

	<b>La démonstration</b>	
--	-------------------------	---

## Sommaire

<a href="#">1- Fiche d'identification</a> .....	2
<a href="#">2- Fiches professeur</a> .....	4
<a href="#">Activité 1</a> .....	8
<a href="#">Activité 2</a> .....	11
<a href="#">Activité 3</a> .....	18
<a href="#">3- Scénarios d'usage</a> .....	19
<a href="#">Scénario de l'activité 1</a> .....	19
<a href="#">Scénario de l'activité 2</a> .....	19
<a href="#">Scénario de l'activité 3</a> .....	20
<a href="#">4-Fiches élève</a> .....	21
<a href="#">Fiche élève activité 1</a> .....	21
<a href="#">Fiche élève activité 2</a> .....	24
<a href="#">Suite de la fiche élève activité 2</a> .....	27
<a href="#">Annexe 1 : quelques éléments d'histoire des mathématiques</a> .....	29
<a href="#">Annexe 2 : introduction au document 9</a> .....	31
<a href="#">Fiche élève activité 3</a> .....	33
<a href="#">5- Traces de travaux d'élèves</a> .....	35
<a href="#">6- Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives</a> .....	36
<a href="#">7- Bibliographie</a> .....	37
<a href="#">8- Evolution de la ressource (CV)</a> .....	38

<b>Discipline scientifique</b>	Mathématiques	
<b>Thème</b>	La démonstration	
<b>Niveau</b>	Classe de seconde	
<b>Cadre</b>	<b>Notions scientifiques travaillées</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- apprentissage de la logique et du raisonnement : implication, contraposée, raisonnement par disjonction de cas, par l'absurde, négation d'une propriété universelle</li> <li>- nombres rationnels, irrationnels, irrationalité de la racine carrée de 2</li> <li>- géométrie dans le plan : définition, propriétés, axiomes, élaboration d'une démonstration</li> <li>- calcul numérique et algébrique</li> </ul>
	<b>Notions épistémologiques de référence</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- argumentation, raisonnement, preuve</li> <li>- démonstration mathématique</li> <li>- induction, déduction</li> <li>- vérité d'une assertion mathématique, validité d'une argumentation</li> <li>- idéalité des objets mathématiques</li> <li>- rigueur en mathématique</li> <li>- structure axiomatique des théories mathématiques</li> </ul>
<b>Objectifs</b>	<b>Compétences épistémologiques<sup>1</sup></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- savoir repérer et caractériser une démonstration mathématique</li> <li>- savoir distinguer induction et déduction</li> <li>- avoir conscience de l'historicité des mathématiques et connaître notamment des raisons à l'apparition de l'exigence démonstrative en mathématique</li> <li>- savoir que la vérité en mathématique est fondée sur la logique et le raisonnement déductif</li> <li>- avoir conscience de la structure</li> </ul>

<sup>1</sup>des compétences épistémologiques détaillées par activité sont énoncées au sein de la fiche professeur  
 Copyright IREM de Montpellier

		axiomatique d'une théorie mathématique
	<b>Compétences transversales</b>	- entendre l'argumentation de l'autre, être capable de la réfuter par une argumentation raisonnée logique
	<b>Autres compétences travaillées</b>	
<b>Modalités pratiques de déroulement</b>	<b>Durée</b>	activité 1 : 3 h activité 2 : 3 h activité 3 : 1 h
	<b>Équipement spécifique</b>	aucun
<b>Dispositifs pédagogiques</b>	en classe, en classe par petits groupes, une partie en devoir à la maison	
<b>Description de l'activité</b>	<p>Cette ressource questionne la nécessité, la nature et les conditions d'émergence dans l'histoire de la forme particulière de preuve que constitue la démonstration mathématique. A travers des documents historiques (tablettes, papyrus) qu'il s'agit de s'approprier (décoder et traduire dans le formalisme contemporain dont on perçoit de fait toute la puissance), on étudie le passage du « montrer » au « démontrer » en comparant les mathématiques babyloniennes et égyptiennes avec les mathématiques grecques (notamment la démonstration par Euclide de l'irrationalité de la racine carrée de deux). Remonter la « chaîne des raisons » conduit à la notion d'axiome ; le questionnement des axiomes de la géométrie peut se prolonger jusqu'à l'émergence des géométries non euclidiennes.</p>	
<b>Fichiers constitutifs de la ressource</b>	<a href="#">Ressource_MATH_la_demonstration.odt</a>	
<b>Mots-clés</b>	démonstration, histoire des mathématiques, épistémologie des mathématiques, géométrie, logique, irrationalité de la racine carrée de 2	
<b>Auteurs</b>	Bernadette Rumeau <sup>2</sup> , Thomas Hausberger <sup>3</sup> et l'équipe IREM Sciences <sup>4</sup>	

<sup>2</sup>Lycée Jean Moulin de Bezier, [bernadette.rumeau@yahoo.fr](mailto:bernadette.rumeau@yahoo.fr)

<sup>3</sup>Université Montpellier 2, [Thomas.Hausberger@univ-montp2.fr](mailto:Thomas.Hausberger@univ-montp2.fr)

<sup>4</sup>Claude Caussidier, Hélène hagège, Bénédicte Hausberger, Thomas Hausberger, François Henn, Cécile Morro, Bernadette Rumeau, Férial Terki  
Copyright IREM de Montpellier

<b>Programme officiel</b>	<b>Contenus</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Raisonnement mathématique</li> <li>- Fonctions : développer, factoriser des expressions algébriques simples, résolution graphique et algébrique d'équations</li> <li>- Approfondissement de la connaissance des différents types de nombre : irrationalité de la racine carrée de 2, valeurs approchées</li> <li>- Géométrie : étude d'un problème d'alignement</li> </ul>
	<b>Objectifs</b>	<p>Former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capable de :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• conduire un raisonnement, une démonstration</li> <li>• faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche</li> <li>• communiquer à l'écrit et à l'oral</li> </ul> <p>La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique.</p>
	<b>Commentaires</b>	<p>L'acquisition de techniques est indispensable, mais elle doit être mise au service de la <i>pratique du raisonnement</i> qui est la base de l'activité mathématique des élèves.</p> <p>Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. Les concepts et méthodes de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant.</p>
<b>Prérequis</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• maîtrise du calcul algébrique élémentaire</li> <li>• fonctions et courbes représentatives, résolution graphique et algébrique d'équations</li> <li>• géométrie dans le plan : définition et propriétés caractéristiques des figures de base, aptitudes à la rédaction d'une démonstration de géométrie selon les exigences du collège</li> </ul>

<p><b>Intérêt</b></p>	<p>Comme l'exprime Nicolas Bourbaki au début des <i>Éléments de Mathématiques</i> : « depuis les grecs, qui dit mathématique dit démonstration ».</p> <p>Il va sans dire qu'une telle phrase met l'accent sur l'aspect formalisé et déductif des mathématiques telles qu'elles apparaissent dans les écrits des mathématiciens depuis Euclide. Ce qui n'est pas sans contraster avec la « logique de la découverte mathématique »<sup>5</sup> qui laisse place à d'autres méthodes, à des heuristiques et des raisonnements de type analogique ou inductif.</p> <p>La pratique pédagogique des démarches mathématiques en classe n'échappe pas à ce dilemme : d'une part laisser bonne place à l'expérimentation, à l'expression de la créativité, tout en conservant la rigueur de la preuve mathématique dans la formalisation du résultat et l'établissement des vérités mathématiques.</p> <p>Or « l'écriture formalisée d'une démonstration ne prend du sens que lorsque les élèves ont bien compris les différents statuts d'un énoncé, la notion d'implication (et qu'ils ont trouvé une piste pour la résolution) » (ÉduSCOL juillet 2009).</p> <p>Le document de collège ÉduSCOL (juin et juillet 2009) apporte des pistes : « on cherche à comparer l'argumentation en mathématiques et l'argumentation dans la vie courante ou dans d'autres disciplines. Persuader, convaincre en mathématique, ne vient pas de la force de conviction : cela n'a pas de sens en mathématiques. Il faut identifier les arguments qui ont légitimité en mathématiques ». Ou encore : « C'est en travaillant, par exemple, des situations construites sur des doutes visuels que l'élève comprendra les nouvelles règles du jeu impliquées par les situations de preuve en géométrie ».</p> <p>La difficulté apparaît en effet de plein fouet dans le cadre de l'apprentissage du raisonnement géométrique. ÉduSCOL nous met en garde : « les énoncés ne doivent pas être systématiquement donnés sous une forme fermée : « montrer que » suivie d'une propriété apparaissant aux élèves aussi évidente que les hypothèses. L'activité géométrique devient alors pour eux un jeu incompréhensible et stérile ». Ou encore : « ce n'est pas en étant confronté à des situations d'une grande pauvreté que l'on peut appréhender vraiment la nécessité d'une preuve, ni d'ailleurs en résolvant de manière répétitive des exercices types ».</p> <p>Le but de cette ressource est justement de remédier à ce manque de sens en n'évinçant pas le questionnement épistémologique : qu'est-ce que démontrer en mathématique par rapport aux autres types d'argumentation ? Pourquoi a-t-on instauré ces règles du jeu ? Notre parti pris est de chercher des éléments de réponse dans des textes empruntés à l'histoire et à la philosophie des mathématiques.</p> <p>L'historien nous apprend que la démonstration mathématique est apparue en tant que type particulier de preuve avec les traités grecs de géométrie (Euclide). L'instauration par les Grecs de la primauté de la raison dans un contexte socio-politique particulier (la démocratie) est donc une cause de cette apparition externe aux mathématiques. Des causes internes, de nature davantage épistémologique, sont à voir dans la résolution de problèmes tels que les questions d'incommensurabilité qui ne peuvent être traités avec les méthodes antérieures (recours à des</p>
-----------------------	---

<sup>5</sup>selon le sous-titre de l'ouvrage « preuves et réfutations » de Imre Lakatos  
Copyright IREM de Montpellier

figures, découpages) : en effet, un résultat d'inexistence ne peut être l'objet d'une construction de figure (il va nécessiter un raisonnement par l'absurde). Le recours à des mesures empiriques fait dire à Aristote « qu'il semble en effet étonnant à tout le monde qu'une quantité donnée ne puisse être mesurée, même par l'unité minima ». L'existence de nombres irrationnels est donc contraire à l'intuition des mathématiciens grecs et s'oppose à leur conception philosophico-mathématique du nombre. Afin de dépasser cet obstacle, il apparaît comme nécessaire de s'affranchir de la figure et de faire usage exclusif de la raison sur des objets définis abstraitement en tant qu'idéalités. Cette démarche est en relation avec leur conception philosophique de la vérité conçue comme dévoilement du réel pour accéder à « l'essence des choses ». Il en résulte l'établissement des mathématiques comme science hypothético-déductive.

Si l'on veut recréer en classe les conditions d'émergence historique de la démonstration, il s'agit donc que cette dernière apparaisse comme un outil indispensable à la résolution d'un problème. Une première étape est la mise en doute de l'appel à la figure comme preuve valide. C'est un des objectifs de l'activité 1 qui pose un certain nombre de situations problèmes composées d'un énoncé et d'une argumentation qu'il s'agit d'analyser et d'évaluer selon le critère démonstratif (préalablement clarifié grâce au dictionnaire en opposant les verbes montrer et démontrer).

L'activité 2 consiste en l'étude de textes historiques confrontant les mathématiques égyptiennes et babyloniennes pré-démonstratives aux mathématiques grecques. L'idée est donc de vivre cette rupture épistémologique dans le contexte historique où elle s'est produite. On aurait pu également créer une situation-problème plus élémentaire qui provoque le même effet de nécessité interne du recours à la démonstration et remplacer les raisons externes et philosophiques de l'apparition de la démonstration par l'autorité seule du professeur qui définit les normes et le contexte. Cela nous paraît réducteur, le recours à l'histoire offrant de plus la possibilité d'humaniser par la même occasion la pratique mathématique en la replaçant comme une activité humaine. Ce n'est pas sans difficultés ! Il est naïf en effet de penser que l'histoire des mathématiques facilite l'enseignement des mathématiques. Pour en tirer profit, un travail de mise en perspective et des artifices didactiques sont souvent nécessaires. Par exemple, il s'agit de motiver la restriction aux rapports d'entiers pour que des élèves habitués à la manipulation des nombres décimaux s'approprient la problématique des grecs. La question de l'incommensurabilité en géométrie ou de l'irrationalité en arithmétique est assez technique, ce qui rend la démonstration d'Euclide difficile d'accès. Cette ressource propose des scénarios adaptés qui ont été testés en classe.

Enfin, l'élève est amené dans l'activité 3 à rédiger lui-même une démonstration de géométrie dans le plan, selon les canons de la rigueur et fort de sa connaissance des tenants et des aboutissants. C'est l'occasion d'apporter le chaînon manquant, c'est-à-dire de remonter jusqu'aux axiomes posés par Euclide, ce qui n'est jamais fait dans le cours classique de géométrie, et de définir le statut des divers énoncés

(définition, propriétés, propositions, théorèmes) et leurs connexions logiques au sein de la chaîne des raisons. En d'autres termes, de détailler et réaliser pleinement la structure axiomatique d'une théorie mathématique.

En guise de conclusion, citons quelques mots de la préface de Michel Blay à l'ouvrage collectif « La mathématique : Volume 1, Les lieux et les temps » paru à CNRS Editions en 2009 :

*Il convient, en conséquence, dans l'enseignement, de revenir à ce qui constitue et a, depuis des siècles, constitué le principal apport des mathématiques : enseigner que toute affirmation doit être démontrée pour être partagée. C'est à cette condition que peut s'instaurer, dans l'histoire, la liberté de chacun et l'émancipation de tous. Il ne suffit pas de critiquer, de dire que l'on n'est pas d'accord, encore faut-il prouver et démontrer. Les mathématiques apprennent à viser la connaissance et la vérité dans l'exigence démonstrative et en cela indiquent le sens d'une certaine ascèse intellectuelle bien éloignée du jeu des beaux parleurs remplissant les médias et la politique.*

## Détail des activités :

### Activité 1

**Désignation :** montrer-démontrer

<b>Objectifs</b>	<b>Compétences épistémologiques</b>	- savoir repérer et caractériser une démonstration mathématique - distinguer induction et déduction - distinguer vérité d'une assertion et validité de l'argumentation (selon le critère démonstratif) - comprendre le rôle et le statut de la figure dans la démonstration mathématique.
	<b>Compétences transversales</b>	- entendre l'argumentation de l'autre, être capable de la réfuter au besoin par une argumentation raisonnée logique.
	<b>Compétences scientifiques</b>	Apprentissage de la logique et du raisonnement : - utiliser un contre-exemple pour nier une proposition universelle

### Description de l'activité :

Après avoir élaboré un dictionnaire mathématique commun concernant les termes « montrer » et « démontrer » qui met clairement en évidence ce qui différencie pour nous les deux mots, on étudie des exemples proposant différents types d'argumentation, en évalue le caractère démonstratif, et au besoin réfute l'assertion par une argumentation raisonnée logique (voir [fiche élève activité 1](#)).

Organisation préalable à l'activité : prévoir 4 à 5 groupes de 7 élèves pour qu'une discussion entre les groupes puisse s'amorcer.

1ère étape : chaque groupe cherche une définition des mots montrer et démontrer, en donne des synonymes, s'attache à distinguer ce qui différencie les deux termes.

Durée : 10 minutes

2ème étape : Dans chaque groupe un rapporteur fait le bilan. Au tableau le professeur note les différentes définitions, les synonymes. On observe ce qui différencie les deux termes. **On convient d'une première mouture sur la définition mathématique de chaque mot.** Chaque groupe prend note de cette première définition.

Durée : 15 minutes

3ème étape : lecture de chaque document. Chaque groupe a eu pour instruction de repérer et retranscrire le fait sur lequel porte l'argumentation.

Durée : 15 minutes

4ème étape : mise en commun au tableau et discussion entre les groupes. Il est important qu'un consensus se dégage. Éventuellement le professeur interviendra dans cette phase.

Durée : 15 minutes



5ème étape : Chaque groupe étudie les documents et répond à la question 3) des consignes. La moitié des groupes pourra commencer par les documents 1 à 3 et l'autre moitié par les numéros 4 à 6 (on peut associer les documents de la sorte, voir remarques ci-dessous) de sorte que l'on dispose bien de rapporteurs pour chaque exercice lors de la mise en commun, au cas où le temps viendrait à manquer. Chaque groupe prendra soin de désigner d'une part un secrétaire pour garder trace écrite de cette première phase de recherche (y compris en veillant à prendre note des désaccords au sein du groupe) et d'autre part un rapporteur pour rendre compte du travail.

Le professeur circule d'un groupe à l'autre pour répondre à d'éventuels problèmes techniques (développements, factorisations,...) qui parasiteraient la recherche. Il aide aussi si nécessaire à l'énoncé d'une propriété (théorème de Thalès,...) qui paraîtrait utile aux élèves.

A disposition tout au long de la séance : une calculatrice munie d'un logiciel de calcul formel, livres et cahiers de math

Durée : 55 minutes

6ème étape : Chaque groupe rapporte ses résultats. S'en suit une discussion entre les groupes. Chaque groupe doit prévoir une prise de notes sur les interventions des autres groupes.

Durée : 40 minutes

7ème étape : **Chaque groupe rédige une synthèse** à partir du travail du groupe et des apports des autres groupes. Ce document final contiendra :

- une définition des mots montrer et démontrer qui aura éventuellement été enrichie au fur et à mesure de l'activité ;
- pour chaque document une réponse du groupe aux questions posées.

**La synthèse doit faire apparaître les désaccords éventuels qui persisteraient après la mise en commun de la 6ème étape**

Durée : 15 minutes

### Remarques :

- Le dictionnaire donne plusieurs définitions : dans un premier sens, démontrer est synonyme de prouver, c'est-à-dire établir la vérité de quelque chose. Ce n'est qu'en logique que l'on considère la démonstration comme un type particulier de preuve basé sur la déduction à partir de prémisses. Conformément à l'étymologie de démontrer : montrer à partir de. Montrer tout seul signifie « donner à voir » : les preuves pré-démonstratives sont basées justement sur des procédés visuels.  
Une autre difficulté réside dans l'usage abusif du verbe montrer dans les énoncés des questions d'un problème mathématique : seul un enseignant averti utilise exclusivement le verbe démontrer. C'est l'occasion d'une mise au point.
- les documents 1, 2 et 3 présentent des propositions visant une universalité et interrogent donc l'élève sur ce que signifie démontrer une telle proposition. C'est l'occasion de faire remarquer que l'induction mathématique diffère fondamentalement de l'induction en sciences expérimentales où l'examen d'un nombre fini de cas suffit à énoncer une loi générale<sup>6</sup>. C'est d'ailleurs cette confusion entre des épistémologies différentes qui amènent l'élève à généraliser hâtivement en mathématique. Bien que le principe de récurrence ne soit pas encore disponible, énoncer les quantificateurs et nier une proposition universelle fait parti des compétences travaillées en seconde dans le cadre de la pratique des notations et du raisonnement mathématique. C'est également l'occasion de distinguer induction et déduction en tant que types de raisonnement.
- Le document 4 questionne quant à la fiabilité d'une lecture graphique pour la résolution d'une équation. L'utilisation de la fonction zoom de la calculatrice permettra de douter de la validité de l'affirmation. Si le travail sur la résolution algébrique des équations est suffisamment avancé, l'élève peut envisager une factorisation de  $f(x)$  qui sera alors fournie

<sup>6</sup>ce que conteste notamment Popper qui dira que les expériences corroborent l'hypothèse plutôt que la vérifient.

par la calculatrice munie d'un logiciel de calcul formel tenue à disposition depuis le début de la séance. Dans le cas contraire, le problème posé par le document 4 pourra être repris ultérieurement lors d'une séance plus spécifiquement consacrée aux équations.

- Le document 6 fera douter de la rigueur d'un raisonnement utilisant des découpages. S'il est aisé pour l'élève de confirmer l'exactitude de l'affirmation du document 5 en faisant références à des propriétés de géométrie bien connues, quelques considérations d'angles permettront de mettre en évidence la fausse diagonale de « rectangle » obtenue après découpage pour ce qui concerne le document 6. Pour la petite histoire, le découpage du document 5 est un extrait de mathématiques chinoises qui donnent un bon exemple de ce que peuvent être des mathématiques sans axiomatique, fondées uniquement sur des procédés opératoires visuels convaincants. L'exemple du document 6 est quant à lui dû à Lewis Carroll.

En définitive, les documents 4 et 6 amènent l'élève au constat que les sens peuvent le tromper, ce qui est un premier pas pour faire émerger « l'exigence démonstrative » et donner son statut à la démonstration.

## Activité 2

**Désignation** : le passage du montrer au démontrer dans l'histoire des mathématiques

<b>Objectifs</b>	<b>Compétences épistémologiques</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>- constater l'évolution dans la présentation de textes mathématiques et proposer des explications de cette évolution</li><li>- saisir l'efficacité du langage symbolique</li><li>- s'interroger sur la nature des objets mathématiques</li><li>- prendre conscience de l'existence de ruptures épistémologiques</li><li>- prendre conscience que le développement de mathématiques s'inscrit dans un contexte socio-économique et culturel.</li></ul>
	<b>Compétences transversales</b>	
	<b>Compétences scientifiques</b>	Apprentissage de la logique et du raisonnement : <ul style="list-style-type: none"><li>- implication, contraposée</li><li>- raisonnement par l'absurde</li></ul>

### Description de l'activité :

Trois textes historiques sont travaillés afin d'en assimiler le contenu mathématique (d'où la nécessité d'une réécriture dans le formalisme contemporain, ce qui permet au passage de saisir l'efficacité du langage symbolique) puis de mettre en relation les mathématiques développées à une époque donnée avec le projet humain dans lequel ces mathématiques s'insèrent. On compare ainsi les mathématiques égyptiennes et babyloniennes à celles élaborées par les grecs (en l'occurrence la démonstration par Euclide de l'irrationalité de la racine carrée de deux). Les historiens des mathématiques situent en effet le passage du « montrer » au « démontrer » lors de l'écriture des traités de géométrie grecs, en relation avec de tels problèmes où l'exigence démonstrative est requise, outre par une société qui instaure la primauté de la raison (raison externe), par la nécessité d'établir un résultat qui va contre l'intuition et les conceptions antérieures (raison interne).

Préalable à la première étape : distribution du document donnant quelques repères sur le passage du montrer au démontrer dans l'histoire des mathématiques. Ce document aura été distribué quelques jours avant le début de l'activité. Les élèves doivent lire ce document et sont prévenus qu'ils peuvent en disposer désormais tout au long des activités.

1ère étape : Elle consiste en un travail sur les documents 7 et 8.

Le travail se fait en classe par groupes (on gardera les groupes de la première activité). Chaque groupe doit produire un document-réponse à la fin de la séance. Chaque groupe désignera un secrétaire chargé de rapporter les réponses ainsi qu'une (ou plusieurs) « tête chercheuse » chargée d'investiguer auprès des autres groupes.

Cette première étape suppose une « âme aventurière ». En chacun l'« Indiana Jones » est chargé de percer les mystères. Les groupes peuvent à tout moment échanger des indications mais le travail est plus « solitaire » que celui mené dans la première activité.

Le professeur reste à disposition, comme source d'information, et fournit aux élèves tout document souhaité. A la fin de la séance, il récupère les documents réponses de chaque groupe.

Durée : 1 heure

Remarques :

- **En prolongement de cette étape est à prévoir** une correction finale concernant les deux documents, faite en classe.
- Un devoir à la maison peut être proposé sur l'algorithme d'Héron d'Alexandrie, autour de l'idée ci-après.  
Une heuristique expliquant la genèse de cet algorithme est la suivante : si  $a \leq \sqrt{2}$  (resp.  $a \geq \sqrt{2}$ ) alors  $\frac{2}{a} \geq \sqrt{2}$  (resp.  $\frac{2}{a} \leq \sqrt{2}$ ). Il est donc naturel de considérer la moyenne des deux nombres  $a$  et  $\frac{2}{a}$  et de se demander s'il s'agit d'une meilleure approximation de  $\sqrt{2}$ .

2ème étape elle consiste en un travail sur le document 9.

Préalables à la deuxième étape :

1. Distribution de l'introduction au document 9 quelques jours avant la séance. Les élèves doivent lire le document et éventuellement demander des éclaircissements avant la séance.
2. Les élèves sont informés de l'organisation de la séance : il s'agira cette fois d'un travail plus « solitaire » qui débouchera sur une production individuelle. Mais des aides précieuses vont les guider puisque l'auteur même du document étudié se présentera sous leurs yeux accompagné d'un traducteur-commentateur !
3. Un appel à candidature est lancé : on a besoin d'un acteur qui jouera Euclide et d'un traducteur commentateur qui sera notre guide dans la compréhension du texte.
4. Un travail du professeur en amont avec les deux élèves candidats est alors nécessaire pour les familiariser avec le texte et travailler sur la performance d'acteur attendue (la qualité de la mise en scène est un élément important pour la réussite de l'activité) : les deux élèves doivent comprendre qu'il s'agit pour eux non pas d'être jugés par les autres mais de relever un défi d'envergure : donner à chacun l'envie, le plaisir et les moyens de suivre Euclide dans sa démonstration. Durée à prévoir : 2 heures au moins.

Remarques :

Ci-jointes trois versions de la proposition 117 d'Euclide :

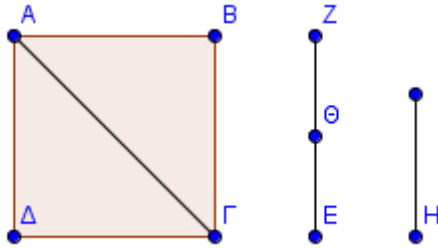
- la version n°1 est la traduction intégrale connue du texte originel.
- La version n°2 reprend la version n°1 élaguée : il s'agit de rendre plus accessible la version n°1 sans rien perdre des objectifs de l'activité. Elle figure sur la fiche élève de l'activité 2.
- La version n°3 est une version plus « actuelle » de la version n°2. On peut la préférer si l'on considère que la syntaxe de la version n°1 et de la version n°2 ainsi que l'utilisation de certaines tournures risquent de déstabiliser inutilement les élèves voire de compromettre la réussite de l'activité.

Version n°1 :

PROPOSITION CXVII

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le carré  $AB\Gamma\Delta$ , et que  $A\Gamma$  soit sa diagonale ; je dis que la droite  $A\Gamma$  est incommensurable en longueur avec  $AB$ .



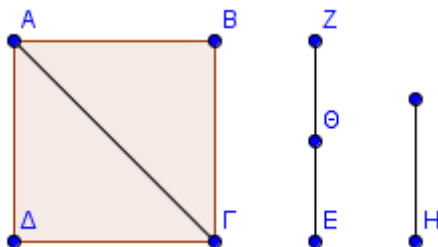
Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le carré de  $A\Gamma$  est double du carré de  $AB$  (47.10) ; mais  $A\Gamma$  est commensurable avec  $AB$  ; la droite  $A\Gamma$  a donc avec la droite  $AB$  la raison qu'un nombre a avec un nombre (6.10). Que  $A\Gamma$  ait avec  $AB$  la raison que le nombre  $EZ$  a avec le nombre  $H$ , et que les nombres  $EZ, H$  soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux ; le nombre  $EZ$  ne sera pas l'unité. Car si  $EZ$  était l'unité, à cause que  $EZ$  a avec  $H$  la raison que  $A\Gamma$  ait avec  $AB$ , et que  $A\Gamma$  est plus grand que  $AB$ , l'unité  $EZ$  serait plus grande que le nombre  $H$ , ce qui est absurde ;  $EZ$  n'est donc pas l'unité ;  $EZ$  est donc un nombre. Et puisque  $\Gamma A$  est à  $AB$  comme  $EZ$  est à  $H$ , le carré de  $\Gamma A$  sera au carré de  $AB$  comme le carré de  $EZ$  est au carré de  $H$ . Mais le carré de  $\Gamma A$  est double du carré de  $AB$  ; le carré de  $EZ$  est donc double du carré de  $H$  ; le carré du nombre  $EZ$  est donc pair. Le nombre  $EZ$  est donc pair ; car s'il était impair, son carré serait impair ; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23.9) ; le nombre  $EZ$  est donc un nombre pair. Partageons le nombre  $EZ$  en deux parties égales en  $\Theta$ . Puisque les nombres  $EZ, H$  sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres sont premiers entr'eux. Mais le nombre  $EZ$  est pair ; le nombre  $H$  est donc impair. Car s'il était pair, les nombres  $EZ, H$ , qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux ; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre  $H$  n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair. Mais  $EZ$  est double de  $E\Theta$  ; le carré de  $EZ$  est donc quadruple du carré de  $E\Theta$  (11.8). Mais le carré de  $EZ$  est double du carré de  $H$  ; le carré de  $H$  est donc double du carré de  $E\Theta$  ; le carré de  $H$  est donc pair ; le nombre  $H$  est donc pair, d'après ce qui a été dit (29.9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible ; la droite  $A\Gamma$  n'est donc pas commensurable en longueur avec  $AB$  ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

Version n°2 :

### PROPOSITION CXVII

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le carré  $AB\Gamma\Delta$ , et que  $A\Gamma$  soit sa diagonale ; je dis que la droite  $A\Gamma$  est incommensurable en longueur avec  $AB$ . **\*arret 1**



Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. **\*arret 2** Or il est évident que le carré de  $A\Gamma$  est le double du carré de  $AB$  (47.10) **\*arret 3** ; mais  $A\Gamma$  est commensurable avec  $AB$ . Que  $A\Gamma$  ait avec  $AB$  la raison que le nombre  $EZ$  a avec le nombre  $H$ , et que les nombres  $EZ, H$  soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux **\*arret 4**. Puisque  $\Gamma A$  est à  $AB$  comme  $EZ$

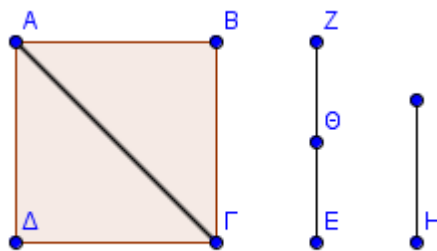
est à H, le carré de  $\Gamma A$  sera au carré de AB comme le carré de EZ est au carré de H.  
**\*arrêt 5** Mais le carré de  $\Gamma A$  est double du carré de AB ; le carré de EZ est donc double du carré de H **\*arrêt 6** ; le carré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair ; car s'il était impair, son carré serait impair (29.9) **\*arrêt 7** ; le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en  $\Theta$ . Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres sont premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair ; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux ; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre H n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair. Mais EZ est le double de  $E\Theta$  ; le carré de EZ est donc quadruple du carré de  $E\Theta$  (11.8). Mais le carré de EZ est le double du carré de H ; le carré de H est donc double du carré de  $E\Theta$  ; le carré de H est donc pair ; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit (29.9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible ; la droite  $A\Gamma$  n'est donc pas commensurable en longueur avec AB ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

Version n°3 :

### PROPOSITION CXVII

On se propose de démontrer que dans un carré la diagonale et le côté sont incommensurables en longueur.

Soit un carré  $AB\Gamma\Delta$  et soit  $A\Gamma$  sa diagonale. Je vais démontrer que les segments  $A\Gamma$  et AB sont incommensurables en longueur. **\*arrêt 1**



Supposons que les segments  $A\Gamma$  et AB sont commensurables en longueur : je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. **\* arrêt 2** Or il est évident que le carré de  $A\Gamma$  est le double du carré de AB (47.10) **\* arrêt 3** ; mais j'ai supposé que  $A\Gamma$  est commensurable avec AB. Soit alors les nombres EZ et H les plus petits possibles tels que le rapport entre  $A\Gamma$  et AB soit le même que le rapport entre EZ et H **\* arrêt 4**. Puisque le rapport entre  $A\Gamma$  et AB est le même que celui entre EZ et H, le rapport entre le carré de  $A\Gamma$  et le carré de AB est le même que le rapport entre le carré de EZ et le carré de H **\* arrêt 5**. Mais le carré de  $\Gamma A$  est le double du carré de AB ; le carré de EZ est donc le double du carré de H **\*arrêt 6** ; le carré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair ; car s'il était impair, son carré serait impair (29.9) **\* arrêt 7** ; le nombre EZ est donc pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en  $\Theta$ . Puisque les nombres EZ et H sont les plus petits de ceux dont le rapport est le même que le rapport entre  $A\Gamma$  et AB, ces nombres sont premiers entre eux. Mais le nombre EZ est pair ; le nombre H est donc impair. Car, s'il était pair, les nombres EZ et H seraient mesurés par deux, ce qui est impossible. Le nombre H n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair. Mais EZ est le double de  $E\Theta$  ; le carré de EZ est donc le quadruple du carré de  $E\Theta$  (11.8). Mais le carré de EZ est le double du carré de H ; le carré de H est donc le double du carré de  $E\Theta$  ; le carré de H est donc pair ; le nombre H est donc pair. Mais il est aussi impair, ce qui est impossible. La diagonale  $A\Gamma$  n'est donc pas commensurable en longueur avec AB. Elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

Déroulement de la séance : Durée : 55minutes

- Distribution des documents et rappel sur l'organisation générale de l'activité et sur les consignes. (5minutes)
- Lecture silencieuse du document. Surtout pas de panique ! (5minutes)
- Euclide et son traducteur commentateur en scène : durant cette étape les élèves peuvent prendre des notes et sont invités à répondre aux sollicitations qui leur seront faites.  
En scène : Euclide, le traducteur-commentateur élève au tableau et le professeur-animateur. La mise en scène doit aider les élèves à prendre confiance face au texte et doit progressivement leur donner envie de voler de leurs propres ailes. On ne détaillera au maximum que jusqu'à l'arrêt 7. La fin du texte sera ensuite lue sans aucun commentaire.
- Euclide joue le texte jusqu'à l'arrêt 1.
- **Arrêt 1** : pour le traducteur-commentateur il s'agit de s'assurer que les élèves comprennent le sens de « commensurables en longueur » et de leur demander une traduction contemporaine.  
On attend : *On doit démontrer que le rapport entre la diagonale et le côté du carré est un nombre rationnel c'est-à-dire que  $\frac{A\Gamma}{AB}$  est un nombre rationnel.*
- Euclide joue jusqu'à l'arrêt 2.
- **Arrêt 2** : pour le traducteur-commentateur et l'animateur, il s'agit de s'assurer que les élèves ont bien compris le type de raisonnement que propose Euclide.  
On attend : *je suppose que  $\frac{A\Gamma}{AB}$  est un nombre rationnel et je vais démontrer que cette hypothèse entraînerait une contradiction (que je précise : un certain nombre serait à la fois pair et impair).*  
Indiquer qu'un tel raisonnement est appelé un raisonnement par l'absurde. L'écrire au tableau.
- Euclide joue le texte jusqu'à l'arrêt 3.
- **Arrêt 3** : informer qu'Euclide n'est pas homme à affirmer sans justification rigoureuse. Tout ce qui est énoncé est donc soit démontré directement dans le texte soit a été démontré dans une proposition antérieure à la proposition 117. Euclide y fait alors référence en citant entre parenthèses le numéro de cette proposition.  
Faire énoncer la proposition 47.10 en utilisant le langage symbolique.  
On attend : *Dans le carré  $AB\Gamma\Delta$  on a  $A\Gamma^2 = 2 AB^2$  (à écrire au tableau).*  
Demander aux élèves une justification de cette affirmation à partir de leurs connaissances.  
Convenir avec les élèves que pour la suite du texte toute proposition antérieurement démontrée sera supposée acquise tout au moins durant le travail sur la proposition 117 (on y reviendra après).
- Euclide joue jusqu'à l'arrêt 4.
- **Arrêt 4** : demander une traduction.  
On attend : *j'ai supposé que  $\frac{A\Gamma}{AB}$  était un nombre rationnel. Je considère alors les nombres  $EZ$  et  $H$  tels que :*  
$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{EZ}{H}$$
*avec  $EZ$  et  $H$  les plus petits possibles (à écrire au tableau)*  
Dans notre langage actuel que dirons nous de  $\frac{EZ}{H}$  ?
- Euclide joue jusqu'à l'arrêt 5.
- **Arrêt 5** : demander la traduction en langage symbolique (l'élève va prendre conscience de la puissance de concision de notre langage symbolique et du coup devrait prendre confiance en lui face au défi qui lui est lancé).  
Le traducteur-commentateur écrit la traduction au tableau.

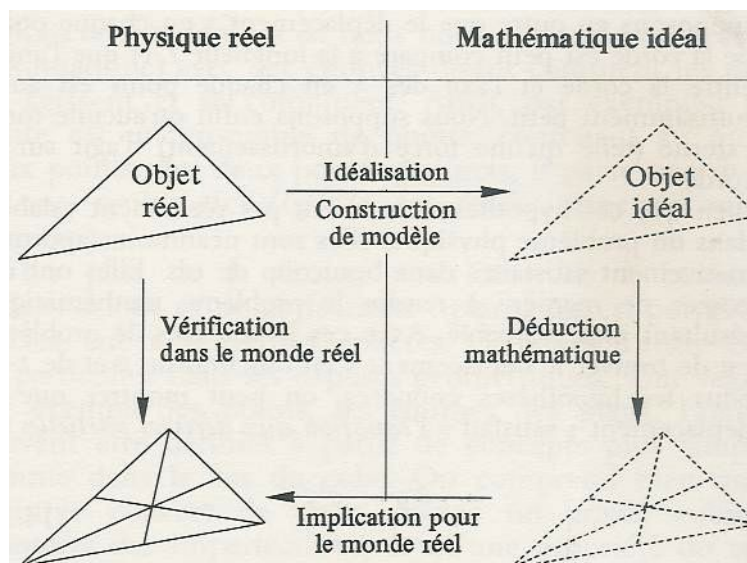
- Euclide joue jusqu'à l'arrêt 6.
- **Arrêt 6** : il s'agit de vérifier que l'enchaînement a été bien vu.  
On attend : *j'ai déjà vu que  $A\Gamma^2 = 2 AB^2$  donc j'en déduis que :*  
$$EZ^2 = 2 H^2$$
 (à écrire au tableau)
- Euclide joue jusqu'à l'arrêt 7.
- **Arrêt 7** : le traducteur commentateur écrit au tableau :  
 $EZ^2$  est pair donc  $EZ$  est pair car si  $EZ$  était impair son carré serait impair.  
Demander l'énoncé de la proposition 29.9.  
On attend : *si  $EZ$  est impair alors  $EZ^2$  est impair.*  
Puis demander une traduction hors contexte.  
On attend : *si un nombre est impair alors son carré est impair.* (Cette proposition est nommée 29.9 et supposée acquise).  
Relire alors dans son entier l'argumentation sur la parité de  $EZ$ .  
Indiquer alors qu'Euclide va terminer sa proposition sans interruption.
- Euclide joue la proposition jusqu'à la fin.
- Proposer aux élèves une lecture silencieuse de l'intégralité du texte.
- En fonction du temps restant les élèves pourront commencer leur travail individuel.

Remarques : il faudra prévoir un temps de correction du devoir à la maison lié à l'activité. Ce temps de correction peut être l'occasion de nouveaux travaux parmi lesquels :

1. une nouvelle version de la proposition : les élèves auront-ils pensé à travailler avec  $\sqrt{2}$  et à poser le problème en terme de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  ?
2. Un travail de recherche sur l'argumentation originelle d'Euclide concernant les propositions 47.10 ; 29.9 ; 11.8. Quelques indications :
  - pour 47.10, Euclide a dans l'esprit un raisonnement géométrique à partir d'une figure bien connue des mathématiciens grecs : dessiner un carré, une de ses diagonales, puis construire un carré de côté cette diagonale (compléter les trois côtés manquants). Quel découpage permet de montrer que l'aire du grand carré est double de celle du petit carré ?
  - Pour 29.9, Euclide a recourt à la proposition 23.9 de la version n°1 (texte original).
  - Euclide utilise encore un argument géométrique pour démontrer 11.8.
3. Une étude complémentaire de la proposition 117 dans une version non élaguée.
4. L'occasion est aussi ici donnée d'envisager un travail plus spécifique sur l'opération logique qu'est l'implication, la contraposée (arrêt 7 où l'on raisonne par disjonction de cas et raisonnement par l'absurde pour éliminer l'un des deux cas, tant que la notion de contraposée n'est pas acquise).
5. Enfin le document 10 pourrait être éclairé par l'intervention d'un professeur de philosophie concernant la philosophie platonicienne. Le premier paragraphe exprime la conception hypothético-déductive des mathématiques : par rapport au texte de la démonstration d'Euclide, c'est un point de vue réflexif sur les mathématiques. Le second paragraphe donne l'occasion de parler de la nature des objets mathématiques et de leur lien avec le réel. L'enjeu est important : l'apparition de la démonstration en géométrie est liée historiquement à celle de la conception abstraite des objets de la géométrie. Le problème de la perte de sens dans l'enseignement de la géométrie ne peut pas se résoudre sans préciser le statut de la figure dans un raisonnement de géométrie. Pour l'élève, le caractère concret des êtres géométriques (on peut les tracer au tableau) rend a priori inutile la démonstration : il suffit de construire une figure générique.  
On s'est efforcé de convaincre l'élève que la « preuve par la figure » ne suffit pas. Ce qui n'est pas évident : par exemple, on peut se sortir du piège du document 4 (activité 1) par un changement d'échelle (fenêtrage) et de celui du document 6 par une figure plus soignée. Présenter comme une thèse philosophique et un fait culturel que les objets mathématiques sont des idéalités introduit une autre raison qui renforce le contrat. L'articulation avec le



monde physique réel peut être présenté sous la forme du tableau suivant<sup>7</sup>. La définition axiomatique des objets de la géométrie formulée par Euclide sera exposée au sein de l'activité 3.



Terminons par une remarque sur la notion de vérité chez les grecs, notion qui a des conséquences sur la manière dont on conçoit la démonstration puisque cette dernière a pour fonction d'établir des vérités. Dans la pensée grecque classique, la vérité (*aletheia*) signifie étymologiquement le dévoilement du réel d'abord caché aux sens. La vérité est atteinte au terme d'une démarche de découverte qui permet à l'esprit de voir l'essence des choses, donc d'accéder à la connaissance-contemplation (*theoria*). C'est le sens de l'allégorie de la caverne de Platon. Le terme démonstration contient d'ailleurs une métaphore visuelle : *démonstration* signifie « qui montre à partir de » (*apo-deixis* en grec : indiquer avec l'index). La démonstration est cette démarche rationnelle sur les idéalités mathématiques qui établit la certitude du résultat par un enchaînement de raisons à partir de points de départ déterminés : les hypothèses ou prémisses, qui sont perçues comme des saisies intellectuelles intuitives. Pour autant, d'après Platon, les mathématiques ne permettent pas d'atteindre la connaissance-contemplation car les êtres mathématiques ne sont pas des idéalités pures (ce sont des mixtes touchés par la relation sensible au monde) et la méthode mathématique est discursive : ce n'est pas la dialectique des philosophes qui seule permet d'atteindre la vérité. Bien entendu, la notion de vérité évoluera avec l'apport d'autres philosophes (Kant, ...) et le chemin des mathématiques vers l'abstraction se poursuivra jusqu'à poser des objets comme de simples conventions de l'esprit qui construit ses catégories et ses règles.

<sup>7</sup>d'après Philip J. Davis, Reuben Hersh, « L'univers mathématique ». Gauthier-Villars  
Copyright IREM de Montpellier

### Activité 3

**Désignation :** la chaîne des raisons

<b>Objectifs</b>	<b>Compétences épistémologiques</b>	- distinguer définition et propriétés - prendre conscience que certaines propriétés ne se démontrent pas : les axiomes - prendre conscience de la structure axiomatique d'une théorie en mathématique - mettre en œuvre une démonstration mathématique
	<b>Compétences transversales</b>	
	<b>Compétences scientifiques</b>	Savoir mener une démonstration de géométrie

#### **Description de l'activité :**

L'élève est amené à conduire une démonstration de géométrie selon les canons de la rigueur en mathématique. On lui demande de donner une définition des objets géométriques en jeu et d'énoncer clairement les propriétés et théorèmes utilisés au cours de sa démonstration. Cela conduit à remonter la chaîne des raisons et à faire émerger la notion d'axiome. Les demandes et postulats d'Euclide sont donnés et la chaîne des raisons complétée. C'est enfin l'occasion de découvrir une nouvelle rupture épistémologique qui débouche sur les géométries non euclidiennes.

#### Déroulement :

Cette troisième activité peut se dérouler dans le cadre plus habituel d'une séance de travaux dirigés. Durée 55 minutes.

On aura proposé le petit exercice concernant le document 11 en exercice à préparer à la maison avant le déroulement de la séance.

- La séance démarre alors par la correction de l'exercice qui met en évidence l'existence et la nécessité de définitions communes des objets usuels de la géométrie et la nécessaire connaissance de certaines propriétés relatives à ces objets.
- On s'interroge alors naturellement sur les primas de l'édifice géométrique ce qui conduit à la lecture des axiomes (dont on commencera par donner une traduction modernisée).
- On en vient alors à s'intéresser à la longue chaîne des raisons, à se servir de certains éléments de cette chaîne pour démontrer une propriété utilisée dans l'exercice relatif au document 11.
- On remonte enfin jusqu'à l'axiome 5 pour démontrer l'un des maillons de la chaîne.
- La fin de la séance est plus informative : elle ramène à l'axiome 5 et aux interrogations et travaux autour de cet axiome jusqu'à entrouvrir la porte vers les géométries non euclidiennes.

## Scénario de l'activité 1

**désignation** : montrer-démontrer

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée <sup>8</sup>
1	élèves	recherche de définitions	en classe par petits groupes	dictionnaire, <a href="#">fiche élève activité 1</a>	10 min
2	élèves rapporteurs et professeur	mise en commun et institutionnalisation	en classe		15 min
3	élèves	lecture de documents, repérage et réécriture du fait principal	en classe par petits groupes	<a href="#">fiche élève activité 1</a>	15 min
4	élèves rapporteurs et professeur	mise en commun et institutionnalisation	en classe		15 min
5	élèves	examen de l'argumentation	en classe par petits groupes	<a href="#">fiche élève activité 1</a> , (éventuellement calculatrice, système de calcul formel) <a href="#">fiche professeur activité 1</a>	55 min
6	élèves rapporteurs et professeur	mise en commun et institutionnalisation	en classe		40 min
7	élèves	élaboration d'une synthèse	en classe par petits groupes	<a href="#">fiche élève activité 1</a>	15 min

## Scénario de l'activité 2

**désignation** : le passage du montrer au démontrer dans l'histoire des mathématiques

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée
1	élèves	prise de connaissance avec le contexte historique	à la maison	<a href="#">annexe 1 à la fiche élève activité 2</a>	
2	élèves	travail sur les documents 7 et 8	en classe par petits groupes	<a href="#">fiche élève activité 2</a> , <a href="#">fiche professeur activité 2</a>	1 h
3	élèves	mise en situation : conceptions pythagoriciennes du nombre	à la maison	<a href="#">annexe 2 à la fiche élève activité 2</a>	

<sup>8</sup> Cette durée est donnée à titre indicatif et prévisionnel  
Copyright IREM de Montpellier

4	deux élèves motivés et le professeur	travail préparatoire à la mise en scène de la démonstration d'Euclide (document 9)	à la maison	<a href="#">fiche professeur activité 2</a>	(2 h)
5	les deux élèves et le professeur	mise en scène de la démonstration d'Euclide	en classe	<a href="#">suite de la fiche élève activité 2</a> , <a href="#">fiche professeur activité 2</a>	1 h
6	élèves	devoir à la maison	à la maison	<a href="#">suite de la fiche élève activité 2</a>	
7	professeur	correction du devoir à la maison et prolongements	en classe	<a href="#">fiche professeur activité 2</a>	1 h

### Scénario de l'activité 3

**désignation** : la chaîne des raisons

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée
1	élèves	résolution d'un exercice de géométrie (document 11 question 1)	à la maison	<a href="#">fiche élève activité 3</a>	
2	professeur (et élèves volontaires)	correction de l'exercice	en classe		15 min
3	professeur et élèves	discussion (émergence de la notion d'axiome), examen de la chaîne des raisons depuis les postulats d'Euclide.	en classe	<a href="#">fiche élève activité 3</a> <a href="#">fiche professeur activité 3</a>	40 min

## Fiche élève activité 1

**Désignation :** montrer-démontrer

**Organisation générale de l'activité :**

- l'activité se fait par groupe.
- Dans chaque groupe il faut prévoir : un secrétaire (ou plusieurs) qui prend note des réponses du groupe et des interventions des autres groupes lors des phases de mise en commun et un rapporteur du groupe qui portera la ou les réponses du groupe en veillant à faire apparaître les désaccords au sein du groupe s'il y en a.
- A l'issue de l'activité chaque groupe produira un document final donnant les réponses du groupes aux questions posées dans l'activité.

**Enoncé des consignes :**

1. A l'aide d'un dictionnaire chercher une définition de chacun des mots « montrer » « démontrer ». Pour chaque mot donner des synonymes. Mettre en évidence ce qui distingue les deux mots.
2. Pour chaque document fourni **repérer le fait** sur lequel porte l'argumentation et **le réécrire**.
3. L'argumentation du fait est-elle une démonstration ? Si oui pouvez-vous expliquer les étapes du raisonnement ? Si non, avez-vous la possibilité de démontrer vous-même le fait énoncé ou de démontrer que ce fait est faux ?
4. En tenant compte de la mise en commun entre tous les groupes, faire une synthèse par groupe qui donne une version définitive de vos réponses aux trois premières questions.

**Documents :**

**Document 1 :** *le loup et l'agneau (La Fontaine)*

La raison du plus fort est toujours la meilleure :

Nous l'allons montrer tout à l'heure.

Un Agneau se désaltérait

Dans le courant d'une onde pure.

Un Loup survient à jeun qui cherchait aventure,

Et que la faim en ces lieux attirait.

Qui te rend si hardi de troubler mon breuvage ?

Dit cet animal plein de rage :

Tu seras châtié de ta témérité.

– Sire, répond l'Agneau, que votre Majesté

Ne se mette pas en colère ;

Mais plutôt qu'elle considère

Que je me vas désaltérant

Dans le courant,

Plus de vingt pas au-dessous d'Elle

Et que par conséquent, en aucune façon,

Je ne puis troubler sa boisson.

– Tu la troubles, reprit cette bête cruelle,

Et je sais que de moi tu médis l'an passé.

– Comment l'aurais-je fait si je n'étais pas né ?

Reprit l'Agneau, je tette encore ma mère.  
 – Si ce n'est toi, c'est donc ton frère.  
 – Je n'en ai point. - C'est donc quelqu'un des tiens :  
 Car vous ne m'épargnez guère,  
 Vous, vos bergers, et vos chiens.  
 On me l'a dit : il faut que je me venge.  
 Là-dessus, au fond des forêts  
 Le Loup l'emporte, et puis le mange,  
 Sans autre forme de procès.

**Document 2 :**

$$0^2 - 0 + 17 = 17$$

$$1^2 - 1 + 17 = 17$$

$$2^2 - 2 + 17 = 19$$

$$3^2 - 3 + 17 = 23$$

$$4^2 - 4 + 17 = 29$$

...

$$11^2 - 11 + 17 = 127$$

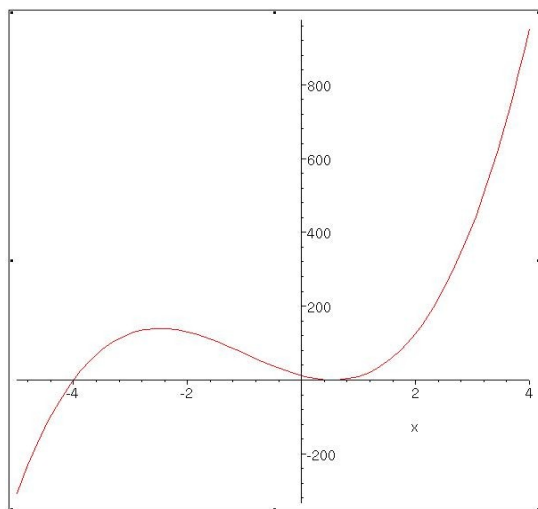
Si je prends un entier naturel  $n$  et que je calcule  $n^2 - n + 17$  j'obtiens donc toujours un nombre premier.

**Document 3 :**

Je montre que le carré d'un entier naturel impair est toujours impair :  
 je dis qu'un entier naturel impair s'écrit  $2k + 1$   
 alors

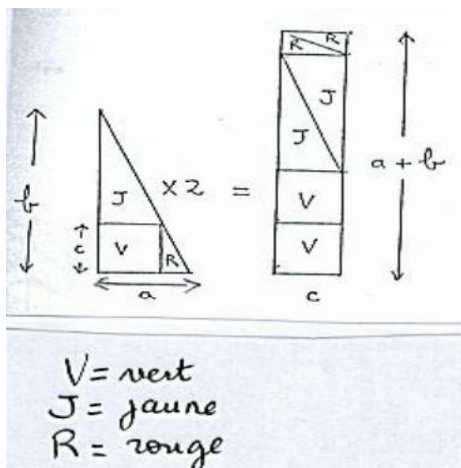
$$\begin{aligned} (2k + 1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{nombre pair}} + 1 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{nombre impair}} \end{aligned}$$

**Document 4 :**



$f$  est la fonction définie par  $f(x) = 10x^3 + 29x^2 - 41x + 12$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Sur l'écran de ma calculatrice graphique j'ai la courbe représentative de la fonction  $f$ . Je dis que l'équation  $f(x) = 0$  a deux solutions car la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points.

**Document 5 :**

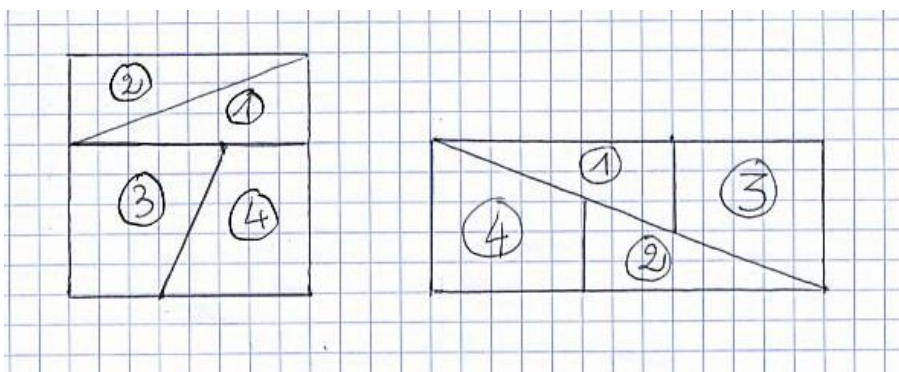


Dans le triangle rectangle (dont les côtés de l'angle droit mesurent  $a$  et  $b$ ) je veux construire un carré de côté  $c$ . Combien vaut  $c$  ?

Je dis que d'après ce dessin  $c(a + b) = ab$   
 donc  $c = \frac{ab}{a+b}$

**Document 6 :**

Le carré est découpé en quatre zones deux triangles rectangles et deux trapèzes. En assemblant différemment les quatre zones j'obtiens le rectangle. L'aire du carré et l'aire du rectangle sont donc égales.



## Fiche élève activité 2

**Désignation :** le passage du montrer au démontrer dans l'histoire des mathématiques

**Organisation générale de l'activité :**

- la 1ère étape de cette activité (documents 7 et 8) se fait par groupe et dure 1 heure.
- Chaque groupe doit produire un document rédigé qui répond aux consignes, rendu à la fin de l'heure. Même si vous ne parvenez pas à un travail complètement abouti gardez dans ce document une trace de toutes vos tentatives.
- Dans chaque groupe il faudra prévoir un secrétaire chargé de la rédaction ainsi qu'une « tête chercheuse » chargée de collecter éventuellement des renseignements auprès des autres groupes ou du professeur.
- Ce travail suppose que vous allez réveiller en vous l'« Indiana Jones » qui sommeille : devant vous se dressent des énigmes dont il faut percer tous les mystères !

**Enoncé des consignes :**

**Document 7 :**

Le problème 41 du papyrus Rhind (du nom de celui qui le retrouva en 1858. Ce manuscrit du XV<sup>e</sup> siècle av. J.-C., dû au scribe Ahmès, est une copie d'un texte bien plus ancien, du XVIII<sup>e</sup> siècle) concerne le calcul du volume d'un cylindre de diamètre 9 et de hauteur 10, exprimé en quadruples hekats. Le texte ci-dessous, en écriture hiéroglyphique, peut être traduit comme suit :

De 9 ôte les 1/9, soit 1

Reste 8

Multiplie 8 par 8

Vient 64

Multiplie 64 par 10

Vient 640

Ajoute la moitié

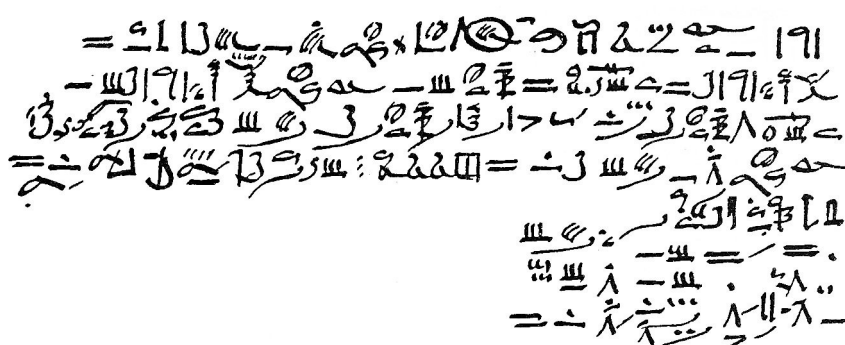
Vient 960

C'est la contenance en khars

Prends 1/20 de 960

Vient 48

48 quadruples hekats de grains y seront contenus.



1. Quelle première impression vous laisse ce texte ?
2. Il s'agit maintenant pour vous de comprendre et de justifier les calculs du scribe. Pour cela vous utiliserez vos connaissances sur les volumes ainsi que les quelques pistes données ci-dessous.

Piste n°1 :

- de quel nombre  $3 + 13/81$  est il une approximation ?
- démontrer que  $3 + 13/81 = 4 (1 - 1/9)^2$
- les égyptiens ne connaissaient que les fractions de la forme  $1/n$ , ils ne pouvaient donc pas écrire  $3 + 13/81$ .

Piste n°2 :

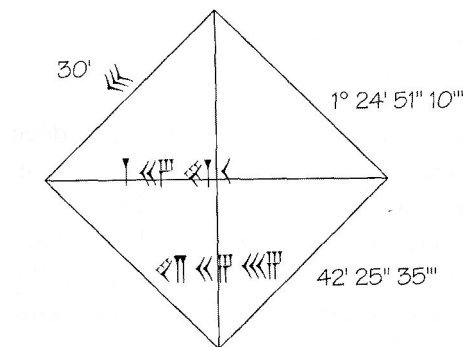
Sachez que pour le scribe :

- l'unité de longueur utilisée était le « meh »
- pour l'unité de volume plutôt que d'utiliser le « meh<sup>3</sup> » on préférait le « khar » et que :
- $1 \text{ khar} = 2/3 \text{ meh}^3$
- enfin :  $20 \text{ khars} = 1 \text{ « quadruple hekat »}$



**Document 8 :**

La figure ci-dessous est une représentation de la tablette babylonienne numéro 7289 de la collection de Yale (elle date également de la période entre le XVIII<sup>e</sup> et le XV<sup>e</sup> siècle av. J.-C). Les caractères cunéiformes correspondent à l'écriture décimale de nombres. Or les babyloniens calculaient en base 60 ! On a retranscrit à côté les nombres en utilisant une notation plus moderne (voir piste n°1)



1. Il s'agit pour vous de comprendre et de justifier les calculs présentés sur la tablette. Pour cela vous utiliserez vos connaissances de géométrie et les pistes données ci-dessous.

Piste n°1 : l'écriture 1 24' 51'' 10''' signifie  $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$

- donner alors les sept premiers chiffres du développement décimal de ce nombre.
- de quel nombre 1 24' 51'' 10''' est-il une approximation ?

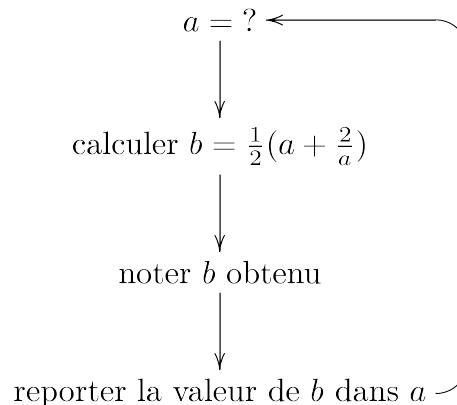
Piste n°2 :

- chercher le lien entre les trois nombres mentionnés sur la tablette

2. Dessinez vous-même un carré et munissez vous d'une règle gradué puis :

- en mesurant le côté et la diagonale de ce carré quelle approximation de  $\sqrt{2}$  obtenez vous ?
- quelle aurait dû être la taille du carré tracé afin d'obtenir la précision des Babyloniens sur  $\sqrt{2}$  ? Est- il raisonnable de penser que les Babyloniens aient pu obtenir cette précision en mesurant des longueurs ?

3. L'algorithme ci- dessous est attribué à Héron d'Alexandrie mais il est probablement bien antérieur. Pour déterminer une approximation de  $\sqrt{2}$ , on utilise la boucle suivante :



Pour commencer, il faut entrer une première valeur de  $a$  que l'on choisit : prenons  $a = 1$  (une première valeur approchée de  $\sqrt{2}$ ). On a alors pour le premier tour de boucle :  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$  et on repart.

Faire trois tours successifs de boucle et vérifier la qualité de l'approximation de  $\sqrt{2}$  obtenue avec  $b$  à chaque fin de tour.

## Suite de la fiche élève activité 2

**Désignation :** le passage du montrer au démontrer dans l'histoire des mathématiques (suite)

**Organisation générale :**

- le travail proposé va déboucher sur une production individuelle (devoir à la maison à rendre à une date fixée).
- Pour vous aider à aborder ce devoir à la maison, une séance préliminaire vous est proposée durant laquelle des « acteurs confirmés » vont mettre en scène pour vous le texte objet central de votre devoir.
- Durant cette séance vous allez être spectateurs mais aussi acteurs puisque vous serez amenés à répondre aux sollicitations des personnages que vous allez découvrir.
- N'hésitez pas à prendre des notes durant cette séance, elles vous seront sans aucun doute d'une aide précieuse par la suite.

**Enoncé des consignes :**

**Devoir maison**

Partie A :

1. Proposez votre traduction de la démonstration d'Euclide pour la proposition CXVII (document 9 ci-dessous) en gardant évidemment le même souci de rigueur.
2. Comparez votre traduction avec le texte d'Euclide : expliquez ce qui les distingue.
3. Expliquez en quelques mots en quoi consiste un raisonnement par l'absurde.
4. A quels moments Euclide utilise-t-il un raisonnement par l'absurde dans sa proposition CXVII ?
5. Reprenez les propositions 47.10, 29.9 et 11.8. et pour chacune d'elles :
  - a) énoncez la propriété à démontrer ;
  - b) démontrez cette propriété avec vos propres connaissances.

Partie B : Cette partie du devoir porte sur l'ensemble des documents de la deuxième activité.

1. En vous basant sur les documents 7, 8 et 9 (qui sont représentatifs des productions des deux époques en question) qu'est ce qui distingue fondamentalement les mathématiques grecques des mathématiques égyptiennes et babyloniennes ?
2. D'après vous quelles sont les raisons qui ont amené au développement des mathématiques grecques ?

Partie C : Pour terminer sur une note philosophique :

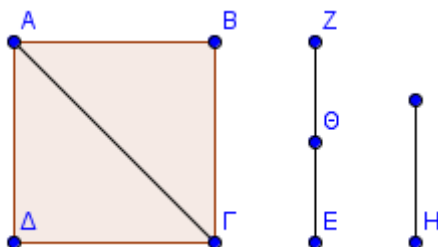
1. lisez le document 10 proposé ci-dessous
2. Quelles est, d'après Platon, la nature des objets mathématiques ?
3. Quel est, d'après Platon, le rôle de la figure ?
4. Etant données de telles conceptions, comprenez vous pourquoi un raisonnement qui est bâti sur un découpage n'a pas valeur de preuve ?

**Document 9 :**

### PROPOSITION CXVII

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le carré  $AB\Gamma\Delta$ , et que  $A\Gamma$  soit sa diagonale ; je dis que la droite  $A\Gamma$  est incommensurable en longueur avec  $AB$ .



Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or il est évident que le carré de  $A\Gamma$  est le double du carré de  $AB$  (47.10) ; mais  $A\Gamma$  est commensurable avec  $AB$ . Que  $A\Gamma$  ait avec  $AB$  la raison que le nombre  $EZ$  a avec le nombre  $H$ , et que les nombres  $EZ$ ,  $H$  soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux. Puisque  $\Gamma A$  est à  $AB$  comme  $EZ$  est à  $H$ , le carré de  $\Gamma A$  sera au carré de  $AB$  comme le carré de  $EZ$  est au carré de  $H$ . Mais le carré de  $\Gamma A$  est double du carré de  $AB$  ; le carré de  $EZ$  est donc double du carré de  $H$  ; le carré du nombre  $EZ$  est donc pair. Le nombre  $EZ$  est donc pair ; car s'il était impair, son carré serait impair (29.9) ; le nombre  $EZ$  est donc un nombre pair. Partageons le nombre  $EZ$  en deux parties égales en  $\Theta$ . Puisque les nombres  $EZ$ ,  $H$  sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres sont premiers entr'eux. Mais le nombre  $EZ$  est pair ; le nombre  $H$  est donc impair. Car s'il était pair, les nombres  $EZ$ ,  $H$ , qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux ; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre  $H$  n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair. Mais  $EZ$  est le double de  $E\Theta$  ; le carré de  $EZ$  est donc quadruple du carré de  $E\Theta$  (11.8). Mais le carré de  $EZ$  est le double du carré de  $H$  ; le carré de  $H$  est donc double du carré de  $E\Theta$  ; le carré de  $H$  est donc pair ; le nombre  $H$  est donc pair, d'après ce qui a été dit (29.9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible ; la droite  $A\Gamma$  n'est donc pas commensurable en longueur avec  $AB$  ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

### Document10 :

Platon, dans La République, fait dialoguer Socrate avec Glaucon. Voici un extrait du livre VI :

Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois espèces d'angles et d'autres choses analogues suivant l'objet de leur recherche : qu'ils les traitent comme choses connues, et que, quand ils en ont fait des hypothèses, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre aucun compte ni à eux-mêmes ni aux autres, attendu qu'elles sont évidentes à tous les esprits ; qu'enfin, partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons, ils aboutissent par voie de conséquences à la démonstration qu'ils s'étaient mis en tête de chercher.

Oui, dit-il, cela, je le sais.

Par conséquent, tu sais aussi qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres et produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'était aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée.

C'est vrai, dit-il.

## Annexe 1 : quelques éléments d'histoire des mathématiques

### Egyptiens-Babyloniens

On a retrouvé toute une série de tablettes ou de cylindres où étaient écrites des tables d'opérations :

- des tables pour les calculs des carrés et des cubes pour les constantes géométriques permettant, par exemple, d'obtenir l'angle d'une figure en fonction des ses éléments
- des tables pour les constantes techniques, par exemple, indiquant la quantité de goudron qu'il faut utiliser par unité de surface quand on veut effectuer telle ou telle technique.

La gamme de ces tables était suffisamment étendue pour leur permettre d'effectuer les calculs assez vite en lisant les résultats.

Mais, dans cette mathématique, on trouve essentiellement des résolutions de problèmes. Nous n'avons pas de traités donnant des théorèmes ou de problèmes accompagnés de justification de la procédure à suivre.

**Les problèmes traités montrent parfois une grande virtuosité technique mais, la transmission de ces savoirs par les écrits des scribes ne s'accompagne pas d'un souci de justification**

### Grecs

C'est à compter du début du VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C., **avec l'apparition de la géométrie grecque que naissent progressivement le raisonnement déductif et la démonstration.**

C'est alors une période de grande civilisation pour les Grecs qui habitent la côte ouest de l'Asie Mineure (les Ioniens). On y voit apparaître les premières écoles de pensée philosophique et mathématique.

De Thalès (625-546 av. J.-C.) à Socrate (470-399 av. J.-C.) s'esquisse la figure du philosophe « l'ami de la sagesse », aspirant à un savoir pratique et théorique fondé sur la raison (le logos), seul outil nécessaire et suffisant à toute connaissance. Objets de discussions, les propositions mathématiques ne sont plus de simples énoncés traduisant des faits empiriques, mais nécessitent désormais une preuve afin de convaincre son auditoire.

- Avec Thalès, on renonce à recourir aux dieux et aux forces magiques pour expliquer l'ordre du monde.
- Avec Pythagore (582-500 av. J.-C.) la connaissance est gouvernée par un effort de l'esprit pour reconstituer derrière les apparences – parce que nos sens limités ne nous donnent que l'apparence des choses – et souvent contre elles, des principes élémentaires naturels n'empruntant rien à la mythologie religieuse. Pythagore, pour qui le nombre est l'essence même des choses, fonde ainsi l'arithmétique comme discipline théorique.
- Avec Platon (427-347 av. J.-C.) on prend pleinement conscience du caractère abstrait des mathématiques. Son école distingue le monde réel du monde des Idées où résident les Vérités éternelles et immuables. C'est donc là qu'il s'agit de chercher la connaissance vraie. Cette perception des mathématiques comme distincte du monde physique a des conséquences sur le plan de la démonstration : tout recours à l'expérience est désormais à proscrire. Les platoniciens préconisent l'usage exclusif du raisonnement déductif, et ce choix transforme radicalement les mathématiques.
- Aristote (384-322 av. J.-C.), quant à lui, pose les règles de la logique dont celles du raisonnement déductif. Pour lui, « savoir, c'est connaître par le moyen de la démonstration ».

Ainsi, pour les pythagoriciens, le nombre, c'est le nombre entier qui est représentable géométriquement. Cette conception du nombre induit un lien systématique entre grandeur géométrique et nombre.

Concernant le problème des rapports c'est à dire des comparaisons de longueurs, persuadés que derrière les longueurs il y a des nombres entiers, ils estiment que derrière les rapports de longueurs il y a donc des rapports de nombres entiers. Au final, soit on a un nombre entier soit on a un nombre fractionnaire.

La diagonale du carré perturbe cet édifice rationnel et naturel parce que le rapport de la diagonale du carré à son côté ne peut pas s'exprimer sous forme de fraction. On pourrait dire que c'était un fait déjà connu des babyloniens (mais pas en ces termes là) car ils savaient calculer les décimales de  $\sqrt{2}$  et avaient remarqué qu'un tel développement ne fait pas apparaître de périodicité. Or les rationnels sont caractérisés par la périodicité de leur développement décimal.

De tels problèmes sont à l'origine d'efforts considérables que fourniront les mathématiciens grecs pour **démontrer par un raisonnement logique que certaines de leurs convictions sont fausses** ( $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel par exemple).

Euclide (323-25 av. J.-C.) présentera environ 300 avant J.-C. ses *Eléments* composés de 13 livres qui proposent une fondation et une construction rigoureuse de la géométrie et de l'arithmétique. On y trouve, dans la partie arithmétique, la démonstration de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .

*Les éléments* d'Euclide sont une synthèse des connaissances mathématiques de l'époque dans un ordre rigoureux où chaque propriété est énoncée puis démontrée à partir de propriétés précédemment énoncées et démontrées. En ce sens, on peut parler d'une chaîne puisque pour démontrer il faut connaître les énoncés antérieurs eux mêmes déjà validés.


## Annexe 2 : introduction au document 9

Les Pythagoriciens considèrent les nombres comme éléments « constitutifs » de la matière : de même que les constellations ont un nombre qui leur est propre, toutes les choses connues ont un nombre.

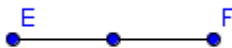
Par nombre ils entendent **nombre entier** (L'Unité comme l'Être ne peuvent se diviser).

Ces nombres sont représentés géométriquement par des segments de droites.

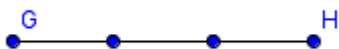
Par exemple :

Représentation  
 unité de longueur u

Nombre 2



Nombre 3



Les opérations sont aussi représentées géométriquement :

On additionne deux nombres en mettant bout à bout les segments qui les représentent.

Le produit  $ab$  des deux nombres  $a$  et  $b$  correspond à l'aire du rectangle de côtés  $a$  et  $b$ .

Un produit de trois nombres correspondra à un volume.

La notion de rapport apparaît alors naturellement quand on veut comparer deux grandeurs.

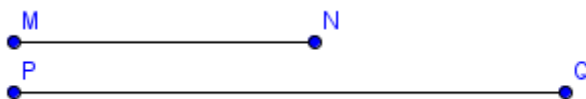
Par exemple, sur la figure ci-dessus, le rapport entre les longueurs  $EF$  et  $GH$  est de 2 sur 3 ; les Pythagoriciens disaient eux :

*EF a avec GH la même raison que 2 avec 3* (ce que nous traduirons dans notre langage

contemporain par :  $\frac{EF}{GH} = \frac{2}{3}$  )

**La notion de rapport** (pour nous le nombre rationnel) existe donc bel et bien mais **n'a pas pour les Pythagoriciens le statut de nombre** : ils considèrent simplement ce rapport comme une technique pratique dans certains calculs.

Dans le contexte que nous venons de décrire considérons deux segments :



Pouvoir les comparer suppose donc pour les Grecs que **l'on dispose d'une même unité de longueur dans laquelle on va pouvoir les mesurer** : c'est-à-dire qu'il faut supposer l'existence d'une unité  $u$  dans laquelle :

- le segment  $MN$  sera mesuré par un nombre entier  $a$
- le segment  $PQ$  sera mesuré par un nombre entier  $b$

Les Grecs disent alors que **les segments  $MN$  et  $PQ$  sont commensurables en longueur**.

Dans notre langage contemporain, nous écrivons que  $MN = au$  et  $PQ = bu$  puis que le rapport

$\frac{MN}{PQ} = \frac{a}{b}$ . Réciproquement, étant donnée une telle égalité de fractions, nous choisissons l'unité de telle sorte que  $PQ = bu$  ; il en résulte alors que  $MN = au$  en simplifiant, donc que l'unité  $u$  mesure

MN et PQ. Finalement, les segments MN et PQ sont commensurables en longueur si et seulement si  $\frac{MN}{PQ}$  est un nombre rationnel.

L'idée que deux grandeurs sont forcément commensurables a longtemps eu pour les Grecs valeur de vérité indiscutable. La découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté (c'est-à-dire en termes contemporains l'irrationalité du nombre  $\sqrt{2}$ ) remonte très probablement aux Pythagoriciens et a dû être un choc pour eux car c'était contraire à leur intuition.

La première preuve de ce résultat dont on possède une trace écrite est celle donnée par Euclide dans son traité *Les Eléments*.

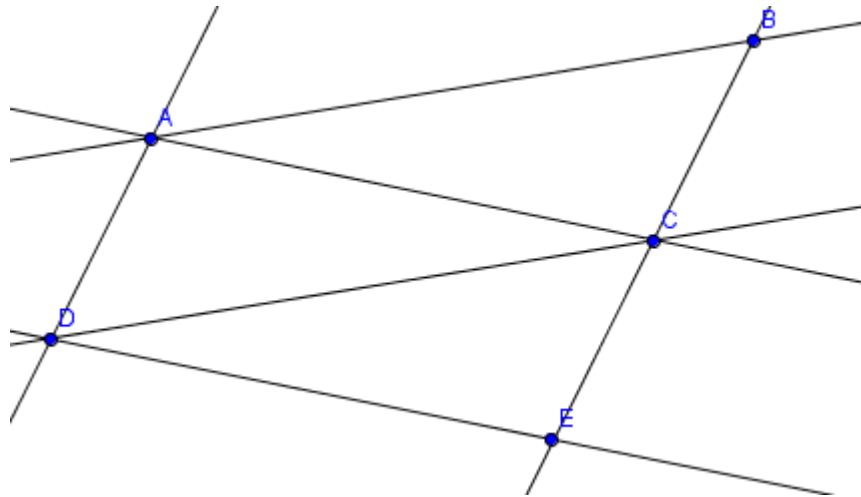


### Fiche élève activité 3

**Désignation :** la chaîne des raisons

Pour comprendre « cette longue chaîne de raisons » dont les géomètres ont coutume de se servir (comme le dira bien plus tard Descartes, 1596-1650), examinons le fil d'une petite démonstration telle que nous la faisons aujourd'hui.

**Document 11 :**



A, B, C, D, E sont des points tels que ABCD et ACED sont des parallélogrammes. On veut démontrer que le point C est le milieu du segment [EB]

1. Pour cela, à la manière d'Euclide, efforcez-vous tout au long de votre démonstration d'être le plus convaincant possible en :

- donnant une définition claire des objets géométriques en jeu dans cette activité (parallélogramme, milieu, ...)
- énonçant rigoureusement les propriétés géométriques (des parallélogrammes, ...) que vous serez amenés à utiliser au fur et à mesure de votre démonstration.

Euclide a intégré la plupart des propriétés géométriques connues à son époque en un système déductif unique, exposé dans *les Eléments*, en dégagant les propriétés de base (les axiomes) desquelles découlent toutes les autres par simple déduction logique. Les axiomes sont en nombre minimal et n'ont pas à être démontrés. Ils s'appuient sur une intuition de l'espace. Par exemple, voici les quatre premières « demandes » ou « postulats » d'Euclide :

- Mener une ligne droite de tout point à tout point.
- Prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
- Décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
- Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
- Le cinquième postulat (postulat des parallèles) a l'air moins évident. Euclide l'énonce comme suit :  
Et que si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

2. Donnez une traduction plus intelligible pour nous de ce 5<sup>ème</sup> postulat (on peut utiliser une figure pour illustrer la situation ; on veillera à mettre en évidence hypothèses et conclusion).

A partir de ces axiomes, Euclide énonce alors toute une série de propositions qu'il démontre successivement sachant que toute proposition se démontre en considérant comme acquis les axiomes (les postulats) et les propositions précédentes elles même déjà démontrées.

Parmi cette longue série de propositions en voici deux (que pour simplifier j'ai nommé 1 et 2) qui vont nous être utiles pour la suite :

*Proposition 1* : Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes internes égaux entre eux.

*Proposition 2* : Deux triangles ayant un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure sont superposables.

3. Donnez pour chacune des propositions 1 et 2 une traduction modernisée qui mette clairement en évidence hypothèses et conclusions. On pourra illustrer l'énoncé à l'aide d'une figure.

4. Vous allez supposer dans cette question que les propositions 1 et 2 ont été démontrées. Démontrez alors la propriété utilisée pour l'exercice du document 11 et que voici ré-énoncée sous le nom de proposition 3 :

*Proposition 3* : si un quadrilatère a des côtés opposés parallèles alors ses côtés opposés ont même longueur.

5. Revenons en arrière. Démontrez maintenant la proposition 1 en utilisant uniquement les axiomes (et évidemment plus particulièrement l'axiome 5).

Fin de l'histoire et début d'une autre :

#### A propos de l'axiome 5

Euclide était persuadé que ce fameux 5<sup>ème</sup> axiome, qui par la complexité de son énoncé dénotait des autres, devait en fait sûrement être démontrable (autrement dit qu'il ne s'agissait pas d'un axiome posé comme acquis mais d'une propriété qui se démontrait), mais ses tentatives visant à démontrer le 5<sup>ème</sup> axiome restèrent vaines.

A l'instar d'Euclide, les mathématiciens qui lui ont succédé ont longtemps poursuivi le même but. On arriva simplement à démontrer que ce 5<sup>ème</sup> axiome avait un énoncé équivalent plus simple que voici :

5<sup>ème</sup> axiome (bis) : *Par un point on peut mener une parallèle et une seule à une droite donnée.*

Pour démontrer cette nouvelle version de l'axiome 5, certains d'entre eux eurent l'idée de raisonner par l'absurde : il s'agissait donc de supposer que par un point on peut mener soit plusieurs soit aucune droite parallèle à une droite donnée. Et partant de cette hypothèse il ne restait plus alors qu'à prouver qu'elle entraînait forcément une contradiction


Mais en procédant ainsi, malgré tous leurs efforts, de contradiction ils ne trouvèrent pas.

Alors naquit l'idée qu'en fait, on pouvait construire d'autres géométries que la géométrie euclidienne ! Pourquoi, par exemple, ne pas imaginer une géométrie où l'on remplacerait l'axiome 5 d'Euclide par le nouvel axiome suivant : *Par un point, il passe une infinité de droites parallèles à une droite donnée ?*

C'est ainsi qu'apparurent vers 1830 de nouvelles géométries que l'on nommera géométries non euclidiennes et que nous utilisons aujourd'hui pour décrire par exemple la structure de l'espace dans les théories cosmologiques.

Mais ceci est une autre histoire...

Expérimentation prévue en 2009-10 au lycée Jean Moulin de Béziers

	<b>IREM</b> <b>6- Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives</b>	 R. E. M. I. de 1 Montpellier
--	--	--

Expérimentation prévue en 2009-10 au lycée Jean Moulin de Béziers

Dahan-Dalmedico, A. et Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*. Points Sciences Le Seuil.

Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques (1987). *Mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthier-Villars.

Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques (1990). *La démonstration mathématique dans l'histoire, Actes du 7ème colloque inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques – Besançon – 12 et 13 mai 1989*. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

Guichard, J. (1993). *Statut et fonctions de la démonstration en mathématiques : quelques repères*. Brochure de l'IREM de Poitiers.

Odifreddi, P. et Bartocci, C. (2009). *La grande histoire des mathématiques; T1 : les lieux et les hommes*. Préface de Blay, M. CNRS Eds.

Nouveau programme de mathématiques en classe de seconde générale et technologique (juillet 2009) : [BO n°30 du 23 juillet 2009](#)

ÉduSCOL (juillet 2009). *Mathématiques – Lycée – Ressources pour la classe de seconde – Notations et raisonnement mathématiques*. Consultable sur <http://www.eduscol.education.fr>

ÉduSCOL (juin 2009). *Mathématiques – Collège – Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e du collège – Raisonnement et démonstration*. Consultable sur <http://www.eduscol.education.fr>

ÉduSCOL (juillet 2009). *Mathématiques – Collège – Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e du collège – Géométrie au collège*. Consultable sur <http://www.eduscol.education.fr>

<b>Etape</b>	<b>Date</b>	<b>Réalisations</b>	<b>Contributeurs</b>
<b>1</b>	novembre 2009	travail bibliographique : étude historique et épistémologique de la démonstration mathématique	Thomas Hausberger, Bernadette Rumeau
<b>2</b>	janvier 2009	germe d'activité 1 : recueil de situations de monstractions et de démonstrations	Thomas Hausberger, Bernadette Rumeau
<b>3</b>	mars 2009	sélection de documents historiques illustrant l'ère pré-démonstrative d'une part et l'apparition de l'exigence démonstrative d'autre part ; écriture de la fiche élève de l'activité 2	Thomas Hausberger, Bernadette Rumeau
<b>4</b>	juin 2009	rédaction de la fiche élève de l'activité 3	Thomas Hausberger, Bernadette Rumeau
<b>5</b>	juillet 2009	écriture des scénarios pédagogiques détaillés	Bernadette Rumeau
<b>6</b>	septembre 2009	commentaires didactiques et épistémologiques, finalisation des fiches	Thomas Hausberger
<b>7</b>	octobre 2009	relecture	Équipe IREM Sciences