

Homogénéisation des structures multiferroïques multicouches avec propriétés couplées magnétoélectriques

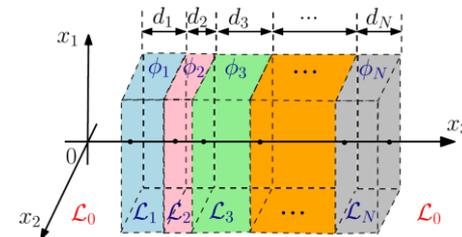
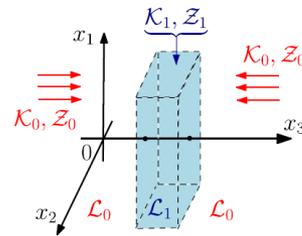
Stefano Giordano

*IEMN UMR 8520 / LIA LICs-LEMAC
CNRS, Université de Lille, Centrale Lille,
ISEN, Université de Valenciennes*



Plan de l'exposé

- Introduction au couplage multi-physique
- Equations des champs couplés
- Réponse linéaire
- Analyse d'une couche
- Homogénéisation multicouches
- Cas particuliers: permittivité, perméabilité, élasticité
- Structures multiferroïques: effet magnétoélectrique
- Généralisation 1: direction de stratification arbitraire
- Généralisation 2: structures multicouches non-linéaires



Couplage multi-physique

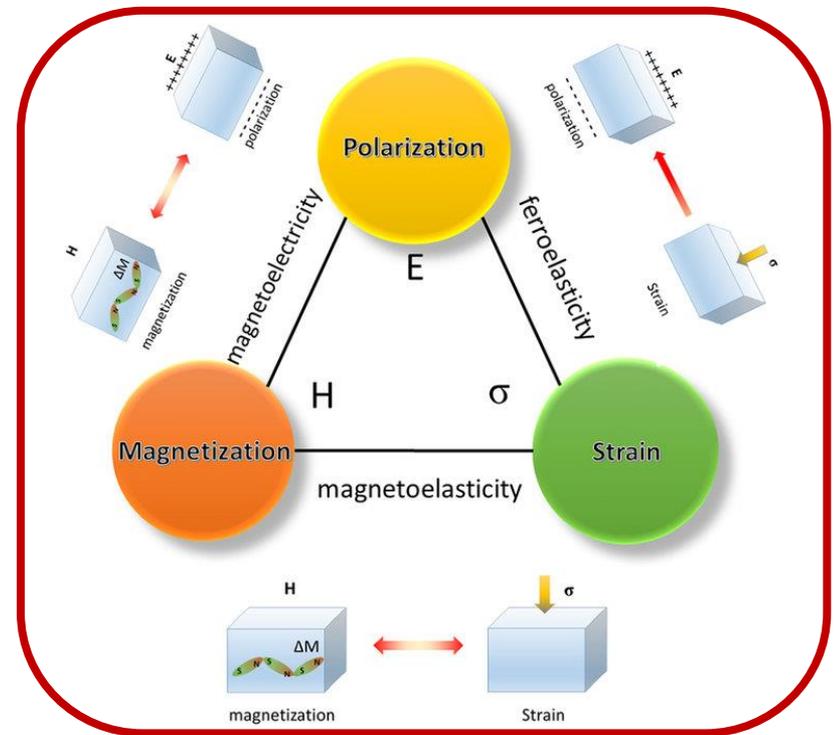
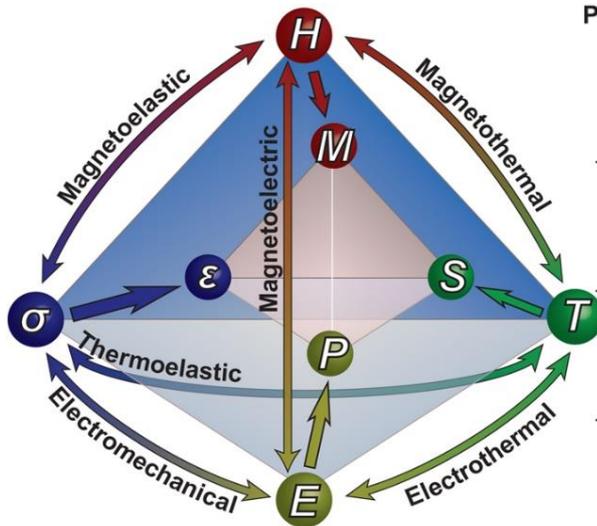
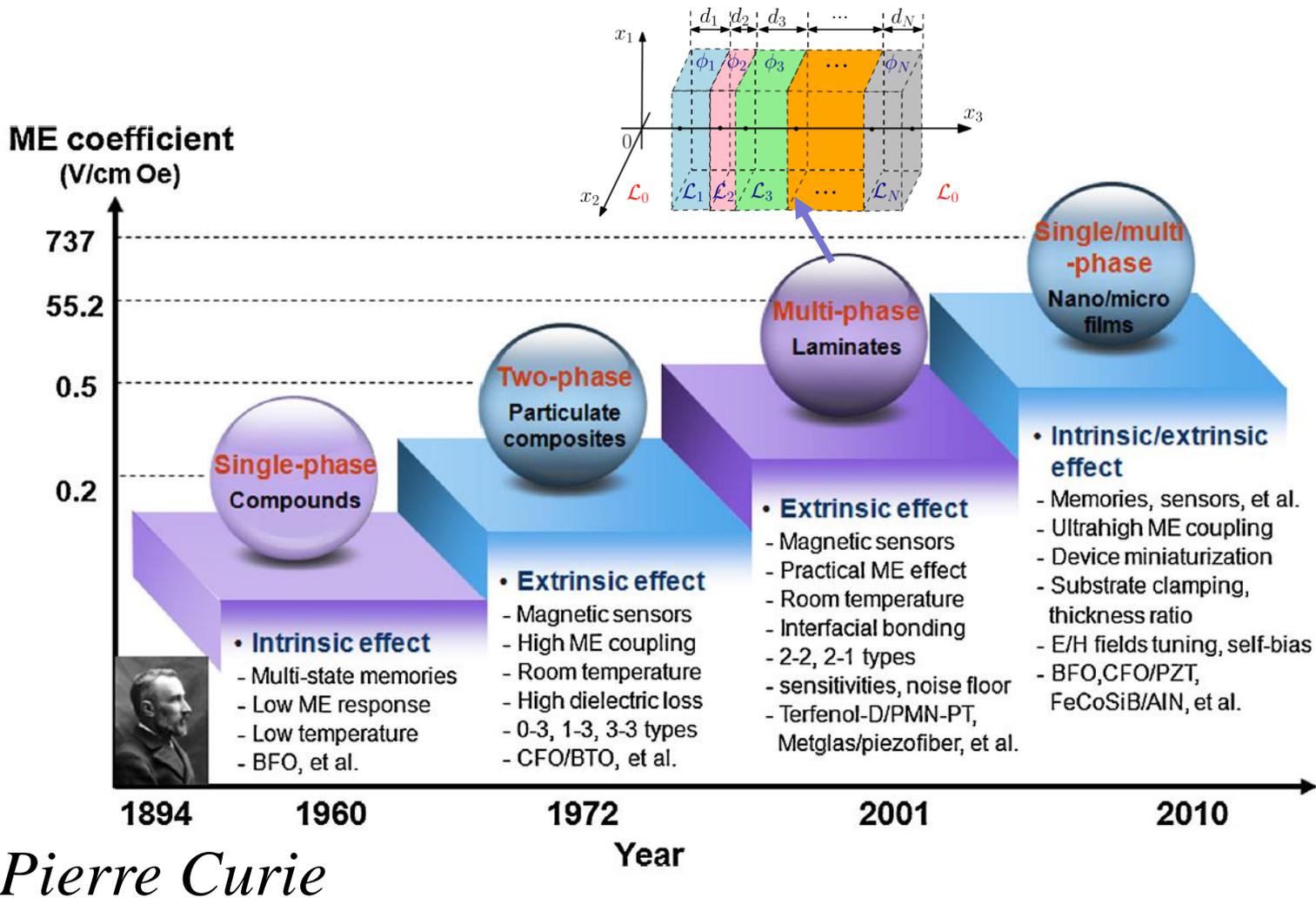


Diagramme de Heckmann



Perturbation	Response	Susceptibility
σ	ϵ	Elasticity
	P	Piezoelectric
	S	Piezocaloric
	M	Converse Magnetostriction
E	ϵ	Converse Piezoelectric
	P	Dielectric
	S	Electrocaloric
	M	Electromagnetic
T	ϵ	Thermoelastic
	P	Pyroelectric
	S	Heat Capacity
	M	Pyromagnetic
H	ϵ	Magnetostriction
	P	Magnetolectric
	S	Magnetocaloric
	M	Magnetic

Effet magnéto-électrique



Équations de l'électromagnétisme 1

Équations de Maxwell dans les milieux matériels

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Il faut introduire des hypothèses supplémentaires qui sont appelées "**relations de constitution**" du milieu

$$\vec{D} = f(\vec{E}) \quad \text{et} \quad \vec{B} = g(\vec{H})$$

Équations de l'électromagnétisme 2

On peut définir l'énergie électromagnétique u (J/m³) associée au champ électromagnétique; à partir des équations de Maxwell, on déduit que

$$\frac{du}{dt} = E_i \frac{dD_i}{dt} + H_i \frac{dB_i}{dt} \quad (1)$$

Si on suppose le découplage énergétique $u = u_e + u_m$ avec $u_e = u_e(\vec{D})$ (associée au champ électrique) et $u_m = u_m(\vec{B})$ (associée à un champ magnétique)

on obtient les **relations de constitution** en fonction des énergies

$$E_i = \frac{\partial u_e(\vec{D})}{\partial D_i} \quad H_i = \frac{\partial u_m(\vec{B})}{\partial B_i}$$

Équations de la théorie de l'élasticité 1

- Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i} + b_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

- La loi de conservation du moment cinétique

$$T_{ij} = T_{ji}$$

- Pour compléter le système on introduit la **loi de comportement** qui se présente comme une *relation* entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations $\epsilon_{ij} = (1/2) (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$

$$T_{ij} = f(\{\epsilon_{ij}\})$$

Équations de la théorie de l'élasticité 2

- À partir des équations précédentes on trouve la variation d'énergie élastique u (J/m³) au cours du temps

$$\frac{du}{dt} = T_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \quad (2)$$

- Si on suppose que l'énergie u dépend de l'état de déformation $u = u(\epsilon_{ij})$ on obtient la **loi de comportement**

$$T_{ij} = \frac{\partial u(\hat{\epsilon})}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Couplage entre les différentes propriétés physiques

- Dans les cas précédents nous avons considéré les propriétés physiques découplées. Pour décrire le couplage on peut généraliser (1) et (2) en obtenant

$$\frac{du}{dt} = T_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} + E_i \frac{dD_i}{dt} + H_i \frac{dB_i}{dt}$$

- Si on considère que $u = u(\hat{\epsilon}, \vec{D}, \vec{B})$ on a

$$T_{ij} = \frac{\partial u(\hat{\epsilon}, \vec{D}, \vec{B})}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad E_i = \frac{\partial u(\hat{\epsilon}, \vec{D}, \vec{B})}{\partial D_i} \quad \text{et} \quad H_i = \frac{\partial u(\hat{\epsilon}, \vec{D}, \vec{B})}{\partial B_i}$$

Matériaux linéaires

Pour compacter les notations nous pouvons introduire les variables généralisées suivantes

$$\mathcal{K}_g^T = (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12}, E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3),$$

$$\mathcal{Z}_g^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}, D_1, D_2, D_3, B_1, B_2, B_3)$$

Un milieu continu linéaire est donc défini par la loi de comportement

$$\mathcal{K}_g = \mathcal{L}_g \mathcal{Z}_g \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g^T$$

Il y a une deuxième notation

$$\mathcal{K}^T = (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12}, D_1, D_2, D_3, B_1, B_2, B_3),$$

$$\mathcal{Z}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}, -E_1, -E_2, -E_3, -H_1, -H_2, -H_3)$$

qui permet de décrire un système linéaire par

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} \mathcal{Z}$$

avec

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^T$$

Modèle isotrope transverse

(symétrie de révolution autour de l'axe 3)

Constantes piézoélectriques

Constantes élastiques

Constantes magnétoélastiques

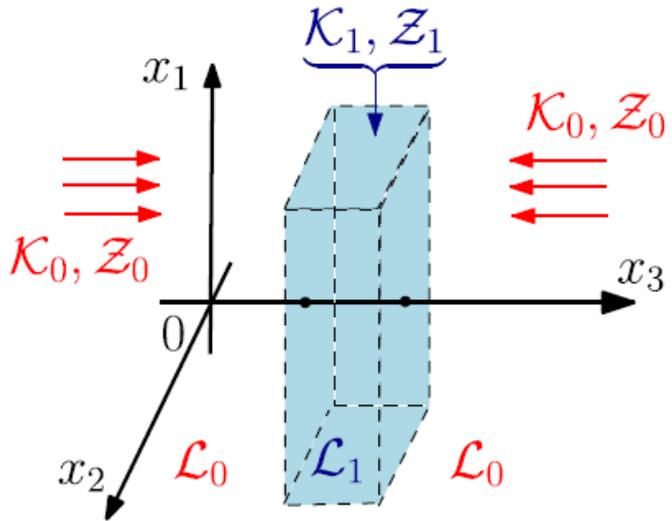
$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 & f_{31} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 & f_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 & 0 & f_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & f_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & f_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -p_{11} & 0 & 0 & -g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & -p_{11} & 0 & 0 & -g_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{33} & 0 & 0 & -g_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 & -g_{11} & 0 & 0 & -m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 & 0 & 0 & -g_{11} & 0 & 0 & -m_{11} & 0 \\ f_{31} & f_{31} & f_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_{33} & 0 & 0 & -m_{33} \end{bmatrix} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^T$$

Tenseur de permittivité électrique

Constantes magnétoélectriques

Tenseur de perméabilité magnétique

Analyse d'une couche



Composantes continues aux interfaces ($\perp x_3$)



n=5

Contraintes généralisées

3

4

5

9

12

$$\mathcal{K}^T = (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12}, D_1, D_2, D_3, B_1, B_2, B_3),$$

$$\mathcal{Z}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}, -E_1, -E_2, -E_3, -H_1, -H_2, -H_3)$$

1

2

6

7

8

10

11

Déformations généralisées

m=7¹²

Tenseurs de structure

(n=5, m=7)

Composantes continues des contraintes généralisées \mathcal{K}

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,n+m}(\mathfrak{R})$$

Composantes continues des déformations généralisées \mathcal{Z}

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n+m}(\mathfrak{R})$$

Propriétés des tenseurs \mathcal{P} et \mathcal{Q}

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{P}^T &= \mathcal{I}_n & \text{et} & & \mathcal{Q}\mathcal{Q}^T &= \mathcal{I}_m, \\ \mathcal{P}\mathcal{Q}^T &= \mathcal{O}_{nm} & \text{et} & & \mathcal{Q}\mathcal{P}^T &= \mathcal{O}_{mn}, \\ \mathcal{P}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q}^T\mathcal{Q} &= \mathcal{I}_{n+m},\end{aligned}$$

Contraintes généralisées

$\mathcal{P}\mathcal{K} \in \mathfrak{R}^n$ contient les composantes continues de $\mathcal{K} \in \mathfrak{R}^{n+m}$

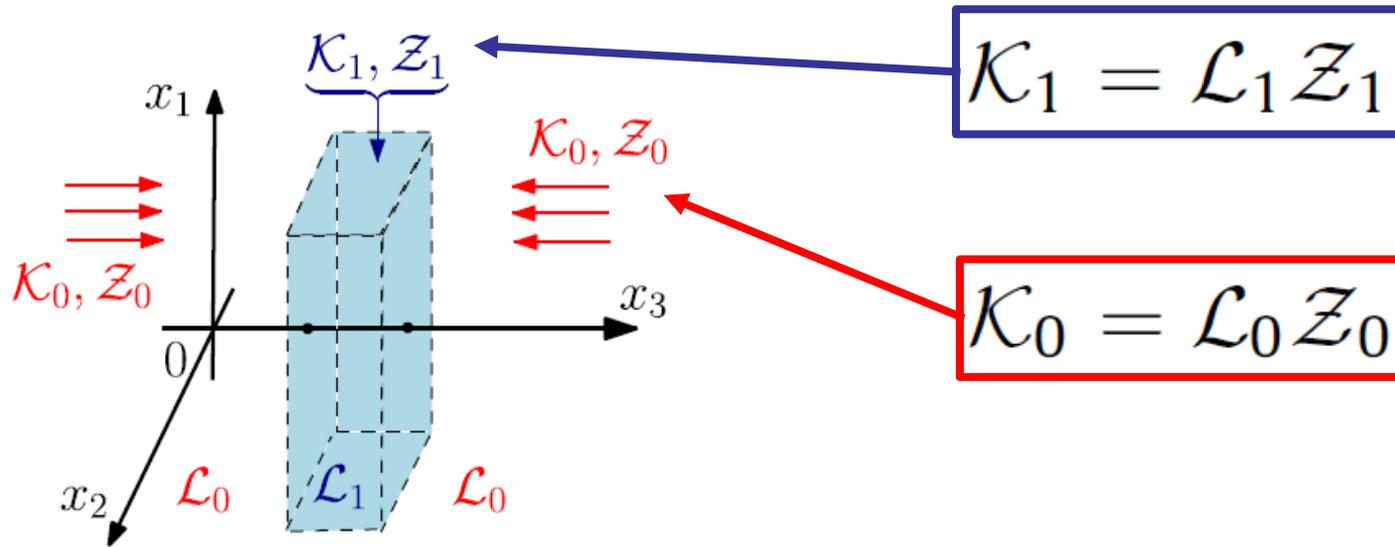
$\mathcal{Q}\mathcal{Z} \in \mathfrak{R}^m$ contient les composantes continues de $\mathcal{Z} \in \mathfrak{R}^{n+m}$

Déformations généralisées

$\mathcal{P}^T\mathcal{P}\mathcal{K} \in \mathfrak{R}^{n+m}$ même structure de \mathcal{K} avec comp. discontinues = 0

$\mathcal{Q}^T\mathcal{Q}\mathcal{Z} \in \mathfrak{R}^{n+m}$ même structure de \mathcal{Z} avec comp. discontinues = 0

Solution pour une couche 1



n composantes continues de \mathcal{K}_0 →

Contraintes généralisées

Déformations généralisées

m composantes discontinues

m composantes discontinues

n composantes discontinues

n composantes continues de \mathcal{Z}_0 →

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{P}^T \mathcal{P} \mathcal{K}_0 + \mathcal{Q}^T \boldsymbol{\chi},$$

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} \mathcal{Z}_0 + \mathcal{P}^T \boldsymbol{\gamma},$$

$$\boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{R}^m$$

inconnues

$$\boldsymbol{\gamma} \in \mathfrak{R}^n$$

Solution pour une couche 2

On utilise $\mathcal{K}_1 = \mathcal{L}_1 \mathcal{Z}_1$:

$$\mathcal{P}^T \mathcal{P} \mathcal{K}_0 + \mathcal{Q}^T \mathcal{X} = \mathcal{L}_1 \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} \mathcal{Z}_0 + \mathcal{L}_1 \mathcal{P}^T \mathcal{Y}$$

On applique \mathcal{P} avec $\mathcal{P} \mathcal{Q}^T = 0$ et $\mathcal{P} \mathcal{P}^T = \mathcal{I}_n$:

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{P}^T)^{-1} (\mathcal{P} \mathcal{K}_0 - \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} \mathcal{Z}_0)$$

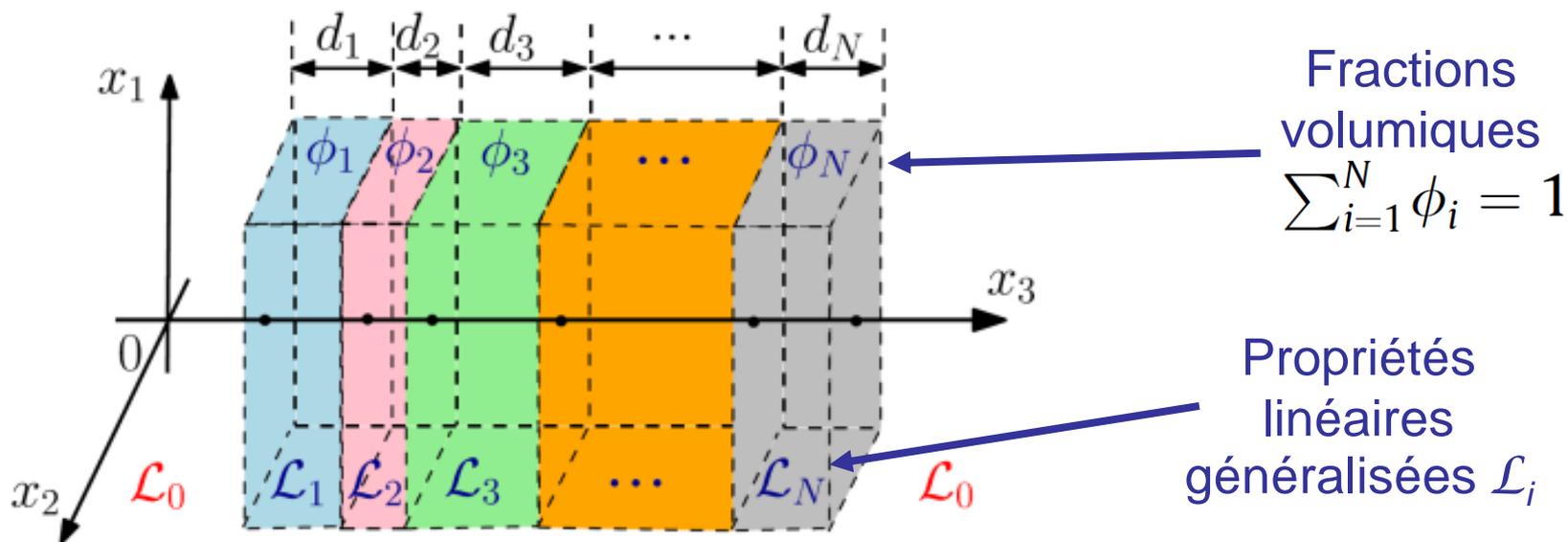
On trouve:

$$\mathcal{Z}_1 = \left[\mathcal{Q}^T \mathcal{Q} + \mathcal{P}^T (\mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P} (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 \mathcal{Q}^T \mathcal{Q}) \right] \mathcal{Z}_0$$

D'après $\mathcal{P}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} = \mathcal{I}_{n+m}$, on obtient:

$$\mathcal{Z}_1 = \left[\mathcal{I}_{n+m} + \mathcal{P}^T (\mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P} (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1) \right] \mathcal{Z}_0$$

Homogénéisation multicouches 1



Dans chaque couche $\mathcal{K}_i = \mathcal{L}_i \mathcal{A}_i \mathcal{Z}_0$ et $\mathcal{Z}_i = \mathcal{A}_i \mathcal{Z}_0$

Où $\mathcal{A}_i = \mathcal{I}_{n+m} + \mathcal{P}^T (\mathcal{P} \mathcal{L}_i \mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P} (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_i)$ *Tenseurs de concentration*

Donc: $\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{K} \rangle = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{K}_i = \left(\sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i \mathcal{A}_i \right) \mathcal{Z}_0, \\ \langle \mathcal{Z} \rangle = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{Z}_i = \left(\sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{A}_i \right) \mathcal{Z}_0. \end{array} \right.$

Contraintes généralisées moyennes

Déformations généralisées moyennes

Homogénéisation multicouches 2

Définition des propriétés effectives:

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \mathcal{L}_{eff} \langle \mathcal{Z} \rangle$$

$$\mathcal{L}_{eff} = \left(\sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i \mathcal{A}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{A}_i \right)^{-1}$$

Premier résultat:

$$\mathcal{L}_{eff} = \left[\sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i + \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i \mathcal{P}^T (\mathcal{P} \mathcal{L}_i \mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P} (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_i) \right] \times \left[\mathcal{I}_{n+m} + \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{P}^T (\mathcal{P} \mathcal{L}_i \mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P} (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_i) \right]^{-1}$$

Il faut prouver que \mathcal{L}_{eff} ne dépend pas de \mathcal{L}_0 .

On utilise la propriété:

$$(\mathcal{I}_{n+m} + \mathcal{S}\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{I}_{n+m} - \mathcal{S}(\mathcal{I}_{n+m} + \mathcal{R}\mathcal{S})^{-1}\mathcal{R}$$

où $\mathcal{S} \in \mathbf{M}_{n+m,n}(\mathfrak{R})$ et $\mathcal{R} \in \mathbf{M}_{n,n+m}(\mathfrak{R})$

Homogénéisation multicouches 3

On utilise la propriété avec

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}^T \text{ et } \mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \phi_i (\mathcal{P}\mathcal{L}_i\mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_i)$$

Et on trouve finalement:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i - \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i \mathcal{P}^T (\mathcal{P}\mathcal{L}_i\mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P}\mathcal{L}_i \\ &+ \sum_{k=1}^N \phi_k \mathcal{L}_k \mathcal{P}^T (\mathcal{P}\mathcal{L}_k\mathcal{P}^T)^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \phi_i (\mathcal{P}\mathcal{L}_i\mathcal{P}^T)^{-1} \right]^{-1} \sum_{j=1}^N \phi_j (\mathcal{P}\mathcal{L}_j\mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P}\mathcal{L}_j \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \langle \mathcal{L} \rangle - \langle \mathcal{L}\mathcal{P}^T (\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P}\mathcal{L} \rangle \\ &+ \langle \mathcal{L}\mathcal{P}^T (\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^T)^{-1} \rangle \left[\langle (\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^T)^{-1} \rangle \right]^{-1} \langle (\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^T)^{-1} \mathcal{P}\mathcal{L} \rangle \end{aligned}$$

Cas particulier 1: permittivité ou perméabilité

On trouve le résultat particulier:

$$\hat{\epsilon}_{eff} = \sum_{i=1}^N \phi_i \hat{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{(\hat{\epsilon}_i \vec{e}_3) \otimes (\hat{\epsilon}_i \vec{e}_3)}{\vec{e}_3 \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{e}_3} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_k \phi_j \frac{(\hat{\epsilon}_k \vec{e}_3) \otimes (\hat{\epsilon}_j \vec{e}_3)}{(\vec{e}_3 \cdot \hat{\epsilon}_k \vec{e}_3) (\vec{e}_3 \cdot \hat{\epsilon}_j \vec{e}_3)} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{\vec{e}_3 \cdot \hat{\epsilon}_i \vec{e}_3}}$$

Et si on considère $\hat{\epsilon}_i = \epsilon_i \hat{I}$ on obtient:

$$\hat{\epsilon}_{eff} = \sum_{i=1}^N \phi_i \epsilon_i (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{\epsilon_i}} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

c'est-à-dire:

$$\epsilon_{eff,\perp} = \sum_{i=1}^N \phi_i \epsilon_i = \langle \epsilon \rangle$$

montage en parallèle

et

$$\epsilon_{eff,\parallel} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{\epsilon_i}} = \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle$$

montage en série

Cas particulier 2: élasticité

Dans le cas des milieux isotropes on obtient:

$$k = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i \mu_i (2\mu_i + 3\lambda_i)}{2\mu_i + \lambda_i} + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i \lambda_i}{2\mu_i + \lambda_i} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{2\mu_i + \lambda_i} \right)^{-1}$$

$$= \left\langle \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{2\mu + \lambda} \right\rangle + \left\langle \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{2\mu + \lambda} \right\rangle^{-1},$$

$$m = \sum_{i=1}^N \phi_i \mu_i = \langle \mu \rangle,$$

$$l = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i \lambda_i}{2\mu_i + \lambda_i} \right) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{2\mu_i + \lambda_i} \right)^{-1} = \left\langle \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2\mu + \lambda} \right\rangle^{-1}$$

$$n = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{2\mu_i + \lambda_i} \right)^{-1} = \left\langle \frac{1}{2\mu + \lambda} \right\rangle^{-1},$$

$$p = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{\mu_i} \right)^{-1} = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}.$$

$$\mathcal{T} = (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12})^T,$$

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T$$

Paramètres de Hill

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \mathcal{E}$$

Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67, 4427–4440.

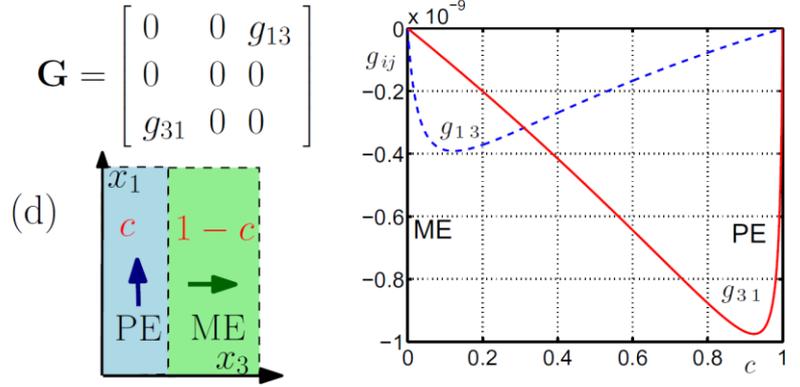
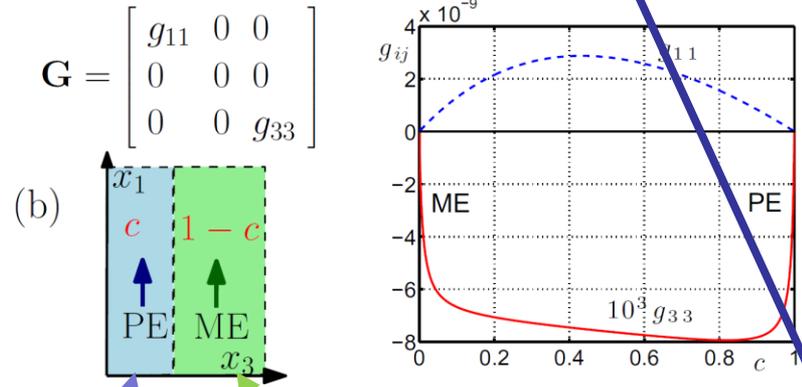
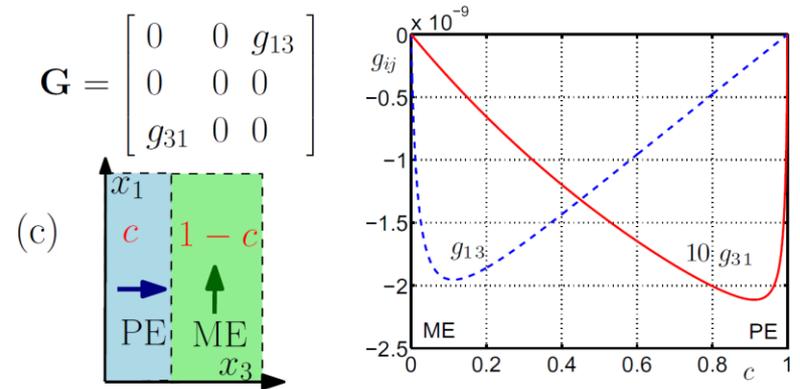
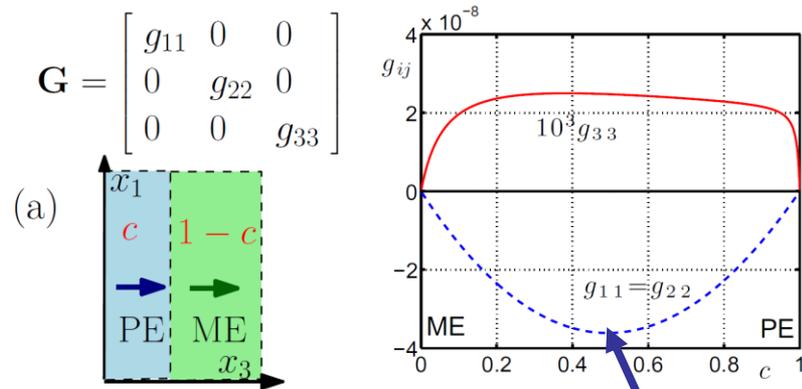
Postma, G. W. (1955). Waves propagation in a stratified medium. *Geophysics*, 20, 780–806.

Milton, G. W. (2004). *The theory of composites*. Cambridge: Cambridge University Press.

Effet magnéto-électrique

$$\langle \mathcal{K} \rangle \begin{pmatrix} \langle T \rangle \\ \langle \vec{D} \rangle \\ \langle \vec{B} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E}^T & -\mathbf{P} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{F}^T & -\mathbf{G}^T & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E} \rangle \\ -\langle \vec{E} \rangle \\ -\langle \vec{H} \rangle \end{pmatrix} \langle \mathcal{Z} \rangle$$

Contraintes généralisés Déformations généralisés



BaTiO_3 CoFe_2O_4 $g_{11} = g_{22} \cong -3.5 \times 10^{-8} \text{ s/m}$ 22

Conditions aux limites

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{T} \rangle \\ \langle \vec{D} \rangle \\ \langle \vec{B} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E}^T & -\mathbf{P} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{F}^T & -\mathbf{G}^T & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E} \rangle \\ -\langle \vec{E} \rangle \\ -\langle \vec{H} \rangle \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{\text{eff}} \langle \mathcal{Z} \rangle$$

« Mechanically clamped » $\langle \mathcal{E} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \vec{D} \rangle &= \mathbf{P} \langle \vec{E} \rangle + \mathbf{G} \langle \vec{H} \rangle \\ \langle \vec{B} \rangle &= \mathbf{G}^T \langle \vec{E} \rangle + \mathbf{M} \langle \vec{H} \rangle \end{aligned}$$

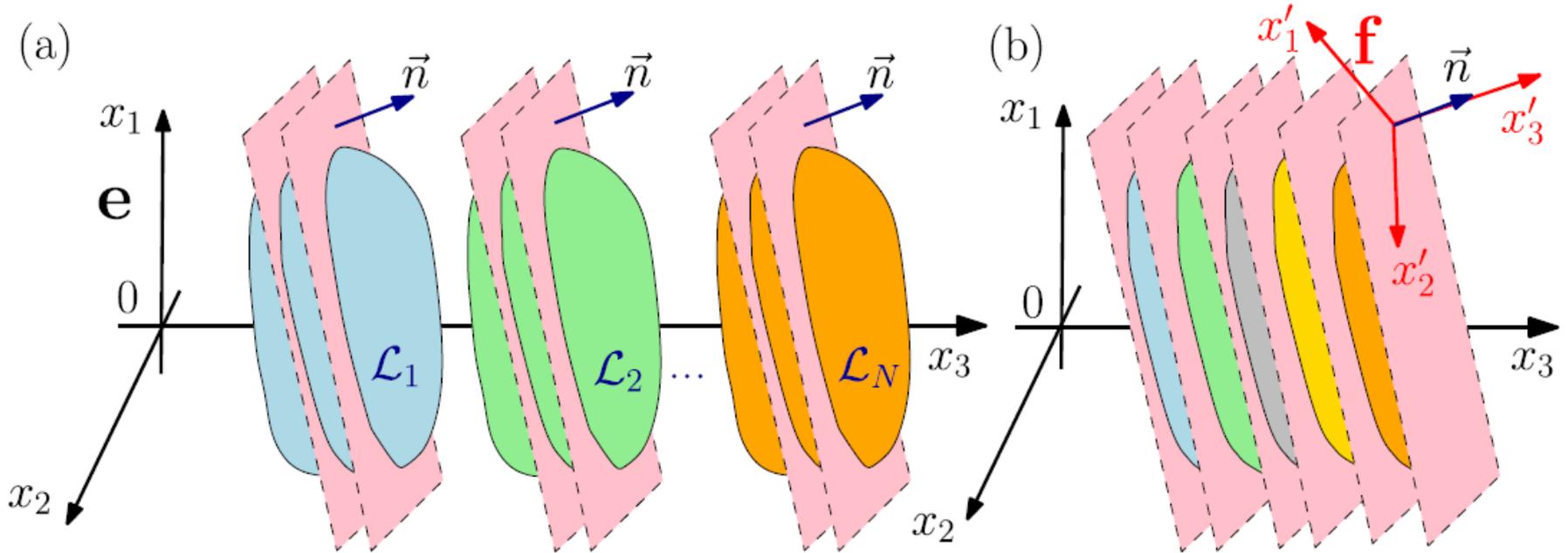
« Mechanically free » $\langle \mathcal{T} \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \vec{D} \rangle &= (\mathbf{P} + \mathbf{E}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}) \langle \vec{E} \rangle + (\mathbf{G} + \mathbf{E}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}) \langle \vec{H} \rangle \\ \langle \vec{B} \rangle &= (\mathbf{G}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}) \langle \vec{E} \rangle + (\mathbf{M} + \mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}) \langle \vec{H} \rangle \end{aligned}$$

Commentaires

- Une des rares solutions exactes dans le monde des théories d'homogénéisation
- Un seul tenseur de structure intervient dans la solution, implémentation algébrique simple
- Limitation: section infinie des couches, pas d'effets de bords
- Validité pour toutes structures cristallines et toutes formes du couplage
- Piézoélectricité + magnétostriction = effet magnétoélectrique
- Structure simple pour les procédés technologiques (mémoires, capteurs, etc.)

Théorie exacte pour une direction de stratification arbitraire $\vec{n} = (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$



$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i^{\mathbf{e}} - \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{L}_i^{\mathbf{e}} \mathcal{P}_{\vec{n}}^T (\mathcal{P}_{\vec{n}} \mathcal{L}_i^{\mathbf{e}} \mathcal{P}_{\vec{n}}^T)^{-1} \mathcal{P}_{\vec{n}} \mathcal{L}_i^{\mathbf{e}}$$

$$+ \sum_{k=1}^N \phi_k \mathcal{L}_k^{\mathbf{e}} \mathcal{P}_{\vec{n}}^T (\mathcal{P}_{\vec{n}} \mathcal{L}_k^{\mathbf{e}} \mathcal{P}_{\vec{n}}^T)^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \phi_i (\mathcal{P}_{\vec{n}} \mathcal{L}_i^{\mathbf{e}} \mathcal{P}_{\vec{n}}^T)^{-1} \right]^{-1} \sum_{j=1}^N \phi_j (\mathcal{P}_{\vec{n}} \mathcal{L}_j^{\mathbf{e}} \mathcal{P}_{\vec{n}}^T)^{-1} \mathcal{P}_{\vec{n}} \mathcal{L}_j^{\mathbf{e}}$$

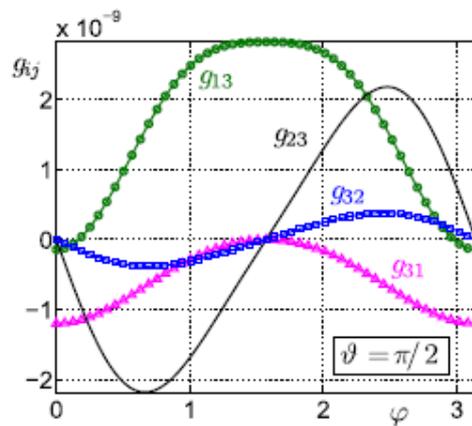
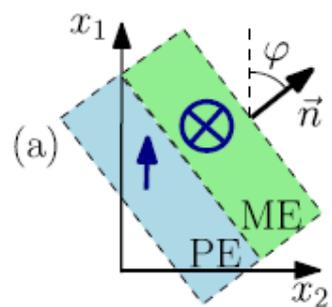
Tenseur de structure

$$\mathcal{P}_{\vec{n}}^T = \begin{pmatrix} c_\varphi^2 s_\vartheta^2 & -s_\varphi c_\varphi^2 s_\vartheta (1 - c_\vartheta) & c_\varphi s_\vartheta (s_\varphi^2 + c_\varphi^2 c_\vartheta) & 0 & 0 \\ s_\varphi^2 s_\vartheta^2 & s_\varphi s_\vartheta (c_\varphi^2 + s_\varphi^2 c_\vartheta) & -s_\varphi^2 c_\varphi s_\vartheta (1 - c_\vartheta) & 0 & 0 \\ c_\vartheta^2 & -s_\varphi s_\vartheta c_\vartheta & -c_\varphi s_\vartheta c_\vartheta & 0 & 0 \\ 2s_\varphi s_\vartheta c_\vartheta & s_\varphi^2 (c_\vartheta^2 - s_\vartheta^2) + c_\varphi^2 c_\vartheta & s_\varphi c_\varphi (2c_\vartheta^2 - c_\vartheta - 1) & 0 & 0 \\ 2c_\varphi s_\vartheta c_\vartheta & s_\varphi c_\varphi (2c_\vartheta^2 - c_\vartheta - 1) & c_\varphi^2 (c_\vartheta^2 - s_\vartheta^2) + s_\varphi^2 c_\vartheta & 0 & 0 \\ 2s_\varphi c_\varphi s_\vartheta^2 & c_\varphi s_\vartheta (c_\varphi^2 - s_\varphi^2 + 2c_\vartheta s_\varphi^2) & s_\varphi s_\vartheta (s_\varphi^2 - c_\varphi^2 + 2c_\vartheta c_\varphi^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\varphi s_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_\varphi s_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_\varphi s_\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\vartheta \end{pmatrix}$$

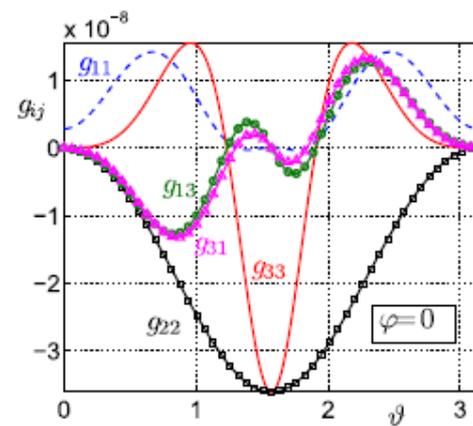
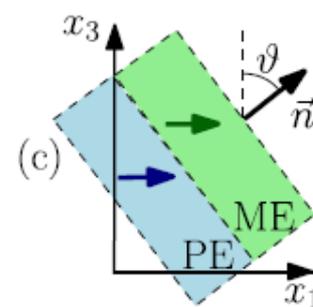
$$c_\vartheta = \cos \vartheta, c_\varphi = \cos \varphi, s_\vartheta = \sin \vartheta \text{ et } s_\varphi = \sin \varphi.$$

Effet magnéto-électrique

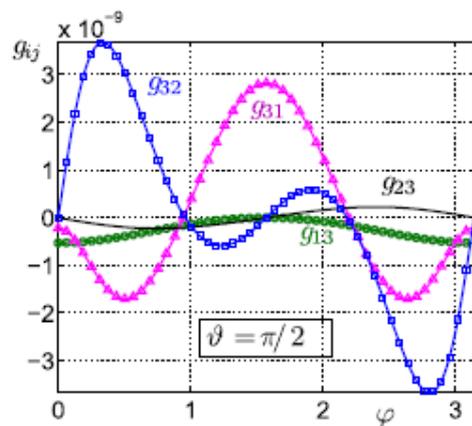
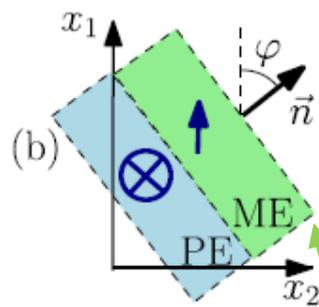
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



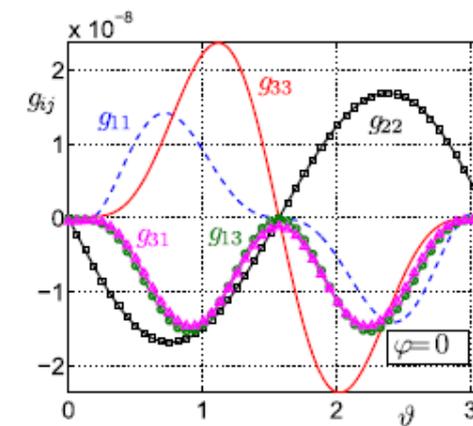
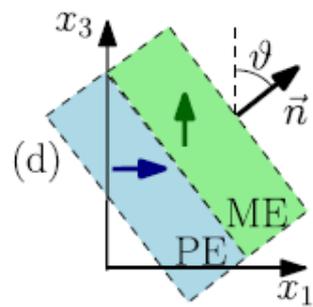
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$



BaTiO₃ CoFe₂O₄

Structures multicouches non-linéaires

Loi de comportement non linéaire:

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{L}_i : \mathcal{Z}_i + \mathcal{R}_i :: \dot{\mathcal{Z}}_i \otimes \mathcal{Z}_i + \mathcal{S}_i ::: \mathcal{Z}_i \otimes \mathcal{Z}_i \otimes \mathcal{Z}_i$$

ou $\kappa^T = (\vec{\tau}^T, \vec{D}^T, \vec{B}^T)$ et $z^T = (\vec{\varepsilon}^T, -\vec{E}^T, -\vec{H}^T)$

On peut introduire deux nouveaux tenseurs de structure:

$$\mathcal{N} = \mathcal{P}^T : \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \mathcal{Q}^T : \mathcal{Q}$$

Et les nouvelles variables:

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{N} : \mathcal{K}_i + \mathcal{M} : \mathcal{Z}_i, \quad \text{variables continues}$$

$$\mathcal{Y}_i = \mathcal{M} : \mathcal{K}_i - \mathcal{N} : \mathcal{Z}_i. \quad \text{variables discontinues}$$

Comportement non linéaire:

$$\mathcal{Y}_i = \mathcal{A}_i : \mathcal{X}_i + \mathcal{B}_i :: \mathcal{X}_i \otimes \mathcal{X}_i + \mathcal{C}_i ::: \mathcal{X}_i \otimes \mathcal{X}_i \otimes \mathcal{X}_i$$

Homogénéisation non linéaire

Moyenne sur la structure multicouche:

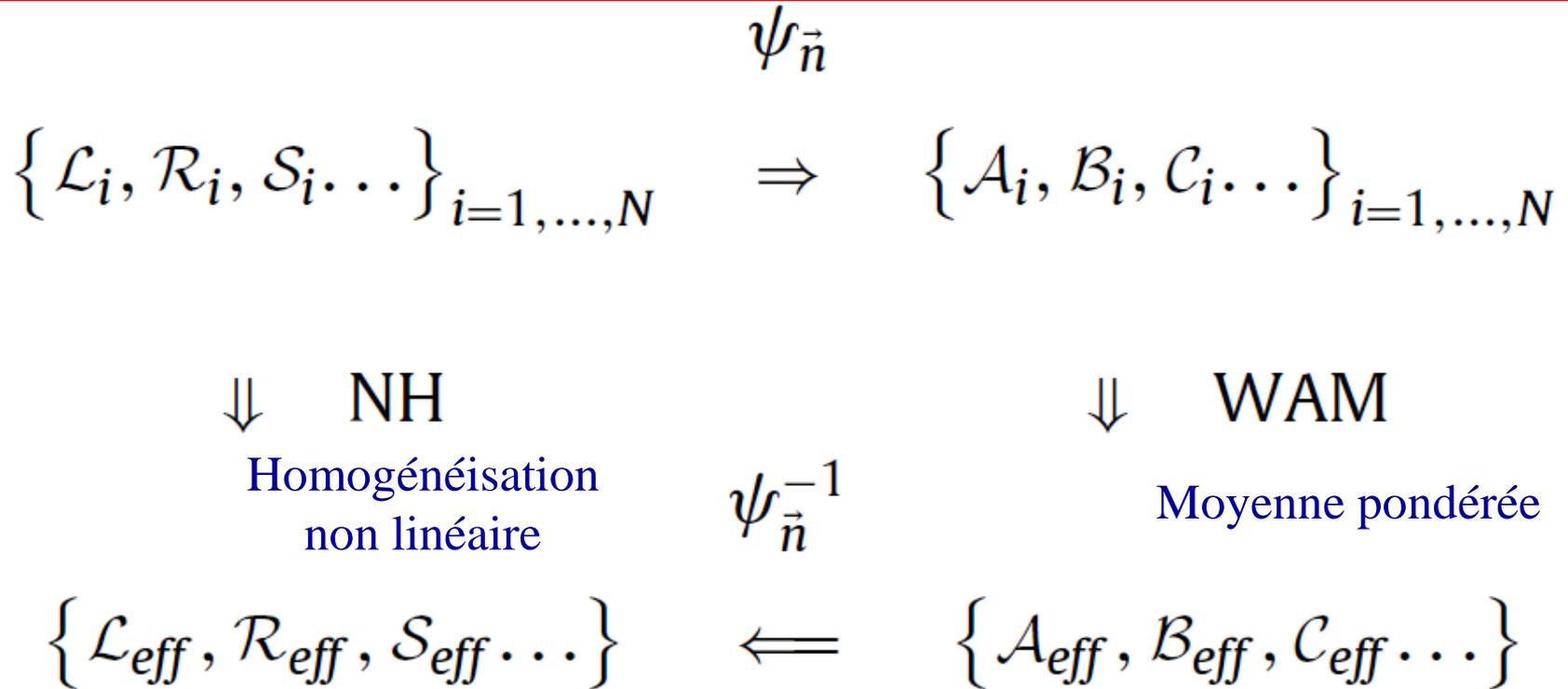
$$\begin{aligned}\langle \mathcal{Y} \rangle &= \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{Y}_i = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{A}_i : \langle \mathcal{X} \rangle + \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{B}_i :: \langle \mathcal{X} \rangle \otimes \langle \mathcal{X} \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{C}_i ::: \langle \mathcal{X} \rangle \otimes \langle \mathcal{X} \rangle \otimes \langle \mathcal{X} \rangle.\end{aligned}$$

Paramètres effectifs:

$$\mathcal{A}_{eff} = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{B}_{eff} = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{B}_i, \quad \mathcal{C}_{eff} = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathcal{C}_i.$$

Et on peut remonter aux paramètres physiques \mathcal{L}_{eff} , \mathcal{R}_{eff} et \mathcal{S}_{eff} par inversion de la loi de comportement. [Mech. Res. Comm. 55, 18-29 \(2014\).](#)

Procédure complète 1



Mech. Res. Comm. 55, 18-29 (2014).

Procédure complète 2

$$A_i = (\mathcal{M} + \mathcal{L}_i : \mathcal{N})^{-1} : (\mathcal{L}_i : \mathcal{M} - \mathcal{N}),$$

$$B_i = (\mathcal{M} + \mathcal{L}_i : \mathcal{N})^{-1} : \mathcal{R}_i \therefore \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}_i,$$

$$\begin{aligned} C_i &= (\mathcal{M} + \mathcal{L}_i : \mathcal{N})^{-1} : \mathcal{S}_i \therefore \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}_i \\ &\quad - (\mathcal{M} + \mathcal{L}_i : \mathcal{N})^{-1} : \mathcal{R}_i \therefore \mathcal{D}_i \otimes (\mathcal{N} : B_i) \\ &\quad - (\mathcal{M} + \mathcal{L}_i : \mathcal{N})^{-1} : \mathcal{R}_i \therefore (\mathcal{N} : B_i) \otimes \mathcal{D}_i, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{M} - \mathcal{N} : A_i$$

$\psi_{\vec{n}}$

$\psi_{\vec{n}}^{-1}$

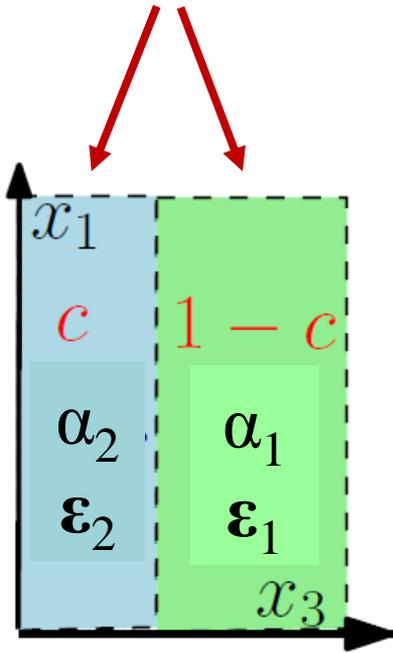
$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = (\mathcal{M} : A_{\text{eff}} + \mathcal{N}) : \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1},$$

$$\mathcal{R}_{\text{eff}} = (\mathcal{M} + \mathcal{L}_{\text{eff}} : \mathcal{N}) : \mathcal{B}_{\text{eff}} \therefore \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1} \otimes \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{eff}} &= (\mathcal{M} + \mathcal{L}_{\text{eff}} : \mathcal{N}) : \mathcal{C}_{\text{eff}} \therefore \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1} \otimes \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1} \otimes \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1} \\ &\quad + \mathcal{R}_{\text{eff}} \therefore \mathcal{I}_{n+m} \otimes (\mathcal{N} : \mathcal{B}_{\text{eff}} \therefore \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1} \otimes \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1}) \\ &\quad + \mathcal{R}_{\text{eff}} \therefore (\mathcal{N} : \mathcal{B}_{\text{eff}} \quad \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1} \otimes \mathcal{D}_{\text{eff}}^{-1}) \otimes \mathcal{I}_{n+m}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{\text{eff}} = \mathcal{M} - \mathcal{N} : A_{\text{eff}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \alpha (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E}$$



Example

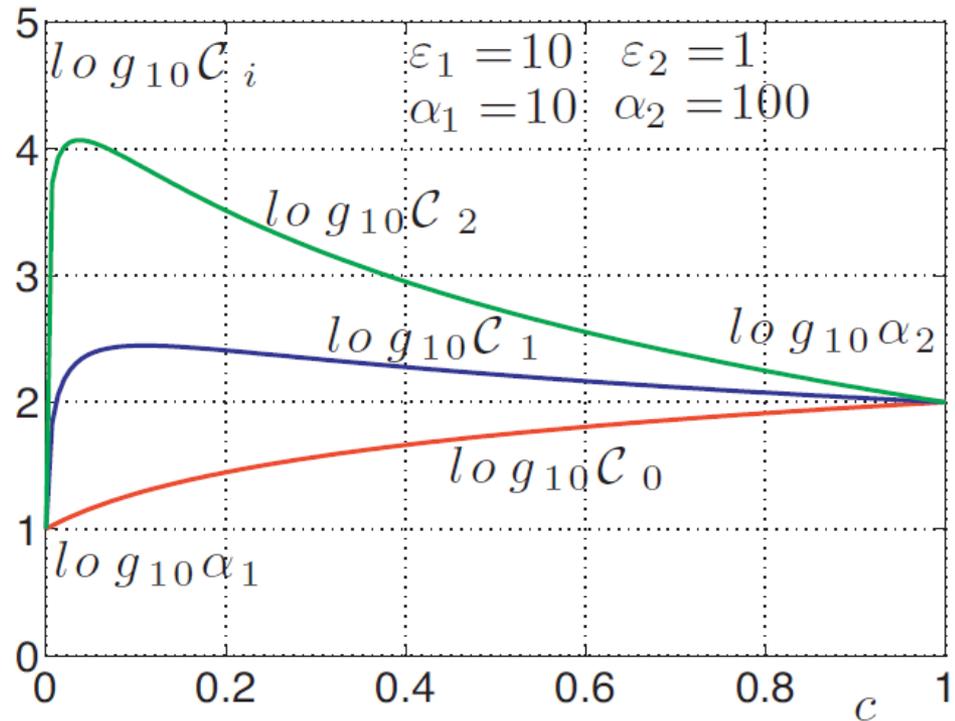
$$\langle D_1 \rangle = \langle \varepsilon \rangle \langle E_1 \rangle + \langle \alpha \rangle \langle E_1 \rangle^3 + \langle \alpha \rangle \langle E_1 \rangle \langle E_2 \rangle^2 + \frac{\langle \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle^2} \langle E_1 \rangle \langle E_3 \rangle^2,$$

$$\langle D_2 \rangle = \langle \varepsilon \rangle \langle E_2 \rangle + \langle \alpha \rangle \langle E_2 \rangle \langle E_1 \rangle^2 + \langle \alpha \rangle \langle E_2 \rangle^3 + \frac{\langle \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle^2} \langle E_2 \rangle \langle E_3 \rangle^2,$$

$$\langle D_3 \rangle = \frac{1}{\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle} \langle E_3 \rangle + \frac{\langle \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle^2} \langle E_3 \rangle \langle E_1 \rangle^2 + \frac{\langle \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle^2} \langle E_3 \rangle \langle E_2 \rangle^2 + \frac{\langle \frac{\alpha}{\varepsilon^4} \rangle}{\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle^4} \langle E_3 \rangle^3$$

$$C_i = \langle \frac{\alpha}{\varepsilon^{2i}} \rangle / \left[\langle \frac{1}{\varepsilon} \rangle^{2i} \right]$$

$$C_i = \left[(1-c) \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1^{2i}} + c \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2^{2i}} \right] / \left[(1-c) \frac{1}{\varepsilon_1} + c \frac{1}{\varepsilon_2} \right]^{2i}$$



Conclusions

Applications de l'effet magnétoélectrique:

- Capteurs de champ magnétique
- MEMS, NEMS
- Spintronics, Straintronics
- Mémoires magnétoélectriques

Appl. Phys. Lett. 99, 192507, 2011

Phys. Rev. B 85, 155321, 2012

Eur. Phys. J. B 86, 249, 2013

Journal of Physics D: Applied Physics 46, 325002, 2013

Applied Physics Letter 110, 222401, 2017

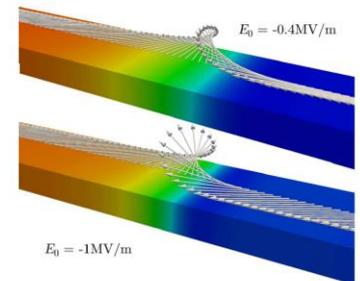
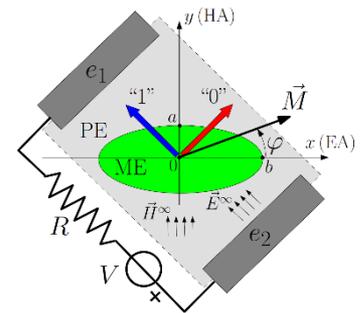
Journal of Magnetism and Magnetic Materials 459, 66-70, 2018

- Déplacement des parois de domaine

Eur. Phys. J. B 89, 169, 2016

Applied Physics Letters 108, 082401, 2016

Phys. Rev. B 95, 140405R, 2017



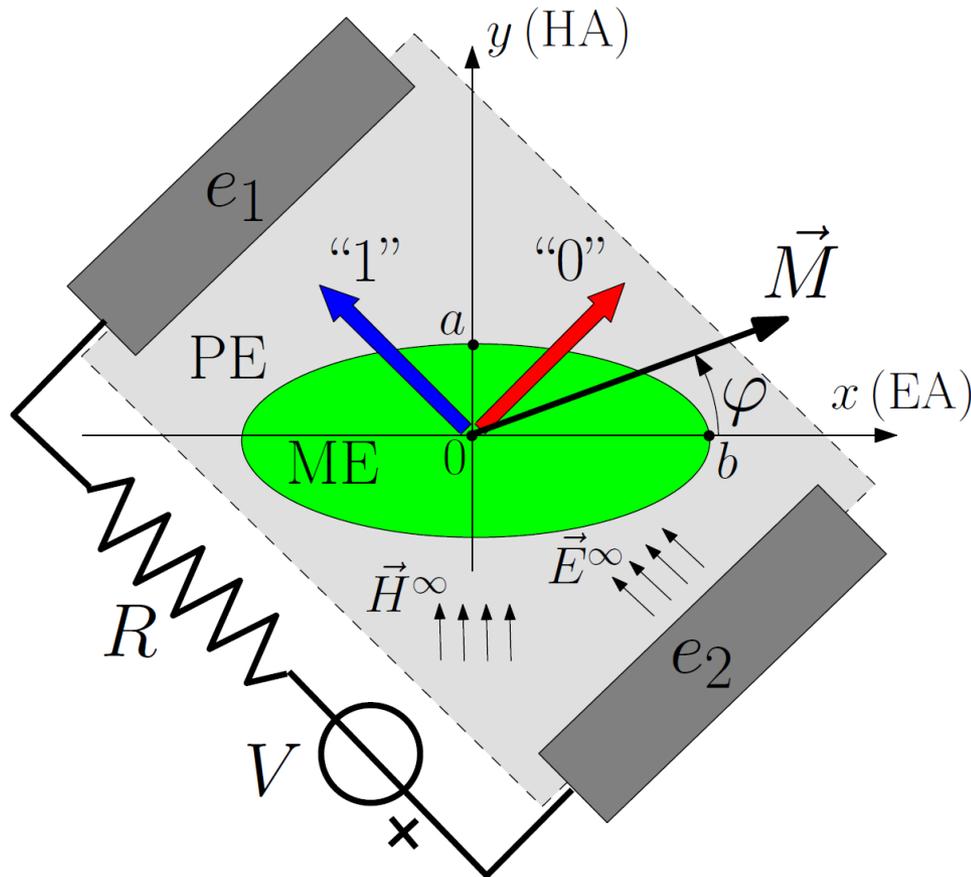
Remerciements

- Collègues du groupe AIMAN-FILM (Nicolas Tiercelin, Yannick Dusch, Vladimir Preobrajenski, Abdelkrim Talbi, Olivier Bou Matar, Marc Goueygou, Philippe Pernod)
- Collègues du groupe PHYSIQUE (Pier Luca Palla et Fabrizio Cleri)
- Ce travail a été soutenu par ANR et Ecole Centrale de Lille



Merci pour votre attention

Memoire multiferroïque



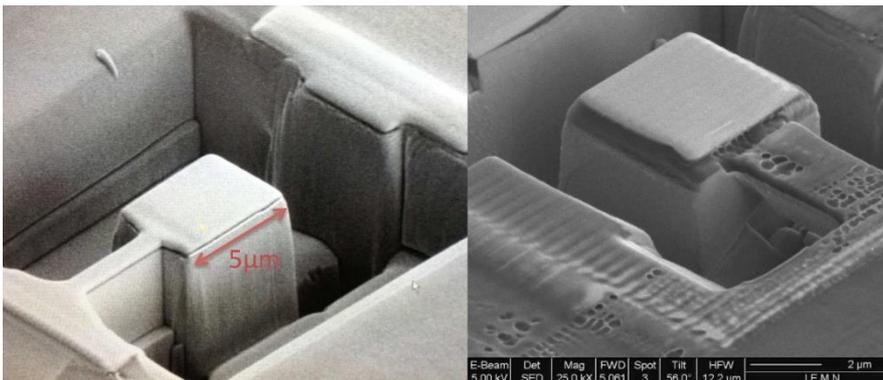
- Il y a deux états stables de l'aimantation du matériau magnétique dans la **particule non linéaire**.
- L'information y est écrite par application d'une différence de potentiel aux électrodes et y est lue par effet magnétorésistif.
- Cette solution autorise le passage à un état donné de la mémoire sans avoir à connaître son état précédent.

$$t_s < 1 \text{ ns}$$

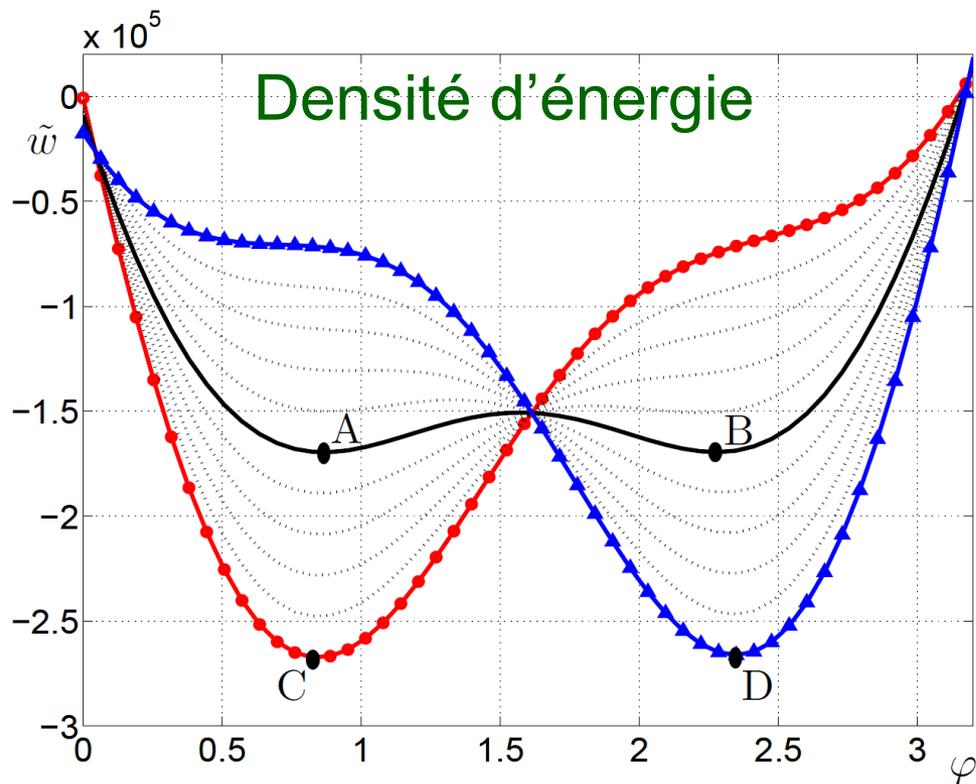
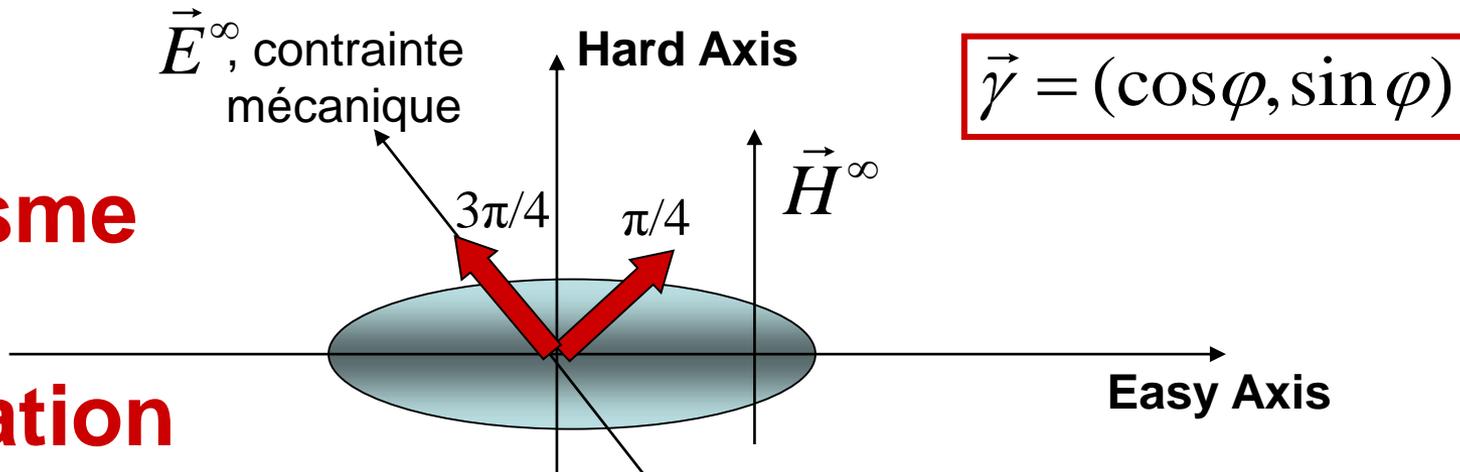
$$P_{\text{err}} \ll 10^{-8}$$

$$\Delta E_m \simeq 9.5 \times 10^{-17} \text{ J}$$

(J. Appl. Phys. 109, 07D726, 2011
 Appl. Phys. Lett. 99, 192507, 2011
 PRB 85, 155321, 2012)



Mécanisme de commutation



PHYSICAL REVIEW B 85, 155321 (2012)

Courbe noire: bi-stabilité sans champ électrique appliqué

Courbe bleue: potentiel électrique -0.5 V ($+3.85\text{ MV/m}$) (particule comprimée)

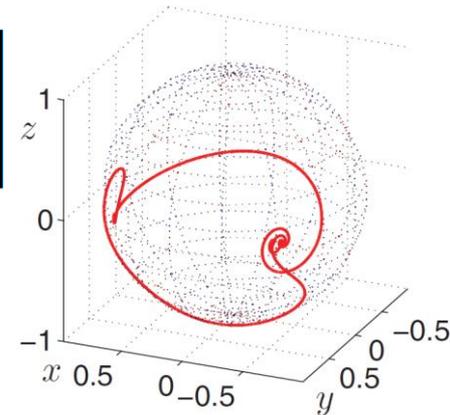
Courbe rouge: potentiel électrique $+0.5\text{ V}$ (-3.85 MV/m) (particule tendue)

Dynamique de l'aimantation

La dynamique de la direction de l'aimantation est décrite par l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert suivante

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}}{M_s(1+\alpha^2)} \left[\vec{\gamma} \wedge \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \vec{\gamma}} - \alpha \vec{\gamma} \wedge \left(\vec{\gamma} \wedge \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \vec{\gamma}} \right) \right]$$

\nearrow précession
 \nearrow amortissement



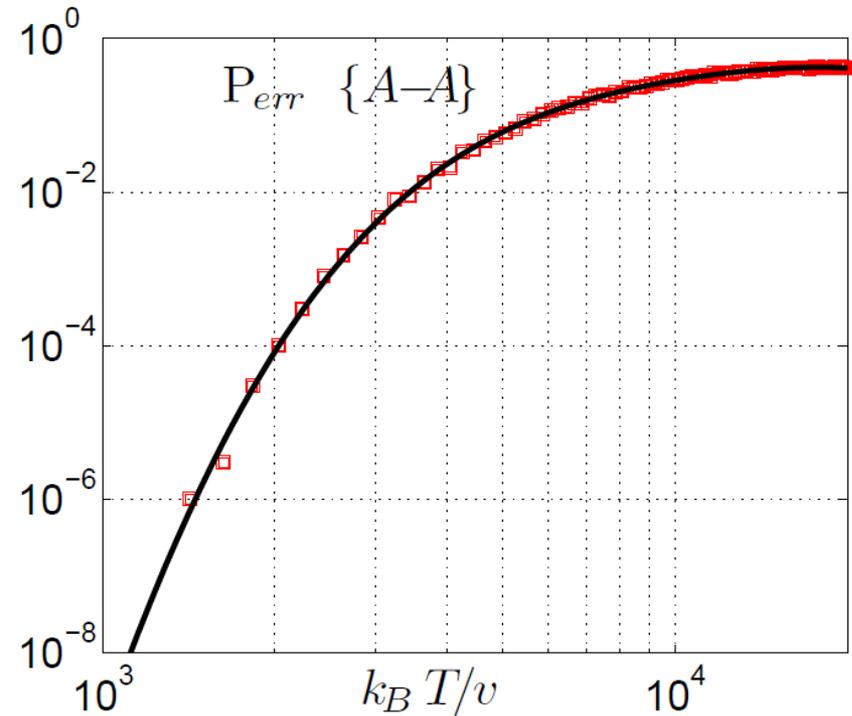
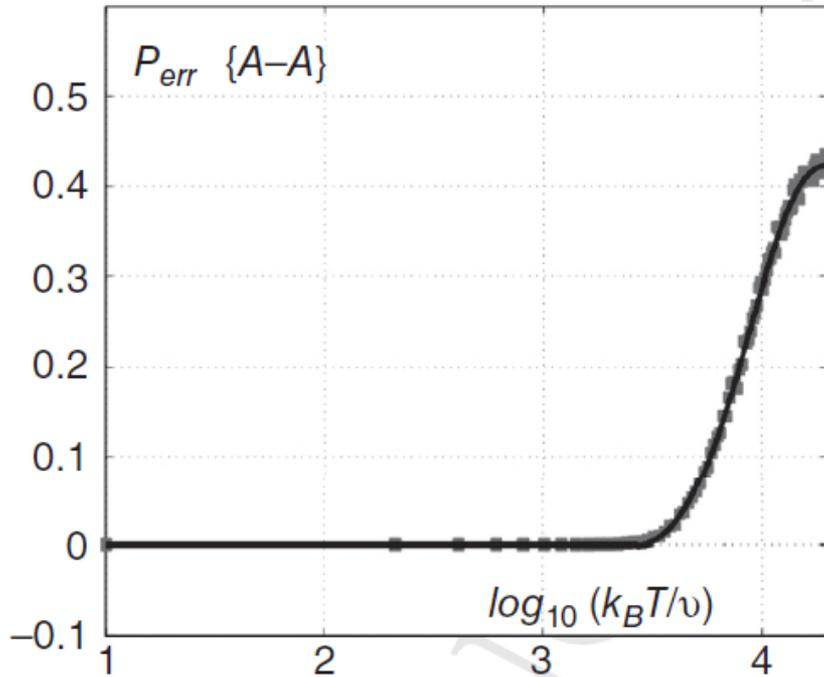
On peut insérer l'agitation thermique:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma} \xrightarrow{\text{green arrow}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma} + \mathcal{D}n$$

(n bruit blanc gaussien)

➤ Langevin
➤ Fokker-Planck

Probabilité d'erreur



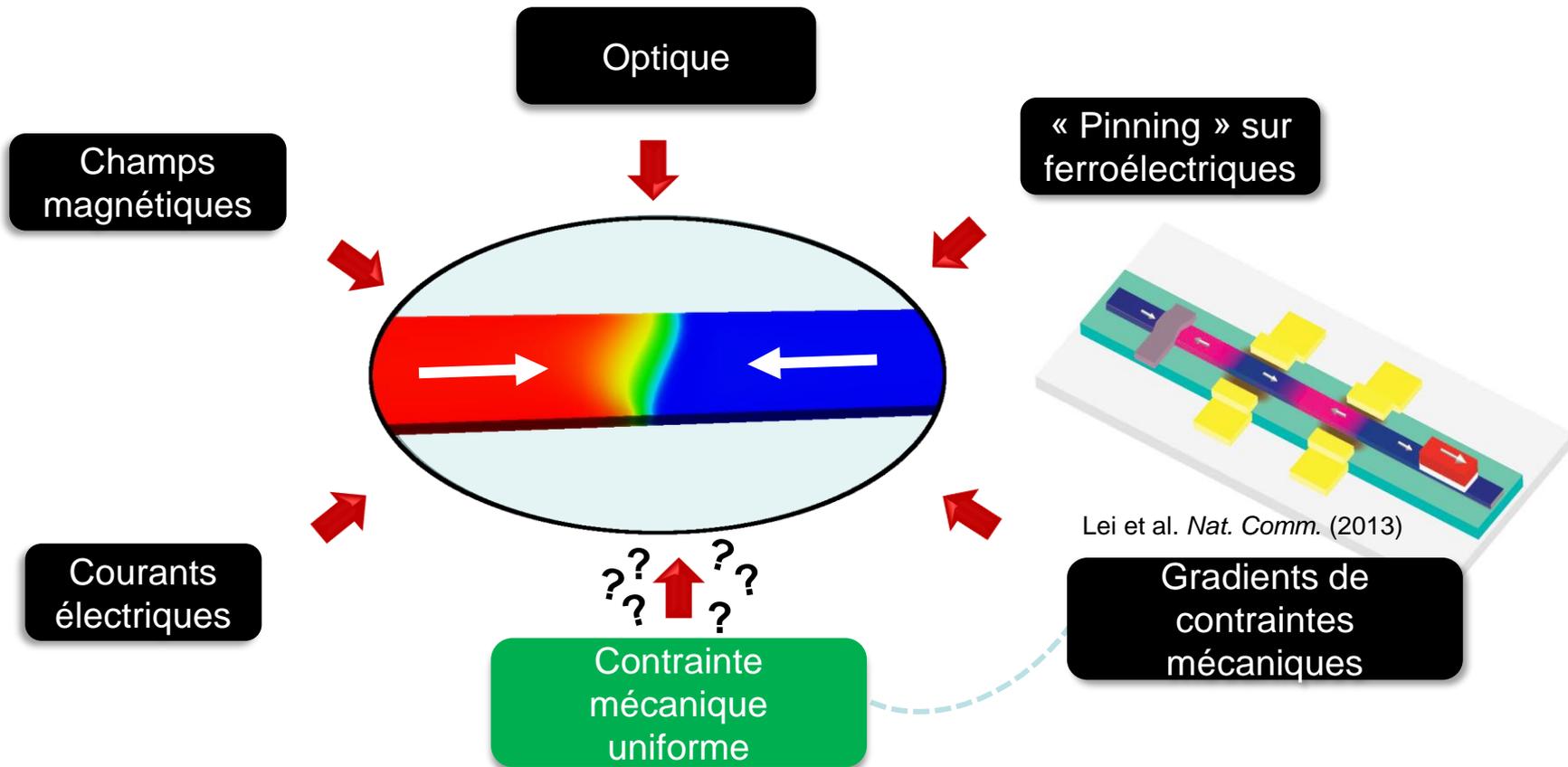
$$P_{err} \ll 10^{-8}$$



$$(k_B T/v)_{max} \simeq 10^3 \text{ J/m}^3$$

**Eur. Phys. J. B 86, 249 (2013),
Journal of Physics D: Applied Physics 46, 325002 (2013)**

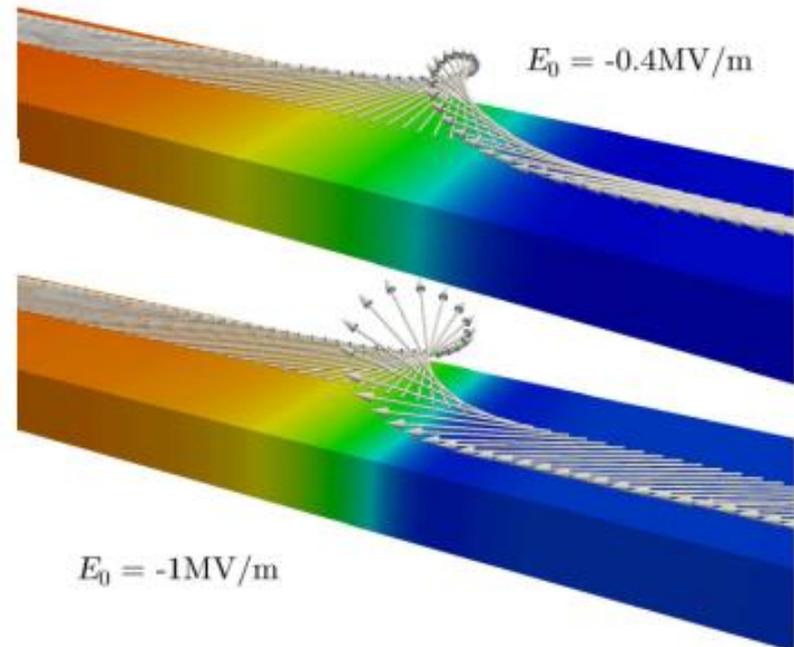
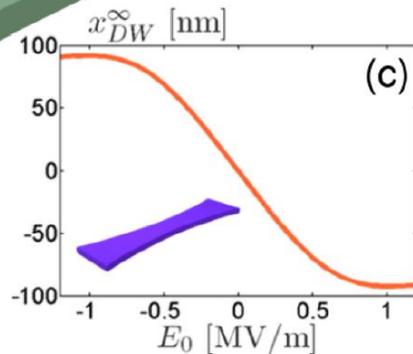
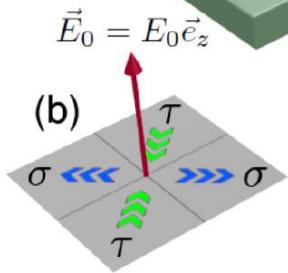
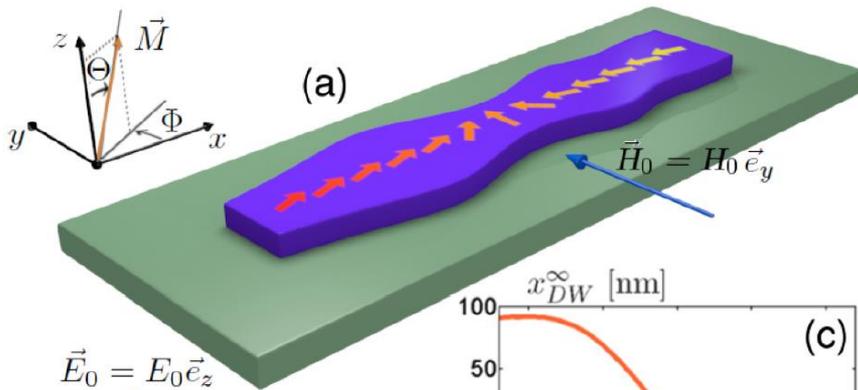
Dynamique de l'aimantation dans des structures magnéto-élastiques: contrôle des parois de domaines ferromagnétiques.



Modèle dynamique 1D

$$\begin{cases} \dot{\Phi} &= \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2} (-s + \alpha r), \\ \dot{\Theta} &= \frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2} (r + \alpha s), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &= -\sin \Phi \langle H_{dx} \rangle + \cos \Phi \langle H_{dy} \rangle + \cos \Phi H_0 - \frac{2K_u}{\mu_0 M_S} \cos \Phi \sin \Phi \sin \Theta \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{\lambda_S}{\mu_0 M_S} (\tau - \sigma) \cos(2\Phi) \sin \Theta + \frac{2A}{\mu_0 M_S} \left(\frac{\ell'}{\ell} \Phi' \sin \Theta + 2\Phi' \Theta' \cos \Theta + \Phi'' \sin \Theta \right) \\ s &= \cos \Phi \cos \Theta \langle H_{dx} \rangle + \sin \Phi \cos \Theta \langle H_{dy} \rangle - \sin \Theta \langle H_{dz} \rangle + \sin \Phi \cos \Theta H_0 \\ &\quad + \frac{2K_u}{\mu_0 M_S} \cos^2 \Phi \sin \Theta \cos \Theta + \frac{3}{2} \frac{\lambda_S}{\mu_0 M_S} \cos \Theta \sin \Theta [(\tau + \sigma) + \sin(2\Phi)(\tau - \sigma)] \\ &\quad + \frac{2A}{\mu_0 M_S} \left(\frac{\ell'}{\ell} \Theta' + \Theta'' - \Phi'^2 \cos \Theta \sin \Theta \right) \end{aligned}$$



PHYSICAL REVIEW B 95, 140405(R) (2017)
 Eur. Phys. J. B 89, 169 (2016)
 Applied Physics Letters 108, 082401 (2016)

Contrôle des parois de domaines ferromagnétiques

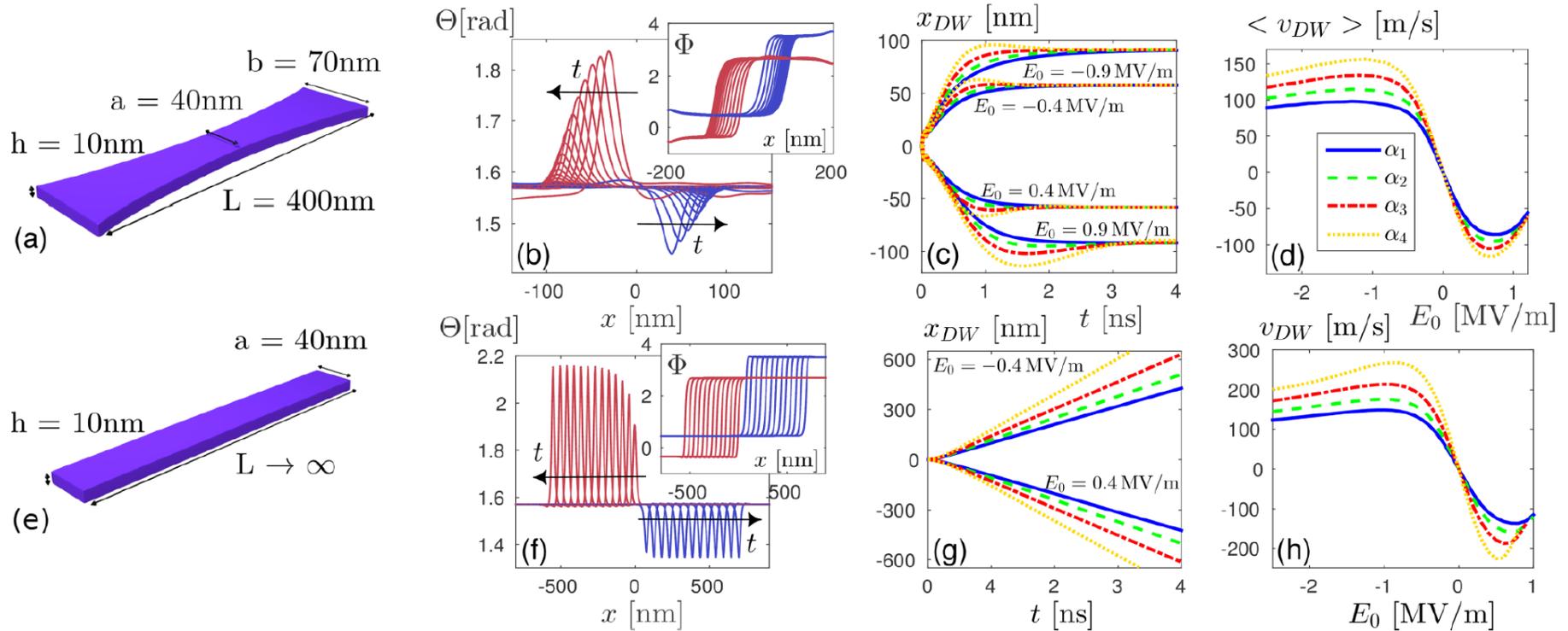


FIG. 2. Dynamics of the magnetic DW in the nanostripe with parabolic (a) and constant (e) section. (b) and (f) Evolution of the magnetization angles $\Theta(x,t)$ and $\Phi(x,t)$ (inset) obtained with $E_0 = \pm 0.8$ MV/m and the damping parameter $\alpha = 0.1$ (angles versus x at different times t). If $E_0 > 0$, the DW moves to the left ($x < 0$), and if $E_0 < 0$, the DW moves to the right ($x > 0$). (c) and (g) Time evolution of x_{DW} for $\alpha_1 = 0.12$, $\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_3 = 0.08$, and $\alpha_4 = 0.06$ and for the indicated values of E_0 . (d) and (h) Asymmetric behavior of the DW velocity (average value $\langle v_{DW} \rangle$ for the parabolic nanostripe and steady-state value v_{DW} for the uniform nanostripe) versus electric field E_0 for the above values of α .