



HAL
open science

Nombres complexes en physique : le cas de la réflexion totale frustrée

Thomas François, H. Reboul, Manuel Bächtold, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Thomas François, H. Reboul, Manuel Bächtold, Thomas Hausberger. Nombres complexes en physique : le cas de la réflexion totale frustrée. 2014. hal-02319884

HAL Id: hal-02319884

<https://hal.science/hal-02319884>

Submitted on 18 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equipe IREM Mathématiques et Philosophie

IREM de Montpellier

<http://www.irem.univ-montp2.fr/Mathematiques-et-Philosophie>

| | | |
|--|--|---|
| | Nombres complexes en physique: le cas de la réflexion totale frustrée |  |
|--|--|---|

Sommaire :

1. Fiche d'identification
2. Déroulement
3. Fiches Professeur
4. Retour d'élèves suite à une expérimentation de la ressource
5. Bibliographie
6. Evolution de la ressource

| | | |
|--|--|--|
| Disciplines | Philosophie – Mathématiques – Physique | |
| Thème | Le rapport raison-réel : un exemple d'application des mathématiques en physique (les nombres complexes et la modélisation de la réflexion totale frustrée) | |
| Niveau | Classe de Terminale | |
| Cadre | Cours de Philosophie | |
| Objectifs | <p>Donner un exemple concret de l'usage des nombres complexes en physique.</p> <p>À travers cet exemple, discuter l'utilité des mathématiques en physique. Montrer qu'il ne va pas de soi que les mathématiques puissent s'appliquer au monde physique (« l'incroyable efficacité des mathématiques »).</p> <p>Poser ainsi le problème du rapport entre la raison et le réel</p> | |
| Prérequis pour les élèves | <p>En philosophie : aucun</p> <p>En mathématiques : les nombres complexes</p> <p>En physique : lois de Snell-Descartes</p> | |
| Modalités pratiques de déroulement | Durée | 3h |
| | Équipement spécifique | Vidéo projecteur Prismes en plexiglas |
| Description de l'activité | <p>Phase 1 (1h) : présentation du phénomène physique et de sa modélisation mathématique (à partir d'une vidéo et à travers une petite expérience avec un prisme)</p> <p>Phase 2 (2h) : questionnement sur l'utilisation des mathématiques en physique (discussion avec la classe, puis exercice)</p> | |
| Fichiers associés à cette ressource | <ul style="list-style-type: none"> - Vidéo « La réflexion totale frustrée » - En complément : les diapos de la présentation de la vidéo | |
| Mots-clés | <p>La raison et le réel</p> <p>La vérité</p> <p>Théorie et expérience</p> <p>Incroyable efficacité des mathématiques</p> <p>Réalisme</p> | |
| Auteurs | Thomas François, Henri Reboul, Manuel Bächtold et l'équipe IREM math-philo ¹ | |

¹ Bächtold Manuel, François Thomas, Guin Daniel, Guin Dominique, Hausberger Thomas, Pinet Véronique, Puy Denis, Reboul Henri

IREM
2. Déroulement



| Phase | Intervenant | Description | Outils et supports | Durée |
|--------------|---|---|--|--------------|
| 1 | Professeur de Physique et professeur de Philosophie | Présentation du phénomène physique, la réflexion totale frustrée, et de sa modélisation rendue possible grâce aux nombres complexes | - Vidéo « La réflexion totale frustrée » - Prismes en plexiglas (1 prisme pour 2 ou 3 élèves) - Fiche professeur 1 | 1h |
| 2 | Professeur de Philosophie (éventuellement accompagné du professeur de Physique) | Questionnement sur l'utilisation des mathématiques en physique : 2.1 discussion avec la classe 2.2 exercice | Fiche professeur 2 | 2h |

Fiche professeur 1 : présentation du phénomène physique et de sa modélisation mathématique

Fiche professeur 2 : questionnement sur l'utilisation des mathématiques en physique

Fiche professeur 1

Présentation du phénomène physique et de sa modélisation mathématique

Organisation : projection de la vidéo et explications avec arrêts sur image

Les commentaires suivants sont proposés pour éclairer la vidéo (le temps indiqué est celui de la vidéo) :

2'05 [Intervention du professeur de physique]

Dioptre = surface séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents

Indice de réfraction d'un milieu (n) = grandeur (sans dimension) qui décrit l'influence du milieu sur la propagation de la lumière : n permet de déterminer la vitesse de la lumière qui est en quelques sortes ralentie par le milieu ($v = c/n$, avec c la vitesse de la lumière dans le vide) et permet déterminer la déviation de la lumière lorsqu'il passe d'un milieu à un autre (le cas ici)

$$n(\text{vide}) = 1$$

$$n(\text{air}) = \text{environ } 1$$

$$n(\text{plexiglas}) = 1,51$$

Dans l'exemple des diapos : milieu 1 = du plexiglas / milieu 2 = de l'air

Une partie de la lumière est réfléchiée avec le même angle. Une autre partie passe dans le milieu 2, mais en étant déviée. C'est le phénomène de réfraction. La déviation est donnée par la loi de Snell-Descartes indiquée sur la diapo.

3'09 [Intervention du professeur de physique]

Au-delà d'un angle limite, toute la lumière est réfléchiée.

Que signifie que la loi de Snell-Descartes « n'a pas de solution » ?

Du point de physique : suivant cette loi, il n'y a pas de lumière réfractée.

Du point de vue mathématique :

$$(n_1/n_2) \sin\theta_1 > 1$$

$$\text{Ex : } n_1 = 2, n_2 = 1 \text{ et } \theta_1 = 70^\circ, \text{ alors } (n_1/n_2) \sin\theta_1 = 2/1 \times 0,94 = 1,88$$

$$\text{Or } \sin\theta_2 = (n_1/n_2) \sin\theta_1$$

$$\text{Donc, dans ce cas : } \sin\theta_2 > 1$$

Ce qui n'est pas possible (il n'existe pas un tel angle)

(dans ce cas, angle limite : $(n_1/n_2) \sin\theta_{1 \text{ limite}} = 1$, soit $\sin\theta_{1 \text{ limite}} = 1/2$, soit $\theta_{1 \text{ limite}} = 30^\circ$)

4'10 [Intervention du professeur de physique]

Réflexion totale avec un prisme :

Le dioptre considéré est la surface à la base du prisme

Pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que les rayons incidents soient suffisamment rasants (avec un angle supérieur à l'angle limite).

5'15 [Intervention du professeur de physique]

Faire réaliser l'expérience par les élèves (1 prisme pour 2 ou 3) en trois temps :

(1) Les élèves tiennent le prisme devant eux, sans le doigt, en le faisant pivoter pour différencier les cas : transmission de lumière / réflexion totale

(2) En situation de réflexion totale, ils appuient un doigt et observent la frustration de la réflexion totale

(3) Demander aux élèves une interprétation de cette expérience

Il s'agit de bien identifier le phénomène de réflexion totale (sans le doigt) et de le distinguer ensuite de sa frustration par la présence du doigt qui est très proche ou en contact avec la surface considéré (la base du prisme)

6'31 **[Intervention du professeur de physique]**

L'expérience historique de Newton :

Si l'on compare avec l'expérience que nous venons de voir, quel rôle joue la lentille (à droite) ?

Le même rôle que notre doigt. La présence de cette lentille frustré la réflexion localement (vers le point de contact).

[Intervention du professeur de philosophie]

Introduire la notion de *fait problématique* : le fait n'est ni prévu ni expliqué dans le cadre théorique utilisé (lois de Snell-Descartes historiques, c'est-à-dire avec les nombres réels)

Questionnement sur la validité de la loi de Snell-Descartes : elle n'est pas fausse, mais sa *vérité* est

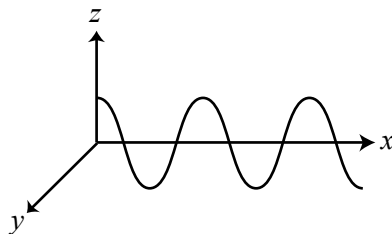
a) *limitée* : exacte jusqu'à un certain angle pour la réfraction

b) et *approchée* : au-delà d'un certain angle pour la réflexion, la loi de Snell-Descartes prévoit une réflexion totale, mais elle ne prévoit ni la possibilité d'une frustration (cas de transmission partielle) ni l'existence d'une onde évanescente

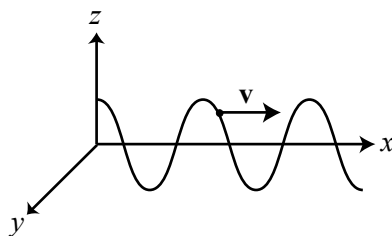
Les scientifiques sont conduits à *chercher de nouvelles explications* dont le domaine de validité soit plus étendu. Image d'Einstein & Infeld : à mesure que le randonneur gravit une montagne et s'approche du sommet, son champ de vision s'accroît : de même le scientifique (attention, cette image peut suggérer une continuité dans l'histoire des sciences, mais la recherche de nouvelles explications peut également conduire à des ruptures conceptuelles)

9'57 **[Intervention du professeur de physique]**

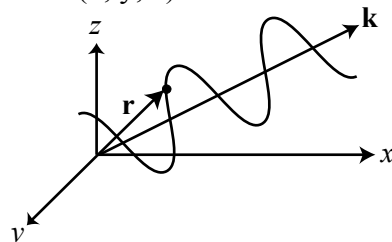
Représenter au tableau un repère Oxyz et une onde se propageant suivant x.



Représenter le vecteur vitesse en un point quelconque de l'onde.



Représenter au tableau un second repère Oxyz et une onde se propageant suivant la direction de **k**. Représenter **r** et expliciter : $\mathbf{r} = (x, y, z)$



Préciser que l'opération $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ est un produit scalaire.

Note : les lettres en gras correspondent ici à des vecteurs.

10'22 **[Intervention du professeur de physique]**

Rappeler la relation : $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

10'52 **[Intervention du professeur de physique]**

Il y a deux usages du terme réel à bien distinguer. Lesquels ?

- Le champ électrique « réel » = qui existe physiquement et qui est représenté par \mathbf{E} .
- La partie « réelle » de la fonction complexe \underline{E} = sens mathématique, partie réelle du nombre complexe

Remarque : le vecteur \mathbf{E} représentant le champ électrique n'est pas représenté graphiquement ici. Il est en fait perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (à \mathbf{k}), avec une intensité qui varie (comme la hauteur d'une vague).

Précision : pour des ondes planes (les seules qui sont décrites dans le formalisme de la vidéo), le vecteur \mathbf{E} est le même à un instant donné dans tous les points d'un plan d'onde défini par $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{cte}$

11'21 **[Intervention du professeur de physique]**

Représenter le dioptre et les vecteurs \mathbf{k}_1 pour l'onde incidente et \mathbf{k}_2 pour l'onde réfractée.

12'27 **[Intervention du professeur de physique]**

On utilise ici $\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1$

Il n'existe pas de θ_2 tel que $\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2}$ si le nombre sous la racine est négatif.

C'est le cas si on ne considère que les nombres réels.

Mais ce n'est plus le cas si on fait appel aux nombres complexes

13 '56 **[Intervention du professeur de physique]**

Représenter le dioptre et les vecteurs \mathbf{k}_1 pour l'onde incidente et \mathbf{k}_2 pour l'onde réfractée, avec \mathbf{k}_2 parallèle à l'axe y.

Expliciter le fait que l'intensité du champ électrique est exponentiellement décroissante lorsque l'on s'éloigne de l'axe y, en direction de z (vers le bas).

17'36 **[Intervention du professeur de physique]**

Lorsque les ondes évanescentes peuvent se former, elles assurent la réflexion totale : la lumière incidente est directement réfléchi.

Lorsque les ondes évanescentes ne peuvent pas se former librement, en raison de la présence de la peau du doigt, la réflexion totale est frustrée : une partie de la lumière traverse la surface, est rediffusée par la peau du doigt dans toutes les directions (y compris dans la direction de notre œil qui la perçoit alors plus ou moins intensément).

Fiche professeur 2

Questionnement sur l'utilisation des mathématiques en physique

Clarifications préliminaires (si nécessaire) :

Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ?

Les lois disponibles en physique (lois de Snell-Descartes) ne permettent pas d'expliquer que l'on voit l'empreinte digitale (qui résulte d'un phénomène de réflexion totale frustrée).

Comment surmonter le problème ?

En modélisant la lumière à l'aide des nombres complexes. Il est possible ainsi de trouver des solutions pour les angles d'incidence au-delà de l'angle limite ("limite" dans le cadre d'une modélisation sans nombres complexes).

Questionnement en deux étapes :

2.1 Discussion avec la classe (1h) : quelle est l'utilité des mathématiques en physique ?

(a) Souligner l'*efficacité* des mathématiques : elles permettent non seulement de modéliser (ou comprendre) les phénomènes problématiques, mais aussi et surtout de prévoir (ou anticiper) de nouveaux phénomènes (jusque-là jamais observés) : l'onde évanescente et ses caractéristiques.

(b) Les mathématiques peuvent donc constituer un outil efficace pour la physique. On peut faire appel à la *métaphore de l'outil*. Demander aux élèves de trouver les outils dont les fonctions dans la pratique sont similaires à celles des mathématiques en physique. Deux métaphores en particulier peuvent être travaillées :

- le microscope : les mathématiques permettent de faire apparaître de nouveaux aspects de la réalité et des détails plus fins.

- le treuil : les mathématiques permettent de faire remonter à la surface de nouveaux aspects de la réalité (Etienne Klein parle de « treuil ontologique »)

Cette analogie permet de mettre en évidence le point essentiel de l'efficacité des mathématiques, à savoir de devancer l'observation : elles ne permettent pas simplement de modéliser des phénomènes déjà observés, mais de prévoir de nouveaux phénomènes.

(c) Le caractère *surprenant* (ou « étonnant », « incroyable »...) de cette efficacité :

L'utilisation des mathématiques en physique semble aller de soi aujourd'hui : comme si cela avait toujours été le cas et comme si les mathématiques devaient nécessairement s'appliquer au monde physique. On propose de remettre en cause ces deux aspects de l'évidence :

- Rappeler le tournant de la mathématisation de la physique avec Galilée et Newton : la physique devient mathématique (quantitative), alors qu'elle était principalement qualitative avant (physique d'Aristote)

- Insister sur la différence de nature entre les objets mathématiques, qui apparaissent comme des constructions de l'esprit, et les phénomènes physiques, qui renvoient à une réalité matérielle. Pour discuter ce point, interroger les élèves sur la nature et l'origine des nombres. On distingue le cas des petits nombres entiers du cas des nombres irrationnels, complexes... Préciser notamment que les nombres complexes sont issus d'un développement interne des mathématiques : pour résoudre des équations du 3^e degré, XVIe (point important que les élèves devront mobiliser dans l'exercice suivant).

2.2 Exercice (1h) : De fait, les mathématiques s'appliquent au monde physique. Quelles en sont les explications possibles ? Sont-elles valables ?

Nous proposons l'exercice ci-dessous aux élèves de manière à montrer le caractère problématique de l'utilisation des mathématiques en physique : les deux explications envisagées se heurtent à des objections sérieuses qui peuvent être illustrées par l'exemple des nombres complexes.

Travail proposé :

Pour les deux réponses suivantes, expliquer en quoi le cas des nombres complexes les rend difficilement défendables.

(i) Les mathématiques s'appliquent au monde sensible parce que ce dernier est la source première de laquelle sont tirées les mathématiques.

(ii) Les mathématiques s'appliquent au monde physique parce que ce dernier possède une structure mathématique.

Question préliminaire :

Interroger les élèves sur le présupposé philosophique commun à ces deux explications : les nombres ne seraient pas de pures créations de l'esprit mais ils seraient ~~tirées~~ **tirés** de la réalité ou ils seraient des éléments constitutifs de la structure de la réalité. Dans les deux cas, nous sommes face à une position dite « réaliste », dans le sens où les idéalités mathématiques existeraient indépendamment de l'esprit humain. On peut opposer à cette position « réaliste » le criticisme kantien : Kant dénonce la réification des idées comme une illusion de la raison.

Précisions et éléments de réponse :

La première explication : Elle a été apportée notamment par Aristote. Elle revient à soutenir que les mathématiques s'appliquent au monde sensible parce que ce dernier est la source première de laquelle sont tirées les mathématiques. À la rigueur, ce point de vue peut être maintenu si l'on considère le cas des nombres entiers naturels ou celui de la géométrie euclidienne. Cependant, dans le cas des nombres complexes, cette idée n'est pas vérifiée : les nombres complexes ont été forgés dans la sphère des mathématiques, en réponse à un problème purement mathématique.

La seconde explication : Elle a été avancée par Galilée : « La philosophie² est écrite dans ce grand livre – je veux dire l'Univers – continuellement ouvert sous nos yeux. Mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre sa langue et à lire les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot » (*Il saggiatore*, 1623). En substance, Galilée affirme que les mathématiques s'appliquent au monde physique parce que ce dernier possède une structure mathématique. Or, dans le cas des nombres complexes, la relation entre ces objets mathématiques et le monde physique est très indirecte. Autrement dit, il n'y a pas de correspondance terme à terme entre les éléments mathématiques et des éléments physiques. Dans l'exemple de la modélisation de la réflexion totale frustrée, seule la partie dite « réelle » de la fonction d'onde complexe est mise en relation avec les phénomènes. Rien ne permet de conclure qu'il existe un isomorphisme entre les nombres complexes (côté théorie physique) et le monde physique.

Prolongement possible :

L'examen critique de ces deux tentatives de réponse met en évidence le point suivant : le fait que les mathématiques puissent s'appliquer au monde physique ne s'explique pas aisément. Afin de ne pas clore la discussion sur la remise en cause de ces deux réponses et d'inviter les

² À l'époque de Galilée, ce terme englobe les sciences de la nature (ou « philosophie naturelle »).

élèves à poursuivre leur réflexion sur cette question, d'autres pistes de réponse peuvent être présentées. Nous en évoquons ici quatre :

- Les théories physiques mathématisées peuvent modéliser et prédire des phénomènes parce que ces derniers sont eux-mêmes déjà exprimés au moyen des mathématiques. Cette réponse a par exemple été suggérée par Duhem (2007 [1906]).

- Nous pouvons appliquer les mathématiques pour décrire les phénomènes notamment parce qu'ils sont caractérisés par une certaine *régularité*. Il s'agit là d'une transposition de l'idée de Hume pour justifier l'applicabilité du principe de causalité (voir 2008 [1748, 1751]).

- Certains outils mathématiques ont été développés pour *s'adapter* à la modélisation des phénomènes. Cette idée a été développée plus récemment par Lambert (1999).

- Enfin, nous pourrions retourner la question. Après tout, les mathématiques constituent un langage parmi d'autres. Pourquoi les mathématiques *ne* pourraient-elles *pas* être utilisées pour modéliser et prédire les phénomènes ? D'ailleurs, ce langage ne présente-t-il pas des avantages sur les autres, en particulier pour formuler des liens précis entre les grandeurs et pour mener des raisonnements déductifs ?



Suite à une expérimentation de l'activité dans une classe de Première S, un questionnaire a été rempli par les élèves. Voici la synthèse de leurs réponses :

Quel apport de la séance pour l'étude des nombres complexes ?

Une forte majorité d'élèves estime que la séance apporte un exemple concret d'application des nombres complexes : « quel usage peut-on faire des nombres complexes ? », « apporte un aspect concret aux nombres complexes », « m'a permis de mieux comprendre l'utilité des nombres complexes », « cela leur donne du sens ».

Ce qui est compris sur les liens entre maths et physique

- Les mathématiques comme fondements ou base de la physique
« La physique se base sur les mathématiques »
- Les mathématiques comme outils pour la physique
« les maths aident à comprendre et prévoir » ou « anticiper », « met à disposition des outils de calcul », « on passe par un monde d'idées (les maths) pour mieux arriver à comprendre ou expliquer les faits réels »
- Les mathématiques comme créations de l'esprit
« création de notre esprit applicable à la réalité », « imaginées par l'homme et applicables »
- Le caractère « étonnant » de l'application possible des maths aux phénomènes physiques
- Les mathématiques comme langage
« un langage que l'on utilise pour "retranscrire" la réalité, l'étude des faits "réels" (la physique)

Avis sur le dispositif (vidéo, co-animation, prisme)

- La vidéo et le fait qu'elle soit commentée par les intervenants (professeurs de philosophie et de physique) avec des arrêts sur image ont été bien appréciés par une grande majorité des élèves (« dispositif intéressant »)
- Une minorité a trouvé la phase « vidéo+commentaires » trop longue
- L'expérience avec le prisme, réalisée par tous, a facilité la compréhension et a été jugée intéressante

Compréhension des aspects respectivement mathématiques, physiques et philosophiques

- Une majorité d'élèves a eu du mal à comprendre le détail des formulations et développements mathématiques de la vidéo
- Le concept d'onde évanescente est difficile à comprendre par certains
- Les explications sont jugées utiles pour surmonter ces difficultés
- Les phénomènes de réflexion et réfraction ont été vus précédemment en cours de physique
- Aucun élève n'a relevé de difficultés relativement aux aspects philosophiques



- Duhem, P. (2007 [1906]). *La théorie physique : son objet, sa structure*. Paris : Vrin.
- Galilée (1623), *Il saggiaiore*.
- Kant, E. (1787). *Critique de la raison pure* (tr. fr.). Paris : Vrin.
- Lambert, D. (1999). L'incroyable efficacité des mathématiques. *La Recherche*, 316, 48.
- Hume, D. (2008 [1748, 1751]). *Enquête sur l'entendement humain* (tr. fr.). Paris : Vrin.
- Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1-14.

IREM
6. Evolution de la ressource



| Etape | Date | Réalisations | Contributeurs |
|--------------|---------------------------|--|---|
| 1 | | Demande d'une ressource sur l'utilisation des nombres complexes en physique, recherche d'une telle utilisation | Véronique Pinet Henri Reboul |
| 2 | Mars 2011 | Exposé d'Henri Reboul sur la réflexion totale frustrée | Henri Reboul |
| 3 | Novembre 2011 | Reprise et clarification de l'exposé sur la réflexion totale frustrée | Henri Reboul |
| 4 | Décembre 2011 | Idée d'un questionnaire pour exploiter l'exposé sur la réflexion totale frustrée dans le cadre d'un cours de philosophie sur la connaissance, première ébauche | Thomas François Christophe Pointier |
| 5 | Mai 2012 | Correction et finalisation du questionnaire centré sur « l'incroyable efficacité des mathématiques », proposition d'une étude de texte complémentaire. | Thomas François Thomas Hausberger Groupe Irem |
| 6 | Septembre à Décembre 2012 | Mise au point de scénarii d'usage | Thomas François |
| 7 | | Structuration finale de la ressource | Thomas François Groupe Irem |
| 8 | Janvier à Mars 2014 | Elaboration d'un scénario alternatif | Thomas François Groupe Irem |
| 9 | Mars 2014 | Expérimentation de l'activité en classe Questionnaire élèves sur l'activité | Thomas François Manuel Bächtold |
| 10 | Mai-Juin 2014 | Analyse du retour des élèves Travail de finalisation de la ressource dans sa nouvelle version | Thomas François Manuel Bächtold Henri Reboul |
| 11 | Juin 2014 | Mise en forme finale et relecture | Manuel Bächtold Henri Reboul |