



**HAL**  
open science

# Eléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani

Lionel Laurore

► **To cite this version:**

Lionel Laurore. Eléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani. 2019. hal-02336166v1

**HAL Id: hal-02336166**

**<https://hal.science/hal-02336166v1>**

Preprint submitted on 28 Oct 2019 (v1), last revised 1 Dec 2019 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Éléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani

Lionel Laurore – 15 Octobre 2019

## Résumé :

En 1928, Lothar Collatz, qui s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers posa le problème  $3m+1$ . Appelé aussi suite de Syracuse, cela consiste à étudier le comportement de suite définie par ;

$$U_0 = N \text{ entier naturel} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \begin{cases} U_n/2 \\ 3 U_n + 1 \end{cases}$$

La conjecture affirme que pour tout N entier positif, il existe n tel que  $U_n = 1$

De nombreuses tentatives de démonstrations ont été réalisées ainsi que des travaux connexes à ce problème sans pour autant arriver à une démonstration probante, des résultats partiels ont été obtenus et des pistes intéressantes explorer sans pour autant pousser les investigations jusqu'à leur terme. Paul Erdos disait que les mathématiques n'étaient pas encore prêtes pour résoudre un tel problème.

Des résultats cependant intéressants ont été obtenus, comme celui montrant que la conjecture de Collatz pouvait se ramener à démontrer que toute suite de Syracuse finit par redescendre au dessous de son point de départ et que les cas  $U_0$  pair ou  $U_0 = 4m + 1$  satisfaisaient bien la conjecture, et cela par une simple démonstration par récurrence.

**Notre approche se résume donc à démontrer que toute suite de Syracuse finit par passer au dessous de son point de départ en utilisant un raisonnement par récurrence forte et pour les cas qui résistent à ce point, de démontrer, en introduisant une notion de « suites confluentes », que toute suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme  $4m+3$  finit par croiser une suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme  $4m+1$  et que ces deux suites suivent la même trajectoire à partir de ce point de confluence.**

Nous montrerons dans une seconde partie, que cette approche permet également de résoudre la conjecture de **Kakutani** exposé par Oliveira (2010, [1]), qui est une généralisation de la conjecture de collatz et qui s'exprime ainsi :

$$C_{p,D}(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 [d], d \text{ appartient à } D \\ pm + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$C_{3,\{2\}}(m)$  est la fonction de Collatz.

## Notations :

Nous reprendrons dans le présent papier les notations fonctionnelles adoptées par Luc Olivier Pochon et Alain Favre (2017, [2]) dans leur excellent travail de synthèse de l'ensemble des travaux réalisés sur ce sujet.

On considère la fonction définie sur les entiers positifs :

$$C(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ pair} \\ 3m + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La conjecture se traduit alors par l'existence d'un entier  $n$  tel que  $C^n(m)=1$

Il est possible de condenser l'étude de ces suites en adoptant les notations suivantes proposée par Lagarias (1990, [3]) :

Soit  $T_d$  la fonction définie par :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ pair} \\ (3m + d)/2 & \text{d premier avec 6, sinon} \end{cases}$$

$(3m + d)/2$  est bien entier car pour  $m$  impair,  $3m + d$  est pair.  $T_1(m)$  une formulation condensée des suites de Syracuse. Dans la suite, nous adopterons la notation  $T(m)$  pour  $T_1(m)$ .

Par exemple :

Pour  $m = 7$ , la suite  $C$  donne ( 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 ...)

Pour  $m= 7$ , la suite  $T$  donne ( 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1 ...)

Nous appellerons  $S(U_0)$ , la suite de Syracuse commençant par  $U_0$ , ainsi que par **S[U<sub>0</sub>]**, les suites de Syracuse commençant par un nombre appartenant à une partition de **N**, ensemble des entiers naturels. Par exemple,  $S[2k]$  est l'ensemble des suites de Syracuse commençant par un nombre impair.

## Principaux résultats :

Parmi les résultats principaux que l'on trouve dans la littérature :

**La conjecture de Collatz peut se ramener à une conjecture de temps d'arrêt fini, exprimée ainsi, toute trajectoire finit par repasser au dessous de son point de départ. Cela est équivalent à la conjecture primitive.** Une démonstration en utilisant une descente infinie permet d'en faire la preuve :

En effet, si on suppose que toute suite de Syracuse finit par passer par 1, alors toute suite finit bien par passer au dessous de son point de départ. Ce point est trivial.

La réciproque fait appel à un processus de descente infinie. En effet si on considère un entier positif  $U_0$ , En vertu du fait que toute suite de Syracuse repasse au-dessous de son point de départ :

il existe  $n_0$  tel que  $T^{n_0}(U_0) < U_0$ . En appliquant à  $T^{n_0}(U_0)$

le même raisonnement appliqué à  $T^{n_0}(U_0)$  permet d'affirmer :

il existe un entier position  $n_1$  tel que  $T^{n_1}(T^{n_0}(U_0)) < T^{n_0}(U_0)$ .

En itérant cette opération, on construit une suite d'entiers strictement non nuls, strictement décroissante. Sa limite est nécessairement 1.

**Oliveira (2010, [1]) a montré que tout entier  $U_0 < 5 \times 2^{60}$ ,  $S(U_0)$  vérifiait la conjecture de Collatz**

**Outre les nombres pairs, dans une série de tests numériques systématiques il est inutile de tester les nombres de la forme  $4m + 1$ , car on démontre aisément que toute les suites de Syracuse de la classe  $S[4m+1]$  finissent par passer au dessous de leur point de départ.** Cela sera redémontré plus bas.

A partir de ces quelques résultats nous disposons de toutes les briques nécessaires pour dérouler notre démonstration.

### **Démonstration :**

Dans notre démonstration nous utiliserons le principe de récurrence forte.

A la différence du raisonnement par récurrence simple qui se contente de vérifier qu'une propriété est vraie pour  $n=0$  ou 1 et ensuite de supposer qu'elle est vraie pour  $n$  et de démontrer qu'elle est vraie pour  $n+1$ , le principe de récurrence forte consiste à vérifier également que la propriété est vraie pour  $n=0$  ou 1 et à supposer qu'elle est vraie pour tout entier  $k$  inférieur ou égal à  $n$  et d'en déduire qu'elle est vraie pour  $n+1$

Dans le cas présent, Oliveira ayant numériquement vérifié que la suite de Syracuse convergeait vers 1 pour tout entier inférieur ou égal à  $5 \times 2^{60}$ , on est plutôt tranquille sur le fait que les premiers entiers vérifient bien la conjecture de Collatz.

Si on suppose la conjecture de Collatz est vraie pour tout  $k$  inférieur ou égal à  $n$ , le fait de démontrer qu'une suite de Syracuse démarrant par  $n+1$ , convergera vers 1 à la condition de repasser à un moment sous sa valeur de départ.

Donc notre problème se ramène bien à démontrer que toute suite repasse au dessous de son point de départ.

Pour les nombres pairs, la démonstration est triviale :

$$\text{Si } m = 2k \text{ alors } T(m) = m/2 = k < m$$

**donc  $T(m) < m$  quelques soit  $m$  appartenant à  $\mathbf{N}$**

**Ce qui s'exprime en disant que toutes les suites de Syracuse de la classe  $S[4m]$  passent après une seule itération au dessous de leur valeur initiale et par conséquent satisfont la conjecture de Collatz.**

Pour ceux qui ont encore un doute sur cette conclusion, il suffit d'admettre que l'étude des suites commençant par un nombre pair se ramène à étudier celles qui commencent par un nombre impair.

Pour les nombres impairs :

Si  $m = 2k + 1$  alors  $T(m) = (6k + 4)/2 = 3k + 1$  Ce qui ne permet pas de statuer

En effet si  $k$  est impair alors  $3k + 1$  est pair et dans ce cas on peut re-diviser par 2 et tomber sur un nombre  $T^2(m) = (3k + 1)/2$  inférieur à  $2k + 1$  ce qui est satisfaisant, en revanche si  $k$  est pair, on arrive de nouveau sur une impasse. Impasse, le mot est fort. Il serait plus juste de dire bifurcation. **En réalité, cela préfigure les grandes lignes de notre démonstration qui consiste à étudier une décomposition des nombres entiers naturels sous la forme  $2^k m + a$  ou  $a$  est impair et est compris entre 1 et  $2^k - 1$ .**

En effet, commençons par examiner une première décomposition des nombres impairs en deux classes modulo 4 :  $4m + 1$  et  $4m + 3$

$$T(4m+1) = (12m + 4)/2 = 6m+2$$

$$T^2(4m+1) = T(6m+2) = (6m+2)/2 = 3m+1$$

**Donc  $T^2(4m+1) = 3m+1 < 4m+1$  quelque soit  $m$  appartenant à  $\mathbf{N}$**

**Ce qui s'exprime en disant que toutes les suites de Syracuse de la classe  $S[4m+1]$  passent après une seule itération au dessous de leur valeur initiale et par conséquent satisfont la conjecture de Collatz.**

Résultat déjà démontré dans la littérature et admis

En revanche

$$T(4m+3) = (12m+10)/2 = 6m+5$$

et  $T(6m+5) = (18m+16)/2 = 9m+8$  pour lequel on ne peut pas statuer.

Il nous faut donc regarder la décomposition de  $4m + 3$  selon que  $m$  est pair ou impair, ce qui revient à étudier les nombres de la forme  $8m+3$  et  $8m+7$

$$T(8m+3) = (24m+10)/2 = 12m+5$$

$$T^2(8m+3) = T(12m+5) = (36m+16)/2 = 18m+8$$

$$T^2(8m+3) = T(18m + 8) = 9m + 4$$
 qui n'est pas inférieur à  $8m + 3$

mais comme dans le cas des nombres impairs, on voit que pour  $m$  pair,  $9m+4$  serait pair et donc divisible par 2 à la prochaine itération et passerait ainsi au dessous de la valeur de départ  $8m+3$ . Une voie de démonstration, serait donc de poursuivre en regardant une décomposition des entiers naturels sous la forme  $16m + a$ , avec  $a = 3, 7, 11, 15$ .

Nous avons exploré cette option, qui conduit à montrer que les suites de Syracuse de la classe  $S[16m+3]$  passent bien au dessous de leur valeur initiale, alors que celles pour lesquelles  $a = 7, 11, 13$  résistent, à ce stade, au raisonnement par récurrence. Le seul raisonnement par récurrence ne nous est donc d'aucun secours dans ces situations car nous ne repassons pas au dessous de la trajectoire. Nous avons testé tous les cas jusqu'aux nombres de la forme  $2^{12} + a$  et le nombre de valeurs de  $a$  résistant au raisonnement par récurrence explose de manière exponentielle, bien que diminuant en pourcentage.

**Mais une chose est passée inaperçue. Nous avons précédemment démontré que les suites de Syracuse de la classe  $S[4m+1]$  satisfont la conjecture de Collatz. Si nous arrivons à montrer que quelque soit  $U_0$ , la suite contient au moins un nombre de la forme  $4m + 1$ , alors elle convergera vers 1.**

Pour cela nous allons introduire une nouvelle notion formelle, celle de « **suites confluentes** ».

**Définition :**

**Soit deux suites  $(U_n)$  et  $(V_m)$ . On dira que  $(U_n)$  et  $(V_m)$  sont confluentes, si et seulement si il existe deux entiers naturels  $n_0$  et  $m_0$ , tel que pour tout entier  $k$  positif,  $U_{n_0+k} = V_{m_0+k}$**

**Théorème**

**Soit deux suites  $U_n$  et  $V_m$  satisfaisant à la même relation de récurrence  $F$ , et ne différant que par leur premier terme  $U_0$  et  $V_0$ . Si il existe deux entiers positifs  $n_0$  et  $m_0$ , tels que  $U_{n_0} = V_{m_0}$ , alors  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont 2 suites confluentes. De plus si l'une des deux est convergente ( resp. divergente), l'autre le sera également.**

La démonstration est assez simple. On sait par définition que  $U_{n_0} = V_{m_0}$ . En appliquant la relation de récurrence à cette égalité, on a :

$$U_{n_0+1} = F(U_{n_0}) = F(V_{m_0}) = V_{m_0+1}$$

En iterant,  $k-1$  fois cette operation on montre bien que :

$$U_{n_0+k} = V_{m_0+k}$$

**Etant donné que toutes les suite de Syracuse  $S[4m+1]$  sont convergentes, il suffit de démontrer que toutes les suites de Syracuse de  $S[4m + 3]$  sont confluentes avec une suite de Syracuse de la classe  $S[4m+1]$ , pour que cette dernière soit également convergente.**

C est ce que nous allons nous allons démontrer dans ce qui suit.

Reprenons le cas des suites de la forme  $S[8m + 3]$  qui représente un sous-ensemble de  $S[4m + 3]$ :

$$T(8m + 3) = 12m + 5 = 12m + 4 + 1 = 4(3m+1) + 1 \text{ qui est bien un nombre de la forme } 4k + 1$$

**En vertu de ce qui est dit précédemment  $S(8m+3)$  et  $S(4k+1)$  avec  $k=3m+1$  sont confluentes, par conséquent  $S(8m+3)$  satisfait la conjecture de Collatz**

Il reste à étudier les suites de la classe  $S[8m + 7]$  :

$$T(8m+7) = (24m+22)/2 = 12m+11 \text{ qui est de la forme } 4k+3 \text{ et donc ne permet pas de conclure}$$

Cela nous amène à la même bifurcation que le cas  $4m + 3$ , à savoir , étudier les suites de Syracuse des classes  $S[16m + 7]$  et  $S[16m + 15]$ .

$$T(16m + 7) = 24m + 11 \text{ et } T(24m + 11) = 36m + 17 = 4(9m + 4) + 1 \text{ bien de la forme } 4k + 1$$

**Par conséquent,  $S(16m+7)$  et  $S(4k+1)$  avec  $k=9m+4$  sont confluentes et par conséquent toutes les suites de la classe  $S[16m+7]$  satisfont la conjecture de Collatz.**

En revanche le même calcul appliqué à  $16m + 15$  ne permet pas de conclure .

A ce stade de la démonstration, nous pouvons remarquer qu'aux étapes successives, nous démontrons que les classes  $S[4m+1]$ ,  $S[8m+3]$ ,  $S[16m+7]$  vérifient la conjecture, mais que les classes  $S[4m+3]$ ,  $S[8m+7]$ ,  $S[16m+15]$ . Nous remarquons également que le pourcentage de classes de suites qui résistent à la démonstration, diminuent.  $1/4$  pour les classes modulo 4,  $1/8$  pour les classes modulo 8,  $1/16$  pour les classes modulo 16.

## Cas général

De manière plus générale, cela conduit à étudier les suites de Syracuse de la forme  $S[2^k m + 2^k - 1]$  qui sont les seules suites de Syracuse de la forme  $S[2^k m + a]$ , pour lesquelles on ne peut pas conclure, sans passer à la puissance de 2 supérieure.

C'est ce que nous allons démontrer maintenant par récurrence sur  $k$  :

Par récurrence on suppose que le seul cas sur lequel on ne peut pas statuer dans une décomposition sous la forme  $2^k m + a$ , est le cas  $a = 2^k - 1$ , qui représente 1 cas sur  $2^k$ . Et nous allons démontrer que pour les nombres de la forme  $2^{k+1} m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^{k+1} - 1$ , seul le cas  $a = 2^{k+1} - 1$  n'était pas résolu, soit 1 cas sur  $2^{k+1}$ .

En effet, posons  $N = 2^k m + 2^k - 1$ . Suivant la parité de  $m$ , ce nombre peut s'exprimer de deux façons

$$N1 = 2^k \cdot 2n + 2^k - 1 = 2^{k+1} n + 2^k - 1 \text{ si on pose } m = 2n$$

$$N2 = 2^k \cdot (2n+1) + 2^k - 1 = 2^{k+1} n + 2^{k+1} - 1 \text{ si on pose } m = 2n+1$$

Nous allons montrer que la suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme  $N1$  va toujours croiser un nombre de la forme  $4k + 1$  et par conséquent sera convergente vers 1 et que le seul cas où on ne pourra toujours pas statuer est le nombre de la forme  $N2$ .

$$T(N1) = (3(2^{k+1} n + 2^k - 1) + 1) / 2 = 3 \cdot 2^k n + 3 \cdot 2^{k-1} - 1$$

$$T^2(N1) = 3^2 \cdot 2^{k-1} n + 3^2 \cdot 2^{k-2} - 1$$

.....

$$T^{k-1}(N1) = 3^{k-1} \cdot 2^2 n + 3^{k-1} \cdot 2 - 1 = 3^{k-1} \cdot 2^2 n + 3^{k-1} \cdot 2 - 2 + 1 = 3^{k-1} \cdot 2^2 n + 2 \cdot (3^{k-1} - 1) + 1$$

Or  $3^{k-1} - 1$  est pair donc

$$T^{k-1}(N1) = 4 (3^{k-1} n + (3^{k-1} - 1) / 2) + 1 \text{ qui est bien de la forme } 4k + 1 \text{ donc satisfait la conjecture}$$

En conclusion, aussi grand soit le nombre  $k$ , dans une décomposition des nombres entiers naturels sous la forme  $2^k m + a$  où  $a$  est compris entre 1 et  $2^k - 1$ , il existe une seule valeur de  $a$  pour laquelle on ne peut pas statuer.

**Par passage à la limite, quand  $k$  tend vers l'infini, la proportion de cas où la conjecture de Collatz est démontrée dans une décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^k m + a$  tend vers 1.**

**En démontrant que toute suite de Syracuse finit par repasser au dessous de son point de départ, ce qui est équivalent de dire qu'elles finissent toutes par passer par 1, cela élimine toute possibilité qu'une suite de Syracuse diverge ou finisse par un cycle non trivial.**

## Démonstration alternative de la conjecture de Collatz

Nous allons présenter dans cette partie une démonstration de la conjecture de Collatz qui ne nécessite pas d'utiliser un passage à la limite comme précédemment. Nous ne l'avons pas présentée en premier, car dans notre travail, elle a été mise en œuvre pour démontrer le cas général de la conjecture de Kakutani, à la fin de cet article.

Nous conservons les idées principales sur lesquelles a été fondé toute notre démarche, à savoir :

- **l'utilisation d'un raisonnement par récurrence forte**
- **les propriétés des suites confluentes introduites précédemment**

En revanche, le lecteur pourra se reporter à la démonstration en fin d'article pour comprendre comment nous construisons et privilégions les classes de suites qui nous permettent d'aboutir à une conclusion rapide.

Comme nous nous intéressons au problème  $3x+1$ , nous allons essayer de montrer que toutes les suites  $S[3m+a]$  avec  $a = 0, 1$  ou  $2$ , satisfont la conjecture de Collatz.

Nous allons successivement montrer que  $S[3m+1]$ ,  $S[3m+2]$  et  $S[3m]$  vérifient la conjecture. Pour cela nous allons partir de classes de suites, qui repassent au bout d'une itération au dessous de leur valeur initiale et qui par conséquent satisfont la conjecture et utiliser le fait que ces suites sont confluentes avec l'une des trois classes  $S[3m+1]$ ,  $S[3m+2]$  et  $S[3m]$ .

### Cas $S[3m+1]$

Rappelons nous la classe de suite  $S[4m+1]$ .

$$T(4m+1) = (3 \cdot (4m+1) + 1) / 2 = (12m+4) / 2 = 6m+2$$

$$\text{et } T^2(4m+1) = 3m+1 < 4m+1$$

**qui confirme que  $S(4m+1)$  repasse au dessous de sa valeur initiale et vérifie donc la conjecture et comme  $S(4m+1)$  et  $S(3m+1)$  sont confluentes, alors  $S(3m+1)$  satisfait bien la conjecture de Collatz.**

### Cas $S[3m+2]$

Nous allons étudier le comportement des suites  $S[5m+3]$ . Nous n'indiquerons pas ici comment nous sommes arrivés à sélectionner ces suites, ce point étant détaillé dans la démonstration de la conjecture de Kakutani généralisée.

$$T(8m+5) = (3 \cdot (8m+5) + 1) / 2 = (24m+16) / 2 = 12m+8$$

$$\text{et } T^3(4m+1) = (12m+8) / 4 = 3m+2 < 8m+5$$

**qui confirme que  $S(8m+5)$  repasse au dessous de sa valeur initiale et vérifie donc la conjecture et comme  $S(8m+5)$  et  $S(3m+2)$  sont confluentes, alors  $S(3m+2)$  satisfait bien la conjecture de Collatz.**

### Cas $S[3m]$

Ce cas est le plus simple. Si  $m$  pair, on divise par 2 et on repasse immédiatement au dessous de la valeur initiale.

Si  $m$  est impair, on pose  $m=2k+1$



$$T(3(2k+1)) = (3 \cdot (6k+1) + 1)/2 = (18m+4)/2 = 9m+2 = 3(3m)+2$$

$S(3m)$  est confluente avec la suite  $S(3K+2)$  avec  $K=3m$ , dont nous venons de montrer qu'elle satisfaisait la conjecture. Comme, de plus,  $S(3m)$  et  $S(3K+2)$  sont confluentes, alors  $S(3m)$  vérifie également la conjecture de Collatz.

Ayant démontré que toutes les suites de la forme  $S[3m+a]$  avec  $a = 0, 1$  ou  $2$  satisfaisaient la conjecture de Collatz, alors nous pouvons affirmer avoir démontré pour tout entier naturel, la conjecture de Collatz

## Généralisation au problème $3x + d$

Les idées mises en œuvre pour démontrer la conjecture de Collatz peuvent s'appliquer à une question plus générale qui est le cas des suites de Syracuse de la forme  $3m + d$  avec  $d$  premier avec 6

On peut l'exprimer de la manière suivante :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ pair} \\ (3m + d)/2 & \text{d premier avec 6, sinon} \end{cases}$$

La principale différence avec la conjecture de Collatz, est que nous pouvons rencontrer des cycles différents du cycle trivial (passant par 1). En conséquence nous n'allons démontrer que toute suite de la forme  $3m+d$  passe soit par 1 soit par un cycle dont le minimum est différent de 1.

Cela revient à formuler la conjecture du problème  $3m+d$  de la manière suivante :

**Toute suite  $3m+d$  finit par passer au dessous de sa valeur de départ ou à retomber sur sa valeur de départ.**

**Le fait d'accepter qu'une suite repasse par sa valeur initiale autorise, à la différence du paragraphe précédente, l'existence de cycles non triviaux.**

Nous adopterons, comme aux paragraphes précédents, les notations suivantes.  $T_d(n)$  représentera la suite commençant par l'entier  $n$  et  $T[n]$  la famille de suites commençant par un nombre de la classe  $n$ . Par exemple,  $T[2n+1]$  exprimera la famille des suites commençant par un nombre impair.

Avant d'étudier le cas général, nous allons regarder deux cas particuliers suivants,  $d=5$  et  $d=7$ .

### 1 – Etude de la conjecture $3x + 5$

Nous allons examiner le comportement des classes de nombre modulo  $2^p$  avec  $p$  croissant.

#### 1.1 - Cas $p=2$ :

$$T(4m+1) = (3(4m+1)+5)/2 = (12m+8)/2 = 6m+4 \text{ et } T(6m+4) = 3m+2 < 4m+1$$

**Les suites de la classe  $4m+1$  satisfont la conjecture  $3x+5$**

$$T(4m+3) = (3(4m+3)+5)/2 = (12m+14)/2 = 6m+7$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

### 1.2 - Cas $p=3$ :

$$T(8m+3) = (3(8m+3)+5)/2 = (24m+14)/2 = 12m+7$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure**

$T(8m+7) = (3(8m+7)+5)/2 = (24m+26)/2 = 12m+13 = 4(3m+3) + 1$  **de la classe  $4K+1$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+5$**

### 1.3 - Cas $p=4$ :

$$T(16m+3) = (3(16m+3)+5)/2 = (48m+14)/2 = 24m+7$$

$T(24m+7) = (3(24m+7)+5)/2 = (72m+26)/2 = 36m+13 = 4(9m+4) + 1$  **de la classe  $4K+1$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+5$ .**

$$T(16m+11) = (3(16m+11)+5)/2 = (48m+38)/2 = 24m+19$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

### 1.4 - Cas $p=5$ :

$$T(32m+11) = (3(32m+11)+5)/2 = (96m+38)/2 = 48m+19$$

$$T(48m+19) = (3(48m+19)+5)/2 = (144m+62)/2 = 72m+31$$

$$T(72m+31) = (3(72m+31)+5)/2 = (216m+98)/2 = 108m+49 = 4(27m+12) + 1$$

**de la classe  $4K+1$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+5$ .**

$$T(32m+27) = (3(32m+27)+5)/2 = (96m+86)/2 = 48m+43$$

$$T(48m+43) = (3(48m+43)+5)/2 = (144m+134)/2 = 72m+67$$

$$T(72m+67) = (3(72m+67)+5)/2 = (216m+206)/2 = 108m+103$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

Les cas que nous venons d'examiner nous ont conduit à lister les cas successifs qui résistent au raisonnement pas récurrence, les familles  $8m+3$ ,  $16m+11$  et  $32m+27$ . On remarque que ces trois familles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$8m + 3 = 8m + 8 - 5 = 2^3 m + 2^3 - 5$$

$$16m+11 = 16m + 16 - 5 = 2^4 m + 2^4 - 5$$

$$32m+27 = 32m + 32 - 5 = 2^5 m + 2^5 - 5$$

Alors que les suites des classes  $16m+3$ ,  $32m+11$  ... satisfont la conjecture  $3x+5$ . Et l'on remarque qu'on peut les écrire ainsi :

$$16m + 3 = 16m + 8 - 5 = 2^4 m + 2^3 - 5$$

$$32m + 11 = 32m + 16 - 5 = 2^5 m + 2^4 - 5$$

On peut raisonnablement en déduire que les familles qui résistent sont de la forme  $2^p m + 2^p - 5$ . Et comme dans le cas de la conjecture de Collatz, on peut vérifier par passage à la puissance de 2 supérieure, que  $2^{p+1} m + 2^p - 5$  satisfait la conjecture  $3m+5$  alors que seule  $2^{p+1} m + 2^{p+1} - 5$  ne permet pas de conclure.

En effet :

$$T(2^{p+1} m + 2^p - 5) = (3(2^{p+1} m + 2^p - 5) + 5)/2 = (3 \cdot 2^{p+1} m + 3 \cdot 2^p - 10)/2 = 3 \cdot 2^p m + 3 \cdot 2^{p-1} - 5$$

Avec une petite astuce de calcul en exprimant  $3 \cdot 2^{p-1}$  sous la forme  $2^p + 2^{p-1}$

$$T(2^{p+1} m + 2^p - 5) = 2^p (3m + 1) + 2^{p-1} - 5 \text{ de la forme } 2^p K + 2^{p-1} - 5$$

Donc par récurrence, pour  $p=4$  nous avons montré que la classe  $16m + 3$  était de la même classe que  $4K+1$  qui satisfaisait la conjecture  $3x+5$ . De même, nous avons montré que la classe  $32m + 9$  vérifiait la même condition.

En supposant que cette condition est également vérifiée par la classe  $2^p K + 2^{p-1} - 5$  pour tout entier inférieur ou égal à  $p$ , et ayant démontré que une suite commençant par  $2^{p+1} m + 2^p - 5$  passe par un nombre de la forme  $2^p K + 2^{p-1} - 5$  avec  $K=3m+1$ , dont on a fait l'hypothèse par récurrence que la famille vérifiait la conjecture  $3m+5$

**En conclusion, nous venons de démontrer que dans toute décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^p m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^p m + 2^p - 1$ , seuls les nombres de la forme  $2^p m + 2^p - 5$  résistent à la démonstration par récurrence, soit 1 cas sur  $2^p$ . Par passage à la limite, quand  $p$  tend vers l'infini,  $1/2^p$  tend vers 0. Ce qui permet de conclure que la conjecture  $3x+5$  est vérifié quelque soit  $x$  entier positif.**

### Existence de cycles non triviaux :

Lorsque l'on étudie la trajectoire des suites  $3x+5$  pour  $U_0$  impair compris entre 1 et 51, le tableau suivant permet de voir, celles qui passent par 1 ou aboutissent à un cycle non trivial

entiers imp	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
min cycle	1	19	5	19	1	19	19	5	19	19	19	23	5
entiers imp	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
min cycle	19	23	19	19	5	23	19	1	19	5	19	19	23

Quatre valeurs représentant le minimum de cycles ressortent. 1 pour le cycle trivial  $\{1,4,2\}$ , 5 pour tout  $U_0 \equiv 0 [5]$ , ainsi que 19 et 23.

Nous proposons une méthode pour mettre en évidence certain cycles en fonction du nombre d'itération, qu'on appellera ordre, pour revenir à la valeur initiale. Nous ne comptons pas les divisions par une puissance de 2 dans le nombre d'itérations mais seulement les opérations  $3x+5$ .

On va d'abord chercher un cycle d'ordre 1 :

$$T(m) = 3m+5 = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p - 3)m = 5$$

Cette équation n'a que deux solutions dans  $\mathbf{N}$ :

$$p=2 \text{ donne } m = 5$$

$$p=1 \text{ donne } m=1 \text{ (min du cycle trivial)}$$

Toute autre valeur de  $p$  conduit à des solutions dans  $\mathbf{Z}$  ou dans  $\mathbf{Q}$  qui n'est pas notre propos ici.

**Il existe donc deux cycles d'ordre 1, le cycle trivial et le cycle de minimum 5.**

Si nous regardons les cycle d'ordre 2,  $T^2(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^3(m) = 9m + d = 2^p m \text{ équivalant à } (2^p - 9)m = d \text{ avec } d = 3.5 + 2.5 = 25 \text{ obtenu après 2 itérations}$$

$m$  et  $2^p - 9$  divisent 25, ce qui est impossible quelque soit  $p > 3$  et pour  $p \leq 3$ ,  $2^p - 9 < 0$

**Il n'existe donc aucun cycle d'ordre 2**

Si nous regardons les cycles d'ordre 3,  $T^3(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^3(m) = 27m + d = 2^p m \text{ équivalant à } (2^p - 27)m = d$$

avec  $d = 3^2.5 + 3.2.5 + 2^2.5 = 95$  ou  $d = 3^2.5 + 3.2.5 + 2^3.5 = 115$  obtenu après 3 itérations

L'équation  $(2^p - 27)m = 95$  admet une seule solution pour  $p=5$  et  $m = 19$

L'équation  $(2^p - 27)m = 115$  admet une seule solution pour  $p=5$  et  $m = 23$

**Il existe deux cycles d'ordre 3.**

## **2 – Etude de la conjecture $3x + 7$**

Nous allons examiner le comportement des classes de nombre modulo  $2^p$  avec  $p$  croissant.

### **2.1- Cas $p=2$ :**

$$T(4m+1) = (3(4m+1)+7)/2 = (12m+10)/2 = 6m+5$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

$$T(4m+3) = (3(4m+3)+7)/2 = (12m+16)/2 = 6m+8 \text{ qui est pair}$$

$$T(6m+8) = (6m+8)/2 = 3m+4 < 4m+3$$

**Les suites de la classe  $4m+3$  satisfont la conjecture  $3x+7$**

### **2.2- Cas $p=3$ :**

$$T(8m+1) = (3(8m+1)+7)/2 = (24m+10)/2 = 12m+5$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

$T(8m+5) = (3(8m+5)+7)/2 = (24m+22)/2 = 12m+11 = 4(3m+2) + 3$  **de la classe  $4K+3$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+7$**

### **2.3- Cas $p=4$ :**

$$T(16m+1) = (3(16m+1)+7)/2 = (48m+10)/2 = 24m+5$$

$T(24m+5) = (3(24m+5)+7)/2 = (72m+22)/2 = 36m+11 = 4(9m+2) + 3$  **de la classe  $4K+3$  dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture  $3x+7$ .**

$$T(16m+9) = (3(16m+9)+7)/2 = (48m+34)/2 = 24m+17$$

$$T(24m+17) = (3(24m+17)+7)/2 = (72m+58)/2 = 36m+29$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

#### **2.4 - Cas p=5 :**

$$T(32m+9) = (3(32m+9)+7)/2 = (96m+34)/2 = 48m+17$$

$$T(48m+17) = (3(48m+17)+7)/2 = (144m+58)/2 = 72m+29$$

$T(72m+29) = (3(72m+29)+7)/2 = (216m+94)/2 = 108m+47 = 4(27m+11) + 3$  **de la classe 4K+3 dont on a démontré au paragraphe précédent qu'elle satisfaisait à la conjecture 3x+7.**

$$T(32m+25) = (3(32m+25)+7)/2 = (96m+82)/2 = 48m+41$$

$$T(48m+41) = (3(48m+41)+7)/2 = (144m+130)/2 = 72m+65$$

$$T(72m+65) = (3(72m+65)+7)/2 = (216m+202)/2 = 108m+101$$

**qui ne repasse pas au dessous de son point de départ et ne permet pas de conclure.**

Les cas que nous venons d'examiner nous ont conduit à lister les cas successifs qui résistent au raisonnement pas récurrence, les suites classes  $8m+1$ ,  $16m+9$  et  $32m+25$ . On remarque que ces trois familles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$8m + 1 = 8m + 8 - 7 = 2^3 m + 2^3 - 7$$

$$16m+9 = 16m + 16 - 7 = 2^4 m + 2^4 - 7$$

$$32m+25 = 32m + 32 - 7 = 2^5 m + 2^5 - 7$$

Alors que les suites des classes  $16m+1$ ,  $32m+9$  ... satisfont la conjecture  $3x+7$ . Et l'on remarque qu'on peut les écrire ainsi :

$$16m + 1 = 16m + 8 - 7 = 2^4 m + 2^3 - 7$$

$$32m + 9 = 32m + 16 - 7 = 2^5 m + 2^4 - 7$$

**On peut raisonnablement en déduire que les familles qui résistent sont de la forme  $2^p m + 2^p - 7$ . Et comme dans le cas de la conjecture de Collatz, on peut vérifier par passage à la puissance de 2 supérieure, que  $2^{p+1} m + 2^p - 7$  satisfait la conjecture  $3m+5$  alors que seule  $2^{p+1} m + 2^{p+1} - 7$  ne permet pas de conclure.**

En effet :

$$T(2^{p+1} m + 2^p - 7) = (3(2^{p+1} m + 2^p - 7) + 7)/2 = (3 \cdot 2^{p+1} m + 3 \cdot 2^p - 14)/2 = 3 \cdot 2^p m + 3 \cdot 2^{p-1} - 7$$

Avec une petite astuce de calcul en exprimant  $3 \cdot 2^{p-1}$  sous la forme  $2^p + 2^{p-1}$

$$T(2^{p+1} m + 2^p - 7) = 2^p (3m + 1) + 2^{p-1} - 7 \text{ de la forme } 2^p K + 2^{p-1} - 7$$

Donc par récurrence, pour  $p=4$  nous avons montré que la classe  $16m + 1$  était de la même classe que  $4K+3$  qui satisfaisait , la conjecture  $3x+7$ . De même, nous avons montré que la classe  $32m + 9$  vérifiait la même condition.

En supposant que cette condition est également vérifiée par la classe  $2^p K + 2^{p-1} - 7$  pour tout entier inférieur ou égal à  $p$ , et ayant démontré que une suite commençant par  $2^{p+1} m + 2^p - 7$  passe par un nombre de la forme  $2^p K + 2^{p-1} - 7$  avec  $K=3m+1$ , dont on a fait l'hypothèse par récurrence que la famille vérifiait la conjecture  $3x+7$ .

**En conclusion, nous venons de démontrer que dans toute décomposition des nombres entiers sous la forme  $2^p m + a$  avec  $a$  compris entre 1 et  $2^p m + 2^p - 1$ , seuls les nombres de la forme  $2^p K + 2^p - 5$  résistaient à la démonstration par récurrence, soit 1 cas sur  $2^p$ . Par passage à la limite, quand  $p$  tend vers l'infini,  $1/2^p$  tend vers 0. Ce qui permet de conclure que la conjecture  $3x+5$  est vérifié quelque soit  $x$  entier positif.**

### Existence de cycles non triviaux :

Lorsque l'on étudie la trajectoire des suites  $3x+7$  pour  $U_0$  impair compris entre 1 et 51, le tableau suivant permet de voir, celles qui passent par 1 ou aboutissent à un cycle non trivial

entiers imp	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
min cycle	1	5	5	7	1	5	5	5	1	1	7	1	1
entiers imp	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
min cycle	5	1	1	1	7	1	1	1	1	5	1	7	5

Trois valeurs représentant le minimum de cycles ressortent. 1 pour le cycle trivial  $\{1,4,2\}$ , 7 pour tout  $U_0 \equiv 0 [7]$ , ainsi que 5.

Nous proposons une méthode pour mettre en évidence certain cycles en fonction du nombre d'itération, qu'on appellera ordre, pour revenir à la valeur initiale. Nous ne comptons pas les divisions par une puissance de 2 dans le nombre d'itérations mais seulement les opérations  $3x+5$ .

On va d'abord chercher un cycle d'ordre 1 :

$$T(m) = 3m+7 = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p - 3)m = 7$$

Cette équation n'a qu'une seule solution dans  $\mathbf{N}$ :

$$p=1 \text{ donne } m = 7$$

Toute autre valeur de  $p$  conduit à des solutions dans  $\mathbf{Z}$  ou dans  $\mathbf{Q}$  qui n'est pas notre propos ici.

**Il existe donc un seul cycle d'ordre 1, le cycle de minimum 7.**

Si nous regardons les cycle d'ordre 2,  $T^2(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^2(m) = 9m + d = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p - 9)m = d \text{ avec } d = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 35 \text{ obtenu après 2 itérations}$$

$2^p - 9$  doit diviser 35 ce qui n'est possible que pour  $p=4$ . Dans ce cas  $m=5$

**Il n'existe donc un seul cycle d'ordre 2, le cycle de minimum 5**

Si nous regardons les cycles d'ordre 3,  $T^3(m)$  pourra s'écrire sous la forme

$$T^3(m) = 27m + d = 2^p m \text{ équivaut à } (2^p - 27)m = d$$

avec  $d = 3^2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 7 = 133$  ou  $d = 3^2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2^3 \cdot 7 = 161$  obtenu apres 3 itérations

L'équation  $(2^p-27)m = d$  avec  $d=133$  ou  $161$  n'a aucune solution.

**Donc il n'existe aucun cycle d'ordre 3.**

### Cas général de la conjecture $3x+d$

De la même manière que dans le paragraphe précédent nous allons débiter en regardant le comportement des entiers classés modulo 4, avec la même approche par récurrence forte.

Le cas des nombres pairs est évacué car passant immédiatement au dessous de leur valeur initiale.

En effet  $T_d(4m) = 2m < 4m$  et  $T_d(4m+2) = 2m+1 < 4m+2$

Nous devons donc nous attacher à démontrer la conjecture  $3M+D$  pour les nombres de la forme  $4m+1$  et  $4m+3$ .

**Nous supposons dans la suite que  $d \equiv 1 [4]$**

#### 3.1 – Cas $p=2$

##### Cas $4m + 1$

$$T_d(4m+1) = (3(4m+1) + d)/2 = 6m + (d+3)/2$$

Comme  $d \equiv 1 [4]$  alors  $d+3 \equiv 0 [4]$ , donc  $d+3$  est de la forme  $4k$

$$\text{Donc } T_d(T_d(4m+1)) = T_d(6m + (d+3)/2) = T_d(6m + 2k) = 3m + k = 3m + (d+3)/4 < 4m + 1$$

**Les suites de la forme  $T[4m+1]$  vérifient la conjecture  $3m+d$ .**

##### Cas $4m + 3$

$$T_d(4m+3) = (3(4m+3) + d)/2 = 6m + (d+9)/2$$

Comme  $d \equiv 1 [4]$  alors  $d+9 \equiv 2 [4]$ , donc  $d+9$  est de la forme  $4k+2$ . On ne peut pas conclure.

Dans ce cas on ne repasse pas au dessous de la valeur initiale. Il nous faut donc explorer séparément les valeurs pair et impair de  $m$ , ce qui revient à passer à une décomposition des nombres entiers en classes modulo 8, mais seulement pour les classes  $8m+3$  et  $8m+7$ .

Si nous avons regardé le cas  $d \equiv 3 [4]$ , le résultat sera inversé. Les suites de la forme  $T[4m+3]$  satisfont la conjecture  $3x+d$  alors que l'étude de la classe de nombre  $4m+1$  ne permet pas de conclure et oblige d'étudier les cas  $8m+1$  et  $8m+5$ .

##### Cas $2^p m + a$

Nous allons poser les relations de récurrence suivantes

Par analogie avec les deux cas particuliers des conjectures  $3x+5$  et  $3x+7$  (auxquelles on pourrait tout à fait ajouter celle de Collatz,  $3x+1$ ), nous pouvons supposer que dans une décomposition des nombres entiers naturels sous la forme  $2^p m + a$ , toutes les valeurs de  $a$  satisfont la conjecture  $3x+d$  à l'exception de  $2^p m + 2^p - d$ . Et nous allons montrer que cela est vrai pour les nombres de la forme  $2^{p+1} m + a$ .

En corolaire, si pour les nombres de la forme  $2^p m + a$  toutes les valeurs de  $a$  vérifient la conjecture  $3x+d$ , à l'exception de  $a = 2^p m + 2^p - d$ , alors la classe de nombre  $2^p m + 2^{p-1} - d$  vérifiera la conjecture.

Nous allons donc démontrer qu'il en est ainsi pour les nombres de la forme  $2^{p+1} m + a$  en montrant que les nombres de la forme  $2^{p+1} m + 2^p - d$  vérifient également la conjecture.

$$T_d(2^{p+1} m + 2^p - d) = (3(2^{p+1} m + 2^p - d) + d)/2 = 3 \cdot 2^p m + 3 \cdot 2^{p-1} - d$$

En décomposant  $3 \cdot 2^{p-1}$  en  $2 \cdot 2^{p-1} + 2^{p-1} = 2^p + 2^{p-1}$

$$T_d(2^{p+1} m + 2^p - d) = 2^p (3m+1) + 2^{p-1} - d$$

Qui est de la forme  $2^p K + 2^{p-1} - d$  qui selon l'hypothèse de récurrence, vérifie la conjecture.

**On en conclut que dans toute décomposition des entiers naturels sous la forme  $2^p m + a$ , seul le cas  $2^p m + 2^p - d$  ne peut être démontré par récurrence, soit 1 cas sur  $2^p$ . Par passage à la limite, quand  $p$  tend vers l'infini,  $1/2^p$  tend vers 0. Ce qui permet de conclure que la conjecture  $3x+d$  est vérifiée quelque soit  $d$  premier avec 6..**

### Existence de cycles non triviaux :

Dans le cas général du problème  $3x+d$ , il est plus difficile de mettre en évidence comme nous l'avons fait précédemment pour les suites  $3x+5$  et  $3x+7$ , l'existence de cycles.

Néanmoins il y a au moins un cas que nous pouvons traiter facilement, c'est  $U_0 = d$

En effet,  $T_d(d) = (3d + d)/2 = 2d$  et  $T_d^2(d) = d$

**Il existe au moins un cycle non trivial, dont le minimum est  $d$ .**

De plus, quelque soit  $n$  impair,

$$T_d(n \cdot d) = (3n+1) \cdot d/2 = d \cdot T_1(n)$$

$D$  intervenant en facteur de chaque itération nous sommes ramené à traiter une suite de Syracuse  $T_1(n)$  dont on a démontré qu'elle passait par 1.

**En conséquence, toutes les suites  $T_d(n \cdot d)$  aboutissent sur un cycle non trivial dont le minimum est  $d$**

La mise en évidence de cycles plus complexe nécessiterait de résoudre l'équation :

$$(2^p - 3^q) m = D \quad \text{ou} \quad D = (3^{q-1} + 3^{q-2} \cdot 2^{p1} + 3^{q-3} \cdot 2^{p2} + \dots + 3 \cdot 2^{pn-1} + 2^{pn}) \cdot d$$

Où la suite  $(p1 \dots pn)$  est une suite d'entier strictement croissante telle que  $3^{q-2} < 2^{pn} < 3^{q-1} < 3^q < 2^p$

$$m < F(q) = q \cdot 3^{q-1} \cdot d / (2^p - 3^q) = q \cdot d / 3((2^p / 3^q) - 1) \quad \text{avec} \quad p = \text{Ent}(q \cdot \text{Log}3 / \text{Log}2) + 1$$

**On peut démontrer aisément que  $F(q) = d \cdot O(q)$  et que par conséquent, le nombre de cycle d'ordre  $q$  (ou  $q$  est le nombre d'entiers impairs du cycle) est du même ordre de grandeur que  $q$ .**



## Conjecture de Kakutani

Les arguments mis en œuvre pour démontrer la conjecture de Collatz, peuvent s'appliquer à une formulation plus générale, présentée par Oliveira, et vraisemblablement due à Kakutani

$$C_{5,\{2,3\}}(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 [d], d \text{ appartient à } \{2,3\} \\ 5m + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous noterons  $K(U_0)$  la suite de Kakutani commençant par  $U_0$

Nous avons testé toutes les valeurs de  $U_0$  comprise entre 1 et 100, en évitant celles divisibles par des puissances de 2 ou de 3, et toutes finissent par passer par 1.

Nous reprenons la même approche que celle développée pour les suites de Syracuse, à savoir de montrer que toute suite finit par repasser au dessous de sa valeur initiale.

Dans le cas des suites de Syracuse, nous étions partis sur une analyse des nombres de la forme  $2^k m + a$ , cela en raison de la division par 2 pour les valeurs paires.

Nous noterons  $K(U_0)$  la suite de Kakutani commençant par  $U_0$  et par  $K[U_0]$  l'ensemble des suites de Kakutani correspondant à une certaine partie de  $\mathbb{N}$ . Par exemple,  $K[2m]$  sera l'ensemble des suites de Kakutani commençant par un nombre pair.

Pour simplifier les notations, nous remplacerons dans la suite l'écriture  $C_{5,\{2,3\}}(m)$  par  $C(m)$

### 1 – Etude des suites de la forme $C_{5,\{2,3\}}(m)$

**Nous adaptons cette approche aux suites de Kakutani en commençant par étudier les nombres de la forme  $6m+a$ .**

#### **1.1 – Cas $6m$**

$$C(6m) = 3m < 6m$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $K(6m)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

#### **1.2 - Cas $6m+1$**

$$C(6m+1) = 30m+6 \text{ qui est divisible par 2 et par 3}$$

$$C^3(6m+1) = 5m+1 < 6m+1$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $K(6m+1)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

#### **1.3 - Cas $6m+2$**

$$C(6m+2) = (6m+2)/2 = 3m+1 < 6m+2$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $K(6m+2)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

#### 1.4 - Cas $6m+3$

$$C(6m+2) = (6m+3)/3 = 2m+1 < 6m+2$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $K(6m+3)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

#### 1.5 - Cas $6m+4$

$$C(6m+4) = (6m+4)/2 = 3m+2 < 6m+2$$

**Les suites de Kakutani de la forme  $K(6m+4)$  satisfont la conjecture de Kakutani**

#### 1.6 - Cas $6m+5$

$$C(6m+5) = 5(6m+5) + 1 = 30m+26$$

$$C^2(6m+5) = C(30m+26) = (30m+26)/2 = 15m+13$$

**On ne passe pas au dessous de la valeur de départ pour les suites de Kakutani de la forme  $K(6m+5)$  donc on ne peut pas conclure. Cependant 5 cas sur 6, vérifie la conjecture de Kakutani.**

Comme pour la conjecture de Syracuse, on va maintenant étudier les suites de la forme  $S(12m+a)$  avec  $a=5$  et  $a=11$ .

#### 2.1 – Cas $12m+5$

$$C(12m+5) = 5(12m+5) + 1 = 60m+26$$

$$C^2(12m+5) = C(60m+26) = (60m+26)/2 = 30m+13$$

**Cette valeur n'est pas inférieure à  $12m+5$  mais comme dans la première partie, si nous montrons que les suites de la forme  $K(12m+5)$  sont confluentes avec des suites de Kakutani pour lesquelles on a déjà démontré la convergence, alors on aura le même comportement pour les suites de la forme  $K(12m+5)$ .**

En effet :

$$30m+13 = 6(5m+2) + 1 \text{ qui est bien de la forme } 6k+1$$

**Par conséquent,  $K(12m+5)$  et  $K(6k+1)$  avec  $k=5m+2$  sont deux suites confluentes et  $K(12m+5)$  satisfait la conjecture de Kakutani.**

#### 2.2 – Cas $12m+11$

En revanche, le cas des suites  $K(12m+11)$  donne :

$$C(12m+11) = 5(12m+11) + 1 = 60m+56$$

$$C(60m+56) = 30m+28$$

$C(30m+28) = 15m+14$  qui n'est pas inférieure à  $12m+11$  et ne peut pas s'exprimer sous une forme d'un nombre pour lequel on a précédemment démontré que cela satisfaisait la conjecture de Kakutani.

**Nous allons par conséquent regarder les suites de la forme  $S(24m+a)$  avec  $a=11$  ou  $a=23$**

#### 3.1 – Cas $24m+11$

$$C(24m+11) = 120m+56$$

$$C(120m+56) = 60m+28$$

$$C(60m+28) = 30m+14$$

$$C(30m+14) = 15m+7 < 24m+11$$

**Les suites de la forme  $K(24m+5)$  repassent donc au dessous de leur point de départ.**

**Mais on aurait également pu montrer que  $30m+14 = 6(5m+2)+2$  qui est de la forme  $6m+2$ . On conclut que les suites  $K(24m+5)$  et  $K(6k+2)$  avec  $k=5m+2$  sont confluentes.**

**Dans les deux cas, on peut conclure que les suites  $K(12m+5)$  satisfont la conjecture de Kakutani.**

### **3.2 – Cas $24m+23$**

Comme précédemment le calcul ne permet pas de conclure que les suites  $K(24m+23)$  satisfont la conjecture de Kakutani, sauf à regarder les suites de la forme  $K(48m+23)$ .

### **Cas Général : étude des suites de la forme $C(3 \cdot 2^n m + a)$**

De manière plus générale et par analogie avec l'approche adoptée pour la conjecture de Syracuse, nous allons supposer, que pour tout entier  $i$  inférieur ou égal à  $n$ ,  $K(3 \cdot 2^{i-1} m + 3 \cdot 2^{i-2} - 1)$  satisfait la conjecture de Kakutani et nous allons démontrer que les suites de la forme  $K(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  satisfont également la conjecture de Kakutani.

$$C(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1) = 5(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 1 = 5 \cdot 3 \cdot 2^n m + 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 4$$

Pour  $n > 2$ , ce résultat est divisible par 4

$$C^2(5 \cdot 3 \cdot 2^n m + 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 4) = 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-2} m + 5 \cdot 3 \cdot 2^{n-3} - 1 = 3 \cdot 2^{n-2} \cdot (5m+2) + 3 \cdot 2^{n-3} - 1$$

Donc  $C^2(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  est de la forme  $3 \cdot 2^{n-2} \cdot k + 3 \cdot 2^{n-3} - 1$  avec  $k=5m+2$

En conséquence, les suites de la forme  $K(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  et  $K(3 \cdot 2^{n-2} k + 3 \cdot 2^{n-3} - 1)$  avec  $k=5m+2$  sont confluentes. Et en vertu de l'hypothèse de récurrence forte, pour tout entier  $i$  inférieur ou égal à  $n$ ,  $K(3 \cdot 2^{i-1} m + 3 \cdot 2^{i-2} - 1)$  satisfait la conjecture de Kakutani, alors les suites de la forme  $K(3 \cdot 2^n m + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)$  satisfont bien à la conjecture de Kakutani.

**Cela signifie que dans une décomposition des nombres entiers sous la forme  $3 \cdot 2^n m + a$ , seul le cas  $a=3 \cdot 2^n - 1$  nécessite de passer à la puissance de 2 supérieur pour démontrer pour un cas sur deux la conjecture de Kakutani. Cela représente 1 cas sur  $3 \cdot 2^{n-1}$ . Ce rapport tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini et permet de conclure sur la résolution de la conjecture de kakutani pour les suites  $C_{5,\{2,3\}}(m)$ .**

Nous allons maintenant étudier un second type de suites de la forme  $C_{pn,\{p1,\dots,p(n-1)\}}(m)$ . les suites de la forme de Kakutani de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$ .

## **2 – Etude des suites de la forme $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$**

La démonstration développée au paragraphe précédent s'apparente fortement à celles mises en œuvre pour la conjecture de Collatz et la conjecture  $3x+d$ .

Le problème est que plus l'ensemble des valeurs par lesquelles on peut diviser  $m$  est grand, plus le nombre de cas à tester, augmente de manière exponentielle. Nous avons exploré cette voie et avons choisi de vous présenter une approche différente.

Celle-ci est fondée sur le fait que toute sous-suite d'une suite convergente est également convergente.

**L'extension de la conjecture de Kakutani aux suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$  est identique à celle exprimée pour la conjecture de Collatz, à savoir que, toute suite finit par repasser au dessous de sa valeur initiale et corrélativement passe par 1.**

C'est ce que nous allons essayer de démontrer. Mais à la différence du cas précédent, nous n'allons pas tester des classes de nombres de manière systématiques, mais quelques classes particulières qui conduiront à une conclusion plus rapide.

**Cette idée est venue du fait que pour passer au dessous de la valeur initiale au bout de deux itérations, il est nécessaire de pouvoir diviser la valeur obtenue après une itération par un nombre supérieur au coefficient multiplicatif de la suite. Par exemple pour les suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$ , il faut pouvoir diviser par un nombre supérieur à 7.**

Par exemple pour la suite  $C_{7,\{2,3,5\}}(8m+1)$  :

$C_{7,\{2,3,5\}}(8m+1) = 7(8m+1) + 1 = 56m + 8$  qui est divisible par 8 à la deuxième itération

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(8m+1) = (56m + 8)/8 = 7m+1 < 8m+1$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[8m+1]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et donc converge vers 1.**

Mais c'est là que la notion de sous suite intervient.

### **Théorème :**

Si une suite  $(U_n)$  de valeur initiale  $U_0$  converge, alors toute sous-suite converge.

### **Corrolaire :**

Si une suite  $(U_n)$  de valeur initiale  $U_0$  converge, alors la sous suite commençant par  $U_{n_0}$  converge également.

**En vertu du corollaire ci-dessus, si la suite  $C_{7,\{2,3,5\}}(8m+1)$  satisfait la conjecture de Kakutani, alors la suite  $C_{7,\{2,3,5\}}(7m+1)$  également**

Si nous arrivons à démontrer cela pour l'ensemble des suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}(7m+a)$  avec  $a < 7$  alors nous aurons démontré la conjecture de Kakutani pour les suites  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$ .

Nous allons pour cela regarder le comportement des suites  $C_{7,\{2,3,5\}}(m)$  dont le premier terme appartient à l'une des classes de nombres entiers naturels suivants :

$$\{ 10m+7, 12m+5, 20m+17, 30m+17 \text{ et } 60m+17 \}$$

### 2.1 – Cas de $C_{7,\{2,3,5\}}(10m+7)$

$$C_{7,\{2,3,5\}}(10m+7) = 7(10m+7) + 1 = 70m+50 \text{ qui est divisible par 2 et par 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(10m+7) = (70m+50)/10 = 7m+5 < 10m+7$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[10m+7]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+5]$  converge également.**

### 2.2 – Cas de $C_{7,\{2,3,5\}}(12m+5)$

$$C_{7,\{2,3,5\}}(12m+5) = 7(12m+5) + 1 = 84m+36 \text{ qui est divisible par 4 et par 9, multiples de 2 et 3.}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(12m+5) = (84m+36)/12 = 7m+3 < 12m+5$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[12m+5]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+3]$  converge également.**

### 2.3 – Cas de $C_{7,\{2,3,5\}}(20m+17)$

$$C_{7,\{2,3,5\}}(20m+17) = 7(20m+17) + 1 = 140m+120 \text{ qui est divisible par 8 et 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(20m+17) = (140m+120)/20 = 7m+6 < 20m+17$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[20m+17]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+6]$  converge également.**

### 2.4 – Cas de $C_{7,\{2,3,5\}}(30m+17)$

$$C_{7,\{2,3,5\}}(30m+17) = 7(30m+17) + 1 = 210m+120 \text{ qui est divisible par 2, par 3 et par 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(30m+17) = (210m+120)/30 = 7m+4 < 30m+17$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[30m+17]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+4]$  converge également.**

### 2.5 – Cas de $C_{7,\{2,3,5\}}(60m+17)$

$$C_{7,\{2,3,5\}}(60m+17) = 7(60m+17) + 1 = 420m+120 \text{ qui est divisible par 3, par 4 et par 5}$$

$$C^2_{7,\{2,3,5\}}(60m+17) = (420m+120)/60 = 7m+2 < 60m+17$$

**En conséquence, la famille de suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[60m+17]$  passe bien au dessous de sa valeur initiale au bout de deux itérations et converge vers 1. Et la sous suite  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+2]$  converge également.**

Nous avons oublié le cas  $7m$  mais qui après une itération abouti à un terme de la forme  $7K+1$ . **Nous venons donc de démontrer que toutes suites de la forme  $C_{7,\{2,3,5\}}[7m+a]$  avec  $a < 6$  satisfont la conjecture de Kakutani.**

### 3 - Cas général : les suites de la forme $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m)$

Quelques mots pour repréciser le problème. On considère l'ensemble des n premiers nombres premiers noté  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$  rangés par ordre croissant :  $p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n$ .

On définit la suite généralisée de Kakutani par :

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 [p_i], p_i < p_n \\ P_n \cdot m + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'approche présentée dans les premières parties de ce document est trop calculatoire et serait non transposable pour traiter efficacement ce problème. En revanche, celle exposée au paragraphe précédent ouvre une voie intéressante.

**En effet, l'idée est d'arriver à démontrer que toutes les suites  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$  quelques soit  $b < p_n$  satisfont la conjecture de Kakutani. En s'inspirant, de la démonstration précédente, il suffit de trouver un ensemble de classes de nombres qui passent aux dessous de leur valeur initiale au bout de quelques itérations et aboutissent à une classes de la forme  $p_n \cdot m + p_i$ .**

Partons de la classe de nombre suivante :  $X \cdot m + a$  avec  $a < X$  et appliquons lui la fonction  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}$

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(X \cdot m + a) = p_n \cdot (X \cdot m + a) + 1 = p_n \cdot X \cdot m + (p_n \cdot a + 1)$$

Etant donné que  $p_n$  et  $(p_n \cdot a + 1)$  sont premiers entre eux, si on veut diviser les deux termes de l'expression ci-dessus par un même nombre, cela ne peut être que par  $(p_n \cdot a + 1)$  ou un diviseur de  $(p_n \cdot a + 1)$ .

En posant  $X = (p_n \cdot a + 1)$ , on obtient un premier résultat :

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}((p_n \cdot a + 1) \cdot m + a) = p_n \cdot ((p_n \cdot a + 1) \cdot m + a) + 1 = p_n \cdot (p_n \cdot a + 1) \cdot m + (p_n \cdot a + 1)$$

Cette expression est bien divisible par  $(p_n \cdot a + 1)$

$$C^2_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}((p_n \cdot a + 1) \cdot m + a) = p_n \cdot m + 1 < (p_n \cdot a + 1) \cdot m + a \text{ quelques soit } a > 1$$

**En conclusion,  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}((p_n \cdot a + 1) \cdot m + a)$  repasse bien au dessous de sa valeur initiale et satisfait donc la conjecture de Kakutani. Et  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}((p_n \cdot a + 1) \cdot m + a)$  et  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + 1)$  étant confluentes, la deuxième satisfait également la conjecture de Kakutani.**

**Il nous faut maintenant aboutir à la même conclusion pour toutes les suites de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$  quelques soit  $b < p_n$ .**

Nous cherchons donc les valeurs de  $X_b$  et  $a$  tels que :

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(X_b \cdot m + a) = p_n \cdot (X_b \cdot m + a) + 1 = p_n \cdot X_b \cdot m + (p_n \cdot a + 1)$$

$$\text{et } p_n \cdot a + 1 = X_b \cdot b \quad \text{avec } p_n \text{ et } b \text{ premiers entre eux et } b < p_n$$

La seconde égalité peut s'écrire :  $X_b \cdot b + (-a) \cdot p_n = 1$  avec  $p_n$  et  $b$  premiers entre eux

Le théorème de Bezout, prouve l'existence d'une solution  $X_b$  et  $-a$  satisfaisant la relation ci-dessus

Et donne l'ensemble des solutions :

$$a_k = a + k \cdot b \quad \text{et} \quad X_{b,k} = X_b + k \cdot p_n$$

Nous allons terminer le calcul précédent en effectuant la deuxième itération.

$$C^2_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} (X_b \cdot m + a) = (p_n X_b \cdot m + (p_n \cdot a + 1)) / X_b = p_n \cdot m + b$$

$$\text{Si } X_b > p_n \text{ alors : } \quad p_n \cdot m + b < X_b \cdot m + a$$

$$\text{Sinon, il existe } k \text{ tel que } X_{b,k} > p_n \text{ et } \quad p_n \cdot m + b < X_{b,k} \cdot m + a$$

Pour achever totalement notre démonstration il reste à traiter le cas  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$  avec  $b=0$

Si  $m$  est pair, alors  $p_n \cdot m$  est divisible par 2 et on passe au-dessous de la valeur initiale, sinon :

On pose  $m = 2r+1$

$$C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} (p_n \cdot m) = p_n \cdot (p_n \cdot m) + 1 = p_n \cdot (p_n \cdot (2r+1)) + 1 = 2 \cdot p_n \cdot (p_n \cdot m) + p_n^2 + 1$$

$p_n$  est premier, donc  $p_n^2 + 1$  est pair et  $(p_n^2 + 1)/2$  entier et strictement inférieur à  $p_n$

$$C^2_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} (p_n \cdot m) = (2 \cdot p_n \cdot (p_n \cdot m) + p_n^2 + 1) / 2 = p_n \cdot (p_n \cdot m) + (p_n^2 + 1) / 2$$

$$C^2_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} (p_n \cdot m) = p_n \cdot (p_n \cdot m + \text{Ent}((p_n^2 + 1) / 2 p_n)) + b$$

Où  $\text{Ent}()$  est la fonction partie entière et  $b = (p_n^2 + 1) / 2 - p_n \cdot \text{Ent}((p_n^2 + 1) / 2 p_n) < p_n$

$$\text{En effet : } \quad \text{Ent}((p_n^2 + 1) / 2 p_n) = \text{Ent}(p_n / 2 + (1/2 p_n)) > (p_n / 2) - 1$$

$$\text{D'où } \quad b < (p_n^2 + 1) / 2 - p_n \cdot ((p_n / 2) - 1) = (p_n + 1) / 2 \text{ qui est bien inférieur à } p_n$$

$$\text{En posant } \quad K = p_n \cdot m + \text{ent}((p_n^2 + 1) / 2 p_n,$$

alors  $C^2_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}} (p_n \cdot m)$  est de la forme  $p_n \cdot K + b$  avec  $0 < b < p_n$  dont nous avons déjà démontré plus haut qu'elle satisfaisait la conjecture de Kakutani

**En conclusion, nous venons de démontrer que pour toute suite de Kakutani de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$ , avec  $b < p_n$  on a réussi à construire une suite de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(X_b \cdot m + a)$  qui passe au dessous de sa valeur initiale et qui est confluyente avec la suite  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$ . Ce qui finit de prouver que toutes les suites de la forme  $C_{p_n, \{p_1, \dots, p_{(n-1)}\}}(p_n \cdot m + b)$  satisfont la conjecture de Kakutani. Nous pouvons remarquer que cela apporte une démonstration plus rapide à la conjecture de Collatz qui est un cas particulier de la conjecture de Kakutani.**

Exemple : Si je veux trouver pour les suites du paragraphes précédent  $C_{7, \{2, 3, 5\}}$ , les valeurs de  $X$  et  $a$ , permettant de démontrer que la suite  $C_{7, \{2, 3, 5\}}(7m + 2)$  vérifie la conjecture, s'obtiennent aisément par cette méthode. Dans le cas présent  $p_n = 7$  et  $b = 2$ . On trouve  $X_b = 4$  et  $a = 1$  qui satisfont l'équation de bezout mais ne répondent pas à la condition  $X_b > p_n$ . Il suffit de prendre  $a_2 = 3$  et  $X_{b,2} = 11$  pour obtenir la suite  $C_{7, \{2, 3, 5\}}(11m + 3)$  qui passe bien au dessous de sa valeur initiale et est confluyente avec  $C_{7, \{2, 3, 5\}}(7m + 2)$ .

### Bibliographie :

[1] T. Oliveira e SILVA, *Empirical verification of the  $3x+1$  problem and related conjectures*. In J. LAGARIAS, éditeur, *the Ultimate Challenge : The  $3x+1$  Problem*, pages 189-207. Providence : American Mathematical Society, 2010.

[2] L. O. POCHON, A. FAVRE. *La suite de Syracuse, un monde de conjectures*. 2017. Hal-01593181

[3] J. LAGARIAS, *The set of rational cycles for  $3x+1$  problem*, *Acta Arithmetica*, 56 (1): 33-53. 1990.