité diffusive-convective en présence d'un changement de phase
J. Purseed, B. Favier, L. Duchemin, présenté par Jhaswantsing Purseed

Dynamiques transitoires de sillage dans le « pinball fluidique »
N. Deng, L. Pastur, R. B. Noack, G. Cornejo-Maceda, F. Lusseyran, J.-C. Loiseau, M. Morzynski, présenté par Nan Deng

Dynamics of an artificial aquatic blade subjected to von Karman vortices
Y. Bachelier, D. Doppler, J. John Soundar Jerome, N. Rivière, présenté par Yohann Bachelier

Comportement asymptotique de populations hétérogènes avec interactions
A. Della Noce, A. Mathieu, P.-H. Cournède, présenté par Antonin Della Noce

Bifurcations de l'équation de Vlasov
J. Barré, D. Métivier, Y. Y. Yamaguchi, présenté par Julien Barré

Polynomial expansion of compressible modes in rotating rigid ellipsoids
J. Vidal, S. Su, D. Cébron, présenté par Jérémie Vidal

Experimental acoustic eigenmodes measurements: from sphere to spheroid
S. Su, P. Cardin, D. Cébron, H.-C. Nataf, présenté par Sylvie Su

États stationnaires des plasmas de tokamak en MHD visco-résistive
H. Oueslati, M.-C. Firpo, A. Salhi, présenté par Oueslati Hanen

Cycles hétéroclines en Taylor-Couette contra-rotatif
L. S. Tuckerman, Y. Bengana, présenté par Laurette Tuckerman

Cycles limites et quasipériodiques dans une cavité cisaillée
Y. Bengana, L. S. Tuckerman , présenté par Yacine Bengana

Wave propagation modelling in shallow water with an entire family of shallow water wave equations
A. S. Tchakoutio Nguetcho, J.-M. Bilbault, S. Dos Santos, M. Aillerie, présenté par A. S Tchakoutio Nguetcho

Le ludion dans un fluide stratifié : une dualité onde corpuscule ?
B. Castillo Morales, S. Hernández Zapata, G. Ruiz Chavarría, P. Le Gal, présenté par Sergio Hernandez-Zapata

15h45 - 17h00 : Pause café Posters (1h15)

17h00 - 17h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Spatio-temporal dynamics of semiconductor microlasers with chaotic ray dynamics
S. Bittner, S. Guazzotti, Y. Zeng, K. Kim, Q. J. Wang, O. Hess, H. Cao, présenté par Stefan Bittner

Érosion par dissolution : ruissellement sur plan incliné
A. Guérin, J. Derr, S. Courrech du Pont, M. Berhanu, présenté par Adrien Guerin

17h45 - 18h30 : Conférence invitée par Dominique ESCANDE (40 + 5 min.)
Du tout simple au très compliqué : itinéraire dans la non-linéarité des plasmas

18h30 – 20h30 : Cocktail *(présentation du badge obligatoire)*

Jeudi 28 mars 2019

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Pierre DEGOND (40 + 5 min.)
Mathematical models of self-organization

10h00 - 10h50 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) – 20 communications courtes
Effet de confinement lors de l'étalement de suspensions non-Browniennes
M. Zhao, A. Pelosse, L. Limat, É. Guazzelli, M. Roché, présenté par Matthieu Roché

Effet de la gravité sur le mûrissement dans un mélange binaire
R. Zanella, H. Henry, présenté par Raphaël Zanella

Ondes de surface produites par le déplacement d'un objet solide
J. A. Trejo Gutierrez, I. J. Hernandez Hernandez, G. Ruiz Chavarria, présenté par Gerardo Ruiz Chavarria

Dispersion relation for unidirectional surface gravity waves
A. Tikan, F. Bonnefoy, G. Michel, G. Prabhudesai, A. Cazaubiel, F. Copie, E. Falcon, S. Randoux, P. Suret, présenté par Alexey Tikan

Observation de la modulation non-linéaire contra-propagative des bords d'un train d'onde de gravité à la surface d'un fluide
F. Bonnefoy, P. Suret, A. Tikan, F. Copie, G. Prabhudesai, G. Michel, A. Cazaubiel, E. Falcon, G. El, S. Randoux, présenté par Félicien Bonnefoy

Subcritical transition to turbulence in wall-bounded flows: the case of plane Poiseuille flow
P. Manneville, M. Shimizu, présenté par Paul Manneville

Transition to turbulence in Couette-Poiseuille flow
T. Liu, L. Klotz, B. Semin, R. Godoy-Diana, J. E. Wesfreid, présenté par Tao Liu

An experimental study of turbulence generation and decay in Taylor-Couette system due to an abrupt stoppage
H. Singh, A. Prigent, I. Mutabazi, présenté par Harminder Singh

Etude de la turbulence à très hauts *Re* et *Gr* dans le Grand Taylor-Couette Thermique
H. Singh, A. Prigent, H. Besnard, A. Bonnesoeur, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi, présenté par Arnaud Prigent

L'adhésion élastocapillaire permet aux coléoptères de marcher la tête en bas
T. Gilet, S.-M. Gernay, P. Lambert, présenté par Tristan Gilet

Flambage d'une tige dans un milieu granulaire
A. Seguin, P. Gondret, présenté par Philippe Gondret

Dynamics and fragmentation of small flexible fibers in turbulence
S. Allende, C. Henry, J. Bec, présenté par Sofia Allende

Forces on capillary floaters
G. Pucci, I. Ho, D. M. Harris, présenté par Giuseppe Pucci

La bataille d'Actium et le Mythe de l'échénéis-remora
J. Fourdrinoy, C. Caplier, Y. Devaux, A. Gianni, L. Zacharias, I. Jouteur, P. Martin, J. Dambrine, M. Petcu, M. Pierre, G. Rousseaux, présenté par Johan Fourdrinoy

Mélange et démélange induits par des particules actives de camphre
C. Gouiller, L. Maquet, F. Raynal, M. Bourgoin, R. Volk, C. Cottin-Bizonne, C. Ybert, présenté par Clément Gouiller

Dynamique non-linéaire du centre guide d'un électron soumis à un champ laser de forte intensité
J. Dubois, S. A. Berman, C. Chandre, T. Uzer, présenté par Jonathan Dubois

Contrôle d'une instabilité spatio-temporelle dans les centres de rayonnement synchrotron
C. Evain, C. Szwaj, E. Roussel, M. Le parquier, M.-A. Tordeux, M. Labat, F. Ribeiro, N. Hubert, J.-B. Brubach, P. Roy, S. Bielawski, présenté par Clément Évain

Instabilités et formation de patterns dans les électrons relativistes : observations directes et modélisation
C. Szwaj, C. Evain, E. Burkard, E. Roussel, M. Le Parquier, S. Bielawski, F. Ribeiro, M. Labat, N. Hubert, J.-B. Brubach, P. Roy, E. Blomley, M. Brosi, E. Bründermann, S. Funkner, N. Hiller, M. J. Nasse, G. Niehues, M. Schedler, P. Schönfeldt, J. L. Steinmann, S. Walther, A.-S. Müller, présenté par Serge Bielawski

Condensation sous-critique en convection de Rayleigh-Bénard en rotation
B. Favier, C. Guervilly, E. Knobloch, présenté par Benjamin Favier

Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment
V. Bouillaut, S. Lepot, S. Aumaître, B. Gallet, présenté par Vincent Bouillaut

10h50 - 11h45 : Pause café Posters (55 min)

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Là où l'imprédictabilité s'estompe : étude comparée de l'effet tunnel chez les marcheurs et en mécanique quantique
L. Tadrist, T. Gilet, P. Schlagheck, J. W. M. Bush, présenté par Loïc Tadrist

Application de l'effet d'echo pour la génération d'harmonique d'ordre élevé dans des paquets d'électrons relativistes
E. Roussel, présenté par Eléonore Roussel

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Wrinkling and folding on soft microcapsules
K. Xie, C. de Loubens, M. Jaeger, M. Leonetti, présenté par Kaili Xie

How to simulate kinetic nonlinear effects in fusion plasmas
N. Tronko, A. Bottino, C. Chandre, D. Escande, E. Sonnendruecker, présenté par Natalia Tronko

14h45 - 15h20 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) – 13 communications courtes

Écoulement gaz-liquide dans un milieu poreux confiné : caractérisation par analyse d'images
T. Busser, B. Pascal, N. Pustelnik, P. Abry, M. Serres, R. Philippe, V. Vidal, présenté par Thomas Busser

Fluid-particle suspension by gas release from a granular bed
V. Vidal, T. Homan, C. Picard, S. Joubaud, présenté par Sylvain Joubaud

Dynamics of single rising bubble in suspension
C. Madec, J. John Soundar Jerome, S. Joubaud, présenté par Christopher Madec

Dynamique de sédimentation de particules
D. De Souza, R. Monchaux, A. Dejoan, présenté par David De Souza

Rare transitions to a thin-layer turbulent condensate
A. van Kan, T. Nemoto, A. Alexakis, présenté par Adrian van Kan

Turbulence in edge tokamak plasma and interaction with magnetic X-point configuration in 3D fluid simulations
G. Ciraolo, D. Galassi, P. Tamain, H. Bufferand, P. Ghendrih, N. Nace, E. Serre, présenté par Guido Ciraolo

Numerical modelling of edge tokamak plasma: impact of collisionality on turbulence properties
R. Tatali, H. Bufferand, T. Cartier-Michaud, G.Ciraolo, D. Galassi, Ph. Ghendrih, F. Nespoli, E. Serre, P. Tamain, présenté par Raffaele Tatali

Generalized dimensions and local indicators of dynamical systems
T. Caby, D. Faranda, G. Mantica, S. Vaienti, P. Yiou, présenté par Theophile Caby

Un modèle fractionnaire de trafic
E. J. López-Sánchez, P. E. Olivera-Martínez, présenté par Erick Javier Lopez-Sanchez

Un modèle simplifié de locomotion aquatique
J. Sanchez-Rodriguez, C. Raufaste, M. Argentina, présenté par Jesus Sanchez-Rodriguez

Drosophilia during early gastrulation is not only a living being
J. Fierling, A. Torzynski, C. Quilliet, J. Etienne, P. Marmottant, G. Blanchard, C. Lye, B. Sanson, présenté par Catherine Quilliet

Perturbation Theory in Algebraic Setting
L. Valvo, M. Vittot, présenté par Lorenzo Valvo

Le tenseur complexe de Faraday pour comprendre la non validité de la théorie de Born-Infeld
M. Gondran, A. Kenoufi, A. Gondran, présenté par Michel Gondran

15h20 - 16h30 : Pause café Posters (1h10)

16h30 - 17h15 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Quel est l'impact des vagues sur la turbulence atmosphérique ?
A. Ayet, B. Chapron, J.-L. Redelsperger, G. Lapeyre, L. Marié, présenté par Alex Ayet

Morphogenèse glaciaire induite par ablation différentielle
N. Taberlet, N. Plihon, présenté par Nicolas Taberlet

17h15 - 18h00 : Conférence invitée par Pierre SURET (40 + 5 min.)
Integrable turbulence in optical fibers and 1D water tank experiments

22e Rencontre du Non-Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2019

Version électronique du 12 avril 2019

ISBN 978-2-9538596-8-3
EAN 9782953859683

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)
Site universitaire du Madrillet — BP 12
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex

22e Rencontre du Non Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2019

ISBN 978-2-9538596-8-3
EAN 9782953859683

http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/

Crédits Photo : C. Laroche et E. Falcon - AiR (Art in Research)