



HAL
open science

Hypergraphes hamiltoniens

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann, Dominique
Sotteau

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann, Dominique Sotteau. Hypergraphes hamiltoniens. Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Colloque International CNRS, 260, 1978, Orsay, Juillet 1976, France. pp.39-43. hal-02321860

HAL Id: hal-02321860

<https://hal.science/hal-02321860>

Submitted on 21 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HYPERGRAPHES HAMILTONIENS

J. C. BERMOND, A. GERMA, M. C. HEYDEMANN et D. SOTTEAU

Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, bât. 425, 91405 Orsay

Abstract. — We extend to h -uniform hypergraphs different theorems of graph theory : theorem of Dirac for the existence of cycles, theorem of Ore for the existence of hamiltonian cycles, partition of the edges of a complete graph into hamiltonian cycles.

1. Introduction. Définitions. — Soit H un hypergraphe simple h -uniforme, c'est-à-dire un couple (X, \mathcal{E}) , où X est un ensemble fini, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et \mathcal{E} un ensemble de parties distinctes de X ,

$$\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_m\},$$

tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad |E_i| = h \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^m E_i = X.$$

Une chaîne de longueur k dans H est une séquence $x_1 E_1 x_2 E_2 \dots x_k E_k x_{k+1}$ telle que les sommets x_i ($1 \leq i \leq k+1$) ainsi que les arêtes E_j ($1 \leq j \leq k$) soient deux à deux distincts et que $\{x_i, x_{i+1}\} \subset E_i$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Un cycle de longueur k est une séquence $x_1 E_1 x_2 \dots x_k E_k x_1$ telle que les sommets x_i ($1 \leq i \leq k$) et les arêtes E_j ($1 \leq j \leq k$) soient deux à deux distincts, que $\{x_i, x_{i+1}\} \subset E_i$ ($1 \leq i \leq k-1$) et $\{x_1, x_k\} \subset E_k$.

Nous appelons cycle hamiltonien un cycle de longueur $|X| = n$, et hypergraphe hamiltonien un hypergraphe qui contient un cycle hamiltonien.

Exemple. — L'hypergraphe complet h -uniforme d'ordre n , K_n^h ($|X| = n$, $\mathcal{E} = \mathcal{F}_h(X)$, $n > h$) est hamiltonien.

Remarques. — 1) Un hypergraphe 2-uniforme est un graphe et les définitions données ci-dessus généralisent celles connues pour les graphes.

2) Cette généralisation de cycle dans un graphe n'est pas la seule possible ; nous en donnons une autre plus loin.

Nous cherchons à étendre aux hypergraphes h -uniformes divers théorèmes de la théorie des graphes : théorème de Dirac pour l'existence de cycles, théorème de Ore, pour l'existence de cycles hamiltoniens, partition des arêtes du graphe complet en cycles hamiltoniens.

2. Existence de cycles. — A) Le théorème de Dirac (1952, [3]) s'énonce :

Théorème. — Si $G = (X, \mathcal{E})$ est un graphe d'ordre n ($|X| = n$) tel que tout sommet $x \in X$ ait un degré supérieur ou égal à $k-1$, alors G possède un cycle de longueur supérieure ou égale à k .

Appelons degré total d'un sommet x d'un hypergraphe H , le cardinal de l'ensemble des arêtes de H contenant x , et notons le $\delta(x)$. Nous avons alors la généralisation du théorème de Dirac :

Théorème 1. — Si $H = (X, \mathcal{E})$ est un hypergraphe h -uniforme et k un entier, $k \geq h+1$, tels que, pour tout sommet x de X , on ait $\delta(x) \geq \binom{k-2}{h-1} + h-1$, alors H contient un cycle de longueur supérieure ou égale à k .

Démonstration. — Nous supposons $h \geq 3$.

Soit $C = x_1 E_1 x_2 \dots x_l E_l x_{l+1}$ une chaîne de longueur maximum dans l'ensemble des chaînes de H . Désignons par \mathcal{E}_1 l'ensemble des arêtes de H contenant x_1 . Par définition, on a $\delta(x_1) = |\mathcal{E}_1|$.

a) Par suite de l'hypothèse de maximalité de la chaîne C , une arête E de \mathcal{E}_1 est :

— soit une des arêtes E_i , $1 \leq i \leq l$,

— soit de la forme $E = \{x_1, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{h-1}}\}$

avec

$$2 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{h-1} \leq l+1.$$

b) $l \geq h-1$. En effet, sinon, on pourrait écrire :

$$l \leq h-2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \subset \{E_1, \dots, E_l\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(x_1) \leq l \leq h-2 < h-1 + \binom{k-2}{h-1},$$

ce qui contredit l'hypothèse.

c) Montrons $l \geq k-1$ (ce qui est une condition nécessaire pour l'existence d'un cycle de longueur k).

Posons

$$A = \{ \{x_1, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{h-1}}\}, 2 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{h-1} \leq l+1 \}.$$

Cas $r = 3$. — Pour tout $i \in \{2, \dots, l\}$, si $E_i \in \mathcal{E}_1$, alors $E_i = \{x_1, x_i, x_{i+1}\}$ donc $E_i \in A$ et

$$\mathcal{E}_1 \subset \{E_1\} \cup A.$$

Par suite

$$1 + \binom{l}{2} \geq \delta(x_1) \geq 2 + \binom{k-2}{2} \Rightarrow l \geq k - 1.$$

Cas $r \geq 4$. — On peut écrire

$$\mathcal{E}_1 \subset \{E_1, \dots, E_{h-2}\} \cup B \cup A'$$

avec

$$B = (\{E_{h-1}, \dots, E_l\} - A) \cap \mathcal{E}_1$$

$$A' = (A - \{E_1, \dots, E_{h-2}\}) \cap \mathcal{E}_1.$$

Pour $i \in \{h-1, \dots, l\}$, posons

$$F_i = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_i, x_{i+1}\}.$$

On a $F_i \in A$.

Montrons :

$$i \in \{h-1, \dots, l\}, \quad E_i \in B \Rightarrow F_i \notin A'.$$

En effet, si $E_i \in B$, on a $E_i = \{x_1, x_i, x_{i+1}, x_\alpha, \dots\}$ avec $\alpha > l+1$ ($r \geq 4$) et si $F_i \in A'$, on peut alors former la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_i x_1 E_1 \dots x_i F_i x_{i+1} \dots E_l x_{l+1}.$$

Par conséquent

$$|B| + |A'| \leq |A| = \binom{l}{h-1},$$

d'où

$$\delta(x_1) = |\mathcal{E}_1| \leq h - 2 + \binom{l}{h-1}.$$

L'hypothèse entraîne

$$\binom{l}{h-1} + h - 2 \geq \binom{k-2}{h-1} + h - 1,$$

d'où $l \geq k - 1$.

d) Dans la suite nous allons supposer que H ne contient pas de cycle de longueur supérieure ou égale à k et montrer que l'on aboutit ainsi à une contradiction.

e) Posons

$$A_k = \{(x_1, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{h-1}});$$

$$2 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{h-1} \leq k - 1\}.$$

Alors \mathcal{E}_1 est l'union disjointe des 3 ensembles :

$$H_k = \{E_1, \dots, E_{h-2}, E_{k-1}\}$$

$$B_k = (\{E_{h-1}, \dots, E_{k-2}\} - A_k) \cap \mathcal{E}_1$$

$$A'_k = A_k - \{F_i = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_i, x_{i+1}\} \mid E_i \in B_k\}.$$

La démonstration va se faire en plusieurs étapes.

On a $\mathcal{E}_1 \subset \{E_1, \dots, E_{k-1}\} \cup A_k$. Sinon il existerait une arête $E \in \mathcal{E}_1 - \{E_1, \dots, E_{k-1}\}$ contenant x_α , avec $k \leq \alpha \leq l+1$, et l'on aboutit à une contradiction en considérant le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_1 E_1 \dots x_{\alpha-1} E_{\alpha-1} x_\alpha E x_1 \quad \text{si } E \notin \{E_k, \dots, E_l\}$$

$$x_1 E_1 \dots x_i E_i x_1 \quad \text{si } E = E_i \text{ avec } i \in \{k, \dots, l\}.$$

Montrons :

$$E_i \in B_k \Rightarrow F_i = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_i, x_{i+1}\} \notin A_k.$$

En effet, si $E_i \in B_k$, alors il existe $\alpha, \alpha \geq k$ et $x_\alpha \in E_i$. Si de plus $F_i \in A_k$, on aurait, pour $\alpha > l+1$, la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_i x_1 E_1 \dots x_i F_i x_{i+1} \dots E_l x_{l+1}$$

et pour $\alpha \in \{k, \dots, l+1\}$, le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_1 E_1 \dots x_i F_i x_{i+1} \dots x_\alpha E_i x_1.$$

Il en résulte, $\mathcal{E}_1 \subset H_k \cup B_k \cup A'_k$ avec

$$|B_k \cup A'_k| \leq |A_k|,$$

d'où

$$|\mathcal{E}_1| \leq r - 1 + |A_k| = h - 1 + \binom{k-2}{h-1}.$$

Or d'après l'hypothèse :

$$|\mathcal{E}_1| \geq h - 1 + \binom{k-2}{h-1}.$$

On a donc l'égalité $\mathcal{E}_1 = H_k \cup B_k \cup A'_k$, les trois ensembles H_k, B_k, A'_k sont disjoints et

$$|B_k \cup A'_k| = |A_k|.$$

f) Supposons $h > 3$ et $k > h + 1$. Montrons qu'alors pour tout $j \in \{h-1, \dots, k-2\}$ il existe une arête E de H , $E \in A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$ et

$$\{x_1, x_{j+1}\} \subset E.$$

Les arêtes de A_k contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$ sont en nombre $\binom{k-3}{h-2}$.

Comptons les arêtes $E_i, i \in \{1, \dots, l\}$, contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$ et appartenant à A_k . Si $E_i \in A_k$ alors $i \leq k-2$. De plus, si $E_i \in A_k, i \leq h-2$, et si $\{x_1, x_{j+1}\} \subset E_i$, alors $E_i \in H_k$ et, d'après e), $E_i \notin A'_k$ et de plus :

$$\text{— soit } E_i = F_j = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_j, x_{j+1}\} \text{ et}$$

$$E_j \in B_k,$$

$$\text{— soit } E_i = F_{j+1} = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_{j+1}, x_{j+2}\} \text{ et } E_{j+1} \in B_k.$$

Il y a donc au plus $k-2 - (h-2) = k-h$ arêtes $E_i \in A_k$ contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$.

Or

$$h > 3 \text{ et } k > h + 1 \Rightarrow \binom{k-3}{h-2} \geq k-3 > k-h.$$

On peut donc trouver $E \in A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$ et contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$.

g) Montrons le théorème pour $h > 3$ et $k > h + 1$.

Cas 1. — $E_1 \notin A_k$. Alors il existe $x_\alpha \in E_1$ avec $\alpha \geq k$. On sait, d'après f), qu'il existe une arête $E \in A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$ et contenant $\{x_1, x_{k-1}\}$. On obtient alors une contradiction en considérant,

si $\alpha > l + 1$, la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_1 x_2 \dots x_{k-1} E x_1 E_{k-1} x_k \dots E_l x_{l+1}$$

si $k \leq \alpha \leq l + 1$, le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_\alpha E_1 x_2 \dots x_{k-1} E x_1 E_{k-1} x_k \dots E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

Cas 2. — $E_1 \in A_k$. Puisque $H_k \cap A'_k = \emptyset$, d'après e), il existe $j \in \{h-1, \dots, k-2\}$ tel que

$$E_1 = F_j = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_j, x_{j+1}\}$$

et $E_j \in B_k$. Puisque $E_j \notin A_k$, il existe $\alpha \geq k$ tel que $x_\alpha \in E_j$. D'après f), il existe une arête E contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$ et appartenant à $A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$. On aboutit alors à une contradiction en considérant

si $\alpha > l + 1$, la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_j x_j E_{j-1} x_{j-1} \dots x_2 E_1 x_1 E x_{j+1} E_{j+1} \dots E_l x_{l+1}$$

si $k \leq \alpha \leq l + 1$, le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_\alpha E_j x_j E_{j-1} x_{j-1} \dots x_2 E_1 x_1 E x_{j+1} \dots E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

h) Montrons le théorème pour $h = 3$ et $k > 4$.
Si $h = 3$ et $E_i \in \mathcal{E}_1$ avec $i > 1$, alors

$$E_i = \{x_1, x_i, x_{i+1}\} \text{ d'où } B_k = \emptyset$$

et $\mathcal{E}_1 = \{E_1, E_{k-1}\} \cup A_k$ avec

$$\{E_1, E_{k-1}\} \cap A_k = \emptyset.$$

Comme $E = \{x_1, x_2, x_{k-1}\} \in A_k$ et $E_1 \notin A_k$ on peut conclure comme au g) Cas 1.

i) Dans le cas $k = h + 1$, on a $\mathcal{E}_1 = \{E_1, \dots, E_h\}$.

Dans ce cas en effet A_k se réduit à $\{x_1, \dots, x_h\}$. Si on avait $\{x_1, \dots, x_h\} \notin \{E_1, \dots, E_h\}$, il existerait $x_\alpha \in E_1$ avec $\alpha \geq h + 1$, et on aurait, soit une chaîne plus longue que C pour $\alpha > l + 1$:

$$x_\alpha E_1 x_1 \{x_1 \dots x_h\} x_2 \dots x_l E_l x_{l+1},$$

soit un cycle de longueur $\geq k$ pour $h + 1 \leq \alpha \leq l$:

$$x_\alpha E_1 x_1 \{x_1, \dots, x_h\} x_2 \dots E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

On peut donc dire que, dans le cas $k = h + 1$,

pour toute chaîne C de longueur maximum, l'ensemble des arêtes de H contenant le premier élément de C est formé des h premières arêtes de C .

j) Démontrons le théorème dans le cas $k = h + 1$.

Si E_1 contient x_α avec $k + 1 \leq \alpha \leq l$, on obtient un cycle de longueur $\geq k$:

$$x_\alpha E_1 x_2 \dots x_{\alpha-1} E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

Si E_1 contient x_α avec $\alpha \leq h = k - 1$ alors la propriété i) appliquée à la chaîne de longueur maximum :

$$x_\alpha E_1 x_2 E_2 \dots E_{\alpha-1} x_1 E_\alpha \dots E_l x_{l+1},$$

montre que $x_\alpha \in E_h$. De même si E_1 contient x_α avec $\alpha \geq l + 1$, la propriété i) appliquée à la chaîne de longueur maximum $x_\alpha E_1 x_2 \dots x_l E_l x_{l+1}$, montre que $x_\alpha \in E_h$. On a donc montré $E_1 - \{x_{h+1}\} \subset E_h$, d'où la contradiction $E_1 = E_h$ ($x_{h+1} \in E_h$).

Remarque. — Tomescu a donné une généralisation du théorème de Dirac en utilisant une autre notion de degré dans les hypergraphes.

Appelons *degré disjoint* d'un sommet x de H , noté $d(x)$, le nombre maximum d'arêtes de H qui ont deux à deux une intersection réduite à x .

Théorème (Tomescu [4]). — Soient $H = (X, \mathcal{E})$ un hypergraphe h -uniforme, k un entier positif, $k \geq 3$. Si pour tout sommet $x \in X$, on a $d(x) \geq k - 1$, alors H contient un cycle de longueur supérieure ou égale à k .

B) **Théorème** (Ore, 1961 [2, p. 203]). — Soit $G = (X, \mathcal{E})$ un graphe d'ordre $n \geq 3$ avec

$$[x, y] \notin \mathcal{E} \Rightarrow d(x) + d(y) \geq n.$$

Alors G possède un cycle hamiltonien.

Pour étendre ce résultat on définit le *degré* dans H d'une partie $A \subset X$, noté $\delta(A)$, comme le cardinal de l'ensemble des arêtes de H contenant A . On a alors :

Théorème 2. — Soit $H = (X, \mathcal{E})$ un hypergraphe h -uniforme ($h \geq 3$) d'ordre n , $n \geq h + 1$, tel que pour toute partie $A \subset X$ vérifiant $|A| = h$ on ait :

$$A \notin \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{x \in A} \delta(A - x) > \sup(n - h + 2, 2h - 2)$$

alors H est hamiltonien.

Remarque. — Dans le cas $h = 2$, ce théorème est moins bon que celui de Ore et nous conjecturons que l'on peut y remplacer $\sup(n - h + 2, 2h - 2)$ par $\sup(n - h + 1, 2h - 2)$.

Vu les contraintes imposées par le comité d'édition nous n'en donnerons pas la preuve ici.

3. **Partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens.**

— Il est connu [2, p. 222] que les arêtes du graphe complet K_n admettent une partition en cycles hamil-

toniens si n est impair et en cycles hamiltoniens plus un couplage si n est pair. On peut donc se poser le problème suivant :

Problème 1. — *Etant donné l'hypergraphe K_n^h , pour quelles valeurs de n existe-t-il une partition de ses arêtes en cycles hamiltoniens ?*

Nous pouvons définir certains types de cycles hamiltoniens.

Définition. — *Un cycle hamiltonien est de type k si et seulement si le cardinal de l'intersection de deux arêtes consécutives est égal à k .*

A cette définition correspondent d'autres questions précisant le problème 1.

Problème 1.k ($1 \leq k \leq h - 1$). — *Pour quelles valeurs de n existe-t-il une partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens de type k ?*

Condition nécessaire. — Une condition nécessaire pour que les problèmes 1 et 1.k aient des solutions est que $\frac{1}{n} \binom{n}{h}$ soit entier. Cette condition nécessaire est vérifiée dès que n est premier et nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 3. — *Pour tout n premier il existe une partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens.*

Démonstration. — Considérons les sommets de K_n^h comme les éléments de Z_n , anneau des entiers modulo

n . Définissons une relation d'équivalence \mathcal{R} sur l'ensemble des arêtes par

$$\{a_1, a_2, \dots, a_h\} \mathcal{R} \{a'_1, a'_2, \dots, a'_h\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists d \in Z_n, \{a_1 + d, \dots, a_h + d\} = \{a'_1, \dots, a'_h\}.$$

Pour n premier il est facile de prouver que chaque classe a n éléments, et l'ensemble des arêtes d'une classe permet de construire un cycle hamiltonien défini par exemple comme suit :

$$E_i = \{a_1 + i(a_2 - a_1), a_2 + i(a_2 - a_1), \dots, a_h + i(a_2 - a_1)\};$$

$$x_{i+1} = a_2 + i(a_2 - a_1).$$

Ceci prouve le théorème. \square

Dans le cas $h = 3$ on peut donner un théorème plus précis.

Théorème 4. — *Pour n premier supérieur à 3 l'ensemble des arêtes de K_n^3 admet une partition en cycles hamiltoniens de type 1.*

Démonstration. — Définissant comme dans la démonstration du théorème 3, une partition des arêtes en classes d'équivalence, la classe d'équivalence de l'arête $(0, a, b)$ peut s'écrire, pour n premier, sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \{i, a+i, b+i\} & \quad 0 \leq i < n & (1) \\ \{ia, (i+1)a, b+ia\} & \quad 0 \leq i < n \text{ car } \{ia, 0 \leq i < n\} = \{i, 0 \leq i < n\} & (2) \\ \{i(b-a), a+i(b-a), b+i(b-a)\} & \quad 0 \leq i < n \text{ car } \{i(b-a), 0 \leq i < n\} = \{i, 0 \leq i < n\} & (3) \\ \{ib, a+ib, (i+1)b\} & \quad 0 \leq i < n \text{ car } \{ib, 0 \leq i < n\} = \{i, 0 \leq i < n\}. & (4) \end{aligned}$$

Aux formes (2), (3), (4) correspondent les cycles hamiltoniens suivants :

$$\begin{aligned} 0 \{0, a, b\} a \{a, 2a, a+b\} 2a \dots & \quad (n-1)a \{(n-1)a, 0, (n-1)a+b\} 0 & (2') \\ a \{0, a, b\} b \{b-a, b, 2b-a\} 2b-a \dots & \quad \{(n-1)(b-a), a+(n-1)(b-a), b+(n-1)(b-a)\} a & (3') \\ 0 \{0, a, b\} b \{b, a+b, 2b\} 2b \dots & \quad (n-1)b \{(n-1)b, a+(n-1)b, 0\} 0. & (4') \end{aligned}$$

Chacun des cycles écrits ci-dessus est de type 1 ou de type 2. Ils ne peuvent être tous les trois de type 2; on montre en effet qu'on ne peut pas avoir simultanément :

$$\begin{aligned} |\{0, b\} \cap \{2a, a+b\}| &= 1 & (\alpha) \\ |\{0, a\} \cap \{a+b, 2b\}| &= 1 & (\beta) \\ |\{0, a\} \cap \{b-a, 2b-a\}| &= 1. & (\gamma) \end{aligned}$$

pour n premier avec a et b éléments de Z_n : $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. \square

Les résultats ci-dessus suggèrent les conjectures suivantes :

Conjecture 1 [resp. 1.k]. — *Il existe une partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens [resp. de type k] si et seulement si $\frac{1}{n} \binom{n}{h}$ est entier.*

La conjecture 1.($h - 1$) n'est autre qu'une conjecture de Baranyai [1].

Conjecture 2 [resp. 2.k]. — *Pour $n \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$ il existe une partition des arêtes de K_n^3 en cycles hamiltoniens [resp. de type k]. Pour $n \equiv 0 \pmod{3}$ il existe une partition des arêtes de K_n^3 en un couplage et des cycles hamiltoniens [resp. de type k].*

Nous avons montré que la conjecture 2 était vérifiée pour les premières valeurs de n ($n \leq 20$) et pour $n = 2p$ (p premier).

Bibliographie

- [1] Z. BARANYAI, On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Coll. Math. Soc.*, Janos Bolyai 10, Infinite and finite sets, Keszthely (1973), North Holland (1975) 91-108.
- [2] C. BERGE, Graphes et hypergraphes, Dunod (1973).
- [3] G. A. DIRAC, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.* 3 (1952) 69-81.
- [4] I. TOMESCU, Sur les cycles élémentaires dans les graphes et hypergraphes k -chromatiques (manuscript).