



HAL
open science

Le problème des ouvroirs (Hypergraph gossip problem)

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Le problème des ouvroirs (Hypergraph gossip problem). Colloque international CNRS 260 : Problèmes combinatoires et théorie des graphes, 1978, Orsay, Juillet 1976, France. pp.31-34. hal-02322709

HAL Id: hal-02322709

<https://hal.science/hal-02322709>

Submitted on 23 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE PROBLÈME DES « OUVROIRS » (Hypergraph gossip problem)

J.-C. BERMOND

C.M.S. 54, bd Raspail, 75006 Paris

Abstract. — The following problem has been asked by C. Berge in order to generalize the « gossip problem » (telephone disease). There are n persons and each of them knows some gossip not known to the others. They meet together in « ouvroirs » (clubs) of h persons and tell each other all they know at that time. How many « ouvroirs » $f(n, h)$ are required before each person knows everything. The case $h = 2$ is the gossip problem and it is known that $f(n, 2) = 2n - 4$ for $n \geq 4$. We determine $f(n, h)$ for every n and h :

$$\text{if } n \leq h^2 \quad f(n, h) = \lceil (n-1)/h \rceil + \{ (n-1)/(h-1) \}^*$$

$$\text{if } n \geq h^2 \quad f(n, h) = 2 \{ (n-1)/(h-1) \}^* - 2.$$

$\lceil x \rceil$ means the greatest integer less than or equal to x and $\{ x \}^*$ means the least integer greater than or equal to x .

Introduction. — Le problème suivant a été posé par C. Berge [2] comme généralisation du problème des téléphones (gossip problem) [1, 3, 5]. Soient n personnes ; chacune connaît une information que ne connaît aucune autre personne. Elles se rencontrent dans des ouvroirs de h personnes et se communiquent tout ce qu'elles connaissent à ce moment-là. Quel est le nombre minimum d'ouvroirs $f(n, h)$ nécessaires pour que tout le monde connaisse tout ? Le cas $h = 2$ correspond au problème des téléphones et il est connu que $f(n, 2) = 2n - 4$ si $n \geq 4$ [1, 3, 5]. Nous déterminons ici $f(n, h)$ pour tout n et tout h (théorèmes 2 et 7). Nous avons découvert après coup, que ces résultats avaient été obtenus par K. Lebesold [4] ; la preuve donnée ici est différente et nettement plus courte.

Notations. — Nous désignerons par $\lceil x \rceil$ le plus grand entier inférieur ou égal à x et par $\{ x \}^*$ le plus petit entier supérieur ou égal à x . Nous représenterons les m premiers « ouvroirs » ou « rencontres » par un hypergraphe $H = (X, \{ E_1, \dots, E_m \})$, où l'ensemble des sommets X représente l'ensemble des n personnes : $|X| = n$ et où l'ensemble des arêtes est ordonné et représente les ouvroirs, les arêtes étant ordonnées dans l'ordre dans lequel les ouvroirs ont eu lieu ; donc $|E_i| = h$ et E_i correspond au i -ième ouvrier. Un tel hypergraphe sera appelé « hypergraphe d'ouvroirs ».

Exemple. — Pour $n = 9$ et $h = 3$ l'hypergraphe d'ouvroirs suivant est une solution au problème posé :

$$\begin{aligned} X &= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}; \\ E_1 &= \{ 1, 2, 3 \}; \quad E_2 = \{ 4, 5, 6 \}; \quad E_3 = \{ 7, 8, 9 \}; \\ E_4 &= \{ 1, 4, 7 \}; \quad E_5 = \{ 2, 5, 8 \}; \quad E_6 = \{ 3, 6, 9 \}. \end{aligned}$$

On a donc $f(9, 3) \leq 6$.

Lemme 1. — $f(n + h - 1, h) \leq f(n, h) + 2$.

Démonstration. — Soient $|X| = n + h - 1$ et $A \subset X$, tel que $|A| = h - 1$. L'hypergraphe d'ouvroirs $H = (X, \{ E_1, \dots, E_{f(n, h)+2} \})$ est une solution au problème avec $E_1 = A \cup \{ x \}$ où $x \in X - A$; $E_2, \dots, E_{f(n, h)+1}$ sont les arêtes d'un hypergraphe d'ouvroirs solution du problème pour n et h et construit sur $X - A$ et enfin

$$E_{f(n, h)+2} = A \cup \{ y \} \quad \text{où } y \in X - A. \quad \square$$

Théorème 2. — Si $n \leq h^2$,

$$f(n, h) = \lceil (n-1)/h \rceil + \{ (n-1)/(h-1) \}^*.$$

Démonstration. — Quel que soit l'hypergraphe des $\lceil (n-1)/h \rceil$ premiers ouvroirs, il existe un sommet qui n'appartient pas à cet hypergraphe. Pour que tout le monde connaisse l'information de ce sommet, il faut encore au moins $\{ (n-1)/(h-1) \}^*$ ouvroirs.

Donc

$$f(n, h) \geq [(n-1)/h] + \{(n-1)/(h-1)\}^*.$$

D'après le lemme 1

$$\begin{aligned} f((p+1)(h-1)+1, h) &\leq f(h, h) + 2p = \\ &= 2p+1, \text{ car } f(h, h) = 1. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe p , $2 \leq p \leq h-1$, tel que $ph+1 \leq n \leq (p+1)(h-1)+1$, alors le théorème est prouvé car

$$2p+1 = [(n-1)/h] + \{(n-1)/(h-1)\}^*.$$

Enfin nous allons montrer que $f(ph, h) \leq 2p$, ce qui impliquera le théorème pour

$$p(h-1)+2 \leq n \leq ph.$$

Le fait que $f(ph, h) \leq 2p$ résulte de ce que les hypergraphes d'ouvroirs suivants sont solutions du problème : on prend comme p premières arêtes une partition des sommets (couplage parfait) et comme p dernières arêtes une autre partition des sommets formant un transversal des p premières arêtes c'est-à-dire $|E_{p+j} \cap E_i| \geq 1$ pour $1 \leq i, j \leq p$. Par exemple si on numérote les sommets (α, β) avec

$$0 \leq \alpha \leq p-1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq h-1$$

on peut choisir pour $1 \leq i \leq p$

$$E_i = \{(i-1, \beta) \text{ avec } 0 \leq \beta \leq h-1\}$$

et

$$E_{p+i} = \{(\alpha, \beta) \text{ avec } (i-1)h \leq \alpha + p\beta \leq ih-1\}.$$

Proposition 3. — Si $n \geq h^2$ alors

$$f(n, h) \leq 2 \{(n-1)/(h-1)\}^* - 2.$$

Démonstration. — Posons $n-1 = (h-1)q-r$ avec $0 \leq r \leq h-2$ donc $q = \{(n-1)/(h-1)\}^*$ comme $n \geq h^2$, $q \geq h+1$ et donc

$$n-1 = (h-1)(q-(h+1)) + h^2 - 1 - r.$$

D'après le lemme 1 on déduit que

$$f(n, h) \leq f(h^2-r, h) + 2(q-(h+1)).$$

Le théorème 2 et $0 \leq r \leq h-2$ impliquent $f(h^2-r, h) = 2h$. Donc $f(n, h) \leq 2q-2$. \square

Définitions 4. — Nous appellerons *F-sommet* d'un hypergraphe d'ouvroirs H une personne qui connaît toutes les informations et nous noterons par $F(H)$ l'ensemble des *F-sommets* de H . Cette notion ainsi que certaines idées de la démonstration sont inspirées de [3].

Lemme 5. — Soit H un hypergraphe d'ouvroirs ayant m arêtes. Si $m < \{(n-1)/(h-1)\}^*$ alors $|F(H)| = 0$.

Démonstration. — Si $|F(H)| > 0$, alors l'hypergraphe H est connexe. Or le nombre de sommets d'un hypergraphe h -uniforme connexe à m arêtes est inférieur à $m(h-1)$. Donc $n \leq m(h-1)+1$ et $m \geq (n-1)/(h-1)$. \square

Théorème 6. — Soit H un hypergraphe d'ouvroirs ayant m arêtes alors

$$\begin{aligned} |F(H)| &\leq \\ &\leq (h-1)(m+2 - \{(n-1)/(h-1)\}^*) + 1. \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous démontrerons en fait un théorème plus fort (théorème 8) de manière à pouvoir utiliser une récurrence. Notons qu'en général on peut améliorer la borne de $|F(H)|$; on peut montrer par exemple que si on pose

$$k = m+2 - \{(n-1)/(h-1)\}^*$$

alors pour $k \leq h+1$, $|F(H)| \leq (k-1)h$, la borne étant atteinte. \square

Théorème 7. — Si $n \geq h^2$ alors

$$f(n, h) = 2 \{(n-1)/(h-1)\}^* - 2.$$

Démonstration. — La définition de $f(n, h)$ implique qu'il existe un hypergraphe d'ouvroirs ayant $f(n, h)$ arêtes tel que tout le monde connaisse tout c'est-à-dire $|F(H)| = n$. D'après le théorème 6

$$n \leq (h-1)(f(n, h) + 2 - \{(n-1)/(h-1)\}^*) + 1$$

d'où $f(n, h) \geq 2 \{(n-1)/(h-1)\}^* - 2$ ce qui avec la proposition 3 achève la démonstration. \square

Théorème 8. — Soit H un hypergraphe d'ouvroirs ayant m arêtes. Posons $q = \{(n-1)/(h-1)\}^*$ et $k = m+2-q$. Alors

$$(1) |F(H)| \leq (h-1)k+1 \text{ (théorème 6)}$$

$$(2) \text{ Si } |F(H)| = (h-1)k+1,$$

$$H \text{ contient } (k+1) \text{ arêtes } E_{i_1}, \dots, E_{i_{k+1}}$$

telles que pour tout $i_j, E_{i_j} \subset F(H)$ et $E_{i_j} \cap E_{i_\alpha} = \emptyset$ pour tout

$$\alpha : i_j < \alpha \leq m \text{ et } \alpha \notin \{i_1, \dots, i_{k+1}\}.$$

Démonstration. — Nous utiliserons le lemme suivant immédiat.

Lemme 9. — Soit E_i une arête d'un hypergraphe d'ouvroirs à m arêtes telle que $E_i \cap E_\alpha = \emptyset$ pour $i < \alpha \leq m$. Si $x \in F(H)$ et $x \notin E_i$ alors $x \in F(H^*)$ où H^* est l'hypergraphe obtenu à partir de H en supprimant l'arête E_i .

Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur m ou plus exactement sur k : en effet si $k \leq 0$ le théorème se déduit du lemme 5. On peut donc sup-

poser $k \geq 0$ et d'après le lemme 5 le théorème est vérifié pour $k = 1$ (et même $k < h$). Supposons donc le théorème vrai jusqu'à l'ordre $k - 1$.

$|F(H)| \leq (h - 1)k + 1$: en effet supposons $|F(H)| > (h - 1)k + 1$ et soit H' l'hypergraphe obtenu à partir de H en supprimant l'arête E_m . D'après (1) appliqué à l'ordre $k - 1$, on a

$$|F(H')| \leq (h - 1)(k - 1) + 1$$

et comme

$$|F(H)| \leq |F(H')| + h$$

on a $|F(H)| = |F(H')| + h$ et donc

$$E_m \subset F(H), \quad E_m \cap F(H') = \emptyset$$

et

$$|F(H')| = (h - 1)(k - 1) + 1.$$

Donc H' vérifie (2) et il existe k arêtes de H' : E_{i_1}, \dots, E_{i_k} telles que

$$E_{i_j} \cap E_\alpha = \emptyset \quad \text{pour } i_j < \alpha \leq m - 1 \text{ et } \alpha \neq i_j,$$

et

$$E_{i_j} \subset F(H').$$

Comme $E_m \cap F(H') = \emptyset$ on a aussi $E_{i_j} \cap E_m = \emptyset$.

Une application répétée du lemme 9 à H donne que $E_m \subset F(H^*)$ où H^* est l'hypergraphe obtenu à partir de H en supprimant les k arêtes ci-dessus. H^* a $m - k = q - 2$ arêtes. D'après le lemme 5, on a donc $F(H^*) = \emptyset$ en contradiction avec $E_m \subset F(H^*)$.

— Montrons maintenant que si

$$|F(H)| = (h - 1)k + 1,$$

alors H vérifie (2).

Soit

$$H_1 = (X; \{E_1, \dots, E_{q-1}\})$$

et

$$H_2 = (X; \{E_q, \dots, E_m\}).$$

a) H_1 n'est pas connexe car

$$(q - 1)(h - 1) + 1 < n.$$

b) H_1 ne contient pas de sommets isolés : en effet supposons que x soit un sommet isolé de H_1 . Les sommets de $F(H)$ autres que x sont nécessairement dans une même composante connexe de H_2 , composante qui a au plus $m - q + 1 = k - 1$ arêtes et donc au plus $(k - 1)(h - 1) + 1$ sommets en contradiction avec $|F(H)| = (h - 1)k + 1$.

c) Soit E_p l'arête de plus grand indice telle que $E_p \not\subset F(H)$, on a $E_p \cap F(H) \neq \emptyset$: en effet supposons que $E_p \cap F(H) = \emptyset$; en appliquant le lemme 9 à H avec l'arête E_p on aurait que l'hypergraphe H^* obtenu en supprimant l'arête E_p de H vérifierait $F(H) \subset F(H^*)$ et donc $|F(H^*)| \geq (h - 1)k + 1$ contrairement au fait que H^* ayant $m - 1$ arêtes vérifie (1) d'après l'hypothèse de récurrence.

d) Si $p \leq q - 3$: les $(k + 1)$ dernières arêtes E_{q-2}, \dots, E_m vérifient (2).

e) Si $p = q - 2$ l'hypergraphe

$$H_1 = (X; \{E_1, \dots, E_{q-1}\})$$

n'est pas connexe et n'admet pas de points isolés (d'après a) et b)). Soit C' la composante connexe contenant E_{q-1} et soit $E_{p'}$ l'arête de plus grand indice de $H_1 - C'$. Si $E_{p'} \subset F(H)$, le système de $(k + 1)$ arêtes $\{E_{p'}, E_{q-1}, \dots, E_m\}$ vérifie (2).

f) Dans la suite nous supposons soit que $p = q - 2$ et que $E_{p'} \not\subset F(H)$ soit que $p \geq q - 1$ et nous désignerons par \tilde{H} l'hypergraphe formé dans le premier cas des k arêtes $E_{p'}, E_q, \dots, E_m$ et dans le deuxième cas ($p \geq q - 1$) des arêtes E_p, E_{p+1}, \dots, E_m .

g) Dans les deux cas \tilde{H} a au plus K arêtes soit C la composante connexe de \tilde{H} contenant $E_{p'}$ dans le cas $p = q - 2$ ou E_p dans le cas $p \geq q - 1$. Soit r le nombre d'arêtes de C . Comme $r \leq k$ on a

$$|C| \leq (h - 1)r + 1;$$

comme $E_p \not\subset F(H)$ ou $E_{p'} \not\subset F(H)$ on a

$$|C \cap F(H)| \leq (h - 1)r.$$

h) Une application répétée du lemme 9 à H donne que l'hypergraphe H' obtenu à partir de H en supprimant les arêtes de C vérifie $F(H) - C \subset F(H')$ et donc d'après g) $|F(H')| \geq (h - 1)(k - r) + 1$.

i) D'après l'hypothèse (1) de récurrence appliquée à l'ordre $k - r$ on a $|F(H')| \leq (h - 1)(k - r) + 1$ et donc d'après h) $|F(H')| = (h - 1)(k - r) + 1$ d'où $F(H') = F(H) - C$ et $|C \cap F(H)| = (h - 1)r$.

j) H' satisfait donc aussi par hypothèse de récurrence la condition (2) du théorème et donc H' contient $(k + 1 - r)$ arêtes $E_{i_1}, \dots, E_{i_{k+1-r}}$ telles que

$$E_{i_j} \subset F(H') = F(H) - C,$$

$$E_{i_j} \cap E_\alpha = \emptyset \quad \text{pour } \alpha > i_j,$$

$$\alpha \notin \{i_1, \dots, i_{k+1-r}\}$$

et $E_\alpha \notin C$. De plus, comme $E_{i_j} \subset F(H) - C$, $E_{i_j} \cap E_\alpha = \emptyset$ pour $E_\alpha \in C$.

k) Soit H'' l'hypergraphe obtenu à partir de H en enlevant les $(k + 1 - r)$ arêtes ci-dessus. Une application répétée du lemme 9 donne

$$\{F(H) \cap C\} \subset F(H'').$$

H'' a $m - (k + 1 - r) = q + r - 3$ arêtes. L'hypothèse de récurrence appliquée à H'' donne :

$$|F(H'')| \leq (h - 1)(r - 1) + 1.$$

Or d'après i) $|F(H) \cap C| = (h - 1)r$. On doit

donc avoir $(h - 1)r \leq (h - 1)(r - 1) + 1$ ce qui est impossible si $h \geq 3$. Si $h = 2$ on a l'égalité et d'après (2) appliquée par hypothèse de récurrence à H'' , H'' contient r arêtes E_{j_1}, \dots, E_{j_r} qui avec les $(k + 1 - r)$ arêtes définies en j forment un système de $k + 1$ arêtes vérifiant (2). \square

Bibliographie

- [1] B. BAKER et R. SHOSTAK, Gossips and telephones, *Discrete Math.* **2** (1972) 191-193.
- [2] C. BERGE, Séminaire, Paris (octobre 1975).
- [3] A. HAJNAL, E. C. MILNER et E. SZEMERÉDI, A cure for the telephone disease, *Canad. Math. Bull.* **15** (1972) 447-450.
- [4] K. LEBENSOLD, Efficient communication by phone calls, *Studies in Applied Math.* **52** (1973) 345-358.
- [5] R. TIJDEMAN, On a telephone problem, *Nieuw Arch. Wisk* **19** (1971) 188-192.