



HAL
open science

Systèmes de triplets et différences associées

Jean-Claude Bermond, Andries Evert Brouwer, Anne Germa

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Andries Evert Brouwer, Anne Germa. Systèmes de triplets et différences associées. Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Colloque international CNRS 260, 1978, Orsay, Juillet 1976, France. pp.35-38. hal-02322623

HAL Id: hal-02322623

<https://hal.science/hal-02322623>

Submitted on 21 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SYSTÈMES DE TRIPLETS ET DIFFÉRENCES ASSOCIÉES

J.-C. BERMOND

Université de Paris Sud, Informatique, bât. 490, 91405 Orsay

A. E. BROUWER

Mathematical center, 2^e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, Pays-Bas

A. GERMA

Université de Paris Sud, Mathématiques, bât. 425, 91405 Orsay

Abstract. — We formulate a problem which is a common generalization of the problems of Skolem and Langford and a particular case of a problem of astronomy. Let d and m be two positive integers, is it possible to find m triplets of integers $A_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ such that the $3m$ numbers $(b_i - a_i), (c_i - a_i), (c_i - b_i)$ are all the elements of the set $\{d, d + 1, \dots, d + 3m - 1\}$.

Necessary conditions on the parameters are derived and many (but not all) cases are solved.

Dans cet article nous étudions le problème suivant qui est un cas particulier d'un problème de radio-astronomie : comment disposer des antennes afin d'obtenir une observation du ciel correspondant à certaines exigences données [voir [1] pour plus de détails].

Problème I. — Soient d et m deux entiers strictement positifs. Pour quelles valeurs de d et m est-il possible de trouver m triplets

$$A_i = \{a_i, b_i, c_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

tels que les $3m$ nombres (appelés différences associées aux triplets) $b_i - a_i, c_i - a_i, c_i - b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) soient tous les entiers de l'ensemble

$$\{d, d + 1, \dots, d + 3m - 1\}.$$

Par exemple

$$A_1 = \{0, 4, 6\}, \quad A_2 = \{0, 9, 10\},$$

$$A_3 = \{0, 8, 11\}, \quad A_4 = \{0, 7, 12\}$$

est une solution pour $m = 4, d = 1$.

Remarque. — Comme nous ne nous intéressons qu'aux différences associées aux triplets nous pouvons supposer $a_i = 0$ dans tous les triplets.

Le problème suivant est relié au problème I.

Problème II. — Soient d et m deux entiers positifs. Pour quelles valeurs de d et m est-il possible de trouver une partition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2m\}$ en m paires $\{a_i, b_i\}$ telles que les m nombres

$$b_i - a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

soient tous les entiers de l'ensemble

$$\{d, d + 1, \dots, d + m - 1\}.$$

Il est clair qu'une solution du problème II donne une solution du problème I : en effet, il suffit de prendre $A_i = \{0, a_i + m + d - 1, b_i + m + d - 1\}$. Toutes les solutions que nous allons donner du problème I seront aussi solutions du problème II (mais la solution donnée ci-dessus en exemple ne provient pas d'une solution du problème II).

Proposition 1. — Des conditions nécessaires pour l'existence d'une solution au problème I sont

$$(i) \quad m \geq 2d - 1.$$

$$(ii) \quad \text{Pour } d \text{ impair } m \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{4} \\ \text{Pour } d \text{ pair } m \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod{4}.$$

Preuve. — C'est un cas particulier du théorème 2.4 de [1]. Afin d'être complet nous en donnons une nouvelle preuve ici. Supposons que les triplets $\{0, b_i, c_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) soient une solution du problème I. Alors

$$\sum_{i=1}^{2m} (d + i - 1) \leq \sum_{i=1}^m b_i + (c_i - b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^m c_i \leq \sum_{i=1}^m (d + 3m - i)$$

puisque les différences $b_i, c_i, c_i - b_i$ sont toutes différentes. Par conséquent

$$m(2d + 2m - 1) \leq \frac{1}{2} m(2d + 5m - 1),$$

ce qui prouve (i). De plus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m b_i + (c_i - b_i) + c_i &= 2 \sum_{i=1}^m c_i = \\ &= \sum_{i=1}^{3m} (d + i - 1) = \frac{3}{2} m(2d + 3m - 1). \end{aligned}$$

Donc $3/2 m(2d + 3m - 1)$ est pair ou

$$3m(2d + 3m - 1) \equiv 0 \pmod{4},$$

ce qui donne (ii).

Théorème 1. — Pour $d = 1, 2$ ou 3 les conditions nécessaires de la proposition 1 sont suffisantes pour qu'il existe une solution au problème II (et par suite au problème I).

Preuve. — (i) $d = 1$.

Dans ce cas le problème II n'est autre que le problème de Skolem [7].

Pour quelles valeurs de m est-il possible de répartir les entiers $\{1, 2, \dots, 2m\}$ en m paires

$$\{a_i, b_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

telles que $b_i - a_i = i$? Mais il est bien connu [4, 7] qu'une solution du problème de Skolem existe si et seulement si $m \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$ de sorte que (i) est prouvé.

Remarque. — Rappelons qu'une numérotation gracieuse [3] (ou β valuation [6]) d'un graphe G à m arêtes est une numérotation des sommets de G par des entiers compris entre 1 et m de sorte que l'ensemble des valeurs des arêtes soit l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$, où la

valeur d'une arête est la valeur absolue de la différence des numéros des sommets adjacents à l'arête.

Ainsi dans le cas $d = 1$ une solution au problème I est équivalente à une numérotation gracieuse du graphe formé de m triangles ayant exactement un sommet en commun (ceci est une conséquence immédiate de la remarque de l'introduction). L'existence d'une numérotation gracieuse pour de tels graphes a été demandée par C. Hoede (qui appelle ces graphes des « moulins ») au 5^e Colloque Hongrois de Combinatoire à Keszthely en 1976.

(ii) $d = 2$.

Dans ce cas le problème II est équivalent au problème suivant dû à Langford [5] : pour quelles valeurs de m est-il possible de trouver une suite de longueur $2m$ constituée de deux occurrences de chacun des entiers i ($i = 1, 2, \dots, m$) de façon que les deux occurrences de i soient séparées par exactement i autres éléments de la suite ?

Exemple. — Pour $m = 3$ la suite $(3, 1, 2, 1, 3, 2)$ est une suite de Langford.

Si on appelle a_i et b_i les rangs des occurrences de i dans la suite, alors les paires $\{a_i, b_i\}$ forment une partition de $\{1, 2, \dots, 2m\}$ avec $b_i - a_i = i + 1$, c'est-à-dire donnent une solution du problème II avec $d = 2$. Réciproquement toute solution du problème II permet de construire une suite de Langford. Or R. O. Davies [2] a prouvé qu'il existe des suites de Langford si et seulement si $m \equiv 0$ ou $3 \pmod{4}$: ainsi le cas (ii) est prouvé.

(iii) $d = 3$.

D'abord prenons $m = 4k, k > 1$. Une solution est donnée par les huit groupes suivants de paires $\{a_i, b_i\}$

	a_i	b_i	$b_i - a_i$
(1)	j	$4k - j + 2$	$4k + 2 - 2j \quad j = 1, 2, \dots, k$
(2)	$k + j$	$3k - j + 3$	$2k + 3 - 2j \quad j = 2, \dots, k$
(3)	$k + 1$	$5k + 2$	$4k + 1$
(4)	$2k + 1$	$6k + 3$	$4k + 2$
(5)	$2k + 2$	$6k + 1$	$4k - 1$
(6)	$4k + 2$	$6k + 2$	$2k$
(7)	$4k + j + 2$	$8k - j + 1$	$4k - 2j - 1 \quad j = 1, \dots, k - 1$
(8)	$5k + j + 2$	$7k - j + 2$	$2k - 2j \quad j = 1, \dots, k - 2$

Prenons maintenant $m = 4k + 1, k > 1$. Une solution est donnée par

	a_i	b_i	$b_i - a_i$
(1)	j	$4k - j + 2$	$4k + 2 - 2j \quad j = 1, 2, \dots, k$
(2)	$k + 1$	$5k + 3$	$4k + 2$
(3)	$k + 1 + j$	$3k - j + 2$	$2k - 2j + 1 \quad j = 1, \dots, k - 1$
(4)	$2k + 1$	$6k + 4$	$4k + 3$
(5)	$2k + 2$	$6k + 3$	$4k + 1$
(6)	$4k + 2$	$6k + 2$	$2k$
(7)	$4k + 2 + j$	$8k - j + 3$	$4k - 2j + 1 \quad j = 1, 2, \dots, k$
(8)	$5k + 3 + j$	$7k - j + 3$	$2k - 2j \quad j = 1, 2, \dots, k - 2$

Enfin, pour $m = 5$, une solution est donnée par $\{1, 8\}, \{4, 10\}, \{2, 7\}, \{5, 9\}, \{3, 6\}$.

Ceci complète la preuve du théorème.

Remarque. — Une autre solution pour le cas $m = 4k + 1$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 2. — Soit $m \equiv 2d - 1 \pmod{4}$, $m \geq 2d - 1$, $d \geq 2$. Alors le problème II admet une solution.

Preuve. — Nous distinguons 2 cas, suivant la parité de d . Supposons tout d'abord d pair et posons $m = 4t + 3$. De $d \geq 2$ et $m \geq 2d - 1$ nous déduisons $d/2 - 1 \geq 0$ et $t - (d/2) - 1 \geq 0$.

Une solution est donnée par les 10 groupes de paires $\{a_i, b_i\}$

	a_i	b_i	$b_i - a_i$	
(1)	$2t + 1 - j$	$2t + d + 2 + j$	$d + 1 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{d}{2}$
(2)	$t + \frac{1}{2}d - 1 - j$	$3t + \frac{1}{2}d + 3 + j$	$2t + 4 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{d}{2}$
(3)	$d - 2 - j$	$4t + 4 + j$	$4t - d + 6 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{d}{2} - 2$
(4)	$2t + \frac{1}{2}d + 1$	$4t + \frac{1}{2}d + 3$	$2t + 2$	
(5)	$\frac{1}{2}d - 1 - j$	$4t + \frac{1}{2}d + 4 + j$	$4t + 5 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{d}{2} - 2$
(6)	$t + \frac{1}{2}d$	$5t + \frac{1}{2}d + 4$	$4t + 4$	
(7)	$2t + d + 1 - j$	$6t + 6 + j$	$4t - d + 5 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{d}{2} - 1$
(8)	$2t + \frac{1}{2}d - j$	$6t + \frac{1}{2}d + 6 + j$	$4t + 6 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{d}{2} - 2$
(9)	$6t + 5 - j$	$6t + d + 5 + j$	$d + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{d}{2}$
(10)	$5t + \frac{1}{2}d + 3 - j$	$7t + \frac{d}{2} + 6 + j$	$2t + 3 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{d}{2}$.

Supposons maintenant d impair et posons $m = 4t + 1$, $d = e - 1$. Comme on a $d \geq 3$ et $m \geq 2d - 1$ nous avons $(e/2) - 2 \geq 0$ et $t - (e/2) + 1 \geq 0$. Une solution est donnée par les 10 groupes de paires $\{a_i, b_i\}$

	a_i	b_i	$b_i - a_i$	
(1)	$2t - j$	$2t + e + j$	$e + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{1}{2}e$
(2)	$t + \frac{e}{2} - 2 - j$	$3t + \frac{e}{2} + 1 + j$	$2t + 3 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{1}{2}e$
(3)	$e - 3 - j$	$4t + 2 + j$	$4t - e + 5 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}e - 2$
(4)	$2t + \frac{e}{2}$	$4t + \frac{e}{2} + 1$	$2t + 1$	
(5)	$\frac{e}{2} - 2 - j$	$4t + \frac{e}{2} + 2 + j$	$4t + 4 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}e - 3$
(6)	$t + \frac{e}{2} - 1$	$5t + \frac{e}{2} + 1$	$4t + 2$	
(7)	$2t + e - 1 - j$	$6t + 3 + j$	$4t - e + 4 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}e - 2$
(8)	$2t + \frac{e}{2} - 1 - j$	$6t + \frac{e}{2} + 2 + j$	$4t + 3 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, \frac{e}{2} - 2$
(9)	$6t + 2 - j$	$6t + e + 1 + j$	$e - 1 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{e}{2}$
(10)	$5t + \frac{e}{2} - j$	$7t + \frac{e}{2} + 2 + j$	$2t + 2 + 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - \frac{e}{2}$. \square

Dans le cas $m \equiv 0 \pmod{4}$ nous avons une solution pour d grand.

Théorème 3. — Posons $m = 4t$, $d = 2t - e$ ($e \geq 0$). Alors si $2d \geq 3t + 1$ le problème II admet une solution.

Preuve. — Ici nous avons $t - 2e - 1 \geq 0$ et les sept groupes suivants de paires $\{a_i, b_i\}$ donnent une solution

	a_i	b_i	$b_i - a_i$	
(1)	$2t + e + 1 + j$	$8t - j$	$6t - e - 1 - 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - e - 1$
(2)	$3t + 2e + 2 + j$	$7t + e - j$	$4t - e - 2 - 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - 1$
(3)	$2t - j$	$6t + e - 2j$	$4t + e - j$	$j = 0, 1, \dots, e$
(4)	$2t + e - j$	$6t + e - 1 - 2j$	$4t - 1 - j$	$j = 0, 1, \dots, e - 1$
(5)	$1 + j$	$6t - e - 1 - j$	$6t - e - 2 - 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - e - 2$
(6)	$t + e + 1 + j$	$5t - j$	$4t - e - 1 - 2j$	$j = 0, 1, \dots, t - 2e - 2$
(7)	$t - e + j$	$3t + 2e + 1 - j$	$2t + 3e + 1 - 2j$	$j = 0, 1, \dots, 2e$. \square

Remarque. — Cette solution a été trouvée en utilisant certaines techniques de programmation linéaire. Nous ne savons si elle peut être généralisée à $m \equiv 0 \pmod{4}$ et d quelconque : elle est en tous cas moins élégante que les solutions précédentes.

Pour ce qui est des techniques de programmation linéaire et la théorie des ensembles à addition elles feront l'objet d'un papier à venir par l'un des auteurs.

On peut obtenir des solutions pour les petites valeurs de d à partir d'autres solutions.

Proposition 2. — Supposons connues des solutions au problème II pour (m_0, d_0) et $(m'_0, d_0 + m_0)$ alors il existe une solution au problème II pour $(m_0 + m'_0, d_0)$.

Preuve. — Supposons la première solution constituée des paires $\{a_i, b_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m_0$) et la seconde des paires $\{a'_i, b'_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m'_0$) on obtient une solution pour $(m_0 + m'_0, d_0)$ en considérant la réunion des deux familles

$$\{\{a_i, b_i\} (i = 1, \dots, m_0)\}$$

et

$$\{\{a'_i + 2m_0, b'_i + 2m_0\} (i = 1, \dots, m'_0)\}.$$

En particulier nous avons

Théorème 4. — Soit $m \equiv 0 \pmod{4}$, $m \geq 4(2d - 1)$. Alors le problème II a une solution.

Preuve. — Prenons, dans la proposition 2, $d_0 = d$, $m_0 = 2d - 1$, $m'_0 \geq 2(d_0 + m_0) - 1$, $m = m_0 + m'_0$ et appliquons les théorèmes 1 et 2.

En vue d'une solution complète au problème II nous n'avons donc plus qu'à construire un nombre fini de solutions pour tout d .

Par exemple, pour $d = 4$ les seuls cas non résolus jusqu'à présent sont $m = 12, 16, 20, 24$ et il est facile de trouver des solutions explicites.

$d = 4, m = 12$, on prend les paires suivantes :

$$\{5, 9\}, \{19, 24\}, \{4, 10\}, \{6, 13\}, \{15, 23\}, \\ \{12, 21\}, \{8, 18\}, \{11, 22\}, \{2, 14\}, \{7, 20\}, \\ \{3, 17\}, \{1, 16\}.$$

$d = 4, m = 16$, on prend alors :

$$\{27, 31\}, \{25, 30\}, \{4, 10\}, \{8, 15\}, \{6, 14\}, \\ \{23, 32\}, \{7, 17\}, \{11, 22\}, \{12, 24\}, \{16, 29\}, \\ \{5, 19\}, \{13, 28\}, \{2, 18\}, \{9, 26\}, \{3, 21\}, \\ \{1, 20\}.$$

$d = 4, m = 20$, on prend alors :

$$\{36, 40\}, \{11, 16\}, \{29, 35\}, \{32, 39\}, \{30, 38\}, \\ \{28, 37\}, \{8, 18\}, \{6, 17\}, \{9, 21\}, \{7, 20\}, \\ \{13, 27\}, \{4, 19\}, \{10, 26\}, \{14, 31\}, \{5, 23\}, \\ \{15, 34\}, \{2, 22\}, \{12, 33\}, \{3, 25\}, \{1, 24\}.$$

$d = 4, m = 24$, on prend alors :

$$\{43, 47\}, \{40, 45\}, \{12, 18\}, \{34, 41\}, \{38, 46\}, \\ \{39, 48\}, \{9, 19\}, \{33, 44\}, \{8, 20\}, \{22, 35\}, \\ \{11, 25\}, \{6, 21\}, \{16, 32\}, \{7, 24\}, \{13, 31\}, \\ \{4, 23\}, \{10, 30\}, \{15, 36\}, \{5, 27\}, \{14, 37\}, \\ \{2, 26\}, \{17, 42\}, \{3, 29\}, \{1, 28\}.$$

Ceci prouve :

Théorème 5. — Pour $d = 4$ les conditions nécessaires de la proposition I sont suffisantes pour assurer l'existence d'une solution au problème II.

Bibliographie

- [1] J. C. BERMOND, A. KOTZIG & J. TURGEON, On a combinatorial problem of antennas in radioastronomy, *Proc. 5th Hungarian Colloquium Keszthely* (1976), North Holland.
- [2] R. O. DAVIES, On Langford's problem (II), *Math. Gaz.* **43** (1959) 253-255.
- [3] S. W. GOLOMB, How to number a graph, dans : *Graph Theory and Computing* (ed. R. C. Read) Acad. Press, New York (1972) 23-37.
- [4] H. HANANI, A note on Steiner triple systems, *Math. Scand.* **8** (1960) 154-156.
- [5] C. D. LANGFORD, Problem, *Math. Gaz.* **42** (1958) 228.
- [6] A. ROSA, On certain valuations of the vertices of a graph, dans : *Theory of graphs* (ed. P. Rosenstiehl), Dunod Gordon Beach (1967) 349-355.
- [7] Th. SKOLEM, On certain distributions of integers in pairs with given differences, *Math. Scand.* **5** (1957) 57-68.