



**HAL**  
open science

# Éléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani

Lionel Laurore

► **To cite this version:**

| Lionel Laurore. Éléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani. 2019. <hal-02336166v3>

**HAL Id: hal-02336166**

**<https://hal.science/hal-02336166v3>**

Preprint submitted on 17 Nov 2019 (v3), last revised 1 Dec 2019 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

# Éléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani

Lionel Laurore – 15 Octobre 2019

## Résumé :

En 1928, Lothar Collatz, qui s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers posa le problème  $3m+1$ . Appelé aussi suite de Syracuse, cela consiste à étudier le comportement de suite définie par ;

$$U_0 \text{ entier naturel} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \begin{cases} U_n/2 \\ 3 U_n + 1 \end{cases}$$

La conjecture affirme que pour tout  $N$  entier positif, il existe  $n$  tel que  $U_n = 1$

De nombreuses tentatives de démonstrations ont été réalisées ainsi que des travaux connexes à ce problème sans pour autant arriver à une démonstration probante, des résultats partiels ont été obtenus et des pistes intéressantes explorer sans pour autant pousser les investigations jusqu'à leur terme. Paul Erdos disait que les mathématiques n'étaient pas encore prêtes pour résoudre un tel problème.

Des résultats cependant intéressants ont été obtenus, comme celui montrant que la conjecture de Collatz pouvait se ramener à démontrer que toute suite de Syracuse finit par redescendre au dessous de son point de départ et que les cas  $U_0$  pair ou  $U_0 = 4m + 1$  vérifiaient bien la conjecture, et cela par une simple démonstration par récurrence.

**Notre approche se résume donc à démontrer que toute suite de Syracuse finit par passer au dessous de son point de départ en utilisant un raisonnement par récurrence forte et pour les cas qui résistent à ce point, de démontrer, en introduisant une notion de « suites confluentes », que toute suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme  $4m+3$  finit par croiser une suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme  $4m+1$  et que ces deux suites suivent ensuite, à partir de ce point de confluence, la même trajectoire.**

Nous nous intéresserons dans un deuxième temps à la généralisation de la conjecture de Collatz au problème  $3n+d$  avec  $d$  premier avec 6, proposé par Lagarias (1990,[3]) et montrerons en utilisant la même approche que pour la conjecture de Collatz, que toute suite de cette forme soit converge vers le cycle trivial soit vers un cycle non trivial.

Nous montrerons dans une troisième partie, que cette approche permet également de résoudre la conjecture de **Kakutani** exposé par Oliveira (2010, [1]), qui est une généralisation de la conjecture de collatz et qui s'exprime ainsi :

$$C_{p,D}(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 [d], d \text{ appartient à } D, d \text{ premier et } d < p \\ pm + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous étudierons plus particulièrement le cas où  $D$  est l'ensemble des  $n-1$  premiers nombres premiers et  $p$  le  $n$  ième.  $C_{3,\{2\}}(m)$  est la fonction de Collatz.

Enfin, nous regarderons le cas encore plus général  $C_{p,q,D}(m)$  ou  $q$  est premier supérieur à  $p$  et

$$C_{p,D}(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 [d], d \text{ appartient à } D, d \text{ premier et } d < p \\ pm + q & \text{sinon} \end{cases}$$

## Notations :

Nous reprendrons dans le présent papier les notations fonctionnelles adoptées par Luc Olivier Pochon et Alain Favre (2017, [2]) dans leur excellent travail de synthèse de l'ensemble des travaux réalisés sur ce sujet.

On considère la fonction définie sur les entiers positifs :

$$C(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ pair} \\ 3m + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La conjecture se traduit alors par l'existence d'un entier  $n$  tel que  $C^n(m)=1$

Il est possible de condenser l'étude de ces suites en adoptant les notations suivantes proposée par Lagarias (1990, [3]) :

Soit  $T_d$  la fonction définie par :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ pair} \\ (3m + d)/2 & \text{d premier avec 6, sinon} \end{cases}$$

$(3m + d)/2$  est bien entier car pour  $m$  impair,  $3m + d$  est pair.  $T_1(m)$  une formulation condensée des suites de Syracuse. Dans la suite, nous adopterons la notation  $T(m)$  pour  $T_1(m)$ .

Mais pour la suite des démonstration et leur clareté, nous adopterons parfois la formulation suivante :

$$N_d(m) = \begin{cases} m/2^{v(m)} & \text{si } m \text{ pair} \\ (3m + d)/2^{v(3m+1)} & \text{d premier avec 6, sinon} \end{cases}$$

Ou  $v(m)$  est la fonction qui à  $m$  associe la plus grande puissance de 2 par laquelle on peut diviser  $m$ .

Par mesure de simplification nous adopterons les notations suivantes :  $N_1(m) = N(m)$  et  $T_1(m) = T(m)$

Par exemple :

Pour  $m = 7$ , la suite  $C$  donne ( 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 ...)

Pour  $m= 7$ , la suite  $T$  donne ( 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1 ...)

Pour  $m= 7$ , la suite  $N$  donne ( 7, 11, 17, 13, 5, 1 ...)

Nous appellerons  $S(U_0)$  (resp  $T(U_0)$  et  $N(U_0)$ ), la suite de Syracuse commençant par  $U_0$ , ainsi que par  $S[U_0]$  (resp.  $T[U_0]$  et  $N[U_0]$ ), les suites de Syracuse commençant par un nombre appartenant à un sous-ensemble de  $n$  de  $\mathbf{N}$ , ensemble des entiers naturels. Par exemple,  $S[2k]$  est l'ensemble des suites de Syracuse commençant par un nombre impair.

# I – La conjecture de Collatz ou problème $3x+1$

## **Principaux résultats antérieurs :**

Nous allons présenter dans ce paragraphe les principaux résultats concernant les suites de Syracuse, qui constitueront les briques de notre démonstration.

### **1 – Conjecture de temps d'arrêt fini**

La conjecture de Collatz peut se ramener à une conjecture de temps d'arrêt fini, exprimée ainsi :

**Toute trajectoire finit par repasser au dessous de son point de départ. Cela est équivalent à la conjecture primitive. (Pochon et Favre, 2017, [1], page 5)**

Une démonstration en utilisant une descente infinie permet d'en faire la preuve :

Dans le sens direct : si on suppose que toute suite de Syracuse finit par passer par 1, alors toute suite finit bien par passer au dessous de son point de départ. Ce point est trivial.

Dans le sens inverse : La réciproque fait appel à un processus de descente infinie. En effet si on considère un entier positif  $U_0$ , En vertu du fait que toute suite de Syracuse repasse au-dessous de son point de départ :

il existe  $n_0$  tel que  $T^{n_0}(U_0) < U_0$ .

En appliquant à  $T^{n_0}(U_0)$  le même raisonnement, nous pouvons affirmer que :

il existe un entier position  $n_1$  tel que  $T^{n_1}(T^{n_0}(U_0)) < T^{n_0}(U_0)$ .

On construit ainsi une suite strictement décroissante  $(U_0, T^{n_0}(U_0), T^{n_1}(T^{n_0}(U_0)) \dots)$  d'entiers strictement positifs. Cette suite passe nécessairement par 1. Bien évidemment, ce raisonnement s'applique pour tout  $U_0 > 1$ .

### **2 – Cas des nombres pairs et des nombres de la forme $4m+1$**

Oliveira (2010, [1]) a montré que tout entier  $U_0 < 5 \times 2^{60}$ ,  $S(U_0)$  vérifiait la conjecture de Collatz

Il est précisé dans l'article de Pochon et Favre, que « dans une suite de tests systématiques tels que entrepris par Oliveira, outre les nombres pairs, il est inutile de tester les nombres de la formes  $4m + 1$ , puisque leur trajectoire passe toujours sous  $m$  ».

Cela se démontre aisément pour les nombres pairs : si  $m = 2k$  alors  $T(m) = m/2 = k < m$

donc  $T(m) < m$  quelque soit  $m$  pair appartenant à  $\mathbf{N}$

Ce qui s'exprime en disant que toute suite de Syracuse de la forme  $S[2m]$  passent après une seule itération au dessous de leur valeur initiale et par conséquent vérifient la conjecture de Collatz.

Pour les nombres impairs :

Si  $m = 2k + 1$  alors  $T(m) = (6k + 4)/2 = 3k + 2$  Ce qui ne permet pas de statuer

On peut cependant remarquer que si  $k$  est pair alors  $3k+2$  est pair et donc divisible par 2 à la prochaine itération. Il nous faut donc étudier une partition des nombres impairs en deux classes modulo 4 :  $4m + 1$  et  $4m+3$

$T(4m+1) = (12m + 4)/2 = 6m+2$  et  $T^2(4m+1) = T(6m+2) = (6m+2)/2 = 3m+1$

Donc  $T^2(4m+1) = 3m+1 < 4m+1$  quelques soit  $m$  appartenant à  $\mathbf{N}$

Ce résultat est présenté dans l'article de Pochon et Favre (2017, [1], page 6), au paragraphe propriété d'invariance, qui s'exprime en disant que toutes les suites de Syracuse de la forme  $S[4m+1]$  passent après deux iterations de la fonction  $T$  au dessous de leur valeur initiale et par conséquent satisfont la conjecture de Collatz.

A partir de ces quelques résultats nous disposons des premières briques nécessaire à notre démonstration.

### **I.1 - Démonstration de la conjecture de Collatz:**

Dans notre démonstration nous utiliserons le principe de récurrence forte.

A la différence du raisonnement par récurrence simple qui se contente de vérifier qu'une propriété est vraie pour  $n=0$  ou 1 et ensuite de supposer qu'elle est vraie pour  $n$  et de démontrer qu'elle est vraie pour  $n+1$ , le principe de récurrence forte consiste à vérifier également que la propriété est vraie pour  $n=0$  ou 1 et à supposer qu'elle est vraie pour tout entier  $k$  inférieur ou égal à  $n$  et d'en déduire qu'elle est vraie pour  $n+1$

Dans le cas présent, Oliveira a numériquement vérifier que la suite de Syracuse convergeait vers 1 pour tout entier inférieur ou égal à  $5 \times 2^{60}$ . On est plutôt rassuré sur le fait que les premiers entiers vérifient bien la conjecture de Collatz.

Dans notre démonstration, nous allons chercher à prouver que toute suite de Syracuse finit par passer au dessous de sa valeur initiale. Nous allons supposer que cela est vrai pour tout  $k$  inférieur ou égal à  $n$  et tâcher de le démontrer pour une suite de Syracuse démarrant par  $n+1$ .

Etant donné que cela a été démontré pour les nombres pairs et les nombres de la forme  $4m+1$ , nous allons traiter le cas encore non résolu des nombres entiers naturels de la forme  $4m+3$ .

Pour ces nombres on voit rapidement que le calcul ne permet pas de repasser au-dessous de la valeur initiale au bout de quelques iterations :

$$T(4m+3) = (12m+10)/2 = 6m+5 \quad \text{et} \quad T(6m+5) = (18m+16)/2 = 9m+8 \quad \text{qui n'est pas inférieur à } 4m+3.$$

Il nous faut donc regarder la décomposition de  $4m + 3$  selon que  $m$  est pair ou impair, ce qui revient à étudier les nombres de la forme  $8m+3$  et  $8m+7$

$$T(8m+3) = (24m+10)/2 = 12m+5$$

$$T^2(8m+3) = T(12m+5) = (36m+16)/2 = 18m+8$$

$$T^2(8m+3) = T(18m+8) = 9m+4 \quad \text{qui n'est pas inférieur à } 8m+3$$

mais comme dans la cas des nombres impairs, on voit que pour  $m$  pair,  $9m+4$  est pair et donc divisible par 2 à la prochaine itération et passe ainsi au dessous de la valeur de départ  $8m+3$ . Une voie de démonstration, serait donc de poursuivre en regardant une décomposition des entiers naturels sous la forme  $16m + a$ , avec  $a = 3, 7, 11, 15$ . Il est bien évidemment inutile de tester les valeurs de  $a$  pair car dans ce cas  $16m+a$  est pair.

Nous avons exploré cette option, qui conduit à montrer que les suites de Syracuse de la classe  $S[16m+3]$  passent bien au dessous de leur valeur initiale, alors que celles pour lesquelles  $a = 7, 11, 13$  résistent, à ce stade, au raisonnement par récurrence. Le seul raisonnement par récurrence ne nous est donc d'aucun secours dans ces situations car nous ne repassons pas rapidement au dessous de la valeur initiale.

Nous avons testé tous les cas jusqu'aux nombres de la forme  $2^{12}+a$  et le nombre de valeurs de  $a$  résistant au raisonnement par récurrence explose de manière exponentielle, bien que diminuant en pourcentage.

**Mais un point est passé inaperçu. Nous avons précédemment démontré que les suites de Syracuse de la classe  $S[4m+1]$  vérifient la conjecture de Collatz. Si nous arrivons à montrer que quelque soit  $U_0$  de la forme  $4m+3$ , la suite  $S(U_0)$  contient au moins un nombre de la forme  $4m + 1$ , alors elle satisfera aussi à la conjecture de Collatz.**

Pour cela nous allons introduire une nouvelle notion formelle, celle de « **suites confluentes** ».

**Définition :**

**Soit deux suites  $(U_n)$  et  $(V_m)$ . On dira que  $(U_n)$  et  $(V_m)$  sont confluentes, si et seulement si il existe deux entiers naturels  $n_0$  et  $m_0$ , tel que pour tout entier  $k$  positif,  $U_{n_0+k} = V_{m_0+k}$**

**Théorème**

**Soit deux suites  $U_n$  et  $V_m$  satisfaisant à la même relation de récurrence  $F$ , et ne différant que par leur premier terme  $U_0$  et  $V_0$ . Si il existe deux entiers positifs  $n_0$  et  $m_0$ , tels que  $U_{n_0} = V_{m_0}$ , alors  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont 2 suites confluentes. De plus si l'une des deux est convergente ( resp. divergente), l'autre le sera également.**

La démonstration est assez simple. On sait par définition que  $U_{n_0} = V_{m_0}$ . En appliquant la relation de récurrence à cette égalité, on a :

$$U_{n_0+1} = F(U_{n_0}) = F(V_{m_0}) = V_{m_0+1}$$

En iterant,  $k-1$  fois cette operation on montre bien que :

$$U_{n_0+k} = V_{m_0+k}$$

**Etant donné que toute suite de Syracuse de la forme  $S[4m+1]$  satisfait la conjecture de Collatz, il suffit de démontrer que toute suite de Syracuse de la forme  $S[4m + 3]$  contient un nombre de la forme  $4k+1$  pour conclure que  $S(4m+3)$  et  $S(4k+1)$  sont confluentes et que par conséquent  $S(4m+3)$  vérifie bien la conjecture de Collatz**

C est ce que nous allons nous allons démontrer dans ce qui suit.

Reprenons le cas des suites de la forme  $S[8m + 3]$  qui représente un sous-ensemble de  $S[4m + 3]$ :

$$T(8m + 3) = 12m + 5 = 12m + 4 + 1 = 4(3m+1) + 1 \text{ qui est bien un nombre de la forme } 4k + 1$$

**En vertu de ce qui est dit précédemment  $S(8m+3)$  et  $S(4k+1)$  avec  $k=3m+1$  sont confluentes, par conséquent  $S(8m+3)$  vérifie la conjecture de Collatz**

Il reste à étudier les suites de la classe  $S[8m + 7]$  :

$$T(8m+7) = (24m+22)/2 = 12m+11 \text{ qui est de la forme } 4k+3 \text{ et donc ne permet pas de conclure}$$

Cela nous amène à la même bifurcation que le cas  $4m + 3$ , à savoir , étudier les suites de Syracuse des classes  $S[16m +7]$  et  $S[16m + 15]$ .

$$T(16m + 7) = 24m + 11 \text{ et } T(24m + 11) = 36m + 17 = 4(9m + 4) + 1 \text{ bien de la forme } 4k + 1$$

**Par conséquent,  $S(16m+7)$  et  $S(4k+1)$  avec  $k=9m+4$  sont confluentes et par conséquent toutes les suites de la classe  $S[16m+7]$  satisfont la conjecture de Collatz.**

En revanche le même calcul appliqué à  $16m + 15$  ne permet pas de conclure .

A ce stade de la démonstration, nous pouvons remarquer qu'aux étapes successives, nous démontrons que les classes  $S[4m+1]$ ,  $S[8m+3]$ ,  $S[16m+7]$  vérifient la conjecture, mais que les classes  $S[4m+3]$ ,  $S[8m+7]$ ,  $S[16m+15]$ . Nous remarquons également que le pourcentage de classes de suites qui résistent à notre démonstration, diminuent.  $1/4$  pour les classes modulo 4,  $1/8$  pour les classes modulo 8,  $1/16$  pour les classes modulo 16.

## Cas général

De manière plus générale, cela conduit à étudier les suites de Syracuse de la forme  $S[2^k m + 2^k - 1]$  qui sont les seules suites de Syracuse de la forme  $S[2^k m + a]$ , pour lesquelles on ne peut pas conclure, sans passer à la puissance de 2 supérieure.

C'est ce que nous allons démontrer maintenant par récurrence sur  $k$  :

Par récurrence on suppose que le seul cas sur lequel on ne peut pas statuer dans une décomposition sous la forme  $2^k m + a$ , est le cas  $a = 2^k - 1$ , qui représente 1 cas sur  $2^k$ . Et nous allons démontrer que pour les nombres de la forme  $2^{k+1} m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^{k+1} - 1$ , seul le cas  $a = 2^{k+1} - 1$  n'était pas résolu, soit 1 cas sur  $2^{k+1}$ .

En effet, posons  $N = 2^k m + 2^k - 1$ . Suivant la parité de  $m$ , ce nombre peut s'exprimer de deux façons

$$N1 = 2^k \cdot 2n + 2^k - 1 = 2^{k+1} n + 2^k - 1 \text{ si on pose } m = 2n$$

$$N2 = 2^k \cdot (2n+1) + 2^k - 1 = 2^{k+1} n + 2^{k+1} - 1 \text{ si on pose } m = 2n+1$$

Nous allons montrer que la suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme  $N1$  va toujours croiser un nombre de la forme  $4k + 1$  et par conséquent sera convergente vers 1 et que la seule cas où on ne pourra toujours pas statuer est le nombre de la forme  $N2$ .

$$T(N1) = (3(2^{k+1} n + 2^k - 1) + 1)/2 = 3 \cdot 2^k n + 3 \cdot 2^{k-1} - 1$$

$$T^2(N1) = 3^2 \cdot 2^{k-1} n + 3^2 \cdot 2^{k-2} - 1$$

.....

$$T^{k-1}(N1) = 3^{k-1} \cdot 2^2 n + 3^{k-1} \cdot 2 - 1 = 3^{k-1} \cdot 2^2 n + 3^{k-1} \cdot 2 - 2 + 1 = 3^{k-1} \cdot 2^2 n + 2 \cdot (3^{k-1} - 1) + 1$$

Or  $3^{k-1} - 1$  est pair donc

$$T^{k-1}(N1) = 4 (3^{k-1} n + (3^{k-1} - 1)/2) + 1 \text{ qui est bien de la forme } 4k + 1 \text{ donc satisfait la conjecture}$$

En conclusion, aussi grand soit le nombre  $k$ , dans une décomposition des nombres entiers naturels sous la forme  $2^k m + a$  ou  $a$  est compris entre 1 et  $2^k - 1$ , il existe une seule valeur de  $a$  pour laquelle on ne peut pas statuer par cette approche,  $a = 2^k - 1$ .

**Par passage à la limite, quand  $k$  tend vers l'infini, la proportion de cas où la conjecture de Collatz est démontrée dans une décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^k m + a$  tend vers 1.**

**Cela signifie également que quelque soit un entier  $N$ , il existe toujours un  $k$  assez grand tel que  $N$  n'appartienne pas à la classe de nombres  $2^{k+1} n + 2^{k+1} - 1$  qui peut s'écrire aussi à un changement de variable près  $2^{k+1} m - 1$**

**En démontrant que toute suite de Syracuse finit par repasser au dessous de son point de départ, ce qui est équivalent de dire qu'elles finissent toutes par passer par 1, cela élimine toute possibilité qu'une suite de Syracuse diverge ou finisse par un cycle non trivial.**

## **1.2 - Démonstration alternative de la conjecture de Collatz**

Certains pourraient considérer que le passage à la limite effectué dans notre démonstration précédente est un point délicat. Nous avons donc décidé de présenter deux démonstrations alternatives qui n'utilisent aucun passage à la limite.

### Démonstration alternative 1

La première démonstration repart de la classe de nombres qui posait problème, à savoir ceux de la forme  $2^{k+1}n + 2^{k+1} - 1$  qui après un simple changement de variable peuvent s'écrire  $2^{k+1}m - 1$ .

Nous allons montrer que tous les suites de Syracuse commençant par un nombre de cette forme croise la trajectoire d'une suite de Syracuse de la forme  $S[4K+1]$ .

Nous considérerons le cas  $m$  impair, car si  $m$  est pair cela revient à augmenter la valeur de  $k$  dans la formulation  $2^{k+1}m - 1$ .

$$T(2^{k+1}m - 1) = (3(2^{k+1}m - 1) + 1)/2 = 3 \cdot 2^k m - 1$$

$$T^2(2^{k+1}m - 1) = 3^2 \cdot 2^{k-1} m - 1$$

.....

$$T^k(2^{k+1}m - 1) = 3^k \cdot 2m - 1 = 3^k \cdot 2m - 2 + 1 = 2(3^k \cdot m - 1) + 1$$

Hors si  $m$  est impair, alors  $3^k \cdot m - 1$  est pair et  $(3^k \cdot m - 1)/2$  est entière. Par conséquent  $T^k(2^{k+1}m - 1)$  s'écrit :

$$T^k(2^{k+1}m - 1) = 4(3^k \cdot m - 1)/2 + 1 \text{ de la forme } 4K+1 \text{ avec } K = (3^k \cdot m - 1)/2$$

En conclusion, toutes les suites de Syracuse de la forme  $S[2^{k+1}m - 1]$  sont confluentes avec une suite de Syracuse de la forme  $S[4K+1]$  avec  $K = (3^k \cdot m - 1)/2$  qui satisfait la conjecture de Collatz. Par conséquent les suites de la forme  $S[2^{k+1}m - 1]$  satisfont également la conjecture de Collatz.

### Démonstration alternative 2

Cette troisième démonstration est issue des travaux que nous avons réalisés sur la conjecture de Kakutani, qui est une généralisation de celle de Collatz. Elle est basée sur le fait que si nous arrivons à démontrer que pour une partition de  $N$  sous la forme  $3m$ ,  $3m+1$  et  $3m+2$ , qui représentent une partition de  $N$ , nous arrivons à démontrer que les suites de la forme  $S[3m]$ ,  $S[3m+1]$  et  $S[3m+2]$  vérifient la conjecture de Collatz, alors ce sera vrai pour tout entier naturel.

Le principe de la démonstration est de trouver des classes de nombres qui passent au bout d'un nombre d'itération raisonnable au dessous de leur valeur initiale et croisent l'une des classes de la partition décrite ci-dessus. Nous conservons les idées principales sur lesquelles a été fondé toute notre démarche, à savoir :

#### Cas $S[3m+1]$

Souvenons nous la classe de suite  $S[4m+1]$ .

$$T(4m+1) = (3 \cdot (4m+1) + 1)/2 = (12m+4)/2 = 6m+2 \quad \text{et} \quad T^2(4m+1) = 3m+1 < 4m+1$$

qui confirme que  $S[4m+1]$  repasse au dessous de sa valeur initiale et vérifie donc la conjecture et comme  $S[4m+1]$  et  $S[3m+1]$  sont confluentes, alors  $S[3m+1]$  satisfait bien la conjecture de Collatz.

#### Cas $S[3m+2]$

Nous allons étudier le comportement des suites  $S[8m+5]$ . Nous n'indiquerons pas ici comment nous sommes arrivés à sélectionner cette classe de nombres, ce point étant détaillé dans la démonstration de la conjecture de Kakutani généralisée en fin d'article.

$$T(8m+5) = (3 \cdot (8m+5) + 1)/2 = (24m+16)/2 = 12m+8 \quad \text{et} \quad T^3(8m+5) = (12m+8)/4 = 3m+2 < 8m+5$$

qui confirme que  $S[8m+5]$  repasse au dessous de sa valeur initiale et vérifie donc la conjecture et comme  $S[8m+5]$  et  $S[3m+2]$  sont confluentes, alors  $S[3m+2]$  satisfait bien la conjecture de Collatz.

### Cas S[3m]

Ce cas est le plus simple. Si m pair, on divise par 2 et on repasse immédiatement au dessous de la valeur initiale.

Si m est impair, on pose  $m=2k+1$

$$T(3(2k+1)) = (3 \cdot (6k+3) + 1)/2 = (18m+10)/2 = 9m+5 = 3(3m+1)+2$$

**S(3m) est confluente avec la suite S(3K+2) avec  $K=3m+1$ , dont nous venons de montrer qu'elle satisfaisait la conjecture. Comme, de plus, S(3m) et S(3K+2) sont confluentes, alors S(3m) vérifie également la conjecture de Collatz.**

**Ayant démontré que toutes les suites de la forme S[3m+a] avec  $a = 0, 1$  ou  $2$  satisfaisaient la conjecture de Collatz, alors nous pouvons affirmer avec démontré pour tout entier la conjecture de Collatz**

## II - Généralisation au problème $3x + d$

Les idées mises en œuvre pour démontrer la conjecture de Collatz peuvent s'appliquer à une question plus générale qui est le cas des suites de Syracuse de la forme  $3m + d$  avec d premier avec 6, définie par Lagarias en 1990.

On peut l'exprimer de la manière suivante :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ pair} \\ (3m + d)/2 & \text{d premier avec 6, sinon} \end{cases}$$

La principale différence avec la conjecture de Collatz, est que nous pouvons rencontrer des cycles différents du cycle trivial (passant par 1). En conséquence nous n'allons démontrer que toute suite de la forme  $3m+d$  passe soit par 1 soit par un cycle dont le minimum est différent de 1.

Cela revient à formuler la conjecture du problème  $3m+d$  de la manière suivante :

**Toute suite  $3m+d$  finit par passer au dessous de sa valeur de départ ou à retomber sur sa valeur de départ.**

**Le fait d'accepter qu'une suite repasse par sa valeur initiale autorise, à la différence du paragraphe précédente, l'existence de cycles non triviaux.**

Nous adopterons, comme aux paragraphes précédents, les notations suivantes.  $T_d(n)$  représentera la suite commençant par l'entier n et  $T_d[n]$  la famille de suites commençant par un nombre de la classe n. Par exemple,  $T_d[2n+1]$  exprimera la famille des suites commençant par un nombre impair.

Avant d'étudier le cas général, nous allons regarder deux cas particuliers suivants,  $d=5$  et  $d=7$ .

## **II.1 – Etude de la conjecture $3x + 5$**

### **II.1.1 - Démonstration**

Nous allons examiner le comportement des classes de nombre modulo  $2^p$  avec  $p$  croissant.

#### **1.1 - Cas $p=2$ :**

$$T_5(4m+1) = (3(4m+1)+5)/2 = (12m+8)/2 = 6m+4 \text{ et } T_5(6m+4) = 3m+2 < 4m+1$$

**Les suites de la classe  $4m+1$  satisfont la conjecture  $3x+5$**

$$T_5(4m+3) = (3(4m+3)+5)/2 = (12m+14)/2 = 6m+7$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

#### **1.2 - Cas $p=3$ :**

$$T_5(8m+3) = (3(8m+3)+5)/2 = (24m+14)/2 = 12m+7$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure**

$T_5(8m+7) = (3(8m+7)+5)/2 = (24m+26)/2 = 12m+13 = 4(3m+3) + 1$  **de la classe  $4K+1$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+5$**

#### **1.3 - Cas $p=4$ :**

$$T_5(16m+3) = (3(16m+3)+5)/2 = (48m+14)/2 = 24m+7$$

$T_5(24m+7) = (3(24m+7)+5)/2 = (72m+26)/2 = 36m+13 = 4(9m+4) + 1$  **de la classe  $4K+1$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+5$ .**

$$T_5(16m+11) = (3(16m+11)+5)/2 = (48m+38)/2 = 24m+19$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

#### **1.4 - Cas $p=5$ :**

$$T_5(32m+11) = (3(32m+11)+5)/2 = (96m+38)/2 = 48m+19$$

$$T_5(48m+19) = (3(48m+19)+5)/2 = (144m+62)/2 = 72m+31$$

$$T_5(72m+31) = (3(72m+31)+5)/2 = (216m+98)/2 = 108m+49 = 4(27m+12) + 1$$

**de la classe  $4K+1$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+5$ .**

$$T_5(32m+27) = (3(32m+27)+5)/2 = (96m+86)/2 = 48m+43$$

$$T_5(48m+43) = (3(48m+43)+5)/2 = (144m+134)/2 = 72m+67$$

$$T_5(72m+67) = (3(72m+67)+5)/2 = (216m+206)/2 = 108m+103$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

Les cas que nous venons d'examiner nous ont conduit à lister les cas successifs qui résistent au raisonnement pas récurrence, les familles  $8m+3$ ,  $16m+11$  et  $32m+27$ . On remarque que ces trois familles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$8m + 3 = 8m + 8 - 5 = 2^3 m + 2^3 - 5$$

$$16m+11 = 16m + 16 - 5 = 2^4 m + 2^4 - 5$$

$$32m+27 = 32m + 32 - 5 = 2^5 m + 2^5 - 5$$

Alors que les suites des classes  $16m+3$ ,  $32m+11$  ... satisfont la conjecture  $3x+5$ . Et l'on remarque qu'on peut les écrire ainsi :

$$16m + 3 = 16m + 8 - 5 = 2^4 m + 2^3 - 5$$

$$32m + 11 = 32m + 16 - 5 = 2^5 m + 2^4 - 5$$

On peut raisonnablement en déduire que les familles qui résistent sont de la forme  $2^p m + 2^p - 5$ . Et comme dans le cas de la conjecture  $3x + 5$ , on peut vérifier par passage à la puissance de 2 supérieure, que  $2^{p+1} m + 2^p - 5$  satisfait la conjecture  $3m+5$ .

En effet :

$$T_5(2^{p+1} m + 2^p - 5) = (3(2^{p+1} m + 2^p - 5) + 5)/2 = (3 \cdot 2^{p+1} m + 3 \cdot 2^p - 10)/2 = 3 \cdot 2^p m + 3 \cdot 2^{p-1} - 5$$

Avec une petite astuce de calcul en exprimant  $3 \cdot 2^{p-1}$  sous la forme  $2^p + 2^{p-1}$

$$T_5(2^{p+1} m + 2^p - 5) = 2^p (3m + 1) + 2^{p-1} - 5 \text{ de la forme } 2^p K + 2^{p-1} - 5$$

Donc par récurrence sur  $k$ , pour  $p=4$  nous avons montré que la classe  $16m + 3$  était de la même classe que  $4K+1$  qui satisfait la conjecture  $3x+5$ . De même, nous avons montré que la classe  $32m + 9$  vérifiait la même condition.

En supposant que cette condition est également vérifiée par la classe  $2^p K + 2^{p-1} - 5$  pour tout entier inférieur ou égal à  $p$ , et ayant démontré que une suite commençant par  $2^{p+1} m + 2^p - 5$  passe par un nombre de la forme  $2^p K + 2^{p-1} - 5$  avec  $K=3m+1$ , dont on a fait l'hypothèse par récurrence que la famille vérifiait la conjecture  $3x + 5$ . Par conséquent, les suites  $T_5(2^{p+1} m + 2^p - 5)$  et  $T_5(2^p K + 2^{p-1} - 5)$  avec  $K=3m+1$  sont deux suites confluentes. Par hypothèse de récurrence, les suites de la forme  $T_5(2^p K + 2^{p-1} - 5)$  vérifie quelque soit  $K$  la conjecture  $3x+5$ , il en est donc de même pour les suites de la forme  $T_7(2^{p+1} m + 2^p - 5)$ .

Il reste le cas des suites de la forme  $T_5(2^p m + 2^p - 5)$  qui résistent à cette voie de démonstration.

Pour éviter le passage à la limite pour les suites de la forme  $T_5[2^p m + 2^p - 5]$ , nous allons utiliser la même approche que dans la démonstration alternative 1 de la conjecture de Collatz. Par un simple changement de variable, cela revient à étudier les suites de la forme  $T_5[2^p n - 5]$ . Nous nous placerons comme précédemment dans le cas  $n$  impair, car si  $n$  est pair cela revient à augmenter la valeur de  $p$ .

$$T_5(2^p n - 5) = (3(2^p n - 5) + 5)/2 = 3 \cdot 2^{p-1} n - 5$$

.....

$$T_5^{p-1}(2^p n - 5) = 3^{p-1} \cdot 2n - 5 = 2 \cdot (3^{p-1} n - 3) + 1$$

Si  $n$  est impair alors  $3^{p-1} n - 3$  est pair et  $(3^{p-1} n - 3)/2$  est entier. Par conséquent  $T_5^{p-1}(2^p n - 5)$  s'écrit :

$$T_5^{p-1}(2^p n - 5) = 4 \cdot (3^{p-1} n - 3)/2 + 1 \text{ de la forme } 4K+1 \text{ avec } K=(3^{p-1} n - 3)/2$$

Ce qui achève de démontrer que toute suite de la forme  $S[2^p n - 5]$  sont confluentes avec une suite de la forme  $S[4K+1]$  avec  $K=(3^{p-1} n - 3)/2$  et par conséquent satisfait la conjecture  $3x+5$

**En conclusion, nous venons de démontrer que dans toute décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^p m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^p m + 2^p - 1$ , toute suite de la forme  $S[2^p m + a]$  vérifie la conjecture  $3x+5$ .**

## **II.1.2 - Existence de cycles non triviaux :**

Lorsque l'on étudie la trajectoire des suites  $3x+5$  pour  $U_0$  impair compris entre 1 et 51, le tableau suivant permet de voir, celles qui passent par 1 ou aboutissent à un cycle non trivial

entiers imp	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
min cycle	1	19	5	19	1	19	19	5	19	19	19	23	5
entiers imp	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
min cycle	19	23	19	19	5	23	19	1	19	5	19	19	23

Quatre valeurs représentant le minimum de cycles ressortent. 1 pour le cycle trivial  $\{1,4,2\}$ , 5 pour tout  $U_0 \equiv 0 [5]$ , ainsi que 19 et 23. Cette liste n'est pas exhaustive et il est possible qu'il existe des cycles dont le minimum est supérieur aux quatre valeurs ci-dessus.

Nous proposons une méthode pour mettre en évidence certains cycles en fonction du nombre d'itération, qu'on appellera ordre, pour revenir à la valeur initiale. Nous ne comptons pas les divisions par une puissance de 2 dans le nombre d'itérations mais seulement les opérations  $3x+5$ .

### **Cycles d'ordre 1**

On va d'abord chercher un cycle d'ordre 1 :

$$T_5(m) = 3m+5 = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p - 3)m = 5$$

Cette équation n'a que deux solutions dans  $\mathbf{N}$ :

$$p=2 \text{ donne } m = 5 \text{ et } p=1 \text{ donne } m=1 \text{ (min du cycle trivial)}$$

Toute autre valeur de  $p$  conduit à des solutions dans  $\mathbf{Z}$  ou dans  $\mathbf{Q}$  qui n'est pas notre propos ici.

On peut également montrer que si  $m$  est un multiple de 5, alors la suite aboutira à un cycle dont le minimum est 5

$$\text{Posons } m = 5n : T_5(5n) = (3 \cdot 5n + 5)/2 = 5(3n+1)/2 = 5 \cdot T(n)$$

$$\text{De même : } T_5^2(5n) = (3 \cdot 5 \cdot T(n) + 5)/2 = 5 \cdot (3 \cdot T(n) + 1)/2 = 5 \cdot T^2(n)$$

Plus généralement on montre par récurrence que  $T_5^k(5n) = 5 \cdot T^k(n)$  quelque soit l'entier  $k \geq 1$ .

$T(n)$  est la fonction de la conjecture dont on a démontré précédemment que toutes passaient par 1

$$\text{Par conséquent, il existe } k \text{ tel que } T^k(n) = 1, \text{ alors } T_5^k(5n) = 5 \cdot T^k(n) = 5$$

Ce qui permet de conclure que toute suite de la forme  $S[5n]$  aboutit sur un cycle non trivial de minimum 5.

**Il existe donc deux cycles d'ordre 1, le cycle trivial et le cycle de minimum 5.**

### **Cycles d'ordre 2**

Si nous regardons les cycles d'ordre 2,  $T^2(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^3(m) = 9m + d = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p - 9)m = d \text{ avec } d = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 25 \text{ obtenu après 2 itérations}$$

$m$  et  $2^p - 9$  divisent 25, ce qui est impossible quelque soit  $p > 3$  et pour  $p \leq 3$ ,  $2^p - 9 < 0$

**Il n'existe donc aucun cycle d'ordre 2**

### Cycles d'ordre 3

Si nous regardons les cycles d'ordre 3,  $T^3(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^3(m) = 27m + d = 2^p m \text{ équivalant à } (2^p - 27)m = d$$

avec  $d = 3^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 = 95$  ou  $d = 3^3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 5 = 115$  obtenu après 3 itérations

L'équation  $(2^p - 27)m = 95$  admet une seule solution pour  $p=5$  et  $m = 19$

L'équation  $(2^p - 27)m = 115$  admet une seule solution pour  $p=5$  et  $m = 23$

Si  $p < 5$ , il n'y a pas de solution dans  $\mathbb{N}$  et si  $p > 5$ ,  $(2^p - 27)$  ne divise ni 95, ni 115.

Comme nous l'avons montré précédemment il serait aisé de montrer que toute suite commençant par un multiple impair de 19 (resp. 23), aboutit à un cycle dont le minimum est 19 (resp. 23)

**Il existe seulement deux cycles d'ordre 3 dont les minimum sont 19 et 23**

### II.2 – Etude de la conjecture $3x + 7$

Nous allons examiner le comportement des classes de nombre modulo  $2^p$  avec  $p$  croissant.

#### 2.1- Cas $p=2$ :

$$T_7(4m+1) = (3(4m+1)+7)/2 = (12m+10)/2 = 6m+5$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

$$T_7(4m+3) = (3(4m+3)+7)/2 = (12m+16)/2 = 6m+8 \text{ qui est pair}$$

$$T_7(6m+8) = (6m+8)/2 = 3m+4 < 4m+3$$

**Les suites de la classe  $4m+3$  satisfont la conjecture  $3x+7$**

#### 2.2- Cas $p=3$ :

$$T_7(8m+1) = (3(8m+1)+7)/2 = (24m+10)/2 = 12m+5$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

$T_7(8m+5) = (3(8m+5)+7)/2 = (24m+22)/2 = 12m+11 = 4(3m+2) + 3$  **de la classe  $4K+3$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+7$**

#### 2.3- Cas $p=4$ :

$$T_7(16m+1) = (3(16m+1)+7)/2 = (48m+10)/2 = 24m+5$$

$T_7(24m+5) = (3(24m+5)+7)/2 = (72m+22)/2 = 36m+11 = 4(9m+2) + 3$  **de la classe  $4K+3$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+7$ .**

$$T_7(16m+9) = (3(16m+9)+7)/2 = (48m+34)/2 = 24m+17$$

$$T_7(24m+17) = (3(24m+17)+7)/2 = (72m+58)/2 = 36m+29$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

#### 2.4 - Cas $p=5$ :

$$T_7(32m+9) = (3(32m+9)+7)/2 = (96m+34)/2 = 48m+17$$

$$T_7(48m+17) = (3(48m+17)+7)/2 = (144m+58)/2 = 72m+29$$

$T_7(72m+29) = (3(72m+29)+7)/2 = (216m+94)/2 = 108m+47 = 4(27m+11) + 3$  **de la classe  $4K+3$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+7$ .**

$$T_7(32m+25) = (3(32m+25)+7)/2 = (96m+82)/2 = 48m+41$$

$$T_7(48m+41) = (3(48m+41)+7)/2 = (144m+130)/2 = 72m+65$$

$$T_7(72m+65) = (3(72m+65)+7)/2 = (216m+202)/2 = 108m+101$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

Les cas que nous venons d'examiner nous ont conduit à lister les cas successifs qui résistent au raisonnement par récurrence, les suites classes  $8m+1$ ,  $16m+9$  et  $32m+25$ . On remarque que ces trois familles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$8m + 1 = 8m + 8 - 7 = 2^3 m + 2^3 - 7$$

$$16m+9 = 16m + 16 - 7 = 2^4 m + 2^4 - 7$$

$$32m+25 = 32m + 32 - 7 = 2^5 m + 2^5 - 7$$

Alors que les suites des classes  $16m+1$ ,  $32m+9$  ... satisfont la conjecture  $3x+7$ . Et l'on remarque qu'on peut les écrire ainsi :

$$16m + 1 = 16m + 8 - 7 = 2^4 m + 2^3 - 7$$

$$32m + 9 = 32m + 16 - 7 = 2^5 m + 2^4 - 7$$

On peut raisonnablement en déduire que les familles qui résistent sont de la forme  $2^p m + 2^p - 7$ . Et comme dans le cas de la conjecture de Collatz, on peut vérifier par passage à la puissance de 2 supérieure, que  $2^{p+1} m + 2^p - 7$  satisfait la conjecture  $3x+7$ .

En effet :

$$T_7(2^{p+1} m + 2^p - 7) = (3(2^{p+1} m + 2^p - 7) + 7)/2 = (3 \cdot 2^{p+1} m + 3 \cdot 2^p - 14)/2 = 3 \cdot 2^p m + 3 \cdot 2^{p-1} - 7$$

Avec une petite astuce de calcul en exprimant  $3 \cdot 2^{p-1}$  sous la forme  $2^p + 2^{p-1}$

$$T_7(2^{p+1} m + 2^p - 7) = 2^p (3m + 1) + 2^{p-1} - 7 \text{ de la forme } 2^p K + 2^{p-1} - 7$$

Donc par récurrence, pour  $p=4$  nous avons montré que les suites de la forme  $T_7(16m + 1)$  étaient confluentes avec une suite de la forme  $T_7(4K+3)$  qui satisfait la conjecture  $3x+7$ . De même, nous avons montré que les suites de la forme  $T_7(32m + 9)$  vérifiait la même condition.

En supposant que cette condition est également vérifiée par la classe  $2^p K + 2^{p-1} - 7$  pour tout entier inférieur ou égal à  $p$ , et ayant démontré que une suite commençant par  $2^{p+1} m + 2^p - 7$  passe par un nombre de la forme  $2^p K + 2^{p-1} - 7$  avec  $K=3m+1$ , dont on a fait l'hypothèse par récurrence que les suites de la forme  $T_7(2^p K + 2^{p-1} - 7)$  vérifiait la conjecture  $3x+7$ . Par conséquent, les suites  $T_7(2^{p+1} m + 2^p - 7)$  et  $T_7(2^p K + 2^{p-1} - 7)$  avec  $K=3m+1$  sont deux suites confluentes. Par hypothèse de récurrence, les suites de la forme  $T_7(2^p K + 2^{p-1} - 7)$  vérifie quelque soit  $K$  la conjecture  $3x+7$ , il en est donc de même pour les suites de la forme  $T_7(2^{p+1} m + 2^p - 7)$ .

Il reste le cas des suites de la forme  $T_7(2^p m + 2^p - 7)$  qui résistent à cette voie de démonstration.

Pour éviter le passage à la limite pour les suites de la forme  $T_7[2^p m + 2^p - 7]$ , nous allons utiliser la même approche que dans la démonstration alternative 1 de la conjecture de Collatz. Par un simple changement de variable, cela revient à étudier les suites de la forme  $T_7[2^p n - 7]$ . Nous nous placerons comme précédemment dans le cas  $n$  impair, car si  $n$  est pair cela revient à augmenter la valeur de  $p$ .

$$T_7(2^p n - 7) = (3(2^p n - 7) + 7)/2 = 3 \cdot 2^{p-1} n - 7$$

.....

$$T_7^{p-1}(2^p n - 7) = 3^{p-1} \cdot 2n - 7 = 2 \cdot (3^{p-1} n - 5) + 3$$

Si  $n$  est impair alors  $3^{p-1} n - 5$  est pair et  $(3^{p-1} n - 5)/2$  est entier. Par conséquent  $T_7^{p-1}(2^p n - 7)$  s'écrit :

$$T_7^{p-1}(2^p n - 7) = 4 \cdot (3^{p-1} n - 5)/2 + 3 \text{ de la forme } 4K+3 \text{ avec } K=(3^{p-1} n - 5)/2$$

Ce qui achève de démontrer que toute suite de la forme  $T_7[2^p n - 7]$  sont confluentes avec une suite de la forme  $T_7[4K+3]$  avec  $K=(3^{p-1} n - 5)/2$  et par conséquent satisfait la conjecture  $3x+7$

**En conclusion, nous venons de démontrer que dans toute décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^p m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^p m + 2^p - 1$ , toute suite de la forme  $T_7[2^p m + a]$  vérifie la conjecture  $3x+7$**

### Existence de cycles non triviaux :

Lorsque l'on étudie la trajectoire des suites  $3x+7$  pour  $U_0$  impair compris entre 1 et 51, le tableau suivant permet de voir, celles qui passent par 1 ou aboutissent à un cycle non trivial

entiers imp	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
min cycle	1	5	5	7	1	5	5	5	1	1	7	1	1
entiers imp	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
min cycle	5	1	1	1	7	1	1	1	1	5	1	7	5

Trois valeurs représentant le minimum de cycles ressortent. 1 pour le cycle trivial  $\{1,4,2\}$ , 7 pour tout  $U_0 \equiv 0 [7]$ , ainsi que 5.

Nous allons procéder comme pour la conjecture  $3x+5$ .

### **Cycles d'ordre 1**

Un cycle d'ordre 1 doit conduire à

$T(m) = (3m+7)/2$  qui doit être de la forme  $2^{p-1}m$  où  $m$  est le minimum d'un cycle d'ordre 1. Cela équivaut à résoudre l'équation  $(2^p-3)m = 7$

Cette équation n'a qu'une seule solution dans **N**:  $p=1$  donne  $m = 7$

Toute autre valeur de  $p$  conduit à des solutions dans **Z** ou dans **Q** qui n'est pas notre propos ici.

Comme précédemment, on peut montrer que tous les multiples impairs de 7 aboutissent au cycle de minimum 7.

**Il existe donc un seul cycle d'ordre 1, le cycle de minimum 7.**

### **Cycles d'ordre 2**

Si nous regardons les cycle d'ordre 2,  $T^2(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^2(m) = 9m + d = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p-9)m = d \text{ avec } d = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 35 \text{ obtenu après 2 itérations}$$

$2^p-9$  doit diviser 35 ce qui n'est possible que pour  $p=4$ . Dans ce cas  $m=5$

Comme précédemment, on peut montrer que tous les multiples impairs de 5 aboutissent au cycle de minimum 5.

**Il n'existe donc un seul cycle d'ordre 2, le cycle de minimum 5.**

### **Cycles d'ordre 3**

Si nous regardons les cycles d'ordre 3,  $T^3(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^3(m) = 27m + d = 2^p m \text{ équivalant à } (2^p - 27)m = d$$

avec  $d = 3^2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 7 = 133$  ou  $d = 3^2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2^3 \cdot 7 = 161$  obtenu après 3 itérations

L'équation  $(2^p - 27)m = d$  avec  $d=133$  ou  $161$  n'a aucune solution.

En effet pour  $p=5$ , on a  $5m = 133$  ou  $5m = 161$ , pour  $p=6$ , on a  $37m = 133$  ou  $37m = 161$ , pour  $p=7$  on a  $101m = 133$  ou  $101m = 161$ . Aucune de ces équation n'a de solution dans  $\mathbb{N}$

**Donc il n'existe aucun cycle d'ordre 3.**

## **II.3 - Cas général de la conjecture $3x+d$**

De la même manière que dans le paragraphe précédent nous allons débiter en regardant le comportement des entiers classés modulo 4, avec la même approche par récurrence forte.

Le cas des nombres pairs est évacué car passant immédiatement au dessous de leur valeur initiale.

En effet  $T_d(2m) = m < 2m$

Nous devons donc nous attacher à démontrer la conjecture  $3M+D$  pour les nombres de la forme  $4m+1$  et  $4m+3$ .

Nous supposerons dans la suite que  $d \equiv 1 [4]$ , le cas  $d \equiv 3 [4]$  se traitant de manière identique

### **3.1 – Cas $p=2$**

#### **Cas $4m + 1$**

$$T_d(4m+1) = (3(4m+1) + d)/2 = 6m + (d+3)/2$$

Comme  $d \equiv 1 [4]$  alors  $d+3 \equiv 0 [4]$ , donc  $d+3$  est de la forme  $4k$

$$\text{Donc } T_d(T_d(4m+1)) = T_d(6m + (d+3)/2) = T_d(6m + 2k) = 3m + k = 3m + (d+3)/4 < 4m + 1$$

**Les suites de la forme  $T_d[4m+1]$  vérifient la conjecture  $3m+d$ .**

#### **Cas $4m + 3$**

$$T_d(4m+3) = (3(4m+3) + d)/2 = 6m + (d+9)/2$$

Comme  $d \equiv 1 [4]$  alors  $d+9 \equiv 2 [4]$ , donc  $d+9$  est de la forme  $4k+2$ . On ne peut pas conclure.

Dans ce cas on ne repasse pas au dessous de la valeur initiale. Il nous faut donc explorer séparément les valeurs pair et impair de  $m$ , ce qui revient à passer à une décomposition des nombres entiers en classes modulo 8, mais seulement pour les classes  $8m+3$  et  $8m+7$ .

Si nous avons regardé le cas  $d \equiv 3 [4]$ , le résultat sera inversé. Les suites de la forme  $T[4m+3]$  satisfont la conjecture  $3x+d$  alors que l'étude de la classe de nombre  $4m+1$  ne permet pas de conclure et oblige d'étudier les cas  $8m+1$  et  $8m+5$ .

### Cas $2^p m + a$

Nous allons poser les relations de récurrence suivantes

Par analogie avec les deux cas particuliers des conjectures  $3x+5$  et  $3x+7$  (auxquelles on pourrait tout à fait ajouter celle de Collatz,  $3x+1$ ), nous pouvons supposer que dans une décomposition des nombres entiers naturels sous la forme  $2^p m + a$ , toutes les valeurs de  $a$  satisfont la conjecture  $3x+d$  à l'exception de  $2^p m + 2^p - d$ . Et nous allons montrer que cela est vrai pour les nombres de la forme  $2^{p+1} m + a$ .

En corolaire, si pour les nombres de la forme  $2^p m + a$  toutes les valeurs de  $a$  vérifient la conjecture  $3x+d$ , à l'exception de  $a = 2^p m + 2^p - d$ , alors la classe de nombre  $2^p m + 2^{p-1} - d$  vérifiera la conjecture.

Nous allons donc démontrer qu'il en est ainsi pour les nombres de la forme  $2^{p+1} m + a$  en montrant que les nombres de la forme  $2^{p+1} m + 2^p - d$  vérifient également la conjecture.

$$T_d(2^{p+1} m + 2^p - d) = (3(2^{p+1} m + 2^p - d) + d)/2 = 3 \cdot 2^p m + 3 \cdot 2^{p-1} - d$$

En décomposant  $3 \cdot 2^{p-1}$  en  $2 \cdot 2^{p-1} + 2^{p-1} = 2^p + 2^{p-1}$

$$T_d(2^{p+1} m + 2^p - d) = 2^p (3m+1) + 2^{p-1} - d$$

Qui est de la forme  $2^p K + 2^{p-1} - d$  qui selon l'hypothèse de récurrence, vérifie la conjecture.

Il nous faut comme la démonstration alternative 1 de la conjecture de Collatz, traiter le cas des suites commençant par un nombre de la forme  $2^p m + 2^p - d$ . Par le même changement de variable que précédemment, cela revient à étudier les suites de la forme  $T_d[2^p n - d]$ . Nous nous placerons comme précédemment dans le cas  $n$  impair, car si  $n$  est pair cela revient à augmenter la valeur de  $p$ .

$$T_d(2^p n - d) = (3(2^p n - d) + d)/2 = 3 \cdot 2^{p-1} n - d$$

.....

$$T_d^{p-1}(2^p n - d) = 3^{p-1} \cdot 2n - d = 2 \cdot (3^{p-1} n - (d+1)/2) + 1$$

Si  $n$  est impair et  $d \equiv 1 [4]$  alors  $3^{p-1} n - (d+1)/2$  est pair et  $(3^{p-1} n - (d+1)/2)/2$  est entier. Par conséquent  $T_d^{p-1}(2^p n - d)$  s'écrit :

$$T_d^{p-1}(2^p n - d) = 4 \cdot (3^{p-1} n - (d+1)/2)/2 + 1 \text{ de la forme } 4K+1 \text{ avec } K = (3^{p-1} n - (d+1)/2)/2$$

Ce qui achève de démontrer que toute suite de la forme  $S[2^p n - d]$  sont confluentes avec une suite de la forme  $T_d[4K+1]$  avec  $K = (3^{p-1} n - (d+1)/2)/2$  et par conséquent satisfait la conjecture  $3x+d$

**En conclusion, nous venons de démontrer que dans toute décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^p m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^p m + 2^p - 1$ , toute suite de la forme  $T_d[2^p m + a]$  vérifie la conjecture  $3x+d$**

**On en conclut que dans toute décomposition des entiers naturels sous la forme  $2^p m + a$ , seul le cas  $2^p m + 2^p - d$  ne peut être démontré par récurrence, soit 1 cas sur  $2^p$ . Par passage à la limite, quand  $p$  tend vers l'infini,  $1/2^p$  tend vers 0. Ce qui permet de conclure que la conjecture  $3x+d$  est vérifié quelque soit  $d$  premier avec 6..**

### Existence de cycles non triviaux :

Dans le cas général du problème  $3x+d$ , il est plus difficile de mettre en évidence comme nous l'avons fait précédemment pour les suites  $3x+5$  et  $3x+7$ , l'existence de cycles.

Néanmoins il y a au moins un cas que nous pouvons traiter facilement, c'est  $U_0 = d$

### **Cycles d'ordre 1**

En effet,  $T_d(d) = (3d + d)/2 = 2d$  et  $T_d^2(d) = d$

**Il existe au moins un cycle non trivial, dont le minimum est d.**

Et comme précédemment, on peut montrer que toute suite de la forme  $S[d.m]$  aboutit à un cycle de minimum d

En effet on montre aisément que  $T_d(d.m) = d \cdot T(m)$  et que quelque soit  $k > 0$ ,  $T_d^k(d.m) = d \cdot T^k(m)$ . On laisse au lecteur le soin de le vérifier.

Comme quelque soit m entier naturel non nul, il existe p tel que  $T^p(m) = 1$  alors il existe bien p tel que  $T_d^k(d.m) = d$  qui est le minimum d'un cycle d'ordre 1.

En conséquence, toutes les suites  $S_d(d.m)$  aboutissent sur un cycle non trivial dont le minimum est d

On peut regarder si il est possible de mettre en évidence d'autres cycles d'ordre 1 différent du précédent.

Pour cela il faut trouver une solution à l'équation  $(2^p - 3)m = d$

Si  $p = 1$ , on retrouve  $m = d$  ou dans les cas où  $2^p - 3 = d$ , on retombe sur la solution  $m = 1$  qui donne le cycle trivial

## Cycles d'ordre 2

**Un cycle d'ordre 2 est donné par la relation**

$T_d(m) = (3m + d)/2$  et  $T_d^2(d.m) = (3(3m + d)/2 + d)/2 = (9m + 5d)/4$  qui doit être de la forme  $2^p \cdot m$

Ce qui conduit à résoudre l'égalité :  $(2^p - 9)m = 5d$

Comme  $2^p - 9$  est toujours supérieur à 5, il est nécessaire que m soit un multiple de 5. Dans la conjecture  $3x + 7$ , on retrouve ainsi la valeur 5 qui est le minimum d'un cycle d'ordre 2.

## Cycles d'ordre supérieur

La mise en évidence de cycles d'ordre supérieurs nécessiterait de résoudre l'équation :

$$(2^p - 3^q)m = D \quad \text{ou} \quad D = (3^{q-1} + 3^{q-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{q-3} \cdot 2^{p_2} + \dots + 3 \cdot 2^{p_{n-1}} + 2^{p_n}) \cdot d$$

Où la suite  $(p_1 \dots p_n)$  est une suite d'entier strictement croissante telle que  $3^{q-2} < 2^{p_n} < 3^{q-1} < 3^q < 2^p$

$$m < F(q) = q \cdot 3^{q-1} \cdot d / (2^p - 3^q) = q \cdot d / 3((2^p / 3^q) - 1) \quad \text{avec} \quad p = \text{Ent}(q \cdot \text{Log}3 / \text{Log}2) + 1$$

On peut démontrer aisément que  $F(q) = d \cdot O(q)$  et que par conséquent, le nombre de cycle d'ordre q (ou q est le nombre d'entiers impairs du cycle) est du même ordre de grandeur que q.

### III - Conjecture de Kakutani

Les arguments mis en œuvre pour démontrer la conjecture de Collatz, peuvent s'appliquer à une formulation plus générale, présentée par Oliveira, et vraisemblablement due à Kakutani

$$C_{p,D}(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 [d], d \text{ appartient à } D, d \text{ premier et } d < p \\ pm + 1 & \text{avec } p \text{ premier, sinon} \end{cases}$$

Nous noterons  $K(U_0)$  la suite de Kakutani commençant par  $U_0$

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux suites où  $D$  est l'ensemble des  $n-1$  plus petits nombres premiers, noté  $\{p_i, 0 < i < n \text{ et } p_i < p_{i+1}\}$  avec  $p = p_n$  le  $n$ ème nombre premier.

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m) = \begin{cases} m/p_i & \text{si } m \equiv 0 [p_i], \text{ quelque soit } i < n \\ p_n \cdot m + 1 & \text{avec } p_n \text{ premier, sinon} \end{cases}$$

Nous allons dans le présent chapitre démontrer que toute suite de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m)$  suit une trajectoire qui passe par 1. Pour la même raison que pour la conjecture de Collatz, on peut montrer par récurrence que cela est équivalent à dire que toute trajectoire finit par repasser au dessous de sa valeur initiale.

Avant de nous lancer dans la démonstration du cas général nous allons étudier deux cas particulier, les suites de Kakutani de la forme  $C_{5, \{2,3\}}(m)$  et celles de la forme  $C_{7, \{2,3,5\}}(m)$ .

Pour simplifier les notations, nous remplacerons dans les paragraphes suivant, l'écriture  $C_{5, \{2,3\}}(m)$  par  $C_5(m)$ , l'écriture  $C_{7, \{2,3,5\}}(m)$  par  $C_7(m)$  et l'écriture  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m)$  par  $C_{p_n}(m)$ ,

#### III.1 – Les suites de Kakutani de la forme $C_{5, \{2,3\}}(m)$

Nous avons testé toutes les valeurs de  $U_0$  comprise entre 1 et 100, en évitant celles divisibles par des puissances de 2 ou de 3, et toutes finissent par passer par 1.

Nous reprenons la même approche que celle développée pour les suites de Syracuse, à savoir de montrer que toute suite finit par repasser au dessous de sa valeur initiale.

Dans le cas des suites de Syracuse, nous étions partis sur une analyse des nombres de la forme  $2^k m + a$ , cela en raison de la division par 2 pour les valeurs paires. Nous adaptons cette approche aux suites de Kakutani en commençant par étudier les nombres de la forme  $6m + a$ .

##### **1.1 – Cas $6m$**

$$C_5(6m) = 3m < 6m$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $C_5(6m)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

##### **1.2 - Cas $6m+1$**

$$C_5(6m+1) = 30m+6 \text{ qui est divisible par 2 et par 3}$$

$$C_5^3(6m+1) = 5m+1 < 6m+1$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $C_5(6m+1)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

### **1.3 - Cas $6m+2$**

$$C_5(6m+2) = (6m+2)/2 = 3m+1 < 6m+2$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $C_5(6m+2)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

### **1.4 - Cas $6m+3$**

$$C_5(6m+3) = (6m+3)/3 = 2m+1 < 6m+3$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $C_5(6m+3)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

### **1.5 - Cas $6m+4$**

$$C_5(6m+4) = (6m+4)/2 = 3m+2 < 6m+4$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $C_5(6m+4)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

### **1.6 - Cas $6m+5$**

$$C_5(6m+5) = 5(6m+5) + 1 = 30m+26 \quad \text{et} \quad C_5^2(6m+5) = C(30m+26) = (30m+26)/2 = 15m+13$$

**On ne passe pas au dessous de la valeur de départ pour les suites de Kakutani de la forme  $C_5(6m+5)$  donc on ne peut pas conclure. Cependant 5 cas sur 6, vérifient la conjecture de Kakutani**

Comme pour la conjecture de Syracuse, on va maintenant étudier les suites de la forme  $S(12m+a)$  avec  $a=5$  et  $a=11$ .

### **2.1 – Cas $12m+5$**

$$C_5(12m+5) = 5(12m+5) + 1 = 60m+26 \quad \text{et} \quad C_5^2(12m+5) = (60m+26)/2 = 30m+13$$

Cette valeur n'est pas inférieure à  $12m+5$  mais comme dans la première partie, si nous montrons que les suites de la forme  $C_5(12m+5)$  sont confluentes avec des suites de Kakutani pour lesquelles on a déjà démontré la convergence, alors on aura le même comportement pour les suites de la forme  $C_5(12m+5)$ .

En effet :  $30m+13 = 6(5m+2) + 1$  qui est bien de la forme  $6k+1$

**Par conséquent,  $C_5(12m+5)$  et  $C_5(6k+1)$  avec  $k=5m+2$  sont deux suites confluentes. En conséquence  $C_5(6k+1)$  vérifie la conjecture de Kakutani, il en est de même pour les suites de la forme  $C_5(12m+5)$ .**

### **2.2 – Cas $12m+11$**

En revanche, le cas des suites  $C_5(12m+11)$  donne :

$$C_5(12m+11) = 5(12m+11) + 1 = 60m+56 \quad \text{et} \quad C_5^2(12m+11) = 30m+28 \quad \text{et} \quad C_5^3(12m+11) = 15m+14$$

qui n'est pas inférieure à  $12m+11$  et ne peut pas s'exprimer sous une forme d'un nombre pour lequel on a précédemment démontré que cela satisfaisait la conjecture de Kakutani.

**Nous allons par conséquent regarder les suites de la forme  $C_5(24m+a)$  avec  $a=11$  ou  $a=23$**

### **3.1 – Cas $24m+11$**

$$C_5(24m+11) = 120m+56 \quad \text{qui est divisible par 8, ce qui donne} \quad C_5^4(24m+11) = 15m+7 < 24m+11$$

**Les suites de la forme  $C_5(24m+5)$  repassent donc au dessous de leur point de départ.**

Mais on aurait également pu montrer que  $30m+14 = 6(5m+2)+2$  qui est de la forme  $6m+2$ . On conclut que les suites  $C_5(24m+5)$  et  $C_5(6k+2)$  avec  $k=5m+2$  sont confluentes.

Dans les deux cas, on peut conclure que les suites  $C_5(12m+5)$  satisfont la conjecture de Kakutani.

### 3.2 – Cas $24m+23$

Comme précédemment le calcul ne permet pas de conclure que les suites  $C_5(24m+23)$  satisfont la conjecture de Kakutani, sauf à regarder les suites de la forme  $C_5(48m+23)$ .

### Cas Général : étude des suites de la forme $C_5(3 \cdot 2^n m + a)$

De manière plus générale et par analogie avec l'approche adoptée pour la conjecture de Syracuse, nous allons supposer, que pour tout entier  $i$  inférieur ou égal à  $n$ ,  $C_5(3 \cdot 2^{i-1} m + 3 \cdot 2^{i-2} - 1)$  satisfait la conjecture de Kakutani et nous allons démontrer que les suites de la forme  $K C_5(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  satisfont également la conjecture de Kakutani.

$$C_5(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1) = 5(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 1 = 5 \cdot 3 \cdot 2^n m + 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 4$$

Pour  $n > 2$ , ce résultat est divisible par 4

$$C_5^2(5 \cdot 3 \cdot 2^n m + 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 4) = 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} m + 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-3} - 1 = 3 \cdot 2^{n-2} \cdot (5m+2) + 3 \cdot 2^{n-3} - 1$$

Donc  $C_5^2(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  est de la forme  $3 \cdot 2^{n-2} \cdot k + 3 \cdot 2^{n-3} - 1$  avec  $k=5m+2$

En conséquence, les suites de la forme  $C_5(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  et  $C_5(3 \cdot 2^{n-2} k + 3 \cdot 2^{n-3} - 1)$  avec  $k=5m+2$  sont confluentes. Et en vertu de l'hypothèse de récurrence forte, pour tout entier  $i$  inférieur ou égal à  $n$ ,  $C_5(3 \cdot 2^{i-1} m + 3 \cdot 2^{i-2} - 1)$  satisfait la conjecture de Kakutani, alors les suites de la forme  $C_5(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  satisfont bien à la conjecture de Kakutani.

Cela signifie que dans une décomposition des nombres entiers sous la forme  $3 \cdot 2^n m + a$ , seul le cas  $a=3 \cdot 2^n - 1$  nécessite de passer à la puissance de 2 supérieur pour démontrer pour un cas sur deux la conjecture de Kakutani. Cela représente 1 cas sur  $3 \cdot 2^{n-1}$ . Ce rapport tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini et permet de conclure sur la résolution de la conjecture de kakutani pour les suites  $C_5(m)$ .

Mais comme pour la démonstration alternative 1 de la conjecture de Collatz, nous allons essayer de conclure pour le cas  $a=3 \cdot 2^n - 1$  sans passage à la limite. Pour cela nous allons effectuer un changement de variable pour nous ramener à étudier les suites de Kakutani commençant par un nombre de la forme  $3 \cdot 2^n m - 1$ .

Cela rappelle étrangement une forme que nous avons rencontrée lors de la démonstration de la conjecture de Collatz.

Pour les mêmes raisons que précédemment, on suppose  $m$  impair, le cas pair ne faisant qu'augmenter la valeur de  $n$  sans changer la forme de l'équation.

On doit considérer étudier séparément les cas  $n$  pair et  $n$  impair.

$$C_5(3 \cdot 2^n m - 1) = 5 \cdot (3 \cdot 2^n m - 1) + 1 = 5 \cdot 3 \cdot 2^n m - 4 \text{ qui est divisible par 4 et donc } C_5^3(3 \cdot 2^n m - 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} m - 1$$

$$C_5^4(3 \cdot 2^n m - 1) = 5(5 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} m - 1) + 1 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} m - 4 \text{ aussi divisible par 4 et donc } C_5^6(3 \cdot 2^n m - 1) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^{n-4} m - 1$$

.....

**Si  $n$  est pair, on pose  $n=2p$**

$$C_5^{3k}(3 \cdot 2^{2p} m - 1) = 5^k \cdot 3 \cdot 2^{2p-2k} m - 1$$

.....

$$C_5^{3(p-1)}(3 \cdot 2^{2p} m - 1) = 5^p \cdot 3 \cdot 2^{2p-2(p-1)} m - 1 = 5^p \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot m - 12 + 11 = 12 \cdot (5^p \cdot m - 1) + 11$$

Comme  $m$  est impair, alors  $5^p \cdot m - 1$  est impair et  $(5^p \cdot m - 1)/2$  est entier.

Par conséquent  $C_5^{3(p-1)}(3 \cdot 2^{2p} m - 1) = 24 \cdot (5^p \cdot m - 1)/2 + 11$  qui est de la forme  $24K+11$  avec  $K=(5^p \cdot m - 1)/2$  et dont on a démontré plus haut que les suites de la forme  $C_5(24K+11)$  vérifiaient la conjecture de Kakutani. Comme  $C_5(3 \cdot 2^n m - 1)$  avec  $n \equiv 0 [3]$  et  $C_5(24K+11)$  sont confluentes, alors  $C_5(3 \cdot 2^n m - 1)$  avec  $n \equiv 0 [3]$  vérifie également la conjecture

**Si  $n$  est impair, on pose  $n=2p+1$**

$$C_5^{3k}(3 \cdot 2^{2p+1} m - 1) = 5^k \cdot 3 \cdot 2^{2p+1-2k} m - 1$$

.....

$$C_5^{3p}(3 \cdot 2^{2p+1} m - 1) = 5^p \cdot 3 \cdot 2^{2p+1-2p} m - 1 = 5^p \cdot 3 \cdot 2 \cdot m - 6 + 5 = 6 \cdot (5^p \cdot m - 1) + 5$$

Comme  $m$  est impair, alors  $5^p \cdot m - 1$  est impair et  $(5^p \cdot m - 1)/2$  est entier.

Par conséquent  $C_5^{3p}(3 \cdot 2^{2p+1} m - 1) = 12 \cdot (5^p \cdot m - 1)/2 + 5$  qui est de la forme  $12K+5$  avec  $K=(5^p \cdot m - 1)/2$  et dont on a démontré plus haut que les suites de la forme  $C_5(12K+5)$  vérifiaient la conjecture de Kakutani. Comme  $C_5(3 \cdot 2^n m - 1)$  avec  $n$  impair et  $C_5(12K+5)$  sont confluentes, alors  $C_5(3 \cdot 2^n m - 1)$  avec  $n$  impair vérifie également la conjecture.

Nous avons donc bien démontré que toute suite de la forme  $C_5(3 \cdot 2^n m + a)$  pour tout  $a$  impair compris entre  $1$  et  $3 \cdot 2^n - 1$  ou ce qui est équivalent pour tout  $a$  impair compris entre  $-1$  et  $3 \cdot 2^n - 3$ , alors nous pouvons conclure que la conjecture de Kakutani est vérifiée pour tout entier naturel.

### **III.2 – Les suites de Kakutani de la forme $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$**

La démonstration développée au paragraphe précédent s'apparente fortement à celles mises en œuvre pour la conjecture de Collatz et la conjecture  $3x+d$ .

Le problème est que plus l'ensemble des valeurs par lesquelles on peut diviser  $m$  est grand, plus le nombre de cas à tester augmente de manière exponentielle. Nous avons exploré cette voie et avons choisi de vous présenter une approche différente.

Celle-ci est fondée sur le fait que toute sous-suite d'une suite convergente est également convergente.

**L'extension de la conjecture de Kakutani aux suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$  est identique à celle exprimée pour la conjecture de Collatz, à savoir que, toute suite finit par repasser au dessous de sa valeur initiale et corrélativement passe par 1.**

C'est ce que nous allons essayer de démontrer. Mais à la différence du cas précédent, nous n'allons pas tester des classes de nombres de manière systématiques, mais quelques classes sélectionnées avec soin et qui conduiront à une conclusion plus rapide.

**Cette idée est venue du fait que pour passer au-dessous de la valeur initiale au bout de deux itérations, il est nécessaire de pouvoir diviser la valeur obtenue après une itération par un nombre supérieur au coefficient multiplicatif de la suite. Par exemple pour les suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$ , il faut pouvoir diviser par un nombre supérieur à 7.**

Par exemple pour la suite  $C_{7,\{2,3,5\}}(8m+1)$  :

$$C_{7,\{2,3,5\}}(8m+1) = 7(8m+1) + 1 = 56m + 8 \text{ qui est divisible par } 8 \text{ à la deuxième itération}$$

$$C_{7,\{2,3,5\}}^2(8m+1) = (56m + 8)/8 = 7m+1 < 8m+1$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[8m+1]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et donc converge vers 1.**

Mais c'est là que la notion de sous-suite intervient. Nous aurions pu également utiliser la notion de suites confluentes introduite plus haut.

**Théorème :**

Si une suite  $(U_n)$  de valeur initiale  $U_0$  converge, alors toute sous-suite converge.

**Corrolaire :**

Si une suite  $(U_n)$  de valeur initiale  $U_0$  converge, alors la sous-suite commençant par  $U_{n_0}$  converge également.

**En vertu du corollaire ci-dessus, si la suite  $C_{7,\{2,3,5\}}(8m+1)$  satisfait la conjecture de Kakutani, alors la suite  $C_{7,\{2,3,5\}}(7m+1)$  également**

Si nous arrivons à démontrer cela pour l'ensemble des suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(7m+a)$  avec  $a < 7$  alors nous aurons démontré la conjecture de Kakutani pour les suites  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$ .

Nous allons pour cela regarder le comportement des suites  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$  dont le premier terme appartient à l'une des classes de nombres entiers naturels suivants :

$$\{ 10m+7, 12m+5, 20m+17, 30m+17 \text{ et } 60m+17 \}$$

Nous expliquerons plus tard, dans le paragraphe réservé à la démonstration de la conjecture de Kakutani dans le cas général, comment il est possible de construire ces classes de nombres.

**1.5 – Cas de  $C_{7,\{2,3,5\}}(10m+7)$**

$$C_{7,\{2,3,5\}}(10m+7) = 7(10m+7) + 1 = 70m+50 \text{ qui est divisible par 2 et par 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(10m+7) = (70m+50)/10 = 7m+5 < 10m+7$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[10m+7]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+5]$  converge également.**

**1.6 – Cas de  $C_{7,\{2,3,5\}}(12m+5)$**

$$C_{7,\{2,3,5\}}(12m+5) = 7(12m+5) + 1 = 84m+36 \text{ qui est divisible par 4 et par 9, multiples de 2 et 3.}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(12m+5) = (84m+36)/12 = 7m+3 < 12m+5$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[12m+5]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+3]$  converge également.**

**1.7 – Cas de  $C_{7,\{2,3,5\}}(20m+17)$**

$$C_{7,\{2,3,5\}}(20m+17) = 7(20m+17) + 1 = 140m+120 \text{ qui est divisible par 8 et 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(20m+17) = (140m+120)/20 = 7m+6 < 20m+17$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[20m+17]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+6]$  converge également.**

**1.8 – Cas de  $C_{7,\{2,3,5\}}(30m+17)$**

$$C_{7,\{2,3,5\}}(30m+17) = 7(30m+17) + 1 = 210m+120 \text{ qui est divisible par 2, par 3 et par 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(30m+17) = (210m+120)/30 = 7m+4 < 30m+17$$

En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[30m+17]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+4]$  converge également.

### 1.9 – Cas de $C_{7,\{2,3,5\}}(60m+17)$

$C_{7,\{2,3,5\}}(60m+17) = 7(60m+17) + 1 = 420m+120$  qui est divisible par 3, par 4 et par 5

$$C_{7,\{2,3,5\}}^2(60m+17) = (420m+120)/60 = 7m+2 < 60m+17$$

En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[60m+17]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+2]$  converge également.

Nous avons oublié le cas  $7m$  mais qui après une itération abouti à un terme de la forme  $7K+1$ . Nous venons donc de démontrer que toutes suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+a]$  avec  $a < 6$  satisfont la conjecture de Kakutani.

### III.3 - Cas général : Etude des suites de la forme $C_{p_n,\{p_1,\dots,p_{n-1}\}}(m)$

Quelques mots pour répreciser le problème. On considère l'ensemble des  $n$  premiers nombres premiers noté  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$  rangés par ordre croissant :  $p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n$ .

On définit la suite généralisée de Kakutani par :

$$C_{p_n,\{p_1,\dots,p_{n-1}\}}(m) = \begin{cases} m/p_i & \text{si } m \equiv 0 [p_i], p_i < p_n \\ p_n \cdot m + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme précédemment nous adopterons les notations suivantes :  $C_{p_n,\{p_1,\dots,p_{n-1}\}}(m_0)$  est la suite de Kakutani commençant par l'entier  $m_0$  et par  $C_{p_n,\{p_1,\dots,p_{n-1}\}}[m]$  la classe de suites commençant par un nombre de la forme  $m$ .

L'approche présentée dans les premières parties de ce document est trop calculatoire et serait non transposable pour traiter efficacement ce problème. En revanche, celle exposée au paragraphe précédent ouvre une voie intéressante.

En effet, l'idée est d'arriver à démontrer que toutes les suites  $C_{p_n,\{p_1,\dots,p_{n-1}\}}(p_n \cdot m + b)$  quelques soit  $b < p_n$  satisfont la conjecture de Kakutani.

En s'inspirant, de la démonstration précédente, il suffit de trouver un ensemble de classes de nombres qui passent aux dessous de leur valeur initiale au bout de quelques itérations et aboutissent à une des classes de la forme  $p_n \cdot m + b$ .

Nous recherchons donc les valeur de  $X_b$  et  $a_b$  tels que :

$$C_{p_n,\{p_1,\dots,p_{n-1}\}}(X_b \cdot m + a_b) = p_n \cdot (X_b \cdot m + a_b) + 1 = p_n X_b \cdot m + (p_n \cdot a_b + 1)$$

$$\text{et } p_n \cdot a_b + 1 = X_b \cdot b \quad \text{avec } p_n \text{ et } b \text{ premiers entre eux et } b < p_n$$

La seconde égalité peut s'écrire :  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$

Le théorème de Bezout, prouve l'existence d'une solution  $(X_b, -a_b)$  satisfaisant la relation ci-dessus.

Et donne l'ensemble des solutions :

$$a_k = a_b + k \cdot b \quad \text{et } X_{b,k} = X_b + k \cdot p_n, k \text{ entier relatif}$$

Mais il faut trouver une solution tel que  $X_{b,k} > p_n$  et  $X_{b,k}$  est un entier de la forme  $\prod_{i < n} (p_i)^{a_i}$ . Et ce point est loin d'être évident.

L'astuce consiste d'abord à chercher la solution  $(X_{b,k}, a_k)$ , telle que  $0 < X_{b,k} < p_n$  et  $0 < a_k < b$ . Il en existe une et une seule. C'est le reste de la division euclidienne de  $X_{b,k}$  par  $p_n$  lorsque  $X_{b,k} > p_n$ . Nous noterons  $(X_{b,o}, a_{b,o})$  cette solution.

Comme  $X_{b,0} < p_n$ ,  $X_{b,0}$  peut s'exprimer en fonction des  $\{p_i\}_{i < n}$  les  $n-1$  nombres premiers inférieurs à  $p_n$ . Ce point est important car dans les suites de Kakutani définies plus haut, on ne peut diviser un terme de la suite qu'à partir de nombre entier de la forme  $\prod_{i < n} (p_i)^{a_i}$ .

L'inconvénient de cette solution  $X_{b,0}$  est qu'elle n'est pas supérieure  $p_n$ , mais en revanche elle s'exprime bien comme un produits de facteurs qui ne dépendent que des  $n-1$  nombres premiers inférieurs à  $p_n$ . Or pour avoir une chance de passer au dessous de la valeur initiale dans une suite de Kakutani, il est nécessaire de partir de nombres supérieurs à ceux auxquels on veut aboutir après plusieurs itérations.

Peut-on trouver une valeur de  $k$  telle que

$$X_{b,k} = X_{b,0} + k \cdot p_n \text{ soit également de la forme } \prod_{i < n} (p_i)^{c_i} \text{ avec } p_i < p_n$$

En effet en prenant  $k = X_{b,0}$ , on obtient une solution  $X_{b,1} = X_{b,0} + X_{b,0} \cdot p_n = X_{b,0} \cdot (1 + p_n)$

$p_n$  étant premier,  $1 + p_n$  est pair et  $(1 + p_n)/2 < p_n$  et est par conséquent la forme  $\prod_{i < n} (p_i)^{b_i}$ .

Par conséquent vérifie bien les deux conditions requises plus haut :

$$X_{b,1} = X_{b,0} \cdot (1 + p_n) > p_n \text{ et } X_{b,1} = \prod_{i < n} (p_i)^{a_i + b_i}$$

$$\text{Et } a_{b,1} = a_{b,0} + X_{b,0} \cdot b$$

Nous allons reprendre le calcul précédent à partir de la solution  $(X_1, a_1)$

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) = p_n \cdot (X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) + 1 = p_n \cdot X_{b,1} \cdot m + p_n \cdot a_{b,1} + 1$$

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}^2(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) = (p_n \cdot X_{b,1} \cdot m + p_n \cdot a_{b,1} + 1) / X_1 = p_n \cdot m + b < X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}$$

On vient donc de démontrer qu'il était possible de construire pour chaque  $0 < b < p_n$ , un couple d'entiers  $(X_{b,1}, a_{b,1})$  tel que

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}^2(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) = p_n \cdot m + b < X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}$$

Cela permet de conclure que pour tout  $b < p_n$ , la suite  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} [X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}]$  passe au dessous de sa valeur initiale après deux itérations et vérifie la conjecture de Kakutani et qu'étant donné que  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} [X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}]$  et  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} [p_n \cdot m + b]$  sont confluentes, **alors  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} [p_n \cdot m + b]$  vérifient également la conjecture de Kakutani quelque soit  $b < p_n$ .**

Il nous reste à traiter le cas  $b=0$  qui ne peut être résolu par l'approche ci-dessus :

Deux cas de figure :

Soit il existe  $i < n$  tel que  $m \equiv 0 [p_i]$  alors

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m) = p_n \cdot m / p_i < p_n \cdot m$$

Soit quelque soit  $i < n$ ,  $m$  est premier avec  $p_i$

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m) = p_n \cdot (p_n \cdot m) + 1 = p_n^2 \cdot m + 1$$

$p_n^2 \cdot m + 1$  est premier avec  $p_n$ . Donc tous ses diviseurs sont premiers avec  $p_n$ . Donc même si il existe  $k = \prod_{i < n} (p_i)^{a_i}$  qui divise  $p_n^2 \cdot m + 1$ , le résultat est toujours premier avec  $p_n$ . Donc il existe  $b \neq 0$  et  $b < p_n$  tel que  $(p_n^2 \cdot m + 1)/k \equiv b [p_n]$ . Ce qui signifie que ce nombre est de la forme  $p_n \cdot m' + b$  dont on a montré précédemment que toutes les suites de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m' + b)$  vérifiaient la conjecture de Kakutani.

**Donc  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m' + b)$  et  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m)$  étant confluentes,  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m)$  vérifie également la conjecture de Kakutani.**

**En conclusion, nous venons de démontrer que pour toute suite de Kakutani de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m + b)$ , on a réussi à construire une suite de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1})$  qui passe au dessous de sa valeur initiale et qui est confluente avec la suite  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m + b)$ . Ce qui finit de prouver que toutes les suites de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m + b)$  satisfont la conjecture de Kakutani.**

**Nous pouvons remarquer que cela apporte une démonstration plus rapide à la conjecture de Collatz qui est un cas particulier de la conjecture de Kakutani.**

### **III.4 - Application aux cas des conjectures de Collatz $C_{3,\{2\}}(m)$ et de Kakutani $C_{5,\{2,3\}}(m)$ :**

La démonstration développée au paragraphe précédent présente l'intérêt de donner une technique de construction de suites de classes de nombres qui passent toutes au dessous de leur valeurs initiales et qui permettent de toutes les classes de nombre d'une partition de  $N$  vérifient la conjecture concernée et sans avoir besoin d'utiliser le passage à la limite utilisée dans les premières démonstrations de ces conjectures présentées au début.

#### **III.4.1 - Conjecture de Collatz :**

Nous nous proposons de montrer que les familles de suites  $C_{3,\{2\}}(3m)$ ,  $C_{3,\{2\}}(3m+1)$  et  $C_{3,\{2\}}(3m+2)$  vérifient la conjecture de Collatz. Nous allons construire en premier lieu deux familles de nombres qui passent au dessous de leur valeur initiale et sont confluentes respectivement avec  $C_{3,\{2\}}(3m+1)$  et  $C_{3,\{2\}}(3m+2)$ .

##### **Cas $C_{3,\{2\}}(3m+1)$ :**

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 3$  et  $b = 1$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (3, 1)$  dans l'équation précédente :  $X_b - 3 \cdot a_b = 1$  admet une solution évidente  $(X_b, a_b) = (4, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 4$  est bien supérieur à  $p_n = 3$  et est bien uniquement divisible par le seul nombre premier inférieur à 3, c'est-à-dire 2

**Nous retrouvons ce que nous avons vu dans le premier chapitre, que  $C_{3,\{2\}}(4m+1)$  passait après une itération par  $3m+1 < 4m+1$  et que cela suffisait pour conclure que toute suite de la classe  $C_{3,\{2\}}[4m+1]$  vérifiait la conjecture et par confluence,  $C_{3,\{2\}}[3m+1]$  également.**

##### **Cas $C_{3,\{2\}}(3m+2)$ :**

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 3$  et  $b = 2$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (3, 2)$  dans l'équation précédente :  $2 \cdot X_b - 3 \cdot a_b = 1$  on a une solution évidente  $(X_b, a_b) = (2, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 2$  qui est inférieur à  $p_n = 3$ . Comme proposé dans la démonstration générale, nous

$$X_{b,1} = X_b \cdot (1 + p_n) = 2 \cdot (1 + 3) = 8 > p_n \text{ et } a_{b,1} = a_b + X_{b,0} \cdot b = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$X_{b,1} = 8$  est bien supérieur à  $p_n = 3$  et est uniquement divisible par 2 ou une puissance de 2.

$$C_{3,\{2\}}(8m+5) = 3 \cdot (8m+5) + 1 = 24m + 16 \text{ qui est divisible par 8}$$

$$C_{3,\{2\}}^2(8m+5) = (24m + 16)/8 = 3m+2 < 8m+5$$

**Nous obtenons une classes de suites  $C_{3,\{2\}}(8m+5)$  qui passent après une itération par  $3m+2 < 8m+5$  et que cela suffit pour conclure que toute suite de la classe  $C_{3,\{2\}}[8m+5]$  vérifiait la conjecture et par confluence,  $C_{3,\{2\}}[3m+2]$  également.**

### Cas $C_{3,\{2\}}(3m)$ :

L'étude des suites de la forme  $C_{3,\{2\}}(3m)$  passe par deux cas de figure.

$m$  est pair et par conséquent  $3m$  est pair et passe au bout d'une itération au dessous de sa valeur initiale

$m$  est impair. Posons  $m = 2k+1$  alors :

$$C_{3,\{2\}}(3m) = 3(3(2k+1)) + 1 = 18k + 10$$

$$C^2_{3,\{2\}}(3m) = (18k + 10)/2 = 9k + 5 = 3(3k+1) + 2 \text{ de la forme } 3K+2$$

Donc  $C_{3,\{2\}}(3m)$  et  $C_{3,\{2\}}(3K+2)$  avec  $K=(3m-1)/2$  sont confluentes et comme toute suite  $C_{3,\{2\}}(3K+2)$  vérifie la conjecture de Collatz, alors il en est de même pour  $C_{3,\{2\}}(3m)$

Nous venons de démontrer que toutes les suites de la forme  $C_{3,\{2\}}(3m+b)$  avec  $0 \leq b < 3$  vérifient la conjecture de Collatz, alors celle-ci est vérifiée pour tout entier naturel.

### III.4.2 - Conjecture de Kakutani pour les suites $C_{5,\{2,3\}}(m)$ :

Nous nous proposons de montrer que les familles de suites  $C_{5,\{2,3\}}(5m+b)$  pour tout  $b$  tel que  $0 \leq b < 5$  vérifient la conjectures de Kakutani.

Nous allons construire en premier lieu quatre familles de nombres qui passent au-dessous de leur valeur initiale et sont confluentes respectivement avec  $C_{3,\{2\}}(5m+b)$  pour tout  $b$  tel que  $1 \leq b < 5$

#### Cas $C_{3,\{2\}}(5m+1)$ :

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 5$  et  $b = 1$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (5, 1)$  dans l'équation précédente :  $X_b - 5 \cdot a_b = 1$  admet une solution évidente  $(X_b, a_b) = (6, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 6$  est bien supérieur à  $p_n = 5$  et est bien uniquement divisible seulement par les nombres premiers inférieurs à 5, c'est-à-dire 2 et 3.

$$C_{5,\{2,3\}}(6m+1) = 5 \cdot (6m+1) + 1 = 30m + 6 \text{ qui est divisible par 6}$$

$$C^2_{5,\{2,3\}}(6m+1) = (30m + 6)/6 = 5m + 1 < 6m + 1$$

Les suites  $C_{5,\{2,3\}}(6m+1)$  passent après une itération par  $5m+1 < 6m+1$ , et donc au dessous de leur valeur initiale et vérifient donc la conjecture de Kakutani et par confluence,  $C_{5,\{2,3\}}(5m+1)$  également.

#### Cas $C_{3,\{2\}}(5m+2)$ :

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 5$  et  $b = 2$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (5, 2)$  dans l'équation précédente :  $2 \cdot X_b - 5 \cdot a_b = 1$  admet une solution évidente  $(X_b, a_b) = (3, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 3$  est inférieure à  $p_n = 5$ . Comme proposé dans la démonstration générale, nous

$$X_{b,1} = X_b \cdot (1 + p_n) = 3 \cdot (1+5) = 18 > p_n \text{ et } a_{b,1} = a_b + X_{b,0} \cdot b = 1 + 3 \cdot 2 = 7$$

$X_{b,1} = 18$  est bien supérieur à  $p_n = 5$  et est uniquement divisible par 2, 3.

$$C_{5,\{2,3\}}(18m+7) = 5 \cdot (18m+7) + 1 = 90m + 36 \text{ qui est divisible par 18}$$

$$C^2_{5,\{2,3\}}(18m+7) = (90m + 36)/18 = 5m + 2 < 18m + 7$$

**Les suites  $C_{5,\{2,3\}}[18m+7]$  passent après une itération par  $5m+2 < 18m+7$ , et donc au dessous de leur valeur initiale et vérifient donc la conjecture de Kakutani et par confluence,  $C_{5,\{2,3\}}[5m+2]$  également.**

**Cas  $C_{3,\{2\}}(5m+3)$  :**

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 5$  et  $b = 3$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (5, 3)$  dans l'équation précédente :  $3 \cdot X_b - 5 \cdot a_b = 1$  admet une solution évidente  $(X_b, a_b) = (2, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 3$  est inférieure à  $p_n = 5$ . Comme proposé dans la démonstration générale, nous

$$X_{b,1} = X_b \cdot (1 + p_n) = 2 \cdot (1+5) = 12 > p_n \text{ et } a_{b,1} = a_b + X_{b,0} \cdot b = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$X_{b,1} = 12$  est bien supérieur à  $p_n = 5$  et est uniquement divisible par 2, 3.

$$C_{5,\{2,3\}}(12m+7) = 5 \cdot (12m+7) + 1 = 60m + 36 \text{ qui est divisible par 12}$$

$$C^2_{5,\{2,3\}}(12m+7) = (60m + 36)/12 = 5m + 3 < 12m + 7$$

**Les suites  $C_{5,\{2,3\}}[12m+7]$  passent après une itération par  $5m+3 < 12m+7$ , et donc au dessous de leur valeur initiale et vérifient donc la conjecture de Kakutani et par confluence,  $C_{5,\{2,3\}}[5m+3]$  également.**

**Cas  $C_{3,\{2\}}(5m+4)$  :**

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 5$  et  $b = 4$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (5, 4)$  dans l'équation précédente :  $4 \cdot X_b - 5 \cdot a_b = 1$  admet une solution évidente  $(X_b, a_b) = (4, 3)$

Dans le cas présent  $X_b = 4$  est inférieure à  $p_n = 5$ . Comme proposé dans la démonstration générale, nous

$$X_{b,1} = X_b \cdot (1 + p_n) = 4 \cdot (1+5) = 24 > p_n \text{ et } a_{b,1} = a_b + X_{b,0} \cdot b = 3 + 4 \cdot 4 = 19$$

$X_{b,1} = 24$  est bien supérieur à  $p_n = 5$  et est uniquement divisible par 2, 3.

$$C_{5,\{2,3\}}(24m+19) = 5 \cdot (24m+19) + 1 = 120m + 96 \text{ qui est divisible par 24}$$

$$C^2_{5,\{2,3\}}(24m+19) = (120m + 96)/24 = 5m + 4 < 24m + 19$$

**Les suites  $C_{5,\{2,3\}}[24m+19]$  passent après une itération par  $5m+4 < 24m+19$ , et donc au dessous de leur valeur initiale et vérifient donc la conjecture de Kakutani et par confluence,  $C_{5,\{2,3\}}[5m+4]$  également.**

**Cas  $C_{5,\{3,2\}}(5m)$  :**

L'étude des suites de la forme  $C_{3,\{2\}}(3m)$  passe par deux cas de figure.

Si  $m \equiv 0 [2]$  ou  $[3]$  alors  $5m$  est divisible dès la première itération et passe au-dessous de sa valeur initiale

Sinon  $m$  est premier avec 2 et 3 :  $C_{5,\{2,3\}}(5m) = 5(5m) + 1$  de la forme  $5K+1$

**Donc  $C_{5,\{2,3\}}(5m)$  et  $C_{5,\{2,3\}}(5K+1)$  avec  $K=5m$  sont confluentes et comme toute suite  $C_{5,\{2,3\}}(5K+1)$  vérifie la conjecture de Kakutani, alors il en est de même pour  $C_{5,\{2,3\}}(5m)$ .**

**Cela achève de démontrer la conjecture de Kakutani pour les suites  $C_{5,\{2,3\}}[m]$ .**

### III.5 - Généralisation aux suites de la forme $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m)$

Ces suites sont une autre forme de généralisation des suites de Kakutani.

On considère l'ensemble des  $n$  premiers nombres premiers noté  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$  rangés par ordre croissant :  $p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n$  premier et d'un entier premier avec les  $\{p_i, i \leq n\}$  noté  $q$ .

On définit la suite généralisée de Kakutani par :

$$C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m) = \begin{cases} m/p_i & \text{si } m \equiv 0 [p_i], p_i < p_n \\ p_n \cdot m + q & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme précédemment nous adopterons les notations suivantes :  $C_{\{p_n, d\}, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m_0)$  est la suite de Kakutani commençant par l'entier  $m_0$  et par  $C_{\{p_n, d\}, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}[m]$  la classe de suites commençant par un nombre de la forme  $m$ .

L'approche présentée dans les premières parties de ce document est trop calculatoire et serait non transposable pour traiter efficacement ce problème. En revanche, celle exposée au paragraphe précédent ouvre une voie intéressante.

**En effet, l'idée est d'arriver à démontrer que toutes les suites  $C_{\{p_n, d\}, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$  quelques soit  $b < p_n$  satisfont la conjecture de Kakutani.**

En s'inspirant, de la démonstration précédente, il suffit de trouver un ensemble de classes de nombres qui passent aux dessous de leur valeur initiale au bout de quelques itérations et aboutissent à une des classes de la forme  $p_n \cdot m + b$ .

Nous recherchons donc les valeur de  $X_b$  et  $a_b$  tels que :

$$C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(X_b \cdot m + a_b) = p_n \cdot (X_b \cdot m + a_b) + q = p_n X_b \cdot m + (p_n \cdot a_b + q)$$

$$\text{et } p_n \cdot a_b + q = X_b \cdot b \quad \text{avec } p_n \text{ et } b \text{ premiers entre eux et } b < p_n$$

La seconde égalité peut s'écrire :  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = q$

En s'inspirant de la démonstration faite dans le cas  $q=1$ , il suffit de partir d'une solution de l'équation ci-dessus avec  $q=1$  que l'on notera  $(X'_b, a'_b)$ . Alors  $(q \cdot X'_b, q \cdot a'_b)$  est solution de l'équation ci-dessus. Nous noterons  $(X_b, a_b)$  cette solution.

Et l'ensemble des solutions est donné par :

$$a_k = a_b + k \cdot b) \quad \text{et } X_{b,k} = X_b + k \cdot p_n, \quad k \text{ entier relatif}$$

**Mais il faut trouver une solution tel que  $X_{b,k} > p_n$  et  $X_{b,k}$  est un entier de la forme  $\prod_{i < n} (p_i)^{a_i}$ .**

L'astuce consiste comme précédemment à chercher la solution  $(X_{b,k}, a_k)$ , telle que  $0 < X_{b,k} < p_n$  et  $0 < a_k < b$ . Il en existe une et une seule. C'est le reste de la division euclidienne de  $X_{b,k}$  par  $p_n$  lorsque  $X_{b,k} > p_n$ . Nous noterons  $(X_{b,o}, a_{b,o})$  cette solution.

Comme  $X_{b,o} < p_n$ ,  $X_{b,o}$  peut s'exprimer en fonction des  $\{p_i\}_{i < n}$  les  $n-1$  nombres premiers inférieurs à  $p_n$ . Ce point est important car dans les suites de Kakutani définies plus haut, on ne peut diviser un terme de la suite qu'à partir de nombre entier de la forme  $\prod_{i < n} (p_i)^{a_i}$ .

L'inconvénient de cette solution  $X_{b,o}$  est qu'elle n'est pas supérieure  $p_n$ , mais en revanche elle s'exprime bien comme un produits de facteurs qui ne dépendent que des  $n-1$  nombres premiers inférieurs à  $p_n$ . Or pour avoir une chance de passer au dessous de la valeur initiale dans une suite de Kakutani, il est nécessaire de partir de nombres supérieurs à ceux auxquels on veut aboutir après plusieurs itérations.

Peut-on trouver une valeur de  $k$  telle que

$$X_{b,k} = X_{b,0} + k \cdot p_n \text{ soit également de la forme } \prod_{i < n} (p_i)^{c_i} \text{ avec } p_i < p_n$$

En effet en prenant  $k = X_{b,0}$ , on obtient une solution  $X_{b,1} = X_{b,0} + X_{b,0} \cdot p_n = X_{b,0} \cdot (1 + p_n)$

$p_n$  étant premier,  $1 + p_n$  est pair et  $(1 + p_n)/2 < p_n$  et est par conséquent la forme  $\prod_{i < n} (p_i)^{b_i}$ .

Par conséquent vérifie bien les deux conditions requises plus haut :

$$X_{b,1} = X_{b,0} \cdot (1 + p_n) > p_n \text{ et } X_{b,1} = \prod_{i < n} (p_i)^{a_i + b_i}$$

$$\text{Et } a_{b,1} = a_{b,0} + X_{b,0} \cdot b$$

Nous allons reprendre le calcul précédent à partir de la solution  $(X_{b,1}, a_{b,1})$

$$C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) = p_n \cdot (X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) + q = p_n \cdot X_{b,1} \cdot m + p_n \cdot a_{b,1} + q$$

$$C^2_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) = (p_n \cdot X_{b,1} \cdot m + p_n \cdot a_{b,1} + q) / X_{b,1} = p_n \cdot m + b < X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}$$

On vient donc de démontrer qu'il était possible de construire pour chaque  $0 < b < p_n$ , un couple d'entiers  $(X_{b,1}, a_{b,1})$  tel que

$$C^2_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}) = p_n \cdot m + b < X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}$$

Cela permet de conclure que pour tout  $b < p_n$ , la suite  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}[X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}]$  passe au dessous de sa valeur initiale après deux itérations et vérifie la conjecture de Kakutani et qu'étant donné que  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}[X_{b,1} \cdot m + a_{b,1}]$  et  $C^2_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}[p_n \cdot m + b]$  sont confluentes, **alors  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}[p_n \cdot m + b]$  vérifient également la conjecture de Kakutani quelque soit  $b < p_n$ .**

Il nous reste à traiter le cas  $b=0$  qui ne peut être résolu par l'approche ci-dessus :

Deux cas de figure :

Soit il existe  $i < n$  tel que  $m \equiv 0 [p_i]$  alors

$$C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m) = p_n \cdot m / p_i < p_n \cdot m$$

Soit quelque soit  $i < n$ ,  $m$  est premier avec  $p_i$

$$C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m) = p_n \cdot (p_n \cdot m) + q = p_n^2 \cdot m + q$$

$p_n^2 \cdot m + q$  est premier avec  $p_n$ . Donc tous ses diviseurs sont premiers avec  $p_n$ . Donc même si il existe  $k = \prod_{i < n} (p_i)^{a_i}$  qui divise  $p_n^2 \cdot m + 1$ , le résultat est toujours premier avec  $p_n$ . Donc il existe  $b \neq 0$  et  $b < p_n$  tel que  $(p_n^2 \cdot m + q)/k \equiv b [p_n]$ . Ce qui signifie que ce nombre est de la forme  $p_n \cdot m' + b$  dont on a montré précédemment que toutes les suites de la forme  $C^2_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m' + b)$  vérifiaient la conjecture de Kakutani.

**Donc  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m' + b)$  et  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m)$  étant confluentes,  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m)$  vérifie également la conjecture de Kakutani.**

**En conclusion, nous venons de démontrer que pour toute suite de Kakutani de la forme  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m + b)$ , on a réussi à construire une suite de la forme  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(X_{b,1} \cdot m + a_{b,1})$  qui passe au dessous de sa valeur initiale et qui est confluyente avec la suite  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m + b)$ . Ce qui finit de prouver que toutes les suites de la forme  $C_{\{p_n, q\}, \{p_1, \dots, p(n-1)\}}(p_n \cdot m + b)$  satisfont la conjecture de Kakutani.**

### **Application au cas des suites $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(m)$ ou problème $3x+5$ :**

Nous nous proposons de montrer que les familles de suites  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m)$ ,  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m+1)$  et  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m+2)$  vérifient la conjecture de Collatz pour les suites  $3x+5$  en utilisant l'approche mise en œuvre pour les suites de Kakutani.

Nous allons construire en premier lieu deux familles de nombres qui passent au dessous de leur valeur initiale et sont confluentes respectivement avec  $C_{3, \{2\}}(3m+1)$  et  $C_{3, \{2\}}(3m+2)$ .

#### **Cas $C_{3, \{2\}}(3m+1)$ :**

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 3$  et  $b = 1$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 5$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (3, 1)$  dans l'équation précédente :  $X_b - 3 \cdot a_b = 5$  admet une solution évidente  $(X_b, a_b) = (8, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 8$  est bien supérieur à  $p_n = 3$  et est bien uniquement divisible par le seul nombre premier inférieur à 3, c'est-à-dire 2.

$$C_{\{3, 5\}, \{2\}}(8m+1) = 3 \cdot (8m+1) + 5 = 24m + 8 \text{ qui est divisible par } 8$$

$$C_{\{3, 5\}, \{2\}}^2(8m+1) = (24m + 8)/8 = 3m+1 < 8m+1$$

Nous avons montré que  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(8m+1)$  passait après deux itérations par  $3m+1 < 8m+1$  et que cela suffisait pour conclure que toute suite de la classe  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}[8m+1]$  vérifiait la conjecture et par confluence,  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}[3m+1]$  également.

#### **Cas $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m+2)$ :**

En adoptant la notation du § précédent, on pose  $p_n = 3$  et  $b = 2$ , nous devons trouver un couple d'entiers  $(X_b, a_b)$  tel que  $X_b \cdot b + (-a_b) \cdot p_n = 1$ .

En remplaçant  $(p_n, b) = (3, 2)$  dans l'équation précédente :  $2 \cdot X_b - 3 \cdot a_b = 1$  on a une solution évidente  $(X_b, a_b) = (4, 1)$

Dans le cas présent  $X_b = 4$  qui est supérieur à  $p_n = 3$  et est bien uniquement divisible par le seul nombre premier inférieur à 3, c'est-à-dire 2.

$$C_{\{3, 5\}, \{2\}}(4m+1) = 3 \cdot (4m+1) + 5 = 12m + 8 \text{ qui est divisible par } 4$$

$$C_{\{3, 5\}, \{2\}}^2(4m+1) = (12m + 8)/4 = 3m+2 < 4m+1$$

Nous obtenons une classes de suites  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(4m+1)$  qui passent après deux itérations par  $3m+2 < 4m+1$  et cela suffit pour conclure que toute suite de la classe  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}[4m+1]$  vérifie la conjecture et par confluence,  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}[3m+2]$  également.

#### **Cas $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m)$ :**

L'étude des suites de la forme  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m)$  passe par deux cas de figure.

$m$  est pair et par conséquent  $3m$  est pair et passe au bout d'une itération au dessous de sa valeur initiale

$m$  est impair. Posons  $m = 2k+1$  alors :

$$C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m) = 3(3(2k+1)) + 5 = 18k + 14$$

$$C_{\{3, 5\}, \{2\}}^2(3m) = (18k + 14)/2 = 9k + 7 = 3(3k+2) + 1 \text{ de la forme } 3K+1$$

Donc les suites  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3m)$  et  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}(3K+1)$  avec  $K=(3m-1)/2$  sont confluentes et comme toute suite  $C_{\{3, 5\}, \{2\}}[3K+1]$  vérifient la conjecture de Collatz, alors il en est de même pour  $C_{3, \{2\}}(3m)$

**Nous venons de démontrer que toutes les suites de la forme  $C_{3, \{2\}}(3m+b)$  avec  $0 \leq b < 3$  vérifient la conjecture de Collatz, alors celle-ci est vérifiée pour tout entier naturel.**

**Bibliographie :**

[1] T. Oliveira e SILVA, Empirical verification of the  $3x+1$  problem and related conjectures. In J. LAGARIAS, éditeur, *the Ultimate Challenge : The  $3x+1$  Problem*, pages 189-207. Providence : American Mathematical Society, 2010.

[2] L. O. POCHON, A. FAVRE. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. 2017. Hal-01593181

[3] J. LAGARIAS, The set of rational cycles for  $3x+1$  problem, *Acta Arithmetica*, 56 (1): 33-53. 1990.