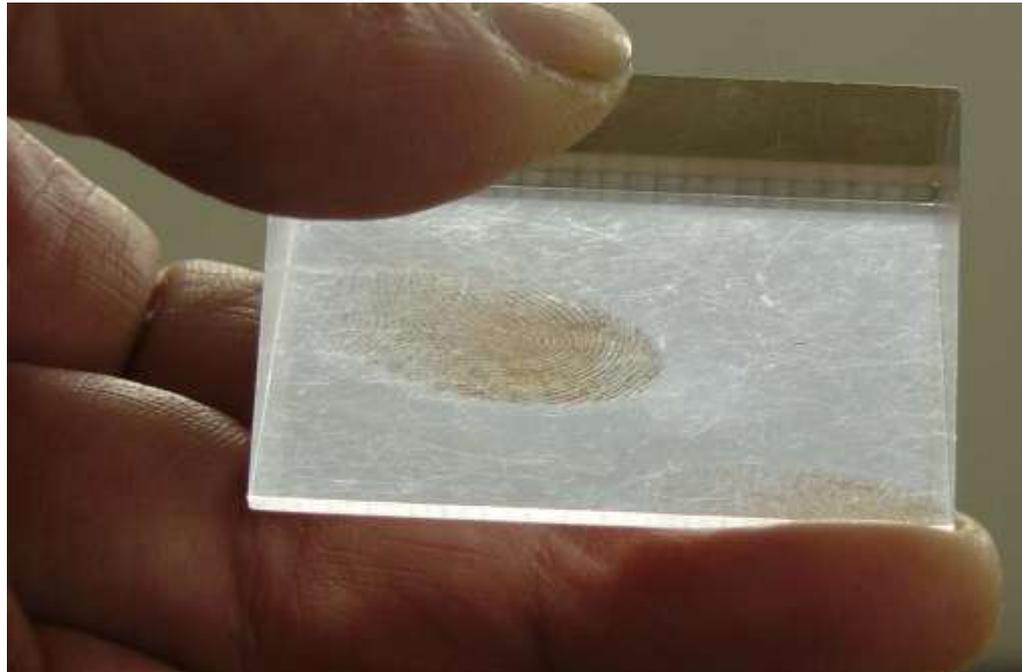


Un exemple de l'apport des nombres complexes en  
Physique :  
La réflexion totale « frustrée » et ses applications



H. Reboul



IREM HR Complexes et réflexion totale  
frustrée

# PLAN

- Lois de Snell-Descartes et réflexion totale
- Observation et mise en défaut : la **réflexion totale frustrée**
- Modèle ondulatoire de la lumière avec les nombres réels
- Modèle ondulatoire de la lumière avec les nombres complexes
- Solutions imaginaires de l'équation de Snell-Descartes et solution de l'**onde évanescente**
- Interprétation de l'observation avec l'onde évanescente
- Applications de la réflexion totale frustrée
- Annexes : formalisme plus détaillé  
correction des exercices

# Notions mobilisées

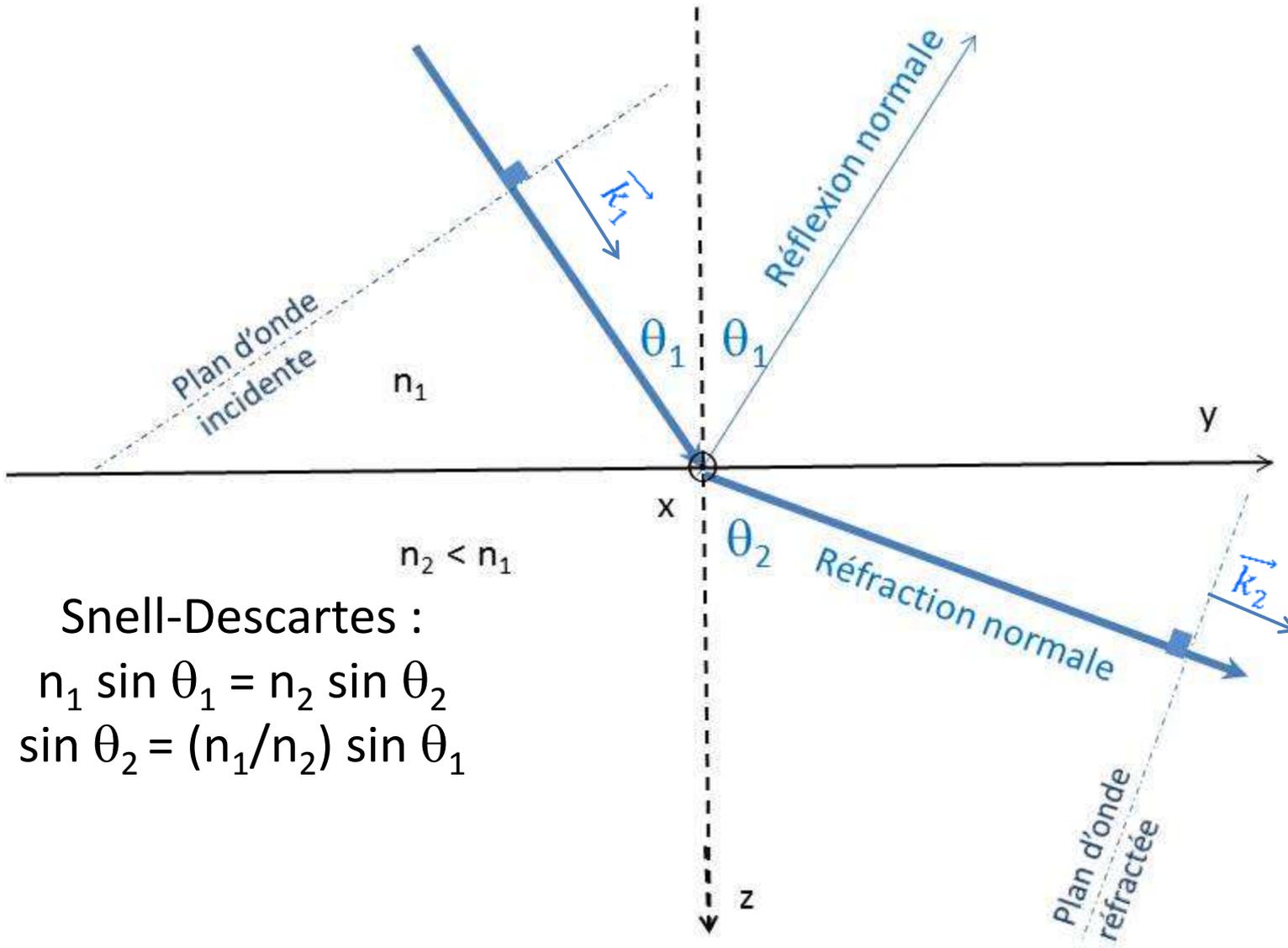
## Prérequis mathématiques :

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

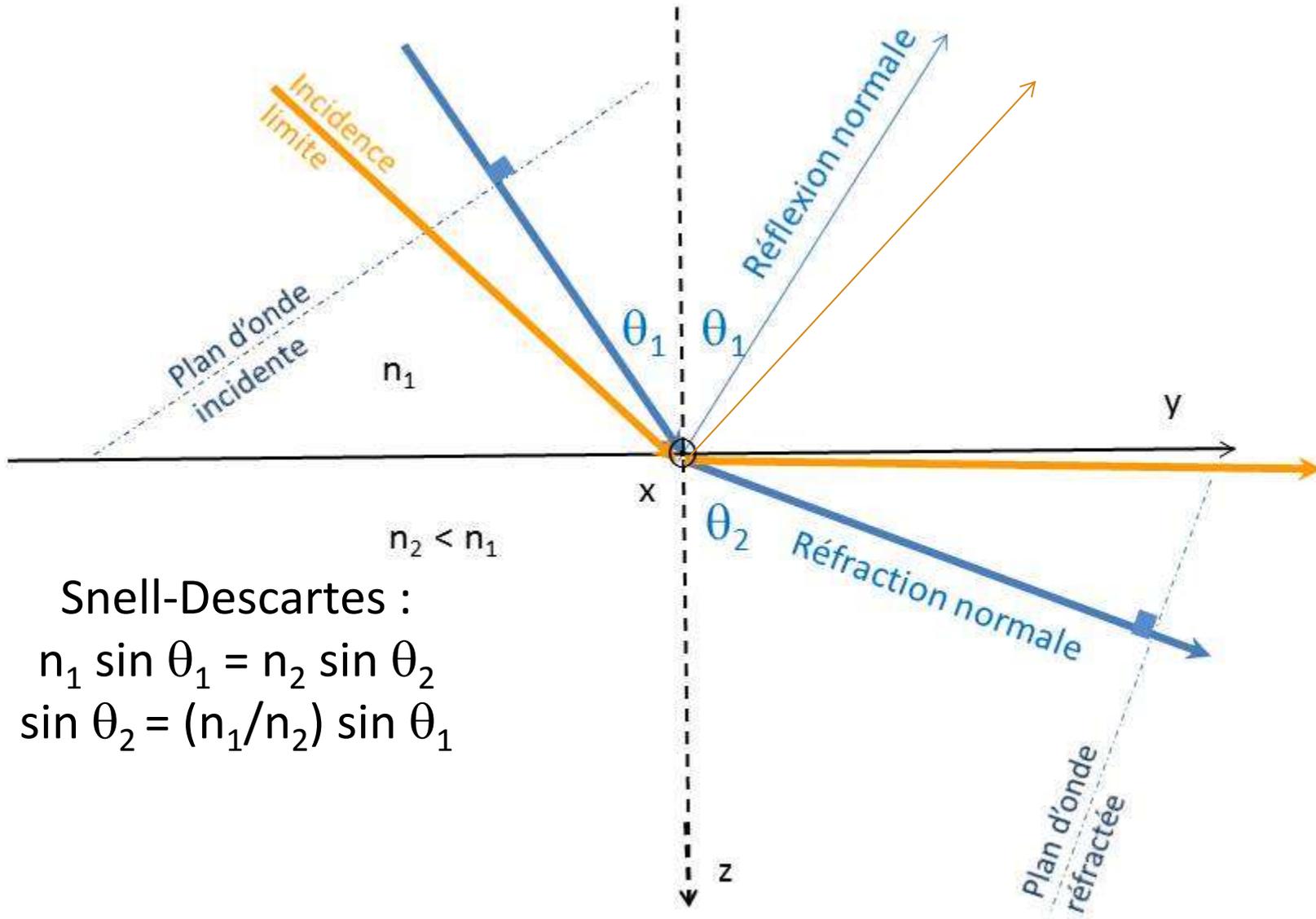
## Physique (rappels et compléments dans ce diaporama) :

- Lois de la réflexion-réfraction de Snell-Descartes
- Représentation d'une onde plane progressive de pulsation  $\omega$  par  $a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

Matériel : Prismes rectangle Plexiglas (~7€ pièce en 2013)



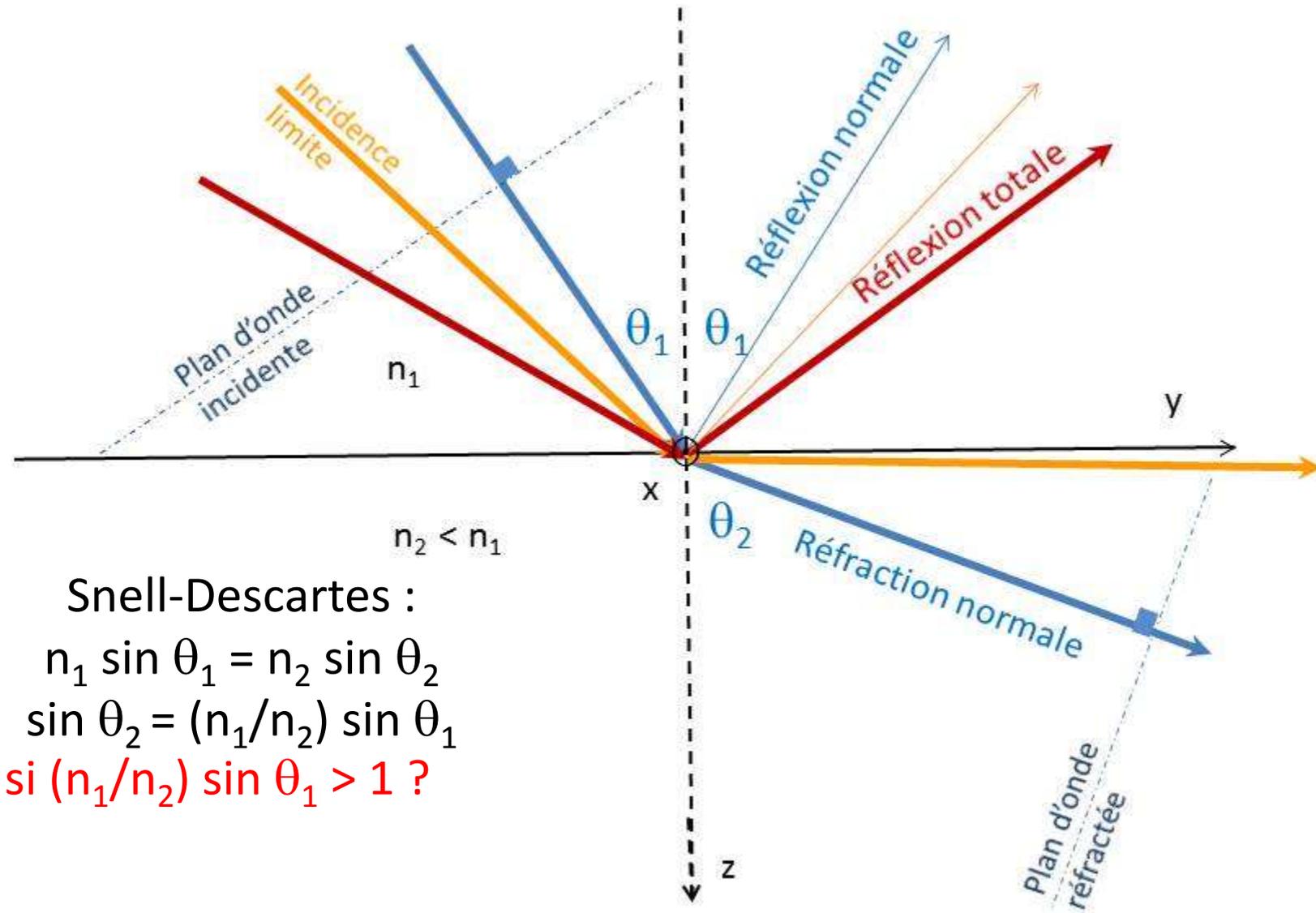
Snell-Descartes :  
 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$   
 $\sin \theta_2 = (n_1/n_2) \sin \theta_1$



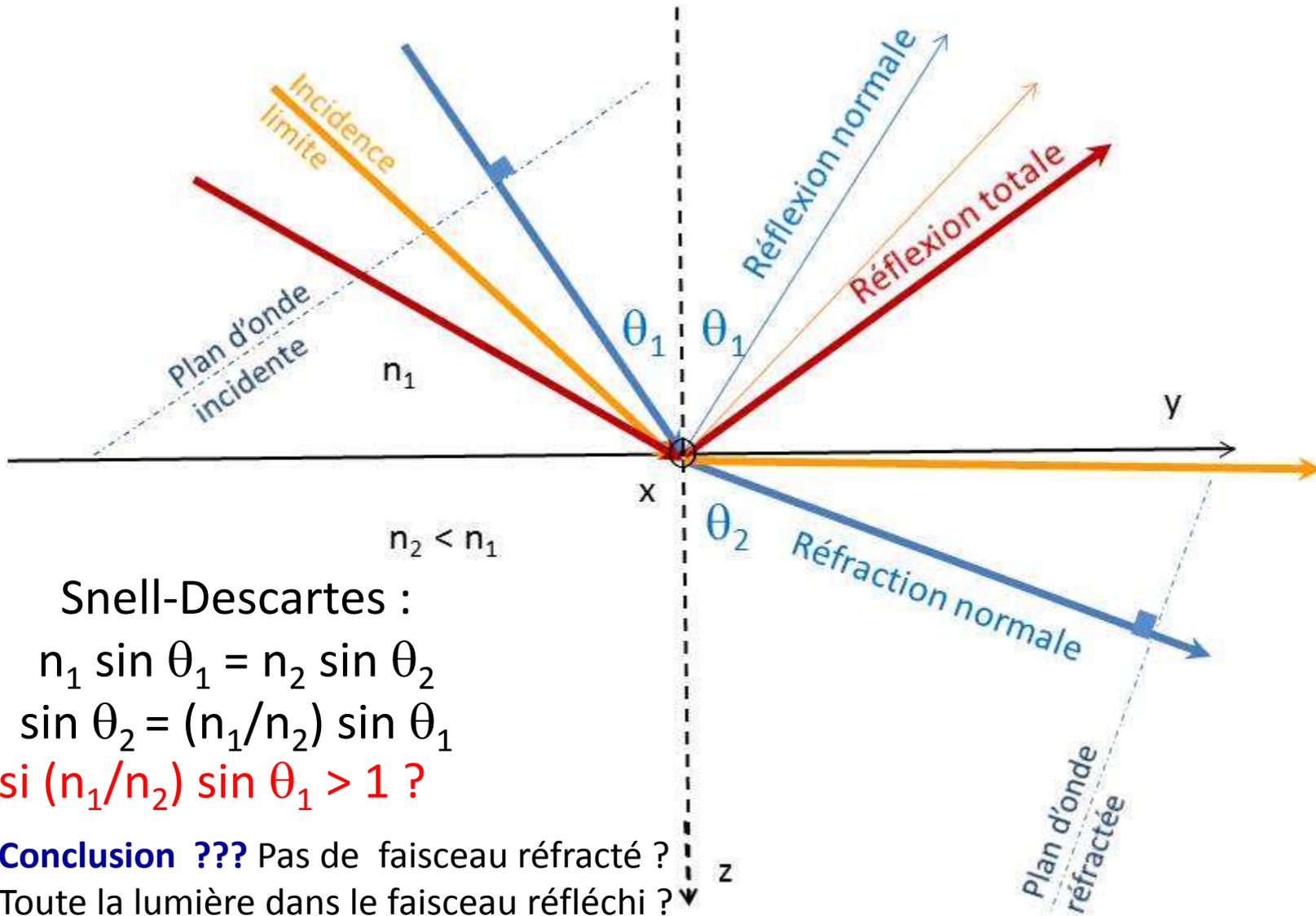
Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_2 = (n_1/n_2) \sin \theta_1$$



Snell-Descartes :  
 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$   
 $\sin \theta_2 = (n_1/n_2) \sin \theta_1$   
 si  $(n_1/n_2) \sin \theta_1 > 1$  ?



Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_2 = (n_1/n_2) \sin \theta_1$$

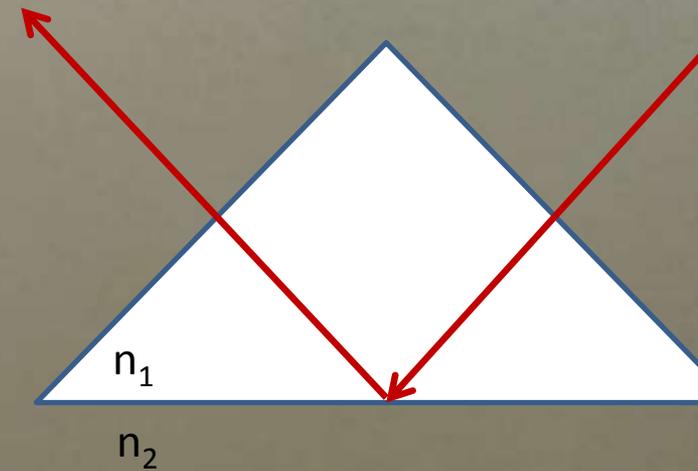
si  $(n_1/n_2) \sin \theta_1 > 1$  ?

**Conclusion ???** Pas de faisceau réfracté ?

Toute la lumière dans le faisceau réfléchi ?

La « *réflexion totale* » est effectivement observée et a plein d'applications. Mais n'y-a-t-il vraiment aucune lumière dans le milieu 2 ? Et si on regardait de plus « près » ?

Expérience : Réflexion totale sur une face d'un prisme en plexiglas. En-dessous (milieu 2) c'est de l'air : On ne voit pas la partie de la main en-dessous de la face qui fait miroir



Ci-dessus prisme vu de coté

Note : l'indice de réfraction du verre et du plexiglas (ce prisme) sont voisins de 1,5

## Réflexion totale frustrée



On voit l'empreinte des doigts (et avec la bonne couleur) là où ils sont appuyés fortement de l'autre côté du dioptré. À ces endroits on peut semble-t-il en déduire :

- que la face qui faisait miroir ne réfléchit plus la lumière incidente
- qu'il y a transmission puisque la surface du doigt ne peut être éclairée que par –dessus
- que cela semble confirmé par la disparition de l'empreinte dès que l'on cesse d'appuyer .



Agrandissement de l'image précédente. On observe :

- que la réflexion reste quasi totale dans les sillons des empreintes où l'épaisseur de milieu 2 (l'air) est a priori plus conséquente
- que le contraste des empreintes est bien plus élevé que sur une photographie directe.

Oui, d'accord, ce prisme en plexi a beaucoup servi et ... et il est un peu rayé

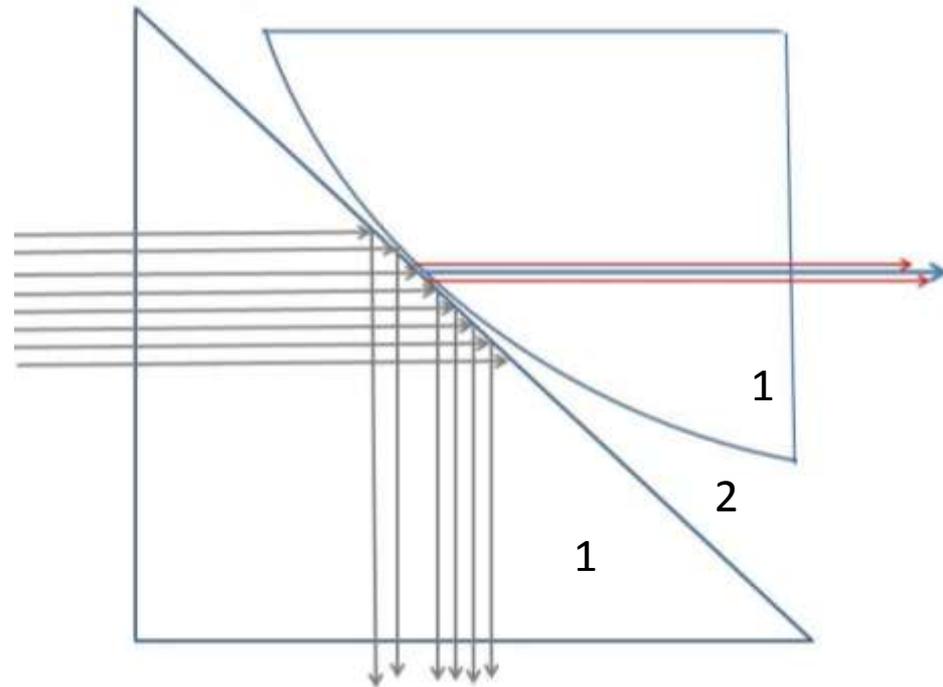
# Historique

**Newton** avait mis en évidence cette *frustration* de la réflexion totale (la réflexion n'est plus que partielle) en mettant une lentille convexe au contact du dioptre réfléchissant. Il constatait que :

- la lumière était transmise non seulement au « point » de contact mais un peu autour
- le faisceau transmis était irisé de rouge à l'extérieur

Il interprétait en considérant que les particules de lumière (pour Newton la lumière était faite de particules) **pénétraient** un peu dans le milieu 2 avant de rebondir dans le milieu 1.

Le **modèle ondulatoire de la lumière** que nous allons utiliser permet de représenter quantitativement et beaucoup plus précisément cet effet. Rappelons toutefois que l'on considère aujourd'hui que la lumière est constituée de « photons » dont le modèle ondulatoire permet de calculer la probabilité de présence.



# Modèle ondulatoire de la lumière avec les nombres réels

(complément en Annexe 2)

**Proposition:**  $y = a \cos (\omega t - k x) = a \cos (2\pi\nu t - k x)$  représente une onde de fréquence  $\nu$  qui se propage selon la direction  $x$  à la vitesse  $v = \omega / k = 2\pi\nu / k$ .

## Démonstration:

- $[\omega (t+dt) - k (x+dx)] = \omega t - kx$  si  $dx/dt = \omega / k$
- La valeur de  $y$  en  $x$  à l'instant  $t$  se retrouve donc en  $x+dx$  à l'instant  $t+dt$
- $v = dx/dt = \omega/k$  est la vitesse de propagation de cet état (comme la vitesse du sommet d'une vague, si  $y$  représente la variation de la hauteur de l'eau)

De même  $\mathbf{y} = a \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = a \cos (2\pi\nu t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  représente une onde plane de « pulsation »  $\omega$  se propageant selon la direction du vecteur  $\vec{k}$ . C'est une « onde plane progressive monochromatique » ou OPPM. Pour la lumière (onde électromagnétique) l'une des grandeurs vibrantes est le vecteur « champ électrique »  $\vec{E}$ . On pourra donc le représenter par  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ .

**Notes :**  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$  et  $k = \|\vec{k}\| = 2\pi/\lambda$ .  $T$  est la « période » et  $\nu$  la fréquence. Si  $t$  augmente de  $T$ ,  $\omega \cdot t$  augmente de  $2\pi$  et l'état vibratoire  $y$  est inchangé.

De même,  $\lambda = \nu T$  est la « longueur d'onde ». Si  $x$  augmente de  $\lambda$ ,  $-kx$  (ou  $-\vec{k} \cdot \vec{r}$ ) diminue de  $2\pi$  et  $y$  est pareillement inchangé.

# Modèle ondulatoire de la lumière avec les nombres complexes

$\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  est la partie réelle de  $\exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$

Le champ électrique d'une onde lumineuse pourra ainsi se représenter :

- en réel par  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$
- en complexe par  $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  avec  $\vec{E} = \Re\{\underline{\vec{E}}\}$
- La représentation complexe a l'avantage de faciliter les calculs en électromagnétisme

Dans le cas de la réfraction par un dioptre, on pourra donc représenter par :

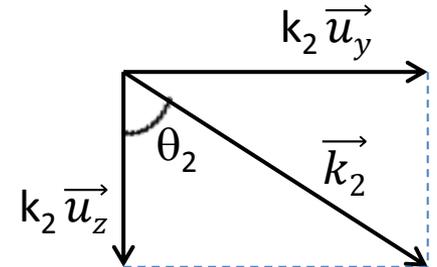
- $\underline{\vec{E}}_1 = \vec{E}_{01} \exp[i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})]$  le champ électrique dans le milieu 1 d'indice  $n_1$
- $\underline{\vec{E}}_2 = \vec{E}_{02} \exp[i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})]$  le champ électrique dans le milieu 2 d'indice  $n_2$

Si le plan d'incidence est  $yOz$ , le vecteur d'onde  $\vec{k}_2$  s'exprime :

$$\vec{k}_2 = k_2 (\cos \Theta_2 \vec{u}_z + \sin \Theta_2 \vec{u}_y)$$

Ce vecteur d'onde de l'onde transmise s'exprimera donc (par définition,  $n_2 = c/v_2 = \lambda_0 / \lambda_2$ ) :

$$\vec{k}_2 = 2 \frac{\pi}{\lambda_2} (\cos \Theta_2 \vec{u}_z + \sin \Theta_2 \vec{u}_y) = 2 \frac{\pi n_2}{\lambda_0} (\cos \Theta_2 \vec{u}_z + \sin \Theta_2 \vec{u}_y)$$



Pour  $\theta_1 > \theta_{1 \text{ lim}}$  on obtiendrait  $\sin \theta_2 > 1$  et l'équation  $\cos \theta_2 = \sqrt{(1 - \sin^2 \theta_2)}$  n'a pas de solution avec les réels, mais elle en a avec les complexes :  $\cos \theta_2 = \sqrt{i^2 (\sin^2 \theta_2 - 1)}$

$$\cos \theta_2 = \pm i (\sin^2 \theta_2 - 1)^{1/2} = \pm i m \text{ avec } m = \sqrt{(\sin^2 \theta_2 - 1)} \text{ réel}$$

On montre alors ([exercice 1](#)) que le champ électrique transmis s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) = \underline{\vec{E}}_{02} \exp \left[ \pm 2 \frac{\pi n_2}{\lambda_0} mz \right] \exp \left[ i (\omega t - 2 \frac{\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_1 \cdot y) \right]$$

La première exponentielle est réelle. L'indétermination mathématique  $\pm$  est levée si l'on exclut la possibilité physique d'un champ électrique qui divergerait pour  $y \rightarrow \infty$ .

Le champ transmis s'écrit alors :

$$\underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) = \underline{\vec{E}}_{02} \exp \left[ - 2 \frac{\pi n_2}{\lambda_0} mz \right] \exp \left[ i (\omega t - 2 \frac{\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_1 \cdot y) \right]$$

Et, en définissant ([exercice 2](#))  $\delta$  et  $k_2$  la partie réelle du champ peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) = \Re \{ \underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) \} = \underline{\vec{E}}_{02} \exp \left[ - \frac{z}{\delta} \right] \cos (\omega t - k_2 \cdot y)$$

Cette onde plane est :

- stationnaire et « *évanescence* » (décroit très vite) **en z**
- **progressive en y** (le long du dioptre mais dans le milieu 2)

## Profondeur de l'onde évanescente

L'amplitude de l'onde varie comme  $\exp\left[-\frac{z}{\delta}\right]$  : si elle est 1 sur le dioptre ( $z = 0$ ), elle n'est plus que  $1/e$  pour  $z = \delta$  et elle devient rapidement négligeable ( $<10^{-4}$  pour  $z = 10\delta$ ).

## Étude de $\delta$

On peut étudier ([exercice 3](#)) la fonction  $\theta_1 \rightarrow \delta(\theta_1)$  et tracer son graphe.

Sur l'exemple verre/air (ou plexiglas/air) on montre ainsi que :

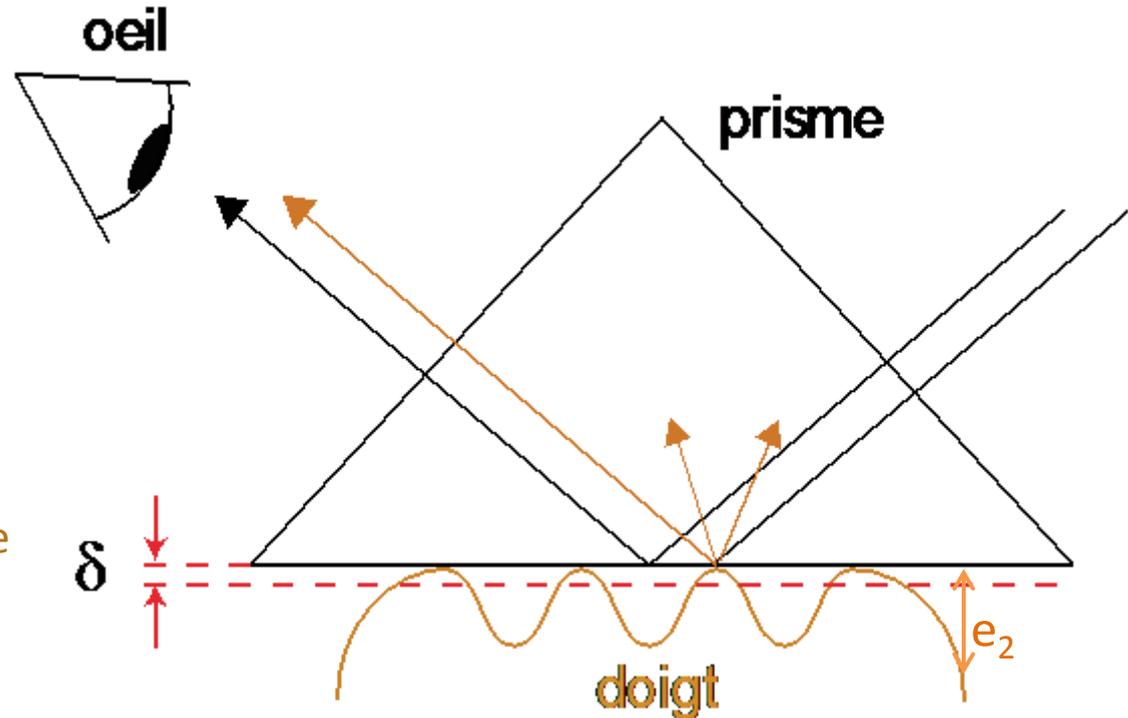
- $\delta$  est inférieur à la longueur d'onde tant que  $\theta_1$  est nettement supérieur à  $\theta_{1 \text{ lim}}$
- $\delta \rightarrow \infty$  lorsque  $\theta_1 \rightarrow \theta_{1 \text{ lim}}$  ( $\theta_1 > \theta_{1 \text{ lim}}$ ).

Lorsque  $\theta_1$  se rapproche de  $\theta_{1 \text{ lim}}$ , l'onde plane transmise est donc de moins en moins « évanescente » : à la limite ( $\theta_1 = \theta_{1 \text{ lim}}$ ), son amplitude reste constante en  $z$  (elle devient homogène) et l'on retrouve donc, **en continuité**, la réfraction « normale » dans le milieu 2 avec une OPPM se propageant le long de l'interface ( $\theta_2 = 90^\circ$ ). Le modèle complexe utilisé reste donc parfaitement cohérent avec le phénomène.

# Interprétation de l'expérience avec le prisme

La réflexion totale sur une face interne du prisme renvoie vers l'œil (ou l'objectif de l'appareil photo) la lumière (celle d'une partie de mur éclairée par le soleil pour la photo présentée).

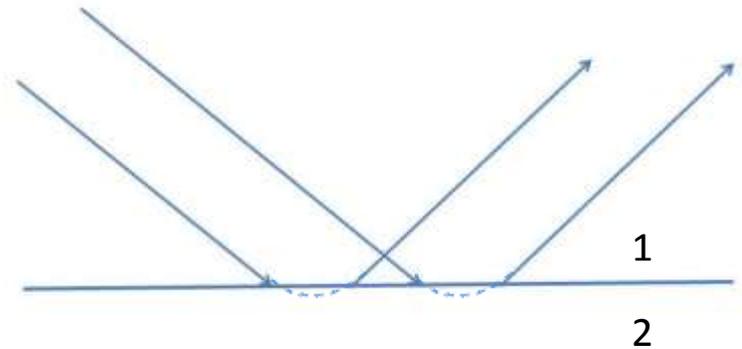
L'application du doigt (indice de réfraction voisin de celui de l'eau) sur la face externe du prisme empêche la constitution de l'onde évanescente là où il n'y a pas assez (environ  $\delta$ ) d'épaisseur d'air. À ces endroits la réflexion totale est frustrée. De la lumière traverse le dioptre et éclaire les parties saillantes de la peau qui la rediffuse (avec sa couleur) dans toutes les directions, y compris vers l'œil.



Une partie de cette lumière retransverse ainsi le dioptre vers le haut et les empreintes sont donc « vues », alors que dans les creux de la peau la couche d'air a une épaisseur  $e_2$  suffisante pour que se constitue (plus ou moins) une onde évanescente et que la réflexion reste quasi-totale (très peu « frustrée »).

## Réalité physique de l'onde « évanescente »

- Le formalisme mathématique (en particulier l'extension aux nombres complexes) a permis de concevoir l'existence de l'onde évanescente et ainsi **d'interpréter le phénomène de la réflexion totale frustrée**. Un exemple de la « *déraisonnable efficacité des mathématiques* » (Wigner).
- **L'expérimentation** montre que lorsqu'on empêche la formation de l'onde évanescente en introduisant un autre matériau dans la région où son amplitude est importante, la réflexion totale est frustrée : s'il n'existe pas une épaisseur  $e_2$  suffisante ( $e_2 \approx$  quelques  $\delta$ ) de milieu d'indice  $n_2$ , l'onde incidente n'est plus totalement réfléchie et une partie notable est transmise. La formation de l'onde évanescente semble donc nécessaire à la réflexion totale.
- Cette onde évanescente peut être directement **mise en évidence** (mesurée) dans le domaine des longueurs d'onde de la lumière visible et encore plus aisément dans celui des ondes centimétriques.
- La « frustration » de la réflexion totale (i.e. la transmission) décroît très vite avec l'augmentation du rapport  $e_2/\delta$  et cela a des **applications** (diapo suivante).
- On explique également ainsi **l'irisation** rouge qu'avait observée **Newton** : pour une épaisseur  $e_2$  donnée, le rapport  $e_2/\delta$  varie comme  $1/\lambda$  puisque  $\delta$  est proportionnel à la longueur d'onde et la frustration est donc plus forte pour le rouge que pour le bleu. Comme en s'éloignant du contact entre plan et sphère l'épaisseur  $e_2$  du milieu 2 devient de plus en plus grande, c'est le rouge qui domine sur les bords du faisceau transmis.
- **L'effet « Goos-Hänchen »** (petit décalage latéral entre un pinceau lumineux incident et le pinceau lumineux totalement réfléchi) étaye la thèse de la légère **intrusion** de la lumière incidente dans le milieu 2 avant sa résurgence dans le milieu 1 qu'avait (qualitativement et avec un autre modèle) envisagée Newton.



# APPLICATIONS

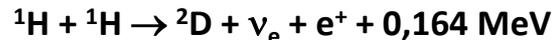
- Certains **capteurs d'empreintes digitales** utilisent ce phénomène
- La « **Microscopie optique en champ proche** » permet en utilisant l'onde transmise par frustration de la réflexion totale (au lieu de l'onde diffusée en microscopie classique) permet de percevoir des détails de l'objet 10 à 100 fois plus petits que la longueur d'onde de la lumière qui l'éclaire.
- **Physique quantique** : formellement (et plus) cet effet de réflexion totale frustrée rejoint l' « **effet tunnel** » de la physique quantique dont les applications sont multiples : microscopie électronique à effet tunnel et même le fonctionnement du Soleil (et des autres étoiles) :

- **FONCTIONNEMENT DU SOLEIL ET EFFET TUNNEL QUANTIQUE**

- C'est un « effet tunnel » qui rend (à peine) possible la fusion thermonucléaire du soleil selon la réaction



- Par exemple, la première étape de cette réaction (et celle qui régule l'ensemble) est:



- Mais lorsque deux protons  ${}^1\text{H} + {}^1\text{H}$  se rapprochent au cœur du soleil ( $T \approx 10 \text{ MK}$ ), leur énergie cinétique ( $\approx 1 \text{ keV}$ ), en se transformant en énergie potentielle de répulsion électrostatique, les ferait rebondir (se « **réfléchir totalement** ») l'un sur l'autre, en les empêchant de s'approcher à moins de mille fois la distance minimale ( $\sim 10^{-15} \text{ m}$ ) où la fusion nucléaire peut se réaliser. En mécanique quantique, la probabilité de franchir une « *barrière de potentiel* » plus haute que l'énergie des particules n'est plus nulle (**la réflexion n'est plus totale**) comme en mécanique classique. Dans le cas du soleil, la probabilité de traversée est  $\approx 10^{-14}$  et il peut ainsi « fonctionner » ou plutôt ne presque pas fonctionner, puisque son rapport masse-puissance est de 5 tonnes pour 1 W mais, grâce à cet infime fonctionnement, il peut briller durant  $\approx 10$  milliards d'années (avant d'épuiser la réserve d'hydrogène de son cœur).

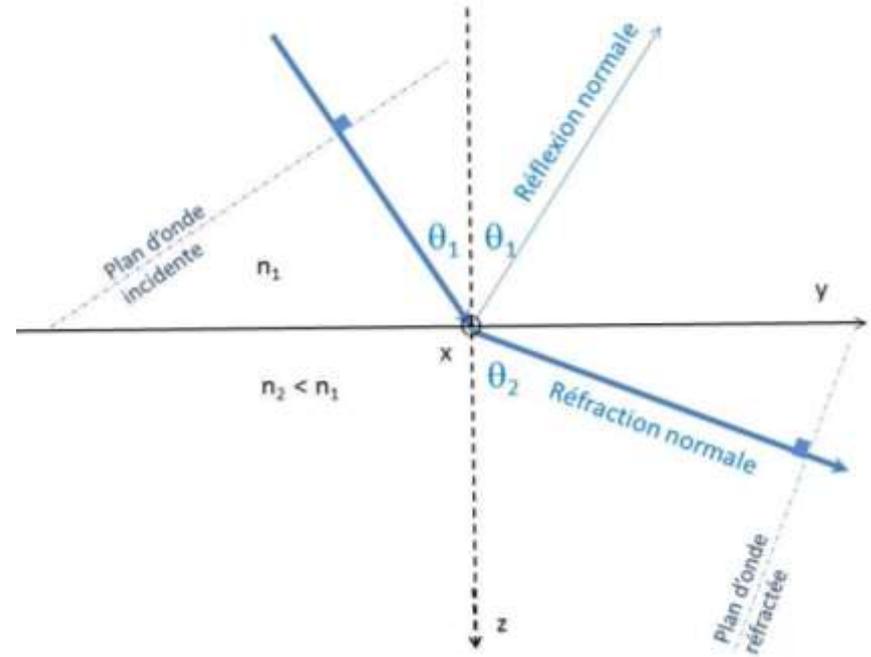
# Annexe 1

## Snell-Descartes : Réfraction

Réfraction de la lumière sur un dioptre,  
la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$n$  est l'indice du milieu ( $n = c/v$  avec  $v$  vitesse de la lumière dans le milieu.  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 299\,792\,458$  m/s).



## Réflexion totale

Si  $n_1 > n_2$ ,  $\sin \theta_2 > \sin \theta_1$  et  $\theta_2 > \theta_1$  (puisque sinus est une fonction croissante sur  $[0, \pi/2]$ ) et il existe donc un angle d'incidence limite  $\theta_{1\text{lim}}$  pour lequel  $\theta_2 = \pi/2$  et au-delà duquel la loi de SD donnerait pour solution  $\sin \theta_2 > 1$ . Or un sinus est compris entre -1 et +1.

Cet angle limite a pour valeur  $\theta_{1\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$

La lumière incidente se réfléchit et, contrairement à la réflexion habituelle qui n'est jamais parfaite, même sur un miroir, le « coefficient de réflexion » est alors égal à 1. C'est la réflexion **totale**.

Mais n'y-a-t-il vraiment aucune lumière transmise dans le milieu 2 ?

## Annexe 2 Modèle ondulatoire de la lumière avec les nombres réels et notion d'onde plane progressive monochromatique

$y(t,x) = a \cos(\omega t - kx)$  représente une onde plane de pulsation  $\omega$  de longueur d'onde  $\lambda$ , d'amplitude  $a$  et de période  $T$  qui se propage selon la direction  $x$  à la vitesse  $v = \omega / k$ . Comme  $\lambda = v T$  et  $\omega = 2\pi / T$ ,  $k = 2\pi / \lambda$ ,  $k$  est la norme du « vecteur d'onde »  $\mathbf{k}$

En effet si  $y(t,x)$  mesure l'état vibratoire (la hauteur de la surface de l'eau dans le cas d'une vague) à l'instant  $t$  et à la coordonnée  $x$ , on retrouve ce même état pour tout couple  $(t,x)$  tel que  $\omega t - kx = \text{cte}$ .

$[\omega(t+dt) - k(x+dx)] = \omega t - kx$  si  $dx/dt = \omega / k$ , c-à-d si  $d(\omega t - kx) = 0$ .

En développant :  $d(\omega t - kx) = 0 = \omega dt - k dx$ , on obtient  $dx/dt = \omega / k$  qui est la vitesse de propagation de cet état vibratoire (par exemple la vitesse du sommet de la vague).

Tous les points à la même coordonnée  $x$  sont dans le même état vibratoire à un instant donné. Les lieux des points dans le même état vibratoire sont appelés « surfaces d'onde ». Pour  $y(t,x) = a \cos(\omega t - kx)$ , ces surfaces sont des plans orthogonaux à l'axe  $Ox$ .

$y(t,\vec{r}) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  représente de même une onde plane de pulsation  $\omega$  se propageant selon la direction du vecteur  $\vec{k}$ . En effet  $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cte}$  est l'équation d'un plan orthogonal à  $\vec{k}$ . Le produit scalaire  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  s'exprime  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$  et si  $\vec{k}$  n'a de composantes qu'en  $x$ , on retrouve :  $y = a \cos(\omega t - kx)$ .

### Exercice 1 (corrigé) :

$$\underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) = \underline{\vec{E}}_{02} \exp [ i (\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) ] \text{ et } \vec{k}_2 = 2 \frac{\pi n_2}{\lambda_0} (\cos \theta_2 \cdot \vec{u}_z + \sin \theta_2 \cdot \vec{u}_y) = k_{2z} \vec{u}_z + k_{2y} \vec{u}_y$$

Comme  $\vec{r} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$ ,

en effectuant le produit scalaire  $\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = 0 \cdot x + k_{2y} \cdot y + k_{2z} \cdot z$

une mise en facteur conduit (avec  $\cos \theta_2 = \pm i m$ ) à l'expression donnée :

$$\underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) = \underline{\vec{E}}_{02} \exp [ \pm 2 \frac{\pi n_2}{\lambda_0} m z ] \exp [ i (\omega t - 2 \frac{\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_1 \cdot y ) ]$$

### Exercice 2 (corrigé) :

L'identification avec l'expression ci-dessus conduit à :

$$\underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) = \Re_e \{ \underline{\vec{E}}_2(t, \vec{r}) \} = \underline{\vec{E}}_{02} \exp [ -\frac{z}{\delta} ] \cos [ (\omega t - k_{2z} \cdot y) ]$$

$$\text{en posant } \delta = \lambda_0 / (2\pi n_2 m) \quad \text{et } k_{2y} = 2 \frac{\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_1$$

### Exercice 3 (corrigé) :

$$\delta = \lambda_0 / (2\pi n_2 m)$$

$\delta$  est donc inférieur à  $\lambda_0$  tant que  $m$  est supérieur à  $1/2\pi n_2$

et, comme  $m = (\sin^2 \theta_2 - 1)^{1/2}$ ,

$\delta \rightarrow \infty$  lorsque  $m \rightarrow 0$ , c-à-d lorsque  $\sin \theta_2 \rightarrow 1$  et  $\theta_1 \rightarrow \theta_{1\text{lim}}$

L'allure du graphe de  $\delta(\theta_1)$  est dessinée ci-contre :

$$\delta_{\min} = \lambda_0 / 2\pi (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \approx \lambda_0 / 7 \text{ pour un dioptre verre/air.}$$

